
SVEUČILIŠTE U SPLITU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

BAYESOVE MREŽE U MODELIRANJU UČENIKA

Ivan Peraić

Mentor:

Prof.dr.sc. Slavomir Stankov

Neposredni voditelj:

Mr.sc. Ani Grubišić

Split, svibanj 2012.

Zahvala

Zahvaljujem svom mentoru prof. dr. sc. Slavomiru Stankovu, te posebno zahvaljujem profesorici mr. sc Ani Grubišić na savjetima, uloženom trudu i pomoći koju mi je pružila pri izradi ovog rada.

Hvala i ostalim profesorima i prijateljima na ukazanoj podršci, te mojoj obitelji za razumijevanje i podršku tijekom cijelog studija.

Sadržaj

1	UVOD	4
2	TEORIJSKA OSNOVA	8
2.1	TEORIJA VJEROJATNOSTI.....	8
2.1.1	<i>Aksiomska definicija vjerojatnosti</i>	8
2.1.2	<i>Uvjetna vjerojatnost</i>	10
2.2	BAYESOVA FORMULA.....	11
2.3	BAYESOVA MREŽA.....	12
2.3.1	<i>Postupak oblikovanja Bayesove mreže</i>	12
2.3.2	<i>Zaključivanje u Bayesovoj mreži</i>	15
2.3.3	<i>Neovisnost pretpostavki u Bayesovim mrežama</i>	20
2.3.4	<i>Konzistentnost vjerojatnosti u Bayesovim mrežama</i>	23
2.4	MODELIRANJE UČENIKA	24
2.4.1	<i>Primjena bayesove teorije u modeliranju učenika</i>	28
2.4.2	<i>Primjer sustava s probabilističkim modelom učenika</i>	29
3	PRISTUP PROBABILISTIČKOM MODELIRANJU UČENIKA	32
3.1	RAČUNANJE „A PRIORI“ VJEROJATNOSTI	36
3.2	RAČUNANJE UVJETNIH VJEROJATNOSTI	38
3.2.1	<i>Uvjetne vjerojatnosti ovisne samo o roditeljima varijable</i>	39
3.2.2	<i>Uvjetne vjerojatnosti ovisne i o roditeljima i o djeci varijable</i>	41
3.2.3	<i>Uvjetne vjerojatnosti ovisne samo o djeci varijable</i>	44
3.3	ZAKLJUČIVANJE O ZNANJU UČENIKA NA TEMELJU BAYESOVE MREŽE.....	47
3.3.1	<i>Postavljanje dokaza</i>	47
3.4	ISPITIVANJE UČINKOVITOSTI I POUZDANOSTI MODELA	52
3.4.1	<i>Testiranje 1</i>	53
3.4.2	<i>Testiranje 2</i>	55
3.4.3	<i>Testiranje 3</i>	58
3.4.4	<i>Testiranje 4</i>	59
3.4.5	<i>Testiranje 5</i>	60
3.4.6	<i>Interpretacija rezultata</i>	62
4	ZAKLJUČAK	64
5	LITERATURA	65
6	PRILOZI	67
6.1	PRILOG A – MODEL_ZNANJE1	68
6.2	PRILOG B – KONCEPTI_PRIJE	70
6.3	PRILOG C – MODEL_ZNANJE2	72
6.4	PRILOG D – KONCEPTI_POSLIJE	74
6.5	PRILOG E – MREZA 1	76
6.6	PRILOG F – MREZA 2	77
6.7	PRILOG G – MREZA 3.....	78
6.8	PRILOG T1 – TESTIRANJE 1.....	79

6.9	PRILOG T2 – TESTIRANJE 2.....	81
6.10	PRILOG T3 – TESTIRANJE 3.....	83
6.11	PRILOG T4 – TESTIRANJE 4.....	85
6.12	PRILOG T5 – TESTIRANJE 5.....	87

1 Uvod

Danas je sveprisutna potreba, ali i želja da se unaprijedi kvaliteta i dostupnost različitih obrazovnih programa. Pri tome je obrazovanje postalo cjeloživotnim procesom i potrebom, pa se briga o dostupnosti i kvaliteti odnosi na sveukupni ciklus cjeloživotnog obrazovanja. Postalo je jasno da se navedeno ne može ostvariti bez odgovarajuće i učinkovite uporabe informacijskih i komunikacijskih tehnologija u obrazovnome procesu. Ta upotreba informacijske i komunikacijske tehnologije u procesu obrazovanja (proces učenja i poučavanja) predstavlja novi pojam koji se zove *e-učenje* (eng. *e-learning*). Kvalitetna implementacija tehnologija e-učenja donosi niz prednosti u obrazovni proces i omogućava željeno novo, moderno i kvalitetno obrazovanje. Uvođenje tih tehnologija i inovacija u polje obrazovanja ne smanjuje samo učinkovit trošak primjene pedagoških teorija, već otvara mogućnost istraživanja modela sa različitih polja [Millan, Perez, (2002)]. *Inteligentni tutorski sustavi* (eng. *Intelligent Tutoring Systems(ITS)*) za razliku od tradicionalnih sustava za potporu procesa učenja i poučavanja, imaju mogućnost da se prilagode svakom pojedinom učeniku. Upravo ta sposobnost da se prilagodi svakom učeniku omogućuje poboljšanje nastave, jer se pokazalo da je najbolji način individualno učenje ili poučavanje po principu jedan-na-jedan [Bloom, 1984].

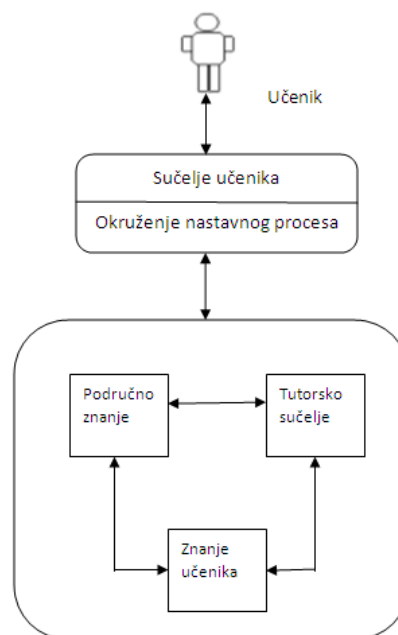
Inteligentni tutorski sustavi su generacija računalnih sustava namijenjena potpori i poboljšanju procesa učenja i poučavanja u odabranom područnom znanju, uvažavajući pri tom individualnost onoga tko uči i onoga koga se poučava ([Wenger, 1987], [Ohlsson, 1987], [Sleeman & Brown, 1982]). Radom s inteligentnim tutorskim sustavom učenik stječe osobnog "računalnog učitelja". Računalni je učitelj s jedne strane uvijek raspoložen, nema emocija, dok učenik s druge strane pred njim nema potrebe kriti svoje neznanje, te slobodno, prirodno komunicira. Projektiranje i implementacija inteligentnih tutorskih sustava sustavno je pridonosilo i još uvijek pridonosi razvoju metoda i tehnika umjetne inteligencije.

Inteligentni tutorski sustavi prilagođavaju sadržaj i način izlaganja nastavnih tema sposobnostima učenika. U tom je smislu znanje ključ inteligentnog ponašanja, pa stoga inteligentni tutorski sustavi imaju sljedeće temeljne odrednice:

- znanje koje sustav ima o područnom znanju (modul stručnjaka)
- principi pomoću kojih sustav poučava i metode pomoću kojih primjenjuje te principe (modul učitelja) i
- metode i tehnike za modeliranje učenika tijekom stjecanja znanja i umijeća (modul učenika).

Inteligentni tutorski sustavi se, dakle, sastoje od četiri međusobno povezana programska modula (Slika 1.1) kako slijedi [Burns & Capps, 1988]:

- I. Modul stručnjaka (područno znanje) kao nosilac područnog znanja s kojim će tijekom učenja i poučavanja učenik komunicirati. Ekspertni je modul "...kralježnica svakog inteligentnog tutorskog sustava" (Anderson, 1988).
- II. Modul učenika (znanje učenika - dinamički model stjecanja znanja i vještina učenika) obuhvaća sve aspekte stjecanja učenikova znanja i vještina u danom područnom znanju. Modul učenika je nosilac procedure modeliranja učenika, koje obuhvaća model učenika i dijagnostiku znanja učenika. Model učenika je skup podataka koji prikazuje aktualnu razinu znanja i vještina, dok je dijagnostika proces upravljani tim podacima.
- III. Modul učitelja (tutorsko znanje) jedinica je za vođenja procesa stjecanja znanja i vještina učenika. U tom je smislu modul učitelja nosilac scenarija poučavanja i pedagoških znanja s kojim raspolaže "živi" učitelj.
- IV. Komunikacijski modul (sučelje učenika i okruženje nastavnog procesa - interakcija učenik-učitelj-znanje) predstavlja korisničko sučelje učenika i inteligentnog tutorskog sustava.



Slika 1.1 Tradicionalna struktura inteligentnog tutorskog sustava

Prethodno je spomenuto da je model učenika skup podataka koji prikazuje aktualnu razinu znanja i vještina učenika, te je neophodan za predstavljanje probabilističkog modela učenika i kao takav predstavlja ključnu komponentu svakog ITS-a. Kognitivno stanje se generira iz interakcije sa sustavom. Što je točniji učenikov model, to ITS može ostvariti bolji i kvalitetniji proces učenja i poučavanja [Millan,Perez, 2002]. U ovom radu predstaviti će se probabilistički model učenika temeljen na *Bayesovoj mreži* (eng. *Bayesian network*).

Ideja Bayesovih mreža nije najnovija, s njima se počelo baviti već osamdesetih godina na području ekspertnih sustava. Pravi opseg ovo područje počinje zauzimati u devedesetima, vjerojatno zbog povećanja brzine računala i obnovljenih interesa za distribuirane sustave, omogućujući im da koriste nešto veći broj praktičnih problema. Velike računske složenosti su jedna od najvećih prepreka za šire korištenje Bayesove mreže.

Za razliku od klasičnih ekspertnih sustava kojima je glavna svrha modeliranje znanja stručnjaka i zamjena stručnjaka u procesima planiranja, analize, učenja i odlučivanja, svrha Bayesovih mreža je modeliranje određene problemske domene i samim time one postaju pomoć stručnjacima kod proučavanja uzroka i posljedica u problemima koji se modeliraju.

Iznimno je važno staviti naglasak na modeliranje domene, kao najvažnije obilježje Bayesove mreže. Modeliranje domene odnosi se na prikupljanje i određivanje svih potrebnih vrijednosti kako bi se Bayesova mreža mogla inicijalizirati. U prvom redu odnosi se na modeliranje zavisnosti među varijablama. Zavisnosti se modeliraju pomoću mrežne strukture i skupa uvjetnih vjerojatnosti. Za definirati jednu Bayesovu mrežu potrebno je definirati čvorove (ili varijable), moguće vrijednosti koje pojedini čvor može poprimiti, veze između čvorova i vrijednosti uvjetnih vjerojatnosti u čvorovima [Prcela, 2010].

Probabilistički model učenika temeljen na *Bayesovoj mreži* omogućuje mjerenje učenikova znanja u različitim razinama granulacije (to zapravo znači da je predmet koji se obrađuje strukturiran). Integracija probabilističkog modela sa Bayesovom mrežom u ITS-ovima predstavlja jedan način za olakšavanje učenja učeniku. Naime, ovaj model omogućava donošenje zaključaka o stvarnom znanju učenika. Također, ne uči i poučava učenike već naučene pojmove, već omogućava računalnom tutoru vođenje procesa učenja i poučavanja u smjeru učenja samo onih pojmova za koje se smatra da ih nije svladao. Najteži je problem stvoriti model koji bi omogućio opisano, a cilj ovog rada je oblikovati upravo probabilistički model temeljen na Bayesovoj mreži, te usporediti rezultate sa stvarnim znanjem učenika. Detaljno će biti opisani koraci u stvaranju tog probabilističkog modela kao i rezultati ispitivanja učinkovitosti predviđanja.

U drugom poglavlju pažnja će se posvetiti teoretskoj podlozi na kojoj počiva svaka Bayesova mreža, a budući je Bayesova mreža probabilistička, prva cjelina drugog poglavlja odnosi se na teoriju vjerojatnosti. U nastavku tog poglavlja prikazati će se klasični primjer Bayesove mreže i objasniti će se opći postupci zaključivanja koji vrijede u svakoj Bayesovoj mreži. Nakon toga obradit će se problem modeliranja učenika općenito, te prikazati sustav Andes koji predstavlja ITS s probabilističkim modeliranjem učenika.

