## Zadaci za vježbu

1. Metodom matematičke indukcije dokažite da je

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

Rješenje:
Baza indukcija: Tvrdnja vrijedi za $n=1$ jer je

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 1+1}.$$

Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da za neki $n\in\mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Korak indukcije: Dokažimo da je

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}=\frac{n+1}{2n+3}$$

koristeći pretpostavki indukcije. Vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=$$

$$=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}=$$

$$=\frac{2n^2+2n+2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2(n+1)(n+\frac{1}{2})}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}$$

2. Dokažite da $64 \mid (3^{2n+3}+40n-27)$

$$64 \mid (3^{2n+3}+40n-27) \quad \forall n\in\mathbb{N}_0.$$

Rješenje: Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.
Baza indukcije: tvrdnja vrijedi za $n=0$ jer je

$$3^3+40\cdot 0-27=0$$

djeljivo s 64.
Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da vrijedi

$$64 \mid (3^{2n+3} + 40n - 27)$$

tj. da je

$$3^{2n+3} + 40n - 27 = 64k$$

za neki $k \in \mathbb{Z}$.
Korak indukcije: Treba dokazati

$$64 \mid (3^{2n+5} + 40(n+1) - 27).$$

Vrijedi

$$3^{2n+5} + 40(n+1) - 27 = 9 \cdot 3^{2n+3} + 40n + 13 =$$
$$= 9(3^{2n+3} + 40n - 27) - 9 \cdot 40n + 9 \cdot 27 + 40n + 13 =$$
$$= 9 \cdot 64k - 8 \cdot 40n + 256 = 64(9k - 5n + 4),$$

pa je

$$64 \mid (3^{2n+5} + 40(n+1) - 27).$$

3. Metodom matematičke indukcije dokažite da za $x \in \langle 0, \pi\rangle$ i sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}.$$

Rješenje:
Baza indukcije: Tvrdnja vrijedi za $n = 1$ jer je

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, tj. da je

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}.$$

Korak indukcije: Koristeći pretpostavku dokažimo da je

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^{n+1} \sin\frac{x}{2^{n+1}}}.$$

Vrijedi

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos \frac{x}{2^k} = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^n} \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}} = \frac{\sin x}{2^n \cdot 2 \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cos \frac{x}{2^{n+1}}} \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{\sin x}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^{n+1}}}.$$