Uvod u matematiku
2012/2013

1. Zapišite simbolički sljedeće sudove i njihove negacije. Utvrdite njihovu istinitost.

   (a) Ako postoji realan x takav da je $x^2 = 4$, onda je $2^3 < 10$ i $3 \mid 10$.

   (b) Broj $\sqrt{3}$ je realan ili za svaki prirodn broj x postoji prirodan broj y takav da je $x = 2y$.

   (c) Svaki relan broj koji zadovoljava jednadžbu $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ je pozitivan.

   (d) Postoji prirodan broj manji od 4 koji pri djeljnju s 5 daje ostatak 1.

   (e) Umnožak bilo kojih dvaju racionalnih brojeva je racionalan broj.

   (f) Postoji relan broj veći od recipročne vrijednosti svih prirodnih brojeva.

   (g) Postoji cijeli broj manji od kvadrata svih prirodnih brojeva.

2. Napišite obrat, obrat po kontrapoziciji, suprotni sud i negaciju sljedećih sudova. Odredite istinitost svih sudova.

   (a) Ako je $xy < 0$, onda je $x < 0$ ili $y < 0$.

   (b) Da bi broj bio neparan, dovoljno je da nije djeljiv ni s 2 ni s 4.

   (c) Ako je x racionalan, onda su x^2 i $x + 1$ racionalni brojevi.

   (d) Broj je racionalan ako su mu kvadrat i recipročna vrijednost racionalni.

   (e) Realan broj je pozitivan ako su mu kvadrat i recipročna vrijednost pozitivni.

   (f) Ako je paran broj n djeljiv sa 6, onda je $2n$ djeljivo s 12.

3. Pojednostavnite sudove

   (a) $-((A \wedge -B) \vee (A \to -B))$

   (b) $(-(-A \to b) \vee A \leftrightarrow A \wedge -B) \wedge A$

4. Negirajte sljedeće tvrdnje i odredite njihovu istinitost:

   (a) $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N})\ x < n$

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{R})\ x \geq n$

(c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\ x > \frac{1}{n}$

(d) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{Z})\ \frac{1}{n} < m$

5. Je li $(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ valjana formula? Odgovor obrazložite!

6. Je li $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \rightarrow (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$ valjana formula? Odgovor obrazložite!

7. Napišite negacije sljedećih tvrdnji. Odredite istinitost svih sudova. Obrazložite odgovore!

   (a) Svaki skuo je podskup svog partitivnog skupa.

   (b) Niti jedan skup nije podskup svog partitivnog skupa.

   (c) Postoji skup A čiji presjek s $\mathcal{P}(A)$ je neprazan skup.

8. Odredite istinitost sljedećih sudova i njima suprotnih sudova.

   (a) Ako je $x \in X$, onda postoji $A \in \mathcal{P}(X)$ takav da je $x \in A$.

   (b) Ako je $x \in X$, onda postoji $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ takav da je $x \in A$.

   (c) Ako je $x \in X$ i $A \in \mathcal{P}(X)$, onda je $x \in A$.

9. Zadani su skupovi

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : x > 2 \vee (x < 1 \wedge x \geq -7)\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \geq 0\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \rightarrow x < 5\}. \end{aligned}$$

   Odredite $(A \cup C) \setminus (B \cup C)$, $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $(B \setminus C) \cap (C \setminus A)$ i $(B \setminus C) \cup (C \setminus A)$.

10. Neka je $A \subseteq B$ i C proizvoljan skup. Dokažite

$$(A \triangle C) \setminus B = C \setminus B \subseteq C \setminus A.$$

11. Napišite obrat, obrat po kontrapoziciji, suprotni sud i negaciju sljedećih sudova. Odredite istinitost svih sudova.

   (a) Ako je ρ refleksivna relacija na $\mathbb{N}$, onda je $(-1, -1) \in \rho$.

(b) Ako je ρ refleksivna relacija na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, onda je $\varnothing \subseteq \rho$.

(c) Ako je ρ refleksivna relacija na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, onda je $\varnothing \in \rho$.

(d) Ako je relacija ρ refleksivna, onda ona nije irefleksivna.

(e) Ako je ρ relacija ekvivalencije, onda ρ nije relacija parcijalnog uređaja.

12. Na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je zadana relacija ρ na sljedeći način:

$$A\rho B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing.$$

Ispitajte svojstva ove relacije. Nadopunite je minimalnim brojem elemenata do relacije ekvivalencije.

13. Na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ je zadana relacija ρ na sljedeći način:

$$A\rho B \Leftrightarrow A \cup B = \mathbb{R}.$$

Ispitajte svojstva ove relacije.