Treće poglavlje će biti posvećeno oblikovanju novog pristupa probabilističkom modelu učenika. Model temeljeni na opisanom pristupu temelje se na istoj mreži, no različita im je struktura uvjetnih vjerojatnosti i razina postavljanja dokaza. Cilj svakog od ovih modela je predviđanje znanja učenika na temelju nekoliko poznatih koncepata. Na kraju ovog poglavlja biti će prikazani rezultati usporedbe stvarnog znanja učenika i napravljenih

probabilističkih modela, te analiza i interpretacija na temelju koje su doneseni zaključci o modelu s optimalnom razinom predviđanja stvarnog znanja učenika.

U ovom radu korišten je alat za uređivanje Bayesovih mreža *GeNIe* (eng. *Graphical Network Interface*) koji pruža grafičko korisničko sučelje za jednostavniju izgradnju Bayesovih mreža. Program je dostupan na: <http://genie.sis.pitt.edu/>.

Ovaj diplomski rad se temelji na postavkama i spoznajama koje su navedene u doktorskoj disertaciji mr.sc. Ani Grubišić, koja je ujedno i neposredni voditelj na ovom diplomskom radu. Cijeli diplomski rad, a posebno treće poglavlje bavi se implementacijom probabilističkog modela učenika, za što su korištene definicije iz doktorske disertacije. Definicije iz doktorske disertacije koje su korištene u diplomskom radu su sljedeće: Definicija 3.1, Definicija 3.2, Definicija 3.3 i definicija funkcije X_v .

2 Teorijska osnova

Modeliranje domene usko je povezano sa *teorijom klasične vjerojatnosti* i *teorijom korisnosti* (eng. *utility*), te *teorijom odlučivanja* (eng. *decision*). Teorija vjerojatnosti daje odgovor na pitanje u što bi se trebalo vjerovati, naravno na temelju dokaza. Teorija korisnosti odgovara na pitanje, što se dobije, odnosno koja je korist određene akcije. Teorija odlučivanja, na temelju prethodne dvije, odgovara što bi se trebalo učiniti dalje. Bayesova mreža stručnjaku daje podatke o tome u koje događaje treba vjerovati i s kojom vjerojatnošću mogu određeni događaji nastupiti. Osim toga, daje odgovor i kolika je korist od odabira određene akcije kod rješavanja problema, tako da sustav koji koristi Bayesovu mrežu može, na temelju podataka o vjerojatnostima i korisnostima, donijeti opravdane odluke.

2.1 Teorija vjerojatnosti

Bayesova mreža na temelju podataka o vjerojatnostima donosi odluke, stoga će se u ovom poglavlju definirati pojmovi vezani za vjerojatnosti. Definirati će se pojmovi kao što su vjerojatnost, slučajna varijabla, prostor vrijednosti i združena vjerojatnost. Budući je uvodu naglašeno je da je za definiranje Bayesove mreže, između ostalog, potrebno definirati vrijednosti uvjetnih vjerojatnosti u čvorovima, u ovom poglavlju će se također definirati uvjetna vjerojatnost.

2.1.1 Aksiomska definicija vjerojatnosti

U teoriji vjerojatnosti razmatraju se događaji koji se mogu, ali ne moraju dogoditi.

Definicija 2.1 *Neka je A događaj koji promatramo, te neka je Ω - skup svih događaja (prostor stanja). Vjerojatnost pojave događaja A odnosno vjerojatnost da će se A dogoditi označavamo sa $P(A)$.*

Aksiomi vjerojatnosti su:

1. $\forall A \in \Omega : P(A) \geq 0$ (nenegativnost)
2. $P(\Omega) = 1$ (normiranost)

3. Ako su A_1, A_2, \dots, A_k međusobno isključivi događaji (bez zajedničkog presjeka, tj. ni jedan podskup ne može nastupiti zajedno), vjerojatnost da nastupi barem jedan od njih (može i više) je suma individualnih vjerojatnosti (aditivnost).

Iz 1.i2. slijedi: $\forall A \in \Omega : 1 \geq P(A) \geq 0$

ako $P(A) = 0$, A se neće dogoditi

ako $P(A) = 1$, A će se sigurno dogoditi

Definicija 2.2 Slučajna varijabla je varijabla koja može poprimiti vrijednosti iz skupa isključivih i potpunih vrijednosti (prostora vrijednosti ili stanja, engl. *sample space*) s određenom vjerojatnošću.

Primjer 1.1

Neka X označava istinitost logičkog iskaza.

X može poprimiti vrijednosti istinit ili neistinit $\{I, L\} = \Omega_X$. Skup je isključiv i potpun. Slučajna varijabla je diskretna i binarna.

Sve varijable u Bayesovim mrežama u ovom radu će biti logičke.

Sa Ω_X označava se prostor vrijednosti, i pretpostavljamo konačan prostor vrijednosti (diskretan).

Definicija 2.3 Skup konjunkcija slučajnih varijabli (zajednički skup, zajedničko nastupanje) slučajnih varijabli X i Y označavamo kao novu varijablu $Z(X, Y)$.

Definicija 2.4 Prostor vrijednosti nove varijable je produkt: $\Omega_Z = \Omega_X \Omega_Y$

Primjer 1.2

Neka je: $\Omega_X = \Omega_Y = \{I, L\}$. Tada je:

$$\Omega_Z = \{(I, I), (I, L), (L, I), (L, L)\}$$

Definicija 2.5 Razdiobu vjerojatnosti definiramo preko konačnog prostora vrijednosti:

$$\forall x \in \Omega_X : 0 \leq P(X = x) \leq 1, \sum_x P(X = x) = 1$$

Primjer 1.3

Neka je X diskretna binarna slučajna varijabla : $\Omega_X = \{I, L\}$

razdioba vjerojatnosti je dana sa: $P(X = T) = 0.7$

$$P(X = F) = 0.3 \sum = 1 \text{ (konzistentnost)}$$

Združena vjerojatnost (eng. Joint distribution) označava zajedničko nastupanje ili konjukciju varijabli. Združena vjerojatnost dviju varijabli A i B , sa prostornim vrijednostima $\Omega_A = \Omega_B = \{I, L\}$ ima dva stupca i dva retka, i predstavljaju sve moguće kombinacije:

Definicija 3.1 Tablica 2.1 Združena vjerojatnost varijabli A i B sa prostornim vrijednostima

$$\Omega_A = \Omega_B = \{I, L\}$$

	$B = I$	$B = L$
$A = I$	0.1	0.2
$A = L$	0.3	0.4

Za n varijabli veličina ove tablice je 2^n , što znači da tablica raste eksponencijalno u odnosu na veličinu problema opisanog s n varijabli. Koristeći združenu vjerojatnost moguće je izračunati svaku "a priori" i uvjetnu vjerojatnost budući da su poznate sve moguće vjerojatnosti koje opisuju problem. Iz tablice je moguće izračunati vjerojatnost za bilo koju kombinaciju događaja.

Općenito za skup slučajnih varijabli $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ prostor vrijednosti je n -dimenzionalan:

$$(\Omega_{X1} \cdot \Omega_{X2} \cdot \dots \cdot \Omega_{Xn}) = \prod_{i=1}^n \Omega_{Xi}$$

2.1.2 Uvjetna vjerojatnost

Ako saznamo neku informaciju, može se dogoditi da se vjerojatnosti događaja promijene. Kako bi izračunali vjerojatnost nekog događaja na temelju poznatih stanja, koristimo uvjetnu vjerojatnost.

Definicija 2.6 Vjerojatnost da će se dogoditi događaj A ako se dogodio događaj B naziva se uvjetna vjerojatnost (eng. Posterior probability) i označava na sljedeći način:

$$P(A|B)$$

Uobičajeno se piše $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ali također se piše $P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}$

gdje je $P(A, B)$ vjerojatnost istodobnog pojavljivanja A i B , a $P(B)$ je vjerojatnost pojavljivanja B .

Prije samog izračuna uvjetne i zajedničke vjerojatnosti, potrebno je utvrditi da li su događaji zavisni, nezavisni ili su možda međusobno isključivi. Dva događaja su nezavisna ako bilo koji ishod jednog događaja ne utječe na vjerojatnost bilo kojeg drugog događaja. Zajednička

vjerojatnost nezavisnih događaja A i B jest produkt njihovih individualnih vjerojatnosti:
 $P(A|B) = P(A, B) * P(B)$

Ako su A i B nezavisni događaji, uvjetna vjerojatnost je dana na sljedeći način:

- vjerojatnost A u danom B je individualna vjerojatnost samog A tj.
 $P(A|B) = P(A)$, odnosno
- vjerojatnost B u danom A je individualna vjerojatnost samog B , tj.
 $P(B|A) = P(B)$.

2.2 Bayesova formula

Bayesova mreža je naziv dobila po britanskom matematičaru Thomasu Bayesu (1702.-1761.) koji je u svojem radu opisao matematičku formulu koja danas ima veliku važnost kod teorije vjerojatnost. Formula glasi :

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} \quad (1)$$

gdje je $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ potpun skup događaja na vjerojatnosnom prostoru, a A je događaj za koji vrijedi da je $P(A) > 0$ u vjerojatnosnom prostoru.

Bayesova formula računa vjerojatnost da se ukoliko je ostvaren događaj A , potvrdio skup početnih hipoteza. Za primjenu formule je potrebno poznavati vjerojatnosti $P(A)$ i $P(H_i)$, te je potrebna i statistika kojom se određuje vjerojatnost $P(A|H_i)$. Formula vrijedi u slučaju da nema međusobne ovisnosti između događaja A i niza hipoteza H .

Iako je Thomas Bayes opisao formulu još u 18. stoljeću, formula je pravu primjenu doživjela tek u 20. stoljeću razvojem područja umjetne inteligencije (učenje na temelju Bayesovih mreža, područje strojno učenje (eng. machine learning)).

Bayesove mreže su usmjereni aciklički matematički grafovi kod kojih vrhovi predstavljaju slučajne varijable, a bridovi prikazuju ovisnosti između slučajnih varijabli. Graf je acikličan, što znači da ne smiju postojati ciklusi u grafovima, odnosno, varijable moraju biti nezavisne.

2.3 Bayesova mreža

Bayesova mreža (eng. Bayesian network) je probabilistički grafički model kojim se prikazuju zavisnosti među varijablama. Sama mreža je usmjereni aciklički graf u kojem čvorovi predstavljaju varijable, a bridovi njihove međuzavisnosti. Na temelju Bayesove mreže moguće je izračunati očekivanja (vjerojatnosti) svih nepoznatih varijabli u sustavu na temelju već poznatih varijabli (dokaza) [Charniak, 1991].

Velika većina događaja vezanih uz istraživanje na Bayesovim mrežama dogodila se već u osamdesetim godinama (engl. *belief networks, causal networks, influence diagrams*) kada se formirala opće prihvaćena struktura mreže, razvili mnogi alati za rasuđivanje i kada su se Bayesove mreže već počele koristiti u raznim primjenama. U devedesetima se pojavljuju i brojni algoritmi za učenje Bayesovih mreža iz skupova podataka. Bayesove mreže i danas predstavljaju model primjenjiv u računalnim sustavima u raznim područjima ljudskog djelovanja [Prćela, 2010].

Kako bi se definirala jedna Bayesova mreža potrebno je definirati:

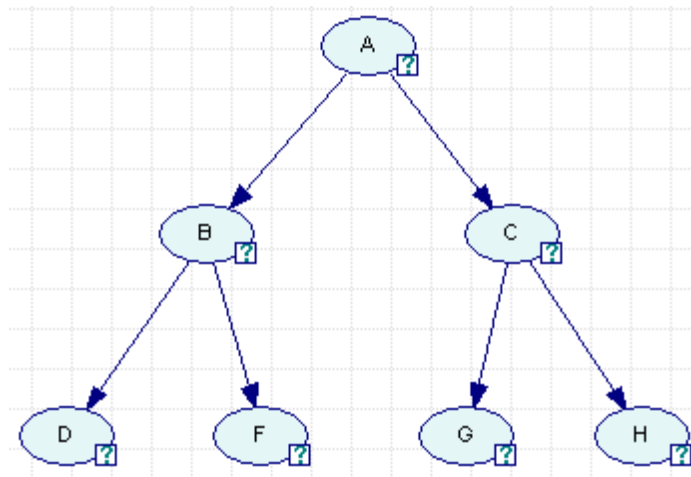
- čvorove u mreži (varijable u problemu),
- moguće ishode svih čvorova (vrijednosti koje varijable mogu poprimiti),
- bridove u mreži (povezanost varijabli),
- združene distribucije vjerojatnosti ishoda u svakom pojedinom čvoru ovisno o njegovim roditeljima u mreži.

