DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 1
PISMENI ISPIT
27.06.2012.

Zadatak 1. Odredite, ako postoje, infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \cos(n\pi) \cdot \frac{2n-1}{n+4} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Uočimo da je $\cos(n\pi) = (-1)^n$ i $\dfrac{2n-1}{n+4} = \dfrac{2(n+4)-9}{n+4} = 2 - \dfrac{9}{n+4}$. Niz $\left(2 - \dfrac{9}{n+4}\right)$ je rastući po n. Dakle, za neparne n elementi skupa S su $-\left(2 - \dfrac{9}{n+4}\right)$, a za parne n su elemeti skupa S dani s $2 - \dfrac{9}{n+4}$. Stoga pretpostavljamo da je $\inf S = -2$ i $\sup S = 2$. Jasno je da je $S \subseteq [-2, 2]$.
Dokažimo: $\inf S = -2$. Za sve $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$-2 + \varepsilon > -\left(2 - \frac{9}{n+4}\right) \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{9}{n+4} \Leftrightarrow n > \frac{9}{\varepsilon} - 4.$$

Zbog neomeđenosti skupa $\mathbb{N}$, sigurno postoji neparan n takav da je $n > \frac{9}{\varepsilon} - 4$.
Dokažimo da je $\sup \mathbb{N} = 2$. Za sve $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$2 - \varepsilon < 2 - \frac{9}{n+4} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{9}{n+4} \Leftrightarrow n > \frac{9}{\varepsilon} - 4.$$

Zbog neomeđenosti skupa $\mathbb{N}$, sigurno postoji paran n takav da je $n > \frac{9}{\varepsilon} - 4$.

Zadatak 2. Ispitajte konvergenciju reda $\sum \dfrac{n^n}{5^n n!}$.

Svi članovi reda su pozitivni. Konvergenciju ćemo dokazati D'Alambertovim krtiterijem:

$$\begin{aligned} d &= \lim \left(\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{5^n n!}} \right) = \lim \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{5n^n(n+1)} \right) = \lim \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \lim \left((1 + \frac{1}{n})^n \right) = \frac{e}{5} < 1. \end{aligned}$$

Red konvergira.

Zadatak 3. Razvijte funkciju $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+4}$ u Taylorov red u točki $x_0 = 0$.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+4} = x^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = x^3 \cdot \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{4^{n+1}}$$

Zadatak 4. Zbroj duljina kateta pravokutnog trokuta iznosi 12 cm. Koji od svih takvih trokuta ima najkraću hipotenuzu.

Označimo katete trokuta s a i b. Tada je $a + b = 12$, a hipotenuza c je dana s

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (12-a)^2}.$$

c shvaćamo kao funkciju varijable a i tražimo njen minimum na intervalu $\langle 0, 12\rangle$. Vrijedi

$$c'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a^2+(12-a)^2}}(2a + 2(12-a)\cdot(-1)) = \frac{2(a-6)}{\sqrt{a^2+(12-a)^2}}.$$

Kako je $c'(a) < 0$ za $a \in \langle 0, 6\rangle$, funkcija c pada na intervalu $\langle 0, 6\rangle$. Kako je $c'(a) > 0$ za $a \in \langle 6, 12\rangle$, funkcija c pada na intervalu $\langle 6, 12\rangle$. Dakle, c postiže minimalnu vrijednost za $a = 6$. Tada je i $b = 6$ i riječ je o jednakokračnom pravokutnom trokutu.

Zadatak 5. Odredite sve asimptote funkcije zadane s

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{3}} + x^2 - 5x + 6}{x-2}.$$

Domena funkcije f je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Vrijedi

$$\lim_{2\pm} \frac{e^{-\frac{x}{3}} + x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{e^{-\frac{2}{3}} + 4 - 10 + 6}{0\pm} = \pm\infty.$$

Pravac $x = 2$ je obostrana vertikalna asimptota.
Desna kosa asimptota:

$$k = \lim_{+\infty} \frac{\frac{e^{-\frac{x}{3}} + x^2 - 5x + 6}{x - 2}}{x} = \lim_{+\infty} \left(\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{x^2 - 2x} + \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x} \right) = 0 + 1 = 1$$

$$l = \lim_{+\infty} \left(\frac{e^{-\frac{x}{3}} + x^2 - 5x + 6}{x - 2} - x \right) = \lim_{+\infty} \left(\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{x - 2} + \frac{x^2 - 5x + 6 - x^2 + 2x}{x - 2} \right) = 0 - 3$$

Pravac $y = x - 3$ je desna kosa asimptota.
Lijeva kosa asimptota:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{-\infty} \frac{\frac{e^{-\frac{x}{3}} + x^2 - 5x + 6}{x - 2}}{x} = \lim_{+\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{3}}}{x^2 + 2x} + \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x} \right) = \\ &= \lim_{+\infty} \frac{\frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}}}{2x + 2} + 1 = \lim_{+\infty} \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}}}{2} + 1 = +\infty \end{aligned}$$

Lijeva kosa asimptota ne postoji.