Zadaci za vježbu

1. Riješite jednadžbu

$$2\sin^2 x - 4\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 1.$$

Rješenje:

$$2\sin^2 x - 4\sin x\cos x - 4\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x \quad / : \cos^2 x \neq 0$$

$$2\,\mathrm{tg}^2\, x + 4\,\mathrm{tg}\, x - 4 = 1 + \mathrm{tg}^2\, x$$

$$\mathrm{tg}^2\, x - 4\,\mathrm{tg}\, x - 5 = 0$$

$$\mathrm{tg}\, x = t$$

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = -5$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= \mathrm{arctg}(-5) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

2. Koja rješenja jednadžbe

$$2^{\sin^2 x} + 5 \cdot 2^{\cos^2 x} = 7$$

su ujedno rješenja nejednadžbe

$$\frac{x^2 - x - 2}{\log(x+1)} \geq 0.$$

Rješenje: Prvo rješavamo zadanu jedandžbu

$$2^{\sin^2 x} + 5 \cdot 2^{1-\sin^2 x} = 7.$$

Uvodimo supstituciju

$$t = 2^{\sin^2 x}$$

pa imamo

$$t + 5 \cdot 2 \cdot t^{-1} = 7 \quad / \cdot t$$

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

$$t_1 = 5, \quad t_2 = 2.$$

Dalje,u prvom slučaju je

$$\begin{aligned} 2^{\sin^2 x} &= 5 \\ \sin^2 x &= \log_2 5 > 1 \end{aligned}$$

pa ovaj slučaj nema rješenja. U drugom slučaju je

$$\begin{aligned} 2^{\sin^2 x} &= 2 \\ \sin^2 x &= 1 \\ \sin x &= \pm 1 \\ x &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

i to su sva rješanje zadane jednadžbe.
Riješimo nejednadžbu

$$\frac{x^2 - x - 2}{\log(x+1)} \geq 0.$$

U prvom slučaju je

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &\geq 0 \\ \log(x+1) &> 0, \end{aligned}$$

odnosno

$$x \in \langle -\infty, -1] \cup [2, +\infty\rangle \quad \text{i}$$
$$x + 1 > 10^0 = 0.$$

Rješenje ovog slučaja je $x \in [2, +\infty\rangle$.
U drugom slučaju je

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &\leq 0 \\ \log(x+1) &< 0, \end{aligned}$$

odnosno

$$x \in [-1, 2] \quad \text{i}$$
$$0 < x + 1 < 10^0 = 1.$$

Rješenje ovog slučaja je $x \in \langle -1, 0\rangle$.
Rješenje zadane nejednadžbe je

$$x \in \langle -1, 0\rangle \cup [2, +\infty\rangle .$$

Trba provjeriti za koje cjelobrojne k se broj $\frac{\pi}{2} + k\pi$ nalazi u skupu $\langle -1, 0\rangle \cup [2, +\infty\rangle$:

$$-1 < \frac{\pi}{2} + k\pi < 0$$

$$-\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}<k<-\frac{1}{2} \Rightarrow k \in \emptyset$$

$$\begin{aligned} 2 &< \frac{\pi}{2}+k\pi \\ \frac{2}{\pi}-\frac{1}{2} &< k \Rightarrow k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Rješenje zadatka je

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3. Odredite funkciju $f\colon \ \to \mathbb{R}$ iz analitičkog zapisa

$$f(x)=\sqrt[3]{5-\ln\frac{x+1}{x^2-4}}+\operatorname{arctg}\sqrt{2-\frac{6x}{x^2-4}}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2-4} &> 0 \\ 2-\frac{6x}{x^2-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

Domena funkcije arctg je čitav $\mathbb{R}$ pa za nju nemamo zahtjeva.
Rješenje prve nejednadžbe je

$$x \in \langle -2,-1\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$$

Rješenje druge

$$\begin{aligned} \frac{2x^2-8-6x}{x^2-4} &\geq 0 \\ \frac{x^2-3x-4}{x^2-4} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$x \in \langle -\infty,-2\rangle \cup [-1,2\rangle \cup [4,+\infty\rangle .$$

Konačno, rješenje je$D(f)=[4,+\infty\rangle$.

4. Odredite područje defnicije funkcije $f\colon X \to \mathbb{R}$ iz pravila

$$f(x)=\frac{1+\ln\sqrt[3]{x^2-x-6}}{\sqrt{\ln\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}}}.$$

Rješenje: Uvjeti su

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{x^2 - x - 6} &> 0 \\
\ln \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} &> 0.
\end{aligned}$$

Prvi uvjet daje:

$$x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle \,,$$

a drugi

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} &> 1 \\
\frac{x^2 - x - x^2 + 3x - 2}{x^2 - 3x + 2} &> 0 \\
\frac{2x - 2}{x^2 - 3x + 2} &> 0 \\
\frac{2(x-1)}{(x-1)(x-2)} &> 0 \\
\frac{2}{x-2} &> 0 \wedge x - 1 \neq 0
\end{aligned}$$

$$x \in \langle 2, +\infty \rangle \,.$$

Rješenje je

$$X = \langle 3, +\infty \rangle$$

5. Odredite ostatak $r(x)$ pri djeljenju polinoma $f(x)$ polinomom $g(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$, ako $f(x)$ pri djeljenju polinomom $g_1(x) = x^2 - 1$ daje ostatak $r_1(x) = -x + 1$, a pri djeljenju polinomom $g_2(x) = x - 2$ daje ostatak $r_2(x) = 5$.
Rješenje: Kako je g polinom treceg stupnja, ostatak pri djeljenju r je najviše drugog stupnja pa ga možemo zapisati u obliku

$$r(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Znamo da je

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x),$$

tj.

$$f(x) = (x-2)(x-1)(x+1) \cdot q(x) + Ax^2 + Bx + C.$$

Otud je

$$\begin{aligned} f(2) &= 4A + 2B + C \\ f(1) &= A + B + C \\ f(-1) &= A - B + C. \end{aligned}$$

S druge strane,

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1(x) \cdot g_1(x) + r_1(x) \\ f(x) &= (x^2 - 1) \cdot q_1(x) - x + 1 \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ f(-1) &= 2. \end{aligned}$$

Isto tako

$$\begin{aligned} f(x) &= q_2(x) \cdot g_2(x) + r_2(x) \\ f(x) &= (x - 2) \cdot q_2(x) + 5 \end{aligned}$$

tj.

$$f(2) = 5.$$

Rješenje sustava

$$\begin{aligned} 5 &= 4A + 2B + C \\ 0 &= A + B + C \\ 2 &= A - B + C \end{aligned}$$

je $A = 2$, $B = -1$, $C = -1$ pa je

$$r(x) = 2x^2 - x - 1.$$