Za čvorove koji nemaju roditelje potrebno je definirati samo a priori očekivanja njihovih ishoda. A priori očekivanja ishoda čvorova koji imaju roditelje definirana su preko pripadnih tablica združene distribucije vjerojatnosti i preko a priori očekivanja njihovih roditelja. Stoga je suvišno u definiciji mreže eksplicitno navoditi a priori vjerojatnosti ishoda za čvorove koji imaju roditelje.

U ovom poglavlju opisat će se postupak oblikovanja Bayesove mreže, i na primjeru prikazati taj postupak u praksi. Također, objasniti će se postupci zaključivanja u Bayesovoj mreži.

2.3.1 Postupak oblikovanja Bayesove mreže

Prethodno je naglašeno da je Bayesova mreža aciklički graf u kojem čvorovi predstavljaju varijable, a bridovi njihove međuzavisnosti. Svaki brid ima svoj početak i kraj (kraj je označen strelicom). Varijable prema kojima je upućen brid nazivaju se djeca, a varijable kod kojih je početak brida nazivaju se roditelji. Na sljedećoj slici je primjer jednostavne Bayesove mreže (Slika 2.1).



Slika 2.1 Primjer jednostavne Bayesove mreže

Da bi pristupili oblikovanju Bayesove mreže, bitno je definirati problem, a zatim pristupiti oblikovanju. U Bayesovoj mreži, varijable koje nemaju roditelje nazivaju se korijeni, i te varijable se prve postavljaju u Bayesovoj mreži. Sa prethodne slike je jasno da je varijabla A korijen. Na njih ne utječe nijedna varijabla, dok one utječu na svoju djecu. Potom se bridovima povezuju njihova djeca. Taj postupak se ponavlja sve dok se ne dođe do krajnjih varijabli (varijable koje nemaju djece). Sa prethodne slike je jasno da su D, F, G i H varijable koje nemaju djece.

Nakon toga, potrebno je definirati tablice uvjetnih vjerojatnosti svake varijable. Pri tome broj roditelja neke varijable određuje dimenzionalnost njene tablice vjerojatnosti. U slučaju diskretnih binarnih varijabli za n roditelja potrebno je poznavati 2^n vjerojatnosti.

U nastavku će se opisati primjer Bayesove mreže sa logičkim varijablama (Istina i Laz).

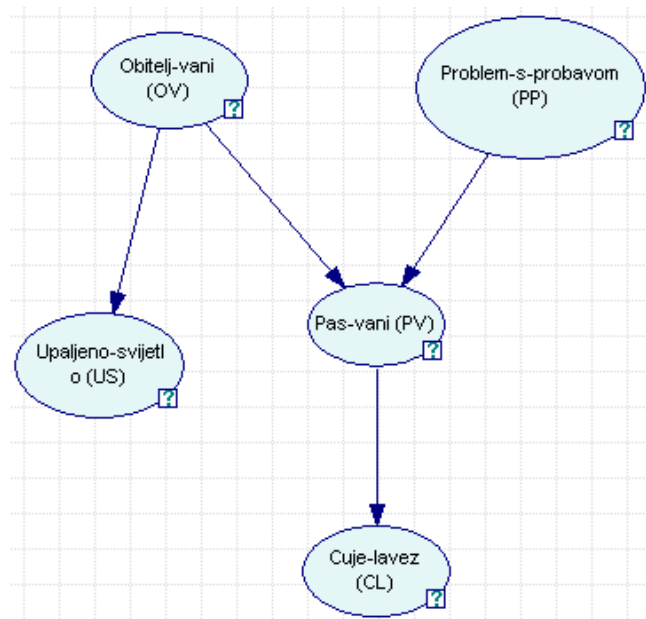
2.3.1.1 Primjer oblikovanja Bayesove mreže

U ovom poglavlju, u najvećoj mjeri je korišten [Charniak, 1991] kao literaturni izvor, stoga se na njega u nastavku neće posebno referencirati. Charniak u svom radu iz 1991. godine daje jednostavan primjer kojim demonstrira prednosti grafičkog modeliranja problema pomoću Bayesove mreže. Autor opisuje problemsku domenu u kojoj on živi u kući zajedno sa ženom i imaju psa kao kućnog ljubimca. Iza kuće je dvorište, a ispred kuće je trijem na kojem se nalazi rasvjeta. Nakon posla autor dolazi kući i zanima ga kolika je vjerojatnost da se netko nalazi u kući (da kuća nije prazna). Budući da živi dugo u tom susjedstvu poznaje određene varijable koje mu mogu pomoći u dobivanju odgovora:

- svjetlo na trijemu
 - o žena ga često upali kad ode negdje
 - o žena ga upali i kad očekuje goste
- pas

- kad nema nikog kod kuće nalazi se u dvorištu
- psa vode u dvorište i kad ima probleme s probavom
- ako je pas iza kuće može se čuti kako laje, ali njegov lavež se može zamijeniti sa drugim psima koji se čuju u susjedstvu

U ovom problemu je moguće uočiti pet slučajnih varijabli: žena, pas, problem s probavom, svjetlo i lavež. Koristeći grafički prikaz pomoću Bayesove mreže, ovaj problem je moguće prikazati na sljedeći način:



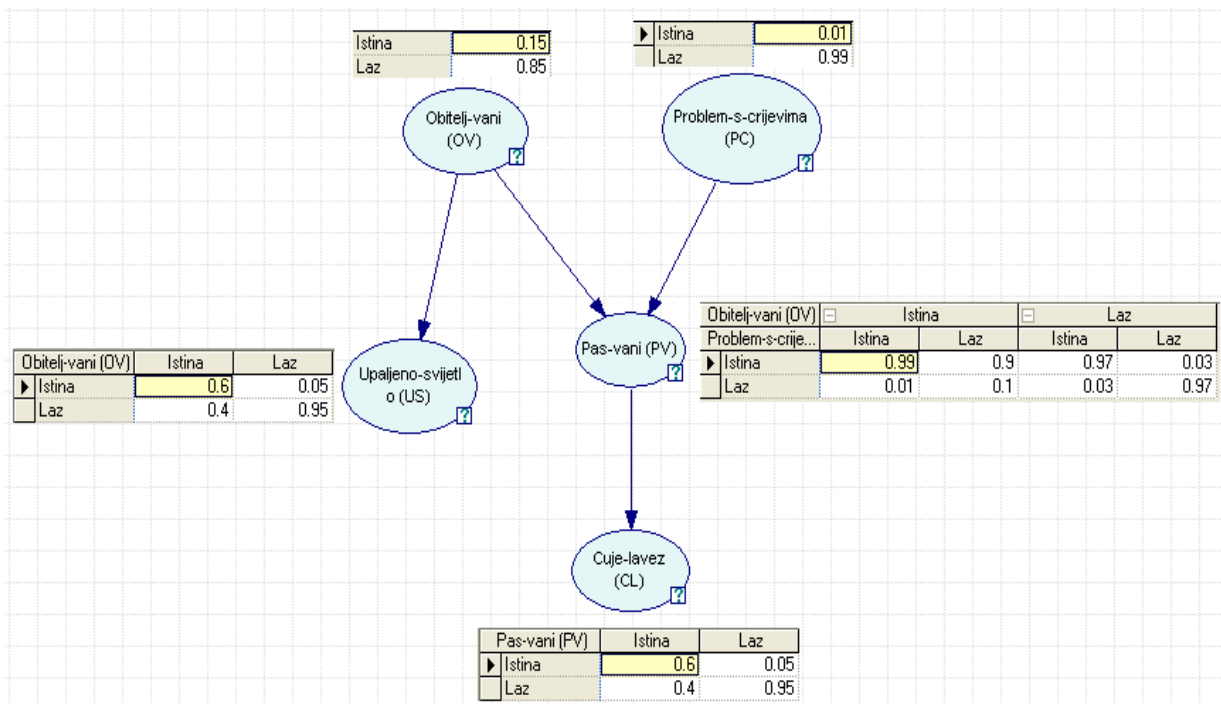
Slika 2.2 Bayesova mreža

Na Sliku 2.2 se vidi da ako žena nije u kući tada je ili upaljeno svjetlo ili je pas u dvorištu. Pas je u dvorištu i ako ima problema s probavom. Ako je pas u dvorištu, onda se može čuti njegov lavež. Naravno, ovaj model je probabilistički što znači da se može dogoditi i da žena nije kod kuće, a svjetlo nije upaljeno. Isto tako, pas može biti u dvorištu, a da ne laje.

Kako bi se ovaj model upotpunio, potrebno je svakom čvoru pridružiti vjerojatnosti:

- a priori vjerojatnosti za čvorove bez roditelja
- uvjetne vjerojatnosti za sve čvorove s roditeljima i to za sve moguće kombinacije ishoda roditelja

Vjerojatnosti da učenik ne poznaje nijedan koncept koji odgovara roditeljima slučajne varijable iako poznaje koncept koji odgovara slučajnoj varijabli (*slučajna pogreška* - eng. unlucky slip) ili da poznaje sve koncepte koji odgovaraju roditeljima slučajne varijable iako ne poznaje koncept koji odgovara slučajnoj varijabli (*slučajni pogodak* – eng. lucky guess) iznosi 0,1 [Mayo, 2001].



Slika 2.3 Upotpunjena Bayesova mreža

Na Sliku 2.3 je prikazana Bayesova mreža za prethodni primjer koja je upotpunjena s vjerojatnostima za slučajne varijable. Čvorovi **Obitelj-vani** i **Problem-s-crijevimama** su roditelji u grafu pa je njima pridružena „a priori“ vjerojatnost. Čvor **Pas-vani** ima ukupno 4 vjerojatnosti jer ima 2 roditelja čije varijable su logičke (dva stanja).

Između ostalog, iz ove slike jasno je da će, ako članovi obitelji napuste kuću, oni će ostaviti upaljeno svjetlo vani 60 posto vremena, ali svjetlo će biti upaljeno čak i kad ne napuste kuću 5 posto vrijeme (recimo, zato što nekoga očekuju).

Pitanje je kako su dani brojevi dobiveni, tj. u ovom slučaju, odakle „a priori“ vjerojatnosti za korjenske čvorove **Obitelj-vani (OV)** i **Problem-s-crijevimama (PC)**. Charniak naglašava, da su svi brojevi, dobiveni na osnovi subjektivna mišljenja stručnjaka. Zbog toga, može doći do razlika u zaključivanju. Puno je bolji način prikupljanja podataka i izračuna potrebnih brojeva. U tom slučaju govorimo o idealnom slučaju. U trećem poglavlju će se u detalje pokazati na koji način su izračunate „a priori“ vjerojatnosti korjenskih čvorova i uvjetne vjerojatnosti u predstavljenom probabilističkom modelu učenika temeljenog na Bayesovoj mreži.

2.3.2 Zaključivanje u Bayesovoj mreži

Bayesova vjerojatnosna mreža može se koristiti za probabilističko zaključivanje o vjerojatnostima bilo kojeg čvora u mreži ako su poznate tablice uvjetnih vjerojatnosti. U većini slučajeva čvor kojemu tražimo razdiobu vjerojatnosti nema poznate vjerojatnosti za

neposredne čvorove pretke, ali je ipak moguće izračunati vjerojatnosti. Problematici su izračuni sa velikim brojem varijabli jer je točan proračun vjerojatnosti za proizvoljnu Bayesovu vjerojatnosnu mrežu težak kombinatorički problem. Predložene su mnogobrojne metode za probabilističko zaključivanje u Bayesovim mrežama, pri čemu mnoge preferiraju učinkovitost naspram preciznosti. Preciznost implicira *točna rješenja* (eng. *exact solutions*), no u tom slučaju čak i mreže od 10-ak čvorova zahtijevaju puno vremena. Alternativa su *približna rješenja* (eng. *approximate solutions*) sa kojima će se dobiti rješenja sa vrlo malim odstupanjima od točnih rješenja.

U nastavku će se pokazati način zaključivanja koji vrijedi u svakoj Bayesovoj mreži. Naime, računanje „a priori“ vjerojatnosti nekog čvora podrazumijeva računanje ishoda kad u mreži ne postoji nijedan dokaz. Suprotno tome, propagacija unaprijed/unatrag služi za računanje ishoda nekog proizvoljnog čvora kad su u mreži postavljeni dokazi.

