Kompleksni brojevi

Zadatak 1 *Odredite sve točke kompleksne ravnine koje zadovoljavaju uvjete:*

a) $|z-1+i| \leq 3$

b) $\mathrm{Im}(z^2) = 4$

c) $\mathrm{Re}\,[(1+i)\cdot z] = 0$

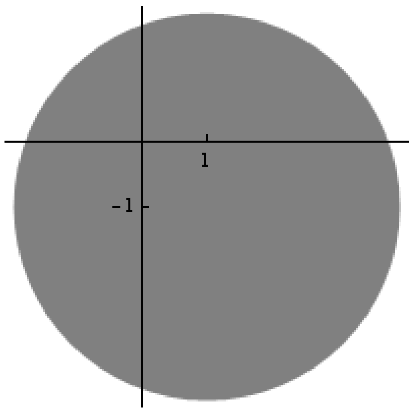
d) $|z-4i| = |z-4|$.

Rješenje.

a)

$$\begin{aligned} |z-1+i| &\leq 3 \\ |x+iy-1+i| &\leq 3 \\ \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} &\leq 3 \\ (x-1)^2+(y+1)^2 &\leq 9 \end{aligned}$$

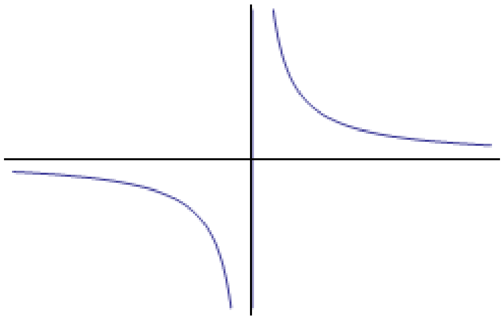
Kružnica sa središtem u $S(1,-1)$ i radijusom 3.



b)

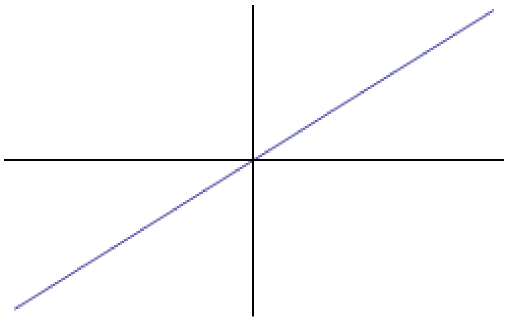
$$4 = \mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(x^2 + 2xyi - y^2) = 2xy$$

$$xy = 2$$



c)

$$0 = \mathrm{Re}\left[(1+i)\cdot z\right] = \mathrm{Re}(x + iy + ix - y) = x - y$$
$$y = x$$



d)

$$\begin{aligned} |z - 4i| &= |z - 4| \\ \sqrt{x^2 + (y-4)^2} &= \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 - 8y + 16 &= x^2 - 8x + 16 + y^2 \\ y &= x \end{aligned}$$

Skica:kao i pod c)

■

Neka su f i g neke realne funkcije realnih varijabli. Nejednadžba

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$$

je ekvivalentna sa sljedeća tri uvjeta:

1. $f(x) \geq 0$ (uvjet korijena)

2. $g(x) \geq 0$ (zbog prvog uvjeta lijeva strana je $\geq$ od 0 pa je i desna)

3. $f(x) \leq g^2(x)$ (nejednakosti dva pozitivna broja se smiju kvadrirati).

Slično možemo riješiti i nejdnadžbu

$$g(x) \leq \sqrt{f(x)},$$

čije rješenje tražimo u ovisnosti o pozitivnosti funkcije g. Ako je $g(x) < 0$ tada je nejednadžba zadovoljana za sve x koji zadovoljavaju uvjet korijena $f(x) \geq 0$. Ako je $g(x) \geq 0$ tada, uz uvjet $f(x) \geq 0$, nejednadžbu možemo kvadrirati pa je $g^2(x) \leq f(x)$. Dakle rješenje nejednadžbe $g(x) \leq \sqrt{f(x)}$ su dana s

$$(f(x) \geq 0 \text{ i } g(x) < 0) \text{ ili } \left(f(x) \geq 0 \text{ i } g(x) \geq 0 \text{ i } g^2(x) \leq f(x)\right).$$

Primjenimo ovo na sljedećem zadatku:

Zadatak 2 *Skicirajte u Gaussovoj komleksnoj ravnini kompleksne brojeve za koje vrijedi:*

a) $|z+1| + |z-1| < 4$;

b) $|z+2| + |z-2| < 2$.

Rješenje.

a) Prikažimo komplelsni broj z u obliku $x + iy$ pa imamo

$$|x + iy + 1| + |x + iy - 1| < 4$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < 4$$
$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} < 4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Ova nejednadža je oblika $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ pa je prema gore navedenom njeno rješenje dano s

$$\begin{aligned}
(x+1)^2 + y^2 &\geq 0 \\
4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} &> 0 \\
(x+1)^2 + y^2 &< 16 - 8\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + (x-1)^2 + y^2
\end{aligned}$$

Prva nejednadžba je zadovoljena za sve x i y, a druge dvije su ekvivalentne s

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2+y^2} &< 4 \\ 2\sqrt{(x-1)^2+y^2} &< 4-x. \end{aligned}$$

