ime i prezime

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$

1. **a)** Provjerite istinitost (odgovor obrazložite) te negirajte sljedeće tvrdnje:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x + y > 100$$

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x + y > 100.$$

Prva tvrdnja je istinita. Za svaki realan x možemo uzeti da je $y = 101 - x$ i njihova suma će biti veća od 100. Negacija je

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x + y \leq 100.$$

Druga tvdnja je laž jer joj je negacija istinita. Negacija je

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x + y \leq 100.$$

Ovo je istina jer za svaki relan broj x možemo uzeti da je $y = 100 - x$ i njihova suma će biti manja ili jednaka od 100.

b) Napišite obrat, obrat po kontrapoziciji i suprotni sud suda: "Ako je $x > 0$, onda je $\sin x > 0$." Provjerite istinitost (odgovor obrazložite) svih tvrdnji.
Sud nije istinit ($x = \frac{3\pi}{2} > 0$, $\sin x = -1 \not> 0$)
Obrat: Ako je $\sin x > 0$, onda je $x > 0$. (ovo je laž: $x = -\frac{3\pi}{2} \not> 0$ i $\sin x = 1 > 0$)
OPK: Ako je $\sin x \leq 0$, onda je $x \leq 0$. (laž jer je sud lažan)
Suprotni: Ako je $x \leq 0$, onda je $\sin x \leq 0$. (laž jer je OPK laž).

2. Odredite odnos skupova $(A \cap B) \setminus (A \setminus C)$ i $(A \cap C) \cup (B \setminus C)$. Inkluzije koje vrijede dokažite, a za one koje ne vrijede nađite kontraprimjer.
Pokazati ćemo da je $(A \cap B) \setminus (A \setminus C) \subseteq (A \cap C) \cup (B \setminus C)$:

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cap B) \setminus (A \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \land x \notin (A \setminus C) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (x \in A \land x \in B) \land (x \notin A \lor x \in C) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (x \in A \land x \in B \land x \notin A) \lor (x \in A \land x \in B \land x \in C) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (x \in \emptyset) \lor (x \in A \land x \in B \land x \in C) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x \in A \cap C \land x \in B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow \\
& \Rightarrow x \in A \cap C \lor x \in B \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \setminus C)
\end{aligned}$$

Druga inkluzija ne vrijedi: npr. za $A = C = \emptyset$, $B = \{1\}$ je

$$(A \cap B) \setminus (A \setminus C) = \emptyset \setminus \emptyset = \emptyset$$
$$(A \cap C) \cup (B \setminus C) = \emptyset \cup \{1\} = \{1\}.$$

3. Odredite skupove $S_1 = f(\{-1, 2\})$, $S_2 = f^{-1}(1)$ ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}.$$

Zatim na skupu $S = S_1 \cup S_2$ definirajte relaciju ekvivalencije kojoj su klase ekvivalencije $S_1 \setminus S_2$ i S_2.

$$S_1 = \{f(-1), f(2)\} = \{0, 1\}$$

$$\begin{aligned} S_2 = f^{-1}(1) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\} = \\ &= \{x \in \langle -\infty, 1] : x + 1 = 1\} \cup \{x \in \langle 1, +\infty\rangle : 3 - x = 1\} = \\ &= \{0\} \cup \{2\} = \{0, 2\}. \end{aligned}$$

$$S_1 \cup S_2 = \{0, 1, 2\}$$
$$S_1 \setminus S_2 = \{1\}$$

Tražena relacija je

$$R = \{(1, 1), (0, 0), (0, 2), (2, 2), (2, 0)\}.$$

4. Neka je funkcija $f\colon D(f) \to K(f)$ zadana na svojoj prirodnoj domeni s

$$f(x) = 10^{\frac{x+2}{x-1}}.$$

Odredite skupove $D(f)$, $K(f)$ i $f^{-1}(\langle -1, 0] \cup \{3\})$. Dokažite da je f bijekcija i odredite joj inverznu funkciju.
Domena: $x - 1 \neq 0$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Slika funkcije: tražimo za koje y-ne postoji $x \in D(f)$ takav da je $f(x) = y$:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ 10^{\frac{x+2}{x-1}} &= y \\ \frac{x+2}{x-1} &= \log y \\ x + 2 &= x \log y - \log y \\ x &= \frac{2 + \log y}{\log y - 1} \end{aligned}$$

Da bi x bio realan, treba vrijediti $y > 0$ i $\log y - 1 \neq 0$, tj. $y \in \langle 0, +\infty\rangle \setminus \{10\}$.
Lako se provjeri da je za sve ove y-ne, x različit od 1, tj. iz skupa $D(f)$. Stoga

je $K(f) = \langle 0, +\infty\rangle \setminus \{10\}$.
Određivanje skupa $f^{-1}(\langle -1, 0] \cup \{3\})$: Neka je

$$S = f^{-1}(\langle -1, 0] \cup \{3\}) = \{x \in D(f) : f(x) \in \langle -1, 0] \cup \{3\}\}$$

Funkcija f ne poprima nepozitivne vrijednosti (jer je $K(f) = \langle 0, +\infty\rangle \setminus \{10\}$) pa ne postoji x takav da je $f(x) \in \langle -1, 0]$. Stoga je

$$S = \{x \in D(f) : f(x) = 3\} = \left\{ \frac{2 + \log 3}{\log 3 - 1} \right\}$$

Injektivnost: Neka je $f(x_1) = f(x_2)$:

$$\begin{aligned} 10^{\frac{x_1+2}{x_1-1}} &= 10^{\frac{x_2+2}{x_2-1}} \\ \frac{x_1+2}{x_1-1} &= \frac{x_2+2}{x_2-1} \\ (x_1+2)(x_2-1) &= (x_1-1)(x_2+2) \\ &\vdots \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ je injektiva.
Surjektivnost: f je surjektiva jer joj je kodomena slika funkcije.

Inverz: f je bijekcija i njen inverz je (isti račun kao i za sliku funkcije)

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon\ \langle 0, +\infty\rangle \setminus \{10\} &\to \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ f^{-1}(x) &= \frac{2 + \log x}{\log x - 1} \end{aligned}$$

5. Riješite jednadžbu
$$\frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{(1-\frac{\sqrt{3}}{3}i)^4} = \frac{9}{4}(z^3 + i^{23}\sqrt{3}).$$

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{3}i &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \\ (1+\sqrt{3}i)^3 &= 2^3(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}) = 8(\cos\pi + i\sin\pi) \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) \\ (1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i)^4 &= \frac{2^4}{\sqrt{3}^4}(\cos\frac{4\cdot 11\pi}{6} + i\sin\frac{4\cdot 11\pi}{6}) = \frac{16}{9}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) \\ i^{23} &= i^3 = -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{8(\cos\pi + i\sin\pi)}{\frac{16}{9}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})} &= \frac{9}{4}(z^3 - i\sqrt{3}) \\
\frac{9}{2}(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}) &= \frac{9}{4}(z^3 - i\sqrt{3}) \\
\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i &= \frac{1}{2}(z^3 - i\sqrt{3}) \\
1 &= z^3
\end{aligned}$$

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2$$