Kompleksni brojevi

1. Odredite
$$\frac{z \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot w \cdot i^{724}}{z^2 - w^2}$$
ako je $z = -1 + 2i, \ w = 2 - 3i$.
Rješenje: Vrijedi
$$\begin{aligned} z \cdot \bar{w} &= (-1+2i)(2+3i) = -2 - 3i + 4i - 6 = -8 + i \\ \bar{z} \cdot w &= \overline{(z \cdot \bar{w})} = \overline{-8+i} = -8 - i \\ i^{724} &= 1 \\ z^2 &= (-1+2i)^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i \\ w^2 &= (2-3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i \end{aligned}$$
pa je
$$\begin{aligned} \frac{z \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot w \cdot i^{724}}{z^2 - w^2} &= \frac{-8 + i + 8 + i}{-3 - 4i + 5 + 12i} = \frac{2i}{2 + 8i} = \\ &= \frac{i}{1+4i} \cdot \frac{1-4i}{1-4i} = \frac{i+4}{1+16} = \frac{4}{17} + i\frac{1}{17} \end{aligned}$$

2. Riješite jednadžbu
$$2z + |z+1| - 3 = 0.$$

Rješenje: Neka je $z = x + iy$. Tada je $|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ pa moramo riješiti jednadžbu
$$2(x+iy) + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} - 3 = 0.$$
Kompleksni broj na lijevoj strani je jednak nuli ako su mu realni i imaginarni dio jednaki nuli. tj. ako je
$$2x + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} - 3 = 0 \text{ i } 2y = 0.$$
Iz druge jednadžbe vidmo da je $y = 0$. Uvrštavanjem ovog rezultata u prvu jednadžbu dobivamo $2x + |x+1| - 3 = 0$. Ovu jednadžbu rješavamo ovisno o pozitivnosti broja $x + 1$:
1. slučaj: $x + 1 \geq 0$
Jednadžba glasi
$$2x + x + 1 - 3 = 0,$$
a njeno rješenje $x = 2/3$ zadovoljava uvjet $x + 1 \geq 0$ pa je $z = 2/3$ rješenje polazne jednadžbe.

2. slučaj: $x+1<0$
Jednadžba glasi
$$2x-x-1-3=0.$$
Kako njeno rješenje $x=4$ ne zadovoljava uvjet $x+1<0$ ovaj slučaj nema rješenja.

Neka su f i g neke realne funkcije realnih varijabli. Nejednadžba
$$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$$
je ekvivalentna sa sljedeća tri uvjeta:

1. $f(x) \geq 0$ (uvjet korijena)
2. $g(x) \geq 0$ (zbog prvog uvjeta lijeva strana je $\geq$ od 0 pa je i desna)
3. $f(x) \leq g^2(x)$ (nejednakosti dva pozitivna broja se smiju kvadrirati).

Slično možemo riješiti i nejdnadžbu
$$g(x) \leq \sqrt{f(x)},$$
čije rješenje tražimo u ovisnosti o pozitivnosti funkcije g. Ako je $g(x)<0$ tada je nejednadžba zadovoljana za sve x koji zadovoljavaju uvjet korijena $f(x) \geq 0$. Ako je $g(x) \geq 0$ tada, uz uvjet $f(x) \geq 0$, nejednadžbu možemo kvadrirati pa je $g^2(x) \leq f(x)$. Dakle rješenje nejednadžbe $g(x) \leq \sqrt{f(x)}$ su dana s
$$(f(x) \geq 0 \text{ i } g(x)<0) \text{ ili } \big(f(x) \geq 0 \text{ i } g(x) \geq 0 \text{ i } g^2(x) \leq f(x)\big)\,.$$
Primjenimo ovo na sljedećem zadatku:
Skicirajte u Gaussovoj komleksnoj ravnini kompleksne brojeve za koje vrijedi:

a) $|z+1|+|z-1|<4$;

b) $|z+2|+|z-2|<2$.

Rješenje:

a) Prikažimo komplelsni broj z u obliku $x+iy$ pa imamo

$$|x+iy+1|+|x+iy-1|<4$$

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}<4$$
$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}<4-\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

Ova nejednadža je oblika $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ pa je prema gore navedenom njeno rješenje dano s

$$\begin{aligned}
(x+1)^2+y^2 &\geq 0 \\
4-\sqrt{(x-1)^2+y^2} &> 0 \\
(x+1)^2+y^2 &< 16-8\sqrt{(x-1)^2+y^2}+(x-1)^2+y^2
\end{aligned}$$

Prva nejednadžba je zadovoljena za sve x i y, a druge dvije su ekvivalentne s

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2+y^2} &< 4 \\
2\sqrt{(x-1)^2+y^2} &< 4-x.
\end{aligned}$$

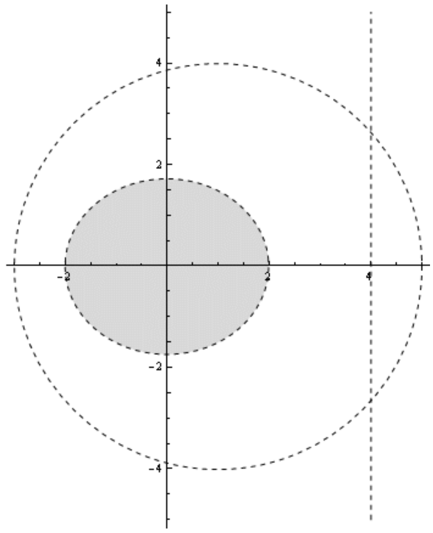
Sada prvu nejednadžbu kvadriramo (to možemo jer su boje strane pozitivne), a drugu kvadriramo uz dodatak uvjeta $4-x>0$.