2.3.2.1 Računanje „a priori“ vjerojatnosti čvorova

Od velike je važnosti, da se iz postavljenih vjerojatnosti mogu izračunati „a priori“ vjerojatnosti za sve varijable. „a priori“ očekivanje ishoda varijable u Bayesovoj mreži, podrazumijeva ishod kad u mreži ne postoji nijedan dokaz. Svakom čvoru se može izračunati „a priori“ vjerojatnost iz pripadnih združenih distribucija vjerojatnosti i „a priori“ očekivanja ishoda roditelja u mreži.

Na sljedećoj slici (Slika 2.4) prikazan je način računanja „a priori“ vjerojatnosti za čvor **Upaljeno – svijetlo (US)**. Čvor **Obitelj – vani (OV)** ima već postavljene „a priori“ vjerojatnosti (jer nema roditelja).

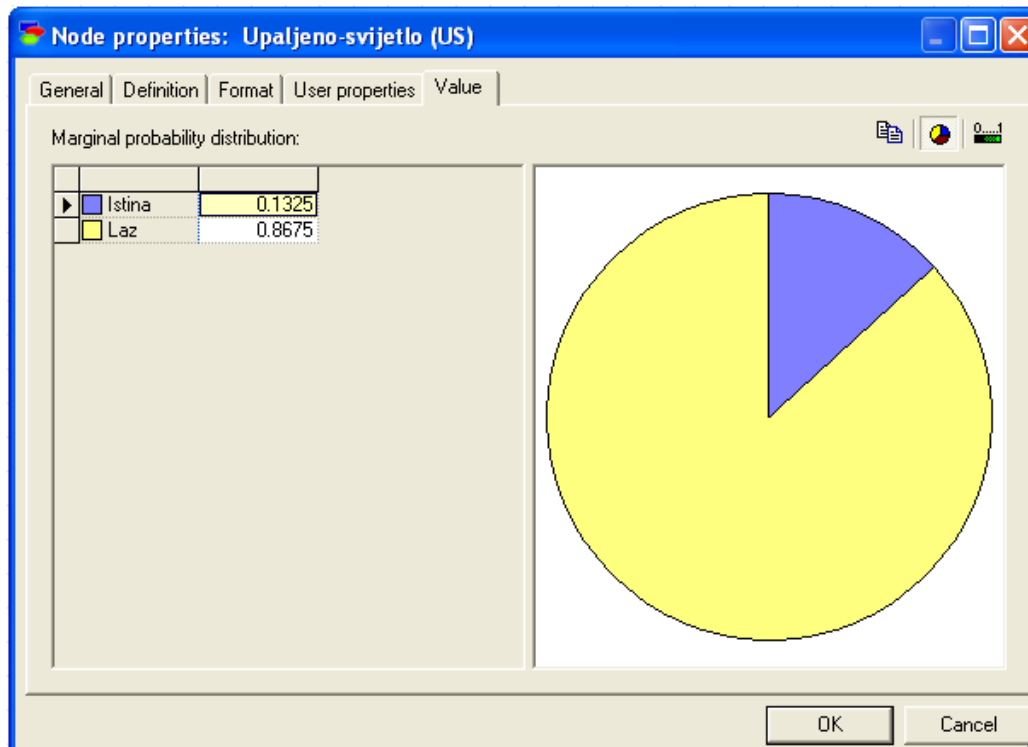
	Poznato	Način računanja
	$P(US) = 0.15$ $P(\neg US) = 0.85$ $P(US OV) = 0.6$ $P(US \neg OV) = 0.05$	$P(US) = P(US OV)P(OV) + P(US \neg OV)P(\neg OV)$ $P(US) = 0.6 * 0.15 + 0.05 * 0.85$ $P(US) = 0.09 + 0.0425$ $P(US) = 0.1325$

Slika 2.4

Prema prethodnom, računanje se obavlja slijedno niz mrežu (u smjeru bridova). Da bi se izračunala „a priori“ vjerojatnost nekog čvora, nužno je izračunati sve „a priori“ vjerojatnosti svih njegovih roditelja jer se pri računanju „a priori“ očekivanja jednog čvora prolazi iterativno kroz sve moguće kombinacije ishoda njegovih roditelja.

U prikazanom primjeru čvor **Upaljeno – svijetlo (US)** ima jednog roditelja pa račun nije složen. U općem slučaju važno je znati da broj kombinacija ishoda roditelja raste kombinatoričkom složenošću s obzirom na broj roditelja promatranog čvora.

Koristeći program GeNIe, dobije se jednak rezultat (Slika 2.5.).

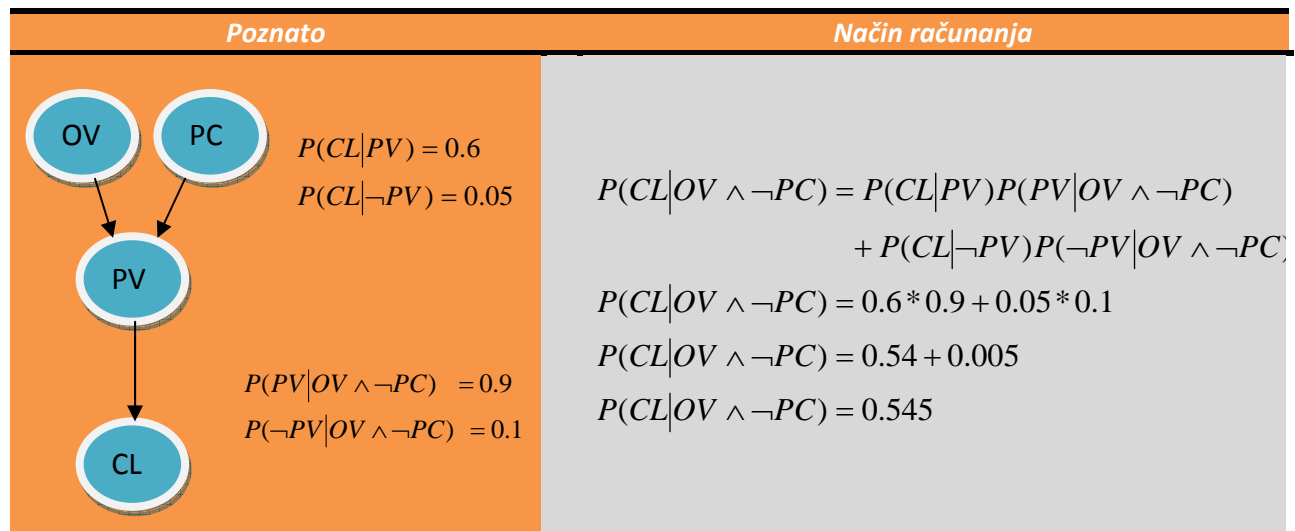


Slika 2.5 „a priori“ vjerojatnost za čvor „upaljeno-svijetlo (US)“

2.3.2.2 Propagacija unaprijed

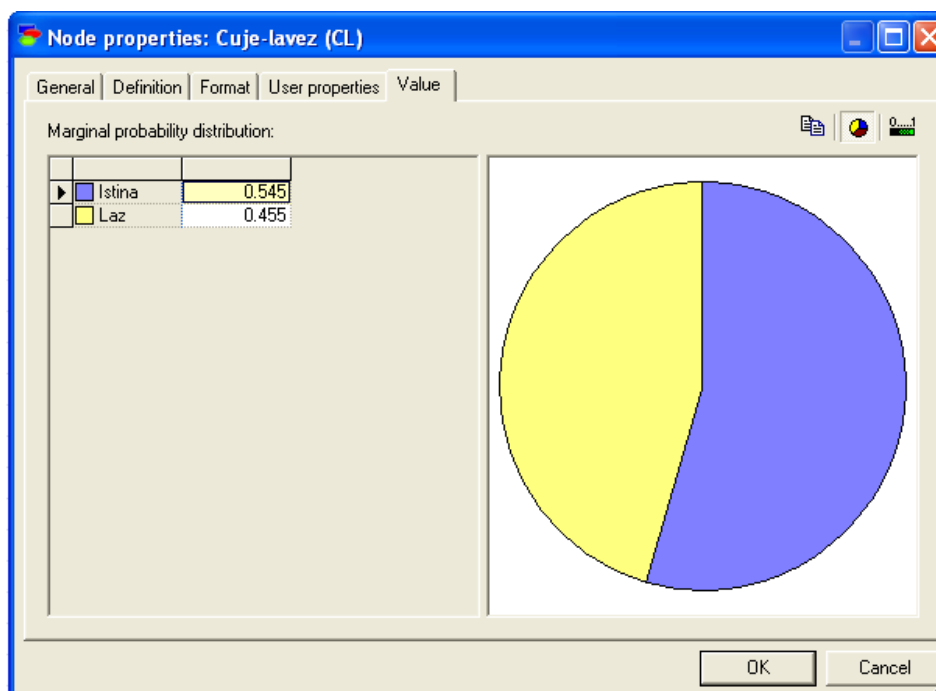
Ako je u mreži nešto poznato, očekivanja svih varijabli se mijenjaju, te se „a priori“ vjerojatnosti više ne očekuju jer postoje dokazi. Informaciju o postojanju dokaza potrebno je *propagirati unaprijed kroz mrežu* (u smjeru strelica) i *unatrag kroz mrežu* (obrnuto od smjera strelica).

Na sljedećoj slici (Slika 2.6) je prikazan primjer propagacije unaprijed. Odgovorit će se kolika je vjerojatnost da će se čuti lavež psa, ako je poznato da pas nema problema s probavom i da je obitelj vani. Dokazi ili poznata stanja su da pas nema problema sa probavom i da je obitelj vani. Propagacija unaprijed znači da se zaključuje od roditelja prema djeci.



Slika 2.6 Primjer propagacije dokaza unaprijed kroz mrežu. Poznavanje ishoda varijabli OV i PC utječe na očekivanje ishoda čvora CL

Isto je dobiveno programom GeNIe (Slika 2.7), kad se postavi dokaz **istina**, na čvor **Obitelj-vani (OV)** i dokaz na **laz** na čvor **Problem-s-crijevimama (PC)**.

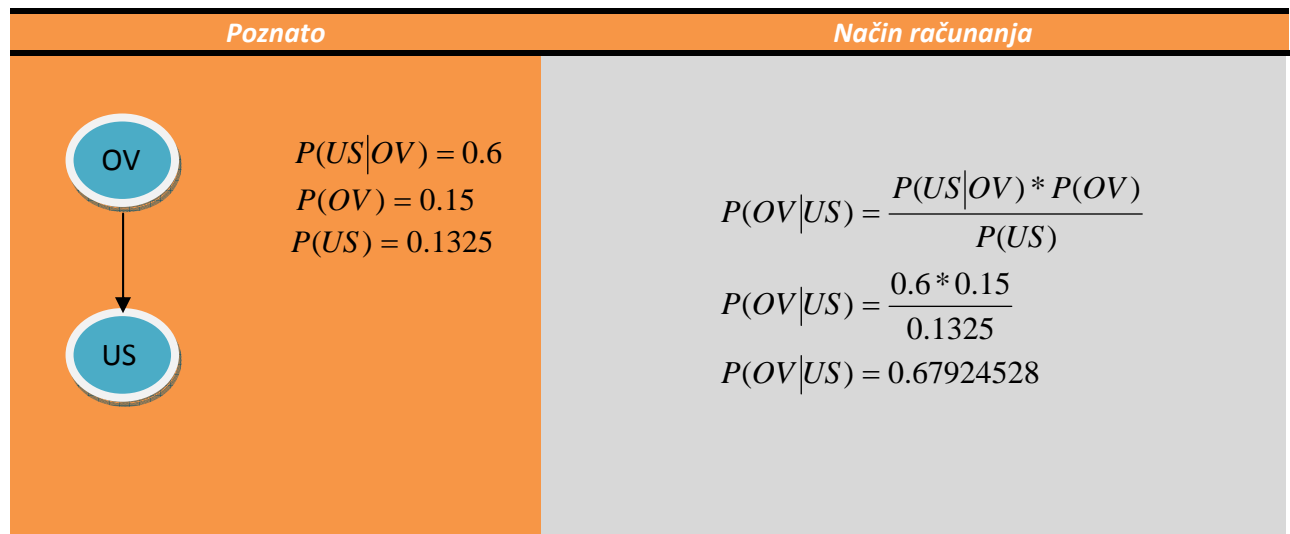


Slika 2.7 Vjerojatnost da će se čuti lavež psa kad postoje dokazi da je obitelj vani i da pas nema problema sa probavom.

2.3.2.3 Propagacija unatrag

Kako poznavanje ishoda nekog proizvoljnog čvora utječe na očekivanja djece, tako utječe i na očekivanje ishoda roditelja. Tada se može govoriti o *propagaciji dokaza unatrag* kroz mrežu. Poznavanje ishoda nekog čvora naravno predstavlja dokaz. U sljedećem slučaju, na kojem će se pokazati primjer propagacije unatrag, poznato je da je upaljeno svijetlo te se treba

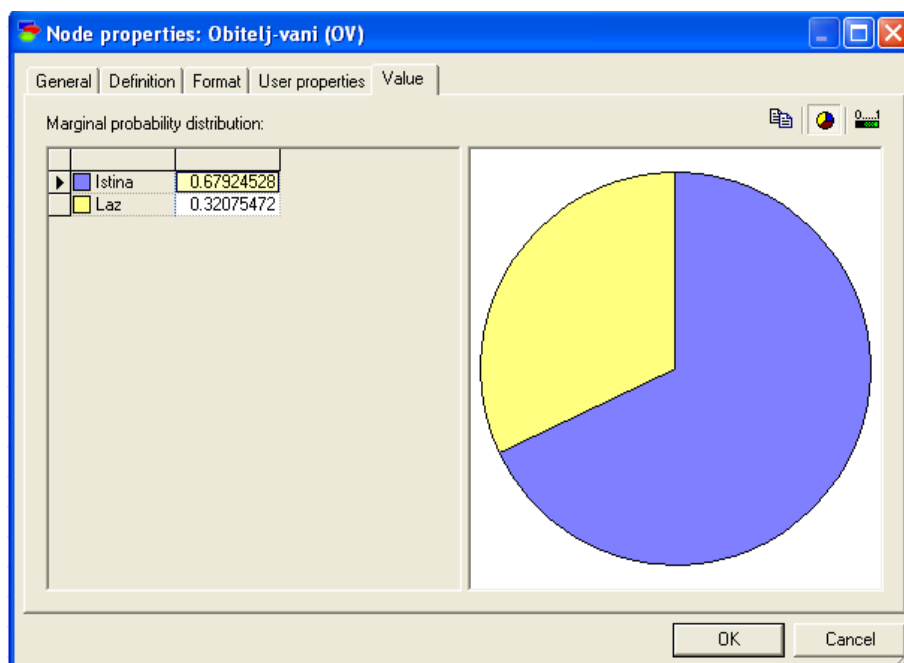
zaključiti koliki je ishod da je obitelj vani. U mreži se postavlja dokaz na čvor **Upaljeno–svijetlo (US)**.



Slika 2.8 Primjer propagacije dokaza unatrag kroz mrežu. Poznavanje ishoda varijable US utječe na očekivanje ishoda čvora OV

$P(US|OV)$ i $P(OV)$ su dani, a $P(US)$ je „a priori“ vjerojatnost čvora **Upaljeno – svijetlo (US)** i izračunata je po prethodno opisanom načinu određivanja „a priori“ vjerojatnosti, te iznosi $P(US) = 0.1325$.

Prema tome, vjerojatnost da je obitelj vani ako je upaljeno svijetlo iznosi 0.67924528 . To isto je dobiveno programom GeNIe (Slika 2.9), kad se stavi dokaz **istina**, na čvor **Upaljeno–svijetlo (US)**.

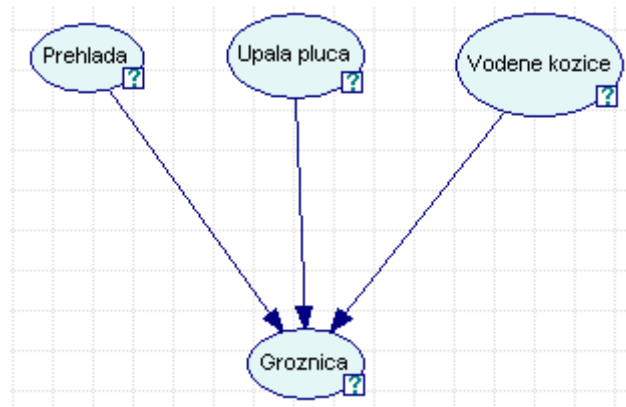


Slika 2.9 Vjerojatnost da je obitelj vani kad postoji dokaz da je upaljeno svijetlo

2.3.3 Neovisnost pretpostavki u Bayesovim mrežama

Prigovor na upotrebu teorije vjerojatnosti je da združena distribucija vjerojatnosti zahtijeva apsurdno mnogo brojeva. Primjerice, ako postoji n binarnih slučajnih varijabli, kompletna distribucija je određena sa 2^{n-1} vjerojatnosti. U odnosu na tablicu združene distribucije vjerojatnosti koja bi imala 31 vjerojatnost, Bayesova mreža sadrži samo 10 vjerojatnosti (Slika 2.3). To je primjer sa 5 slučajnih varijabli. Ako bi broj slučajnih varijabli bio 10, bilo bi potrebno 1023 vjerojatnosti u tablici združene distribucije vjerojatnosti, dok bi Bayesova mreža imala samo 21 vjerojatnost.

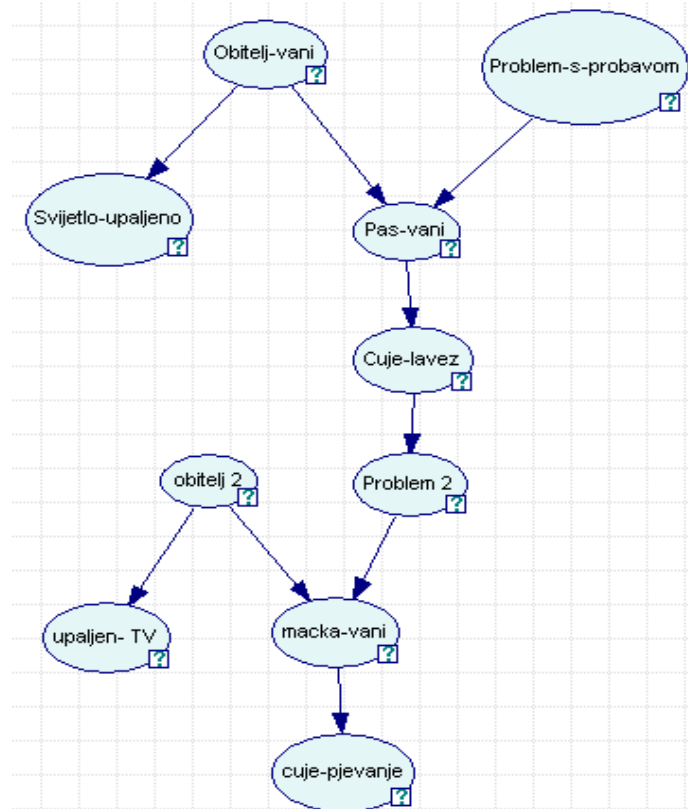
Velika razlika između potrebnih parametara u Bayes-ovoj mreži i tablici združene vjerojatnosti se najbolje vidi u primjeru kada nekoliko bolesti uzrokuje iste simptome. Na sljedećoj slici (Slika 2.10) je prikazana takva situacija.



Slika 2.10

Pretpostavi li se da su varijable logičke, čvor Groznica zahtjeva 8 uvjetnih vjerojatnosti. No, najvjerojatnije te brojeve liječnici neće znati. Umjesto toga, oni mogu znati da je vjerojatnost groznice 0.8 kod prehlade, 0.98 kod upale pluća i 0.4 kod vodenih kozica. Zahvaljujući Pearlu, umjesto 8 brojeva, trebat će samo 3.

Za opis složenijih problema uštede će biti još i veće. Ova ušteda ne čini se sjajnom, no, pretpostavimo da imamo mrežu (Slika 2.11) koja je dva puta veća od primjera na Slika 2.3.



Slika 2.11 Mreža sa 10 čvorova

Tada je 2^{10-1} jednako 1023, ali mi bi trebali tek 21 vrijednost. Postavlja se pitanje odakle dolazi ova ušteda?

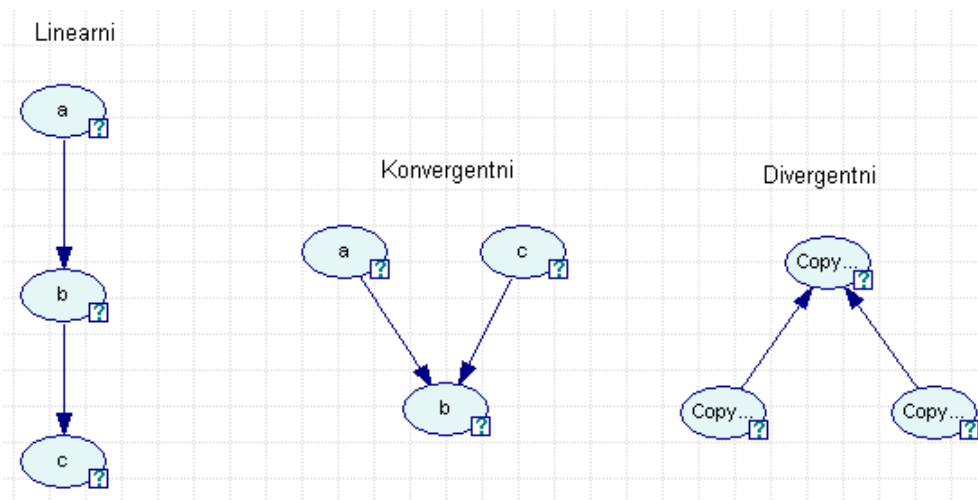
Odgovor leži u činjenici da je Bayesova mreža izgrađena na neovisnosti pretpostavke. Uzmimo u obzir slučajne varijable **Obitelj-vani (OV)** i **Cuti-lavez (CL)**. Jesu li te varijable nezavisne? Intuitivno ne, jer ako je obitelj vani, onda je više vjerojatno da će pas biti vani, i prema tome, vjerojatnije je da će lajati.

No, što ako se dogodi da znamo da je pas definitivno u kući ili izvan nje. Da li u tom slučaju **Cuti-lavez (CL)** postaje neovisno o **Obitelj-vani (OV)**? Odgovor u ovom slučaju je da, jer lavež ovisi o tome da li je pas unutra ili vani, i stoga gdje se nalazi obitelj nije ni važno.

Sada će se definirati *neovisnost pretpostavke* (eng. *Independence Assumptions*), koja pomaže da vjerojatnosti svedemo na manji broj u Bayesovoj mreži, no da bi to definirali, potrebno je definirati putanju *d-povezanosti* (eng. *d-connecting path*).

Definicija 2.7 U Bayesovoj mreži, varijabla a je ovisna o varijabli b na temelju dokaza $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ako postoji putanja d -povezanosti između njih. E je skup dokaza, koji može biti prazan, no ne može uključivati a ili b . Za E kažemo još da je skup evidencija ili poznato stanje. Ako a nije ovisan o b na temelju dokaza E , kažemo da je a neovisna o b , a ako su dvije varijable neovisne, tada je $P(a|b) = P(a)$.

Kako bi se bolje razumjela *d-povezanost* u Bayesovoj mreži, treba imati na umu da postoje tri tipa povezivanja slučajne varijable **b** i njenih dviju susjednih **a** i **c** na putu. Te tri mogućnosti su prikazane na sljedećoj slici.



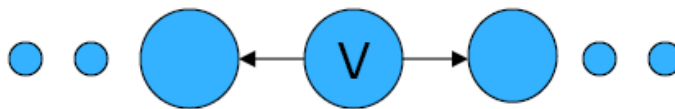
Slika 2.12 Tri tipa povezivanja (u svakom od tih slučajja, čvor b se nalazi između čvorova a i c)

Putanja od **a** do **b** je *d-povezana* na temelju dokaza **E** ako svaki unutarnji čvor **n** ima svojstvo:

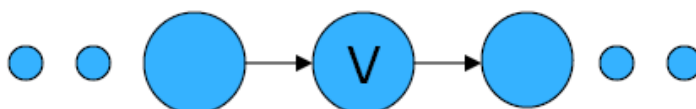
1. Ako je linearan ili divergirajući, tada nije član dokaza **E**,
2. Ako je on ili njegov potomak konvergirajući, tada je član dokaza **E**.

U literaturi, češće se koristi termin *d-separacija* (eng. *d-separation*). Dakle, dva su čvora *d-separirana* ako ne postoji putanja *d-povezanosti* između njih. Intuitivno, dva su čvora *d-separirana* kada:

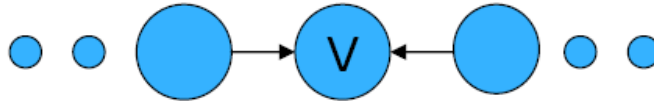
1. Na putu postoji čvor **V**
 - za kojeg postoje dokazi
 - čiji su lukovi okrenuti jedan prema drugom „repovima“



2. Na putu postoji čvor **V**
 - za kojeg postoje dokazi
 - čiji su lukovi okrenuti „glava“ prema „repu“



-
3. Na putu postoji čvor V
- za kojeg NE postoje dokazi
 - niti za bilo kojeg njegovog sljedbenika
 - a čiji su lukovi okrenuti jedan prema drugom „glavama“



2.3.4 Konzistentnost vjerojatnosti u Bayesovim mrežama

Problem koji se može javiti u Bayesovoj mreži je nekonzistentnost vjerojatnosti. Primjer bi bio da je neki sustav dan sa sljedećim vjerojatnostima

$$P(a|b) = 0.7, P(b|a) = 0.3, P(b) = 0.5.$$

Gledajući ove vjerojatnosti ništa se ne čini problematično, no primjenom Bayesovog pravila dobit će se nekonzistentne vjerojatnosti jer se zahtijeva da bude $P(a) > 1$, što je u kontradikciji s definicijom. Točnije, $P(a|b) = \frac{P(b|a)P(a)}{P(b)}$, pa je onda

$$P(a) = \frac{P(a|b)P(b)}{P(b|a)} = \frac{0.7 * 0.5}{0.3} = \frac{0.35}{0.3} > 1$$

Vođenje računa o konzistentnosti vjerojatnosti može biti problem. U Bayesovoj mreži taj problem je riješen, jer kad se odrede potrebne veličine (vjerojatnost svakog čvora i njegovih kombinacija s roditeljima) tada će svi brojevi biti konzistentni i mreža će na jedinstven način definirati distribuciju. Združena vjerojatnost u Bayes-ovoj mreži je jedinstveno definirana, kao product individualnih distribucija za svaku pojedinačnu varijablu. Za mrežu iz primjera sa početka ovog rada (Slika 2.3) i za svaku kombinaciju vrijednosti OV, PP,US, PV i CL (npr. I,L,L,I,I) združena vjerojatnost je dana sa:

$$P(OV, PP, US, PV, HB) = P(OV) * P(PP) * P(US|OV) * P(PV|OV \wedge PP) * P(CL|PV).$$

Pretpostavi li se mreža od n čvorova sa v_1, \dots, v_n varijabli, zakon koji smo koristili iznad daje sljedeće:

$$P(v_1, \dots, v_n) = P(v_1) * P(v_2|v_1) * \dots * P(v_n|v_1 \dots v_n),$$

Dobivena jednadžba je istinita za svaku kombinaciju varijabli, te prema ovoj jednadžbi, združena vjerojatnost ovisi o načinu na koji poredamo varijable, tj. odredimo koja je varijabla v_1 , koja v_2 ...

U nastavku ovog poglavlja objasnit će se modeliranje učenika i napraviti prijelaz prema probabilističkom modeliranju učenika temeljenog na Bayesovoj mreži. Uvodni dio sljedećeg poglavlja, napisan je prema materijalima za nastavu prof. Stankova (Prirodoslovno-matematički fakultet) koji se koriste za kolegij *Sustavi e-učenja* [Stankov, 2005], te se kao jedini literaturni izvor neće posebno referencirati u nastavku.

2.4 Modeliranje učenika

“Živi nastavnik” čini izuzetan napor da procijeni učenikove odgovore u kontekstu pretpostavljene razine njegovog razumijevanja i već naučenog, te tako nastoji prilagoditi svoje poučavanje učenikovim sposobnostima, znanju i vještinama.

Današnje doba modernih tehnologija i globalizacije donosi brze promjene u svima aspektima ljudskog života, pa tako i na obrazovanje. Dosad je spomenuto da *Intelligentni tutorski sustav (ITS)* sadrže komponentu koja je odgovorna za praćenje znanja učenika. Više nije cilj samo ispitivati učenikovo znanje, nego prilagođavati znanje individualnim potrebama svakog učenika. Ovakvo zaključivanje naziva se postavljanje dijagnoze.

U Intelligentnim tutorskim sustavima komponenta koja predstavlja učenikovo znanje zove se model učenika. Model učenika i dijagnoza isprepleteni, a problem oblikovanja ta dva pojma zove se problem *modeliranja učenika* (eng. *Student modeling*). Model učenika predstavlja strukturu podataka, a dijagnoza je proces manipulacije tim podacima.

Obuhvat ulaznih podataka

Učenik za vrijeme poučavanja odašilje razne informacije o onome što radi ili kazuje. Sve te informacije ulaze u dijagnostički modul. Dijagnostički modul zaključuje čime se učenik bavio tijekom poučavanja. Logično je da što se više informacija skupi da je lakše riješiti problem zaključivanja. Postavljajući dovoljno pitanja sustav može približno zaključiti i obuhvatiti mentalno stanje učenika. Najviša razina obuhvata ulaznih podataka je razina *približnih mentalnih stanja* (eng. *approximate mental states*) učenika. Ako imamo kompliciranije probleme, učenik prolazi kroz međustanja koja su rezultat niza postupaka koje učenik uradi pri rješavanju. Primjer ukoliko učenik želi riješiti kvadratnu jednadžbu mora učiniti određeni broj koraka, a svaki korak je međustanje. Sustav ponekad ima pristup međustanjima, a ponekad vidi samo *konačno stanje* (*konačno rješenje problema*). Osim približnih mentalnih stanja, druge dvije kategorije obuhvata podataka su *međustanja* (eng. *intermediate states*) i

konačna stanja (eng. final states). Model učenika može biti građen da obrati pažnju na svako stanje ili da obrati pažnju na samo konačno stanje.

Najvažnija komponenta u modeliranju učenika je obuhvat ulaznih podataka i predstavlja temelj algoritama za dijagnostiku stanja znanja učenika.

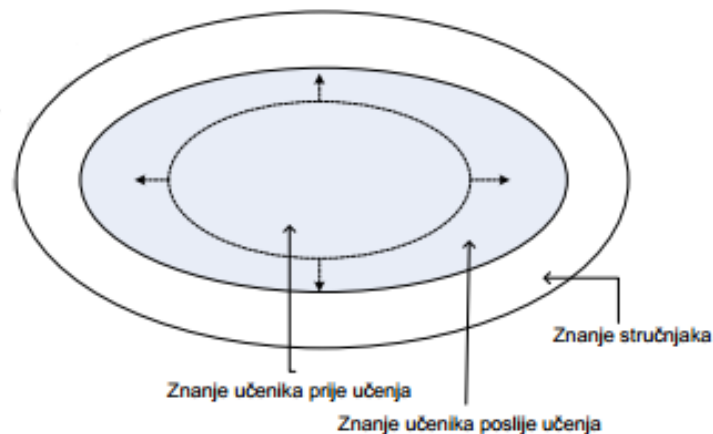
Razlika između učenika i stručnjaka

„*Inteligentni tutorski sustav* sadrži model stručnjaka sa modelom znanja stručnjaka, kao i model učenika sa modelom znanja učenika“ [Stankov, 2005]. Pod stručnjakom se misli na stručnjaka u područnom znanju kojim se inteligentni tutorski sustav bavi. Karakteristika je što učenici polaze od novaka i postepeno idu prema stručnjaku.

Gledajući model učenika i model stručnjaka, razlika je što model učenika ima manji opseg znanja. Model učenika predstavlja se kao model stručnjaka kojem se dodaje zbirka razlike. Razlike mogu biti pojmovi (koncepti) koji nedostaju (*eng. Missing conception*) ali isto tako u razlike spadaju i krivo shvaćeni pojmovi (*eng. misconceptions*).

Modeliranje učenika u nekim sustavima ima samo reprezentaciju pojmova koji nedostaju. Konceptijski je model učenika pravi podskup modela stručnjaka. Takav model učenika se zove model s prekrivanjem [Carr, Goldstein,1977].

Goldstein je uveo oblikovanje učenika prekrivanjem u tutorskom sustavu WUMPUS. Prema Goldstein-u znanje učenika je manjeg opsega od znanja tutora, pa ga se simbolično prikazuje na sljedeći način (Slika 2.13)



Slika 2.13 Model s prekrivanjem prema Goldstein-u

Upravo modeli učenika s prekrivanjem se najčešće upotrebljavaju pri modeliranju učenika u *Inteligentnim tutorskim sustavima*.

Primjeri sustava koji koriste opći model prekrivanja su: Scholar, BIP, GUIDON i već spomenuti WUMPUS. Problem ovog modela je što znanje ne mora biti pravi podskup znanja eksperta, jer su moguće situacije da učenici imaju znanje koje stručnjak nema.

Postoji i proširenje modela s prekrivanjem i naziva se tzv. *Diferencijski model učenik*. Taj model predstavlja poboljšanje modela s prekrivanjem jer je znanje učenika odvojeno od znanja učenika kojem je učenik bio izložen. Ovaj model nasljeđuje nedostatke modela s prekrivanjem, zbog pretpostavke da je znanje učenika pravi podskup znanja stručnjaka jer se ne bavi s pogrešnim znanjem učenika.

Model zbrke kombinira dva prethodno opisana modela i u ovom pristupu smatra se da učenik ima znanje koje se razlikuje i količinom i kvalitetom od znanja stručnjaka. Uključivanje pogrešaka u model zbrke omogućuje bolje razumijevanje učenika koje se ne može postići običnim modelom prekrivanja.

No moguće je model učenika oblikovati na nedostajućim konceptima i pogrešno usvojenim konceptima. Obično se tada unaprijed definira *biblioteka pogrešaka* (eng. *Bugs libraries*) koja je tipična za određena područna znanja kao i za kronološku dob učenika. Alternativa je *biblioteka dijelova pogrešaka* (eng. *Bug parts libraries*).

Dijagnostika znanja učenika

Brown i Moskowitz prema su primijetili da “ ... dobri učitelji ne bilježe samo rezultate već oni pokušavaju odrediti učenikova pogrešna razumijevanja kao najbolju osnovu za ispravljanje tog nerazumijevanja”.

Smisao modela učenika je donijeti opravdane zaključke zbog kojih nastaju pogreške. Razlika između “dobrih” i “loših” učitelja je što će “dobri” objasniti razloge učinjenih pogrešaka, a “loši” će prepustiti učeniku da riješi problem. Zadatak računalnog tutora je da iskoristi svaku pogrešku učenika i pretvori je u mogućnost za ispravljanje. Na taj način bi se postigao efekt “dobrog” učitelja.

Procjena učenika nije jednostavan posao jer učenici zbog raznih čimbenika ponekad daju točan odgovor ali ga izražavaju na drugi način. U procesu dijagnostike znanja učenika bitno je ne izgubiti se u procjenjivanju, te uvijek težiti da učenik prevlada svoja pogrešna shvaćanja, uz minimalnu pomoć učitelja.

Van Lehn tehnike za dijagnostiku učenika dovodi u vrlo usku vezu s modelom učenika, ali također sa metodama i tehnikama za prikaz znanja u ITS-u. U nastavku će se kratko opisati nekoliko dijagnostičkih algoritama.

U dijagnostiku učenika spada **model traganja** (eng. *Model tracing*). Taj model spada u dijagnostiku učenika temeljenu na mentalnom stanju i pretpostavlja da je učenikovo mentalno stanje izloženo dijagnostičkom program. Ovaj model predstavlja nejednostavniju tehniku u nizu.

U svakom koraku prilikom rješavanja problema, u svakom modelu postoji interpretator koji sugerira skup pravila koja se mogu promijeniti. U ovoj dijagnostičkoj tehnici taj interpretator može sugerirati samo jedno pravilo. Algoritam za dijagnostiku aktivira sva pravila kako bi se

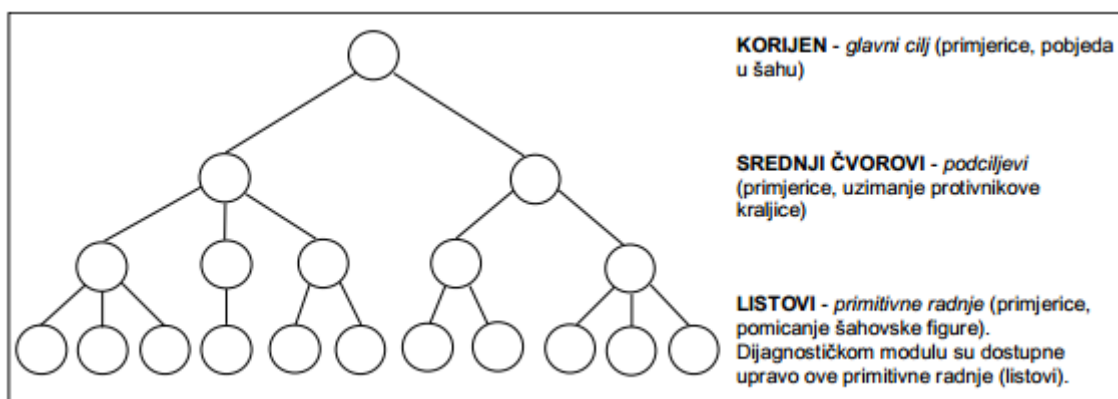
postigao skup mogućih sljedećih stanja. Jedno stanje mora odgovarati stanju koje je učenik generirao. Razlozi koji dovode u pitanje funkcionalnost ovog modela leže u činjenici da učenik može generirati stanje pogađanjem i tada sustav mora mijenjati svoje mišljenje o učenikovom modelu.

Nadalje, dijagnostičke tehnike **parcijalno traganje** (eng. Issue tracing), **plan prepoznavanja** (eng. Plan recognition) i **tehnika ekspertnih sustava** spadaju u posebnu vrstu dijagnostičkih tehnika, i za njih se kaže da se temelje na međuzapisu.

Prvi korak u **parcijalnom traganju** jeste analizirati učenikov potez i potez stručnjaka. Svaki korak ima dva brojača, brojač korištenja i brojač pogrešaka. Brojač korištenja se inkrementira svaki put kada učenik obavi potez. Brojač pogrešaka se inkrementira za svaki ekspertov potez koji ne učini učenik.

Odluke o zaključivanju se donose na temelju ta dva brojača. Ako je pokazivač brojača korištenja veći od brojača pogrešaka, tada se zaključuje da učenik vjerojatno razumije dano stanje. Svaki pogrešno izvedeni učenikov potez unosi podjednako vrednovanje što rezultira netočnostima.

Plan raspoznavanja (eng. Plan recognition) je dijagnostička tehnika u kojoj se sva fizička stanja kod učenikovog rješavanja problema mogu analizirati u stablastoj strukturi što je prikazano na sljedećoj slici (Slika 2.14).



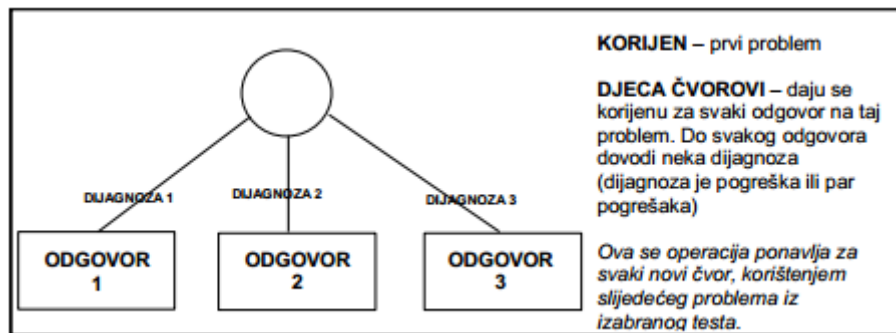
Slika 2.14 Plan raspoznavanja

Listovi stabla predstavljaju podciljeve, a korijen predstavlja krajnji cilj. Na prethodnoj slici je dana jedna usporedba što mogu predstavljati listovi, što srednji čvorovi, a što korijen. Veze između čvorova predstavljaju odnos između ciljeva i podciljeva. Ovakvo stablo se naziva plan.

Svim dijagnostičkim tehnikama je zajednička činjenica da se bave sa neobičnostima kod učenika. Od prethodno navedenih tehnika, najvažnija je **model traganja**. No u situaciji kada je obuhvat ulaznih podataka malen model traganja se koristi u kombinaciji s algoritmom **traženja puta** (eng. Path finding). Traženje puta omogućava traženje puta sa jednog stanja

na drugo stanje. Temeljni tehnički problem s traženjem puta bi bila činjenica da postoji mnogo putova između dva stanja.

Precizne dijagnoze se postižu uz pomoć sljedećih tehnika: **stablo odluke**, **napravi i testiraj** i **interaktivna dijagnoza**. Njihova karakteristika je što se mogu koristiti uz manji obuhvat ulaznih podataka. Za tehniku **stablo odluke** (eng. *Decision trees*) kaže se da predstavlja brutalan pristup kombiniranju pogrešaka. Proces izgradnje stabla se događa prije kontakta s učenicima i predstavlja najskuplji dio. Primjer dijagnostičkog sustava koji koristi stablo odluke je BUGGY, a primjer izgradnje stabla je predstavljen na sljedećoj slici (Slika 2.15)



Slika 2.15 Stablo odluke

Pretraživanje ovog stabla je dovoljno jednostavno i to je njegova prednost, a nedostatak što se ne može nositi s istodobnim događanjem više pogrešaka.

2.4.1 Primjena bayesove teorije u modeliranju učenika

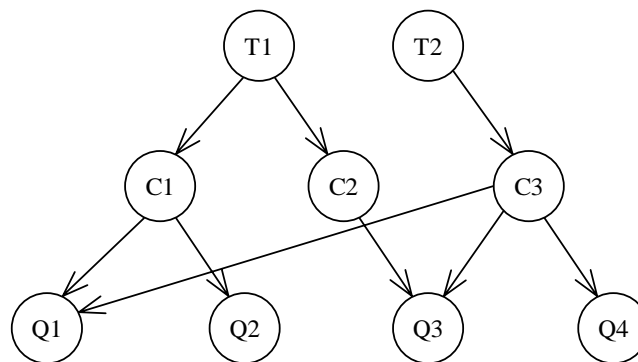
Najveća poteškoća koja se javlja u modeliranju učenika je neizvjesnost (eng. *uncertainty*). Inteligentni tutorski sustav u pravilu ima zadaću modelirati učenika na temelju neizvjesnih informacija, koje su uz neizvjesnost i malih količina. Učeničke aktivnosti definiraju izvjesnost.

Već spomenuta Bayesova teorija je teorija za donošenje odluka, a odlika te teorije je što se bavi zaključivanjem pod neizvjesnostima ([Bayes 1763], [Cheng i Greiner 2001], [Mayo 2001]). Bayesova teorija i primjena je opisana u prethodnim podpoglavljima ovog poglavlja, a u nastavku će se kratko opisati ideja za korištenje te teorije u modeliranju učenika.

Courseware, tj. didaktički oblikovan nastavni sadržaj priređen za izvođenje na računalu, je nastavni sadržaj koji je organiziran na više razina [Stankov, 2005]:

- nastavne cjeline,
- nastavne teme,
- nastavne jedinice i
- nastavne pojmove.

Na taj način područno znanje i njime definirani nastavni sadržaji su „granulirani“ u formi nastavnih objekata koji se međusobno razlikuju po broju pojmova koje obuhvaćaju. U vezi s tim na dnu hijerarhije je nedjeljivi nastavni pojam dok su na višim razinama nastavna jedinica koja sadrži više nastavnih pojmova, nastavna tema koja sadrži više nastavnih jedinica te nastavna cjelina koja sadrži više nastavnih tema. Temeljna zadaća učitelja je raščlamba nastavnih sadržaja prema ovoj strukturi te posebno priprema uvjeta za generiranje testova i ispita za provjeru znanja učenika. Na sljedećoj slici (Slika 2.16) prikazan je jednostavan model učenika koji se temelji na Bayesovoj mreži gdje su čvorovi upravo elementi courseware-a [Mayo (2001)].



Slika 2.16 Jednostavan model učenika temeljenog na Bayesovoj mreži

T_1 i T_2 predstavljaju nastavne jedinice i utječu na usvojenost različitih nastavnih pojmova C_1 , C_2 i C_3 . Ta tri nastavna pojma dalje utječu na pitanja u testu Q_1 , Q_2 , Q_3 i Q_4 . U nastavku čvorovi iz grafa će se nazivati koncepti.

U nastavku će biti prikazan sustav ANDES koji predstavlja primjer sustava sa probabilističkim modelom.

2.4.2 Primjer sustava s probabilističkim modelom učenika

Andes je inteligentni tutorski sustav za pomaganje učenicima kod rješavanja domaćih zadaća u fizici [Vanlehn, Niu, 2001]. Zamjenjuje olovku i papir koju učenici obično koriste, a važna je karakteristika što učenici crtaju dijagrame, unose jednadžbe i definiraju varijable na jednostavan način zahvaljujući dobrom dizajnu. Ipak, važna razlika je što sustav daje povratnu informaciju o točnosti ili netočnosti njihovog odgovora. Ovo je dobar primjer korištenja Bayesove mreže u inteligentnim tutorskim sustavima, stoga će u daljnjem radu ukratko biti objašnjen način rada sustava Andes, te u kojem dijelu tog sustava se koristi Bayesova mreža.

2.4.2.1 Modeliranje učenika u sustavu Andes

Kada učenik učini neki korak na sustavu Andes, sustav odmah daje povratnu informaciju, u ovisnosti da li je ispravan unos ili ne. No još je važnije to što mora odrediti na koji način učenik razmišlja tako da može dati odgovarajuće savjete ako budu traženi. Takva analiza studentskih zapisa je primjer modeliranja studenata (eng. student modeling) u inteligentnim tutorskim sustavima.

Modeliranje studenata pomoću sustava Andes se obavlja pomoću *grafa rješenja* (eng. Solution graph). Svaki problem ima svoj graf rješenja i snima sve moguće ispravne unose i linije razmišljanja iza njih. Svaki problem ima pravila i graf rješenja je kreiran rješavajući problem sa pravilima, a logičke ovisnosti se spremaju kao aciklički graf (Russell & Norvig, (1995) prema [Vanlehn, Niu, 2001].). Pravila kod problema su npr. Newtonov zakon i upravo ta pravila predstavljaju ono što se želi naučiti učenike. Graf rješenja sadrži sve moguće točne odgovore, stoga kad učenik napravi unos, sustav provjeri u svom grafu da li je to točan ili netočan odgovor, i učeniku ponudi povratnu informaciju.

Nadalje, pokazat će se zašto je Bayesova mreža važna u ovom sustavu. Naime, ukoliko učenik traži pomoć, sustav nastoji zaključiti što učenik želi učiniti, kako bi mu na što bolji način pomogao. Ovaj proces se zove **plan prepoznavanja** (eng. Plan recognition). Predstavlja težak problem u umjetnoj inteligenciji, jer može biti mnogo objašnjenja za učenikovo dotadašnje ponašanje i moguć je manjak informacija za zaključivanje koji je pravi razlog učenikovih unosa. Ovaj problem se zove dodjela kreditnog problem (eng. assignment of credit problem).

Rješenje ovog problema se temelji na Bayesovom pravilu:

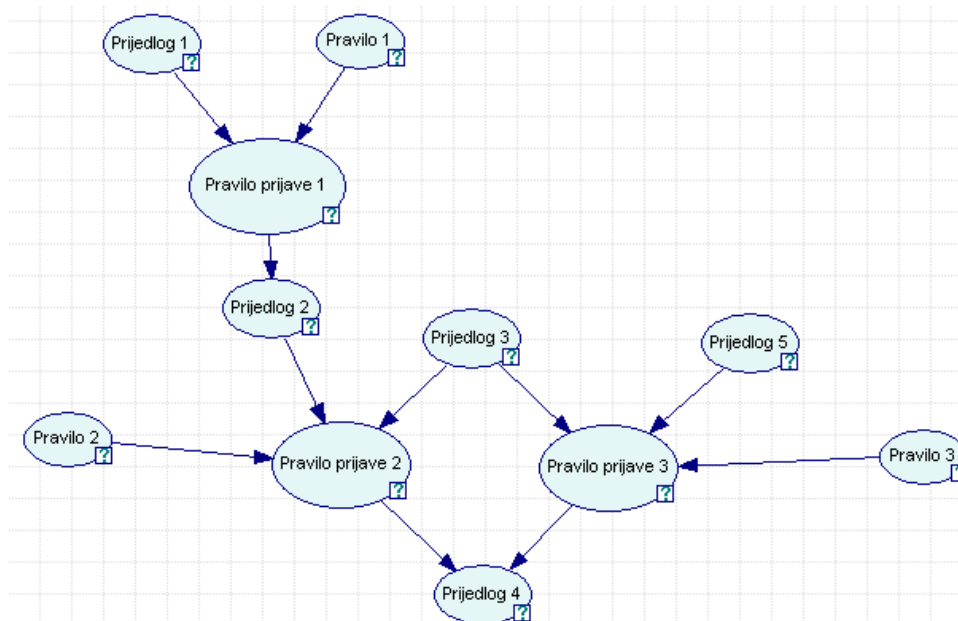
$$P(\text{objašnjenje}|\text{dokaz}) = \alpha P(\text{dokaz}|\text{objašnjenje})P(\text{objašnjenje})$$

gdje je konstanta α prilagođena tako da određene vjerojatnosti u zbroju daju 1. U principu ovaj način je optimalan za dodjelu kredita problemu. U praksi, zahtijeva vjerojatnosti kao što su $P(\text{dokaz}|\text{objašnjenje})$ i $P(\text{objašnjenje})$ koje je teško dobiti empirijski, stoga se može reći da se sumnja u njihovu točnost.

