---

ime i prezime

1.	2	3.	4.	5.	$\sum$

1. (a) Pokažite da je funkcije $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ padajuća na intervalu $\langle 0, \cdot \rangle$.

   (b) Odredite, ako postoje, infimum i supremum skupa $S = \left\{ \frac{e^{-n}}{n} | n \in \mathbb{N} \right\}$.

2. (a) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum (-1)^n \frac{\sqrt{3n^2 + n} - \sqrt{n}}{2n^3}.$$

   (b) Odredite područje konvergencije reda potencija

$$\sum \frac{(x-3)^n}{n^3 \cdot 3^n}.$$

3. Izračunajte bez upotrebe L'Hospitalovog pravila

$$\lim_{0} \frac{e^{4x} - e^x}{\sin 2x}.$$

4. Razvijte funkciju $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \cos^2 x$ u Taylorov red u točki $x_0 = \pi$.

5. Odredite sve asimptote funkcije zadane s

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x - 2}}.$$

1. (a)

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(-1)x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{e^{-x}}{x^2}(x+1)$$

Za sve $x \in \langle 0, \cdot \rangle$ je $e^{-x} > 0$, $x^2 > 0$ i $x + 1 > 0 + 1 = 1$ pa za sve $x \in \langle 0, \cdot \rangle$ vrijedi $f'(x) < 0$, tj. f je padajuća na $\langle 0, \cdot \rangle$.

(b) Prema (a) dijelu zadatka je $f(n+1) < f(n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tj.

$$\frac{e^{-n-1}}{n+1} < \frac{e^{-n}}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Stoga je $\sup S = \max S = \frac{e^{-1}}{1} = \frac{1}{e}$. Pokažimo da je $\inf S = 0$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Treba pokazati da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$0 + \varepsilon > \frac{e^{-n}}{n}$$

tj.

$$n > \frac{1}{e^n} \cdot \varepsilon.$$

Kako je $\mathbb{N}$ neomeđen odozgo, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > \varepsilon$. Za takav n vrijedi i $\frac{1}{e^n} < 1$, pa je

$$n > \varepsilon = 1 \cdot \varepsilon > \frac{1}{e^n} \cdot \varepsilon.$$

Dakle, $\inf S = 0$.

Napomena: Može se koristiti i činjenica da je $\inf S = \lim \left(\frac{e^{-n}}{n}\right)$. Općenita tvrdnja je dokazana na predavanjima. Dakle

$$\inf S = \lim \left(\frac{e^{-n}}{n}\right) = \lim \left(\frac{1}{ne^n}\right) = 0.$$

2. (a) Označimo $a_n = \frac{\sqrt{3n^2+n} - \sqrt{n}}{2n^3}$. Uočimo da je u brojniku vodeća potencija n, a u nazivniku n^3. Stogao očekujemo da bi se zadani red mogao usporediti s redom $\sum \frac{1}{n^2}$ koji je konvergentan. Vrijedi

$$0 < a_n < \frac{\sqrt{3n^2+n}}{2n^3} \leq \frac{\sqrt{3n^2+n^2}}{2n^3} = \frac{2n}{2n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Prema poredbenom kriteriju red $\sum a_n$ je konvergentan. Zaključujemo da je zadani red $\sum (-1)^n a_n$ apsolutno konvergentan (pa je i konvergentan).

(b)

$$\lim \left(\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \right) = \lim \left(\frac{\frac{1}{n^3 3^n}}{\frac{1}{(n+1)^3 3^{n+1}}} \right) = \lim \left(\frac{3(n+1)^3}{n^3} \right) = 3$$

Radijus konvergencije je $\rho = 3$ pa red konvergira za $-3 < x - 3 < 3$, tj. $0 < x < 6$. Rubne točke su 0 i 6.

$$\sum \frac{(x-3)^n}{n^3 \cdot 3^n} = \sum \frac{(0-3)^n}{n^3 \cdot 3^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n^3} \quad \text{red konvergira}$$

$$\sum \frac{(x-3)^n}{n^3 \cdot 3^n} = \sum \frac{(6-3)^n}{n^3 \cdot 3^n} = \sum \frac{1}{n^3} \quad \text{red konvergira}$$

Područje konvergencije je $A = [0, 6]$.

3.

$$\lim_0 \frac{e^{4x} - e^x}{\sin 2x} = \lim_0 \frac{e^x(e^{3x} - 1)}{\sin 2x} = \lim_0 e^x \lim_0 \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin 2x} =$$
$$= 1 \cdot \lim_0 \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot \lim_0 \frac{\frac{3x}{2x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} = 1 \cdot \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

4. Neka je $y = x - x_0 = x - \pi$, tj. $x = y + \pi$.

$$\begin{aligned} f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2(y+\pi)) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2(y+\pi)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2y + 2\pi) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2y)^{2n}}{(2n)!} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^0 \frac{(2y)^0}{0!} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}y^{2n}}{(2n)!} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n-1}(x-\pi)^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

5. Odredimo domenu funkcije f:

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x - 2}}.$$

$$x \geq 0 \wedge x > 2 \Leftrightarrow x > 2.$$

Dakle $D(f) = \langle 2, \cdot \rangle$. Kako funkcije nije definirana lijevo od 2, limes $\lim_{2-} f$ nije dobro definiran. Stoga računamo samo

$$\lim_{2+} f = \lim_{2+} \frac{x\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x - 2}} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{0+} = +\infty.$$

Pravac $x = 2$ je desna vertikalna asimptota.
Kako je domena funkcije $\langle 2, \cdot \rangle$ nema smisla tražiti lijevu horiznontalnu ni kosu

asimptotu.
Promatramo desnu kosu asimptotu:

$$k = \lim_{+\infty} \frac{\frac{x\sqrt{x}+2}{\sqrt{x-2}}}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x-2}} = \lim_{+\infty} \frac{1+\frac{2}{x\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1-0}} = 1$$

$$l = \lim_{+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{+\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}+2}{\sqrt{x-2}} - x\right) = \lim_{+\infty} \frac{x\sqrt{x}+2-x\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} =$$
$$= \lim_{+\infty}\left(\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} - \frac{2}{\sqrt{x-2}}\right) =$$
$$= \lim_{+\infty} \frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}} - \lim_{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x-2}} =$$
$$= \lim_{+\infty} \frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})} - 0 = \lim_{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})} =$$
$$= \lim_{+\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}(\sqrt{1}+\sqrt{1-\frac{2}{x}})} = \frac{2}{1\cdot 2} = 1$$

Pravac $y = x + 1$ je desna kosa asimptota.