$$\begin{aligned}
(x-1)^2+y^2 &< 16 \\
4-x &> 0 \\
4((x-1)^2+y^2) &< 16-8x+x^2
\end{aligned}$$

Prvu nejednadžbu zadovoljavaju svi parovi (x,y) koji se nalaze unutar kružnice sa središtem u $(1,0)$ radijusa 4, a drugu svi koji se nalaze lijevo od pravca $x=4$. Treću zapišemo u obliku $3x^2+4y^2<12$, tj.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}<12$$

pa vidmo da je riječ o unutrašnjosti centralne elipse s velikom poluosi 2 i malom poluosi $\sqrt{3}$.



Vidimo da ova tri uvjeta zadovoljava unutrašnjost elipse (rub nije uključen).

b) Za $z = x + iy$ zadana nejednadžba je ekvivalentna s

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} < 2 + \sqrt{(x-2)^2 + y^2}.$$

Kako su obje strane ove nejednadžbe nenegativne, možemo je kvadrirati pa dobivamo

$$(x+2)^2 + y^2 < 4 + 4\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + (x-2)^2 + y^2$$

tj.

$$2x - 1 < \sqrt{(x-2)^2 + y^2}.$$

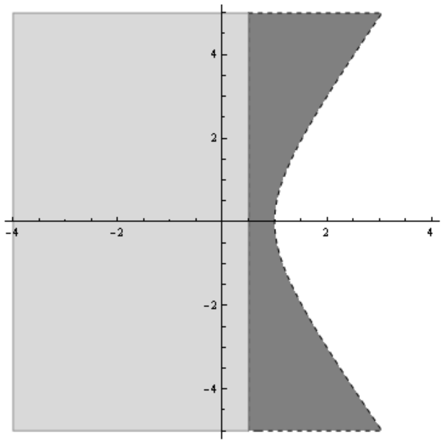
Ova nejednadžba je oblika $g(x) < \sqrt{f(x)}$ pa je rješenje tražimo u dva slučaja:
1.slučaj: za $2x-1 < 0$ je gornja nejednažba zadovoljena (uvjet korijena je zadovoljen za sve (x, y)). Dakle sve lijevo od pravca $x = 1/2$ je rješenje naše nejednadžbe
2.slučaj: kad je $2x - 1 \geq 0$ nejednadžbu možemo kvadrirati pa imamo

$$4x^2 - 4x + 1 < (x-2)^2 + y^2$$

tj.

$$3x^2 - y^2 < 3.$$

Dakle granica našeg područja je hiperbola $3x^2 - y^2 = 3$, a rješenje ovog slučaja je prostor desno od pravca $x = 1/2$ (pravac je uključen) i lijevo od desne grane hiperbole $3x^2 - y^2 = 3$.
Konačno je rješenje je unija rješenje pojednih slučajeva i dano je slikom



Zadatak Riješite jednadžbu

$$z^3 - \frac{(1-i)^6}{i^{21}} = 0$$

Rješenje: Prvo prikažimo broj $w = 1-i$ u trigonometrijskom obliku. Za argument ovog broja φ vrijedi $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{Im} w / \operatorname{Re} w = -1$ pa je $\varphi = 3\pi/4$ ili $\varphi = 7\pi/4$. Kako se w prikazan u Gaussovoj ravnini nalazi u četvrtom kvadrantu, vrijedi $\varphi = 7\pi/4$. Također je $|w| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ pa imamo

$$\begin{aligned} w^6 &= \left(\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})\right)^6 = 2^3\left(\cos\frac{6\cdot 7\pi}{4} + i\sin\frac{6\cdot 7\pi}{4}\right) = \\ &= 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8(0+i) = 8i, \end{aligned}$$

odnosno

$$z^3 = \frac{8i}{i^{21}} = \frac{8i}{i} = 8 = 8(\cos 0 + i\sin 0).$$

Koristeći formulu

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

možemo izračunati

$$z_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Zadatak Riješite jednadžbu

$$z^4 + \frac{(-1-i)^7}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} - 8 = 0.$$

Rješenje: Prikažimo broj $w = -1 - i$ u trigonometrijskom obliku. Za argument φ ovoga broja vrijedi $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{Im} w / \operatorname{Re} w = 1$ pa je $\varphi = \pi/4$ ili $\varphi = 5\pi/4$. Kako se w prikazan u Gaussovoj ravnini nalazi u trećem kvadrantu, vrijedi $\varphi = 5\pi/4$. Također je $|w| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ pa imamo

$$
\begin{aligned}
\frac{(-1-i)^7}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} - 8 &= \frac{\sqrt{2}^7(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})^7}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} - 8 = \\
&= \frac{2^3(\cos\frac{35\pi}{4} + i\sin\frac{35\pi}{4})}{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} - 8} = \\
&= 8\frac{\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}} - 8 = \\
&= 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) - 8 = \\
&= 8i - 8.
\end{aligned}
$$

Kako je $z^4 = 8 - 8i = 8\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$, vrijedi

$$
z = \sqrt[4]{8\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.
$$