2.4.2.2 Struktura Andesove Bayesove mreže

Način na kojem radi Andes je prevođenje grafa rješenja u Bayesovu mrežu. Ta mreža ima tri tipa istina/laž varijabli:

- pravilo (rule)
- prijedlog (proposition)
- pravilo prijave (rule application)



Slika 2.17 Bayes-ova mreža u sustavu Andes

Osnovno pravilo mreže je odrediti pravilo koje je učenik svladao. Te vjerojatnosti se mijenjaju, pa Andes koristi dinamičnu vjerojatnosnu mrežu i provodi svaki problem pojedinačno čuvajući sve procesuirane vjerojatnosti. Andes sadrži datoteku svakog učenika na temelju koje se zna da li je učenik ovladao pojedinim pravilom. Kad je problem pokrenut i Bayesova mreža je kreirana, Andes inicijalizira “a priori” vjerojatnosti na temelju te datoteke. Kako učenik riješi problem, mreža se ponovno ažurira (eng. Update) i posteriori vjerojatnosti tog pravila se mijenjaju. Kada je problem zatvoren, vjerojatnosti su spremljene u učenikovu datoteku, i upravo te nove vjerojatnosti predstavljaju svladavanje na temelju dokaza koji su prikupljeni. Dokazi u Andes-ovoj Bayes-ovoj mreži su unosi učenika.

Ukratko, modeliranje studenata u sustavu Andes ovisi o dva modula. Prvi modul rješava problem u fizici na svaki mogući način i kreira graf rješenja za svaki problem. Drugi modul pretvara graf rješenja u Bayesovu mrežu.

U ovom poglavlju govorilo se općenito o Bayesovoj mreži i načinima zaključivanja, te o sustavu Andes kao primjeru koji koristi probabilistički model. U trećem poglavlju, u detaljnoj razradi opisati će se primjer Bayesove mreže koja služi za modeliranje učenika u inteligentnim tutorskim sustavima kod kojih je znanje ontološki formalizirano [Stankov, 2005].

3 Pristup probabilističkom modeliranju učenika

Dosada je prikazano na koji način se primjenjuje Bayesova teorija u modeliranju učenika. Taj postupak u nastavku će biti prikazan u detalje.

U samom uvodu, na početku rada, je spomenuto da je model učenika skup podataka koji prikazuje aktualnu razinu znanja i vještina učenika, te je neophodan za predstavljanje probabilističkog modela učenika. Provjeravanje znanja je vrlo važno kako bi se krenulo na inicijalizaciju probabilističkog modela. Naime, potrebno je stvoriti podatke sa kojima će se usporediti dobiveni rezultati tog modela kao i stanje znanja koje učenik ima prije poučavanja. Kako bi se razumjelo provjeravanje znanja moraju se definirati dva važna pojma, područno znanje i graf područnog znanja.

Područno znanje

Područno znanje je znanje kojim se ističe određeno područje koje je objekt učenja. Područno znanje je prikazano konceptima i relacijama među njima (čvorovi i bridovi). Budući je potrebno naznačiti smjer povezanosti koncepata, koristiti će se pojmovi podkoncept (potomak ili dijete u Bayesovoj mreži) i nadkoncept (roditelj u Bayesovoj mreži).

Definicija 3.1 *Područno znanje* je skup uređenih trojki (K_1, r, K_2) koje definiraju da su koncepti K_1 i K_2 povezani relacijom r . U ovako definiranoj uređenoj trojci koncept K_1 je **nadkoncept** koncepta K_2 , tj. koncept K_2 je **podkoncept** koncepta K_1 .

Nadkoncept iz ove definicije predstavlja roditelja, a **podkoncept** predstavlja potomka ili dijete u Bayesovoj mreži.

Osnovni elementi trojki područnog znanja su koncepti i relacije među njima, stoga će se koristiti *teorija grafova* kao matematička podloga koja omogućava upravljanje elementima područnog znanja, kao i vizualizaciju područnog znanja [(Gross & Yellen, 1998), (Veljan, 1989)]. Zato će se definirati usmjereni *graf područnog znanja* za kojeg vrijede sve zakonitosti iz teorije grafova na sljedeći način:

Definicija 3.2 Za područno znanje PZ definiramo usmjereni **graf područnog znanja** $GPZ = (V, A)$ gdje je V skup vrhova, a skup bridova $A = \{(K_1, K_2) \mid \exists (K_1, r, K_2) \in PZ, K_1 \neq K_2\}$ jednak je skupu svih uređenih parova onih koncepata iz područnog znanja koji su povezani nekom relacijom.

Provjeravanje znanja

Za učenika koji se nikada nije poučavao na određenom područnom znanju smatra se da koncepte iz grafa tog područnog znanja poznaje s vrlo malom vjerojatnošću i smatra se da učenik poznaje neki koncept s vjerojatnošću 0.

S druge strane, u slučaju da je provjereno znanje učenika i utvrđeno da poznaje sve koncepte, smatrati će se da učenik poznaje koncepte s vjerojatnošću 1.

Naime, Bayesova mreža bi trebala odrediti vjerojatnosti između 0 i 1. Prema prethodnom, 0 predstavlja nepoznavanje, a 1 poznavanje koncepta. Da bi se odredile sve vjerojatnosti koristi se Bayesov model s prekrivanjem.

Zaključci o znanju učenika će se donositi na temelju testiranja u kojem će se ispitivati poznavanje jedne ili više relacija među konceptima. Logično je da točni odgovori povećavaju vjerojatnost, a netočni smanjuju vjerojatnost. Dakle, mijenjanje vjerojatnosti se prvi put dogodi nakon ulaznog testa.

Uloga modela učitelja je da ustanovi koje koncepte učenik poznaje sa visokom vjerojatnošću. npr. više od 0.8 – [Bloom, 1976]. U trećem poglavlju, u Bayesovoj mreži koja će se implementirati, pri provjeri koja od napravljenih mreža najbolje predviđa stvarno znanje učenika iskoristiti će se upravo ta činjenica. Korist od ovakvog modeliranja leži u činjenici što se na taj način učenik neće zamarati učenjem već naučenih koncepata.

Zbog toga su provedena dva testiranja učenika. Testovi se sastoje od pitanja na koja učenik odgovara. Svako pitanje se odnosi na određeni broj koncepata i bridova između tih koncepata. Spomenutim bridovima pridružuje se vrijednost koja ovisi o točnosti odgovora i težini pitanja. Zato definiramo funkciju X_a na sljedeći način:

Definicija 3.3 Funkcija $X_A: A \rightarrow \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ definirana sa: $\forall K_x K_y \in A'$, $X_A(K_x K_y) = \text{broj bodova koji je dobiven odgovaranjem na pitanje iz testa koje se odnosi na taj brid}$.

Funkcija X_a omogućava pridjeljivanje težina onim bridovima koji povezuju koncepte čija je povezanost provjeravana određenim pitanjem u testu. Svaki brid će imati pridijeljenu težinu između 0 i 4 (što odgovara mogućim bodovima), dok će svi ostali bridovi u grafu područnog znanja imati pridijeljenu vrijednost -1, što će označavati da poznavanje povezanosti ta dva koncepta nismo provjeravali.

Podaci koji se koriste za potrebe inicijalizacije Bayesove mreže i određivanje „a priori“ i uvjetnih vjerojatnosti, dobiveni su iz stvarnog modela učenika, a odgovaraju znanju učenika prije provjeravanja znanja (model_znanje1 ([Prilog A](#))). Podaci s kojima će se uspoređivati predviđanja poznavanja određenih koncepata dobivena u svakom od 15 modela, uspoređivat

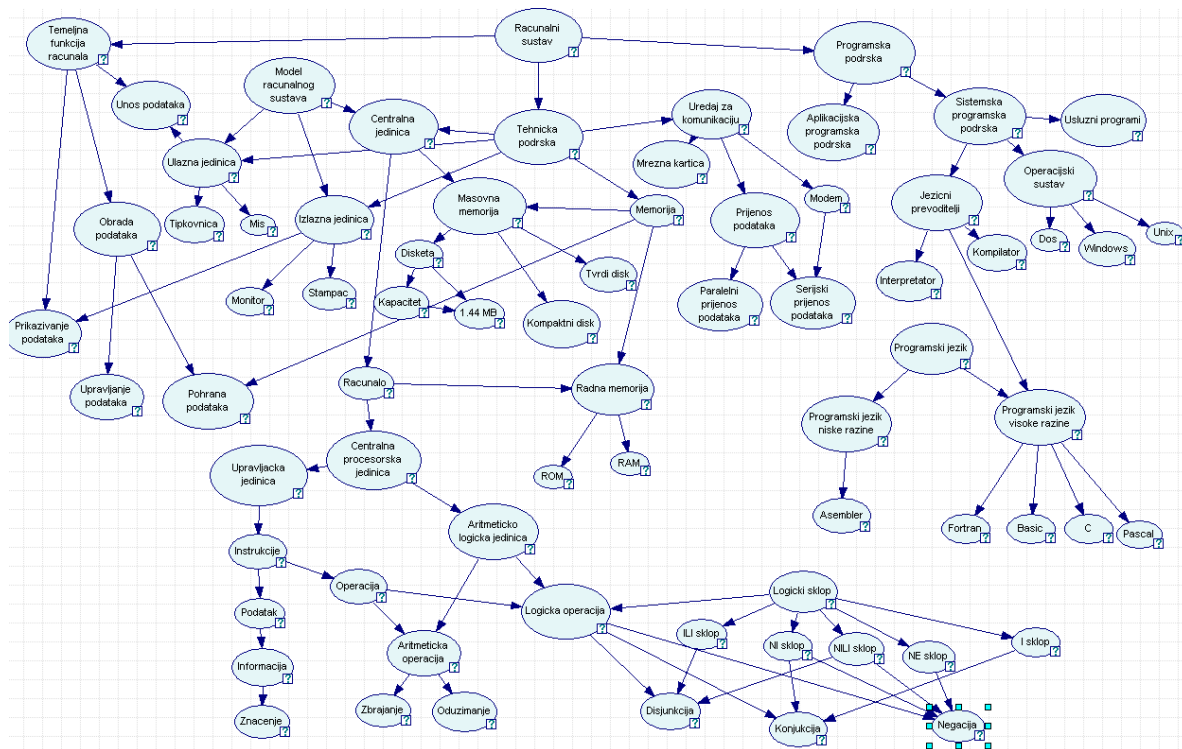
će se sa stvarnim modelom učenika koji odgovara znanju učenika nakon provjeravanja znanja (model_znanje2 ([Prilog C](#))). Na sljedećoj slici (Slika 3.1) nalazi se isječak iz tablice model_znanje1. Pri postavljenom pitanju koje povezuje koncept **Logička operacija** i **ILI sklop**, učenikov odgovor je bio težine 2, a težine -1 nam govore da ti koncepti nisu ispitivani, primjer **jezični prevoditelji** i **kompilator**.

Disketa	1.44MB	-1
Disketa	Kapacitet	-1
Hekasadekadski brojevni sustav	16	-1
Hekasadekadski brojevni sustav	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F	-1
Hekasadekadski brojevni sustav	Baza	-1
Hekasadekadski brojevni sustav	Znamenke	-1
I sklop	Konjunkcija	-1
ILI sklop	Disjunkcija	2
Informacija	Značenje	0
Instrukcija	Operacija	2
Instrukcija	Podatak	1
Izlazna jedinica	Monitor	-1
Izlazna jedinica	Prikazivanje podataka	4
Izlazna jedinica	Štampač	-1
Jezični prevoditelji	Interoretator	-1
Jezični prevoditelji	Kompilator	-1
Jezični prevoditelji	Programski jezik visoke razine	-1
Kapacitet	1.44 MB	-1
Logička operacija	Disjunkcija	-1
Logička operacija	Konjunkcija	-1
Logička operacija	Negacija	2
Logički sklop	I sklop	-1
Logički sklop	ILI sklop	2
Logički sklop	Logička operacija	-1