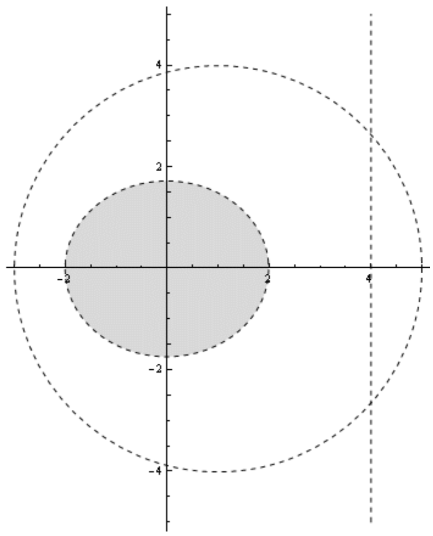
Sada prvu nejednadžbu kvadriramo (to možemo jer su boje strane pozitivne), a drugu kvadriramo uz dodatak uvjeta $4-x>0$.

$$\begin{aligned} (x-1)^2+y^2 &< 16 \\ 4-x &> 0 \\ 4((x-1)^2+y^2) &< 16-8x+x^2 \end{aligned}$$

Prvu nejednadžbu zadovoljavaju svi parovi (x, y) koji se nalaze unutar kružnice sa središtem u $(1,0)$ radijusa 4, a drugu svi koji se nalaze lijevo od pravca $x=4$. Treću zapišemo u obliku $3x^2+4y^2<12$, tj.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}<12$$

pa vidmo da je riječ o unutrašnjosti centralne elipse s velikom poluosi 2 i malom poluosi $\sqrt{3}$.



Vidimo da ova tri uvjeta zadovoljava unutrašnjost elipse (rub nije uključen).

b) Za $z=x+iy$ zadana nejednadžba je ekvivalentna s

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}<2+\sqrt{(x-2)^2+y^2}.$$

Kako su obje strane ove nejednadžbe nenegativne, možemo je kvadrirati pa dobivamo

$$(x+2)^2 + y^2 < 4 + 4\sqrt{(x-2)^2+y^2} + (x-2)^2 + y^2$$

tj.

$$2x - 1 < \sqrt{(x-2)^2 + y^2}.$$

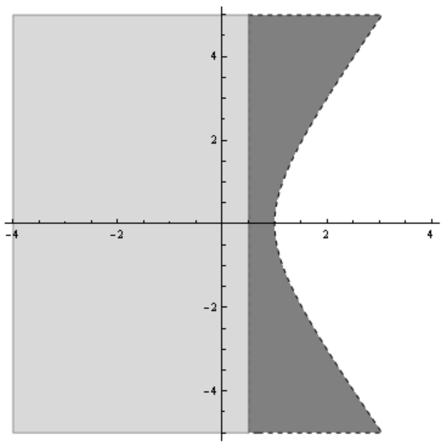
Ova nejednadžba je oblika $g(x) < \sqrt{f(x)}$ pa je rješenje tražimo u dva slučaja:
1.slučaj: za $2x-1<0$ je gornja nejednažba zadovoljena (uvjet korijena je zadovoljen za sve (x,y)). Dakle sve lijevo od pravca $x = 1/2$ je rješenje naše nejednadžbe
2.slučaj: kad je $2x-1 \geq 0$ nejednadžbu možemo kvadrirati pa imamo

$$4x^2 - 4x + 1 < (x-2)^2 + y^2$$

tj.

$$3x^2 - y^2 < 3.$$

Dakle granica našeg područja je hiperbola $3x^2 - y^2 = 3$, a rješenje ovog slučaja je prostor desno od pravca $x = 1/2$ (pravac je uključen) i lijevo od desne grane hiperbole $3x^2 - y^2 = 3$.
Konačno je rješenje je unija rješenje pojednih slučajeva i dano je slikom



■

Zadatak Riješite jednadžbu

$$z^3 - \frac{(1-i)^6}{i^{21}} = 0$$

Rješenje: Prvo prikažimo broj $w = 1-i$ u trigonometrijskom obliku. Za argument ovog broja φ vrijedi $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{Im} w / \operatorname{Re} w = -1$ pa je $\varphi = 3\pi/4$ ili $\varphi = 7\pi/4$. Kako se w prikazan u Gaussovoj ravnini nalazi u četvrtom kvadrantu, vrijedi $\varphi = 7\pi/4$. Također je $|w| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ pa imamo

$$\begin{aligned} w^6 &= \left(\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})\right)^6 = 2^3\left(\cos\frac{6\cdot 7\pi}{4} + i\sin\frac{6\cdot 7\pi}{4}\right) = \\ &= 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8(0+i) = 8i, \end{aligned}$$

odnosno

$$z^3 = \frac{8i}{i^{21}} = \frac{8i}{i} = 8 = 8(\cos 0 + i\sin 0).$$

Koristeći formulu

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

možemo izračunati

$$z_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Zadatak Riješite jednadžbu

$$z^4 + \frac{(-1-i)^7}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} - 8 = 0.$$

Rješenje: Prikažimo broj $w = -1-i$ u trigonometrijskom obliku. Za argument φ ovoga broja vrijedi $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{Im} w / \operatorname{Re} w = 1$ pa je $\varphi = \pi/4$ ili $\varphi = 5\pi/4$. Kako se w prikazan u Gaussovoj ravnini nalazi u trećem kvadrantu, vrijedi $\varphi = 5\pi/4$. Također je $|w| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ pa imamo

$$\begin{aligned} \frac{(-1-i)^7}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} - 8 &= \frac{\sqrt{2}^7(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})^7}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} - 8 = \\ &= \frac{2^3(\cos\frac{35\pi}{4} + i\sin\frac{35\pi}{4})}{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} - 8} = \\ &= 8\frac{\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}} - 8 = \\ &= 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) - 8 = \\ &= 8i - 8. \end{aligned}$$

Kako je $z^4 = 8 - 8i = 8\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$, vrijedi

$$z = \sqrt[4]{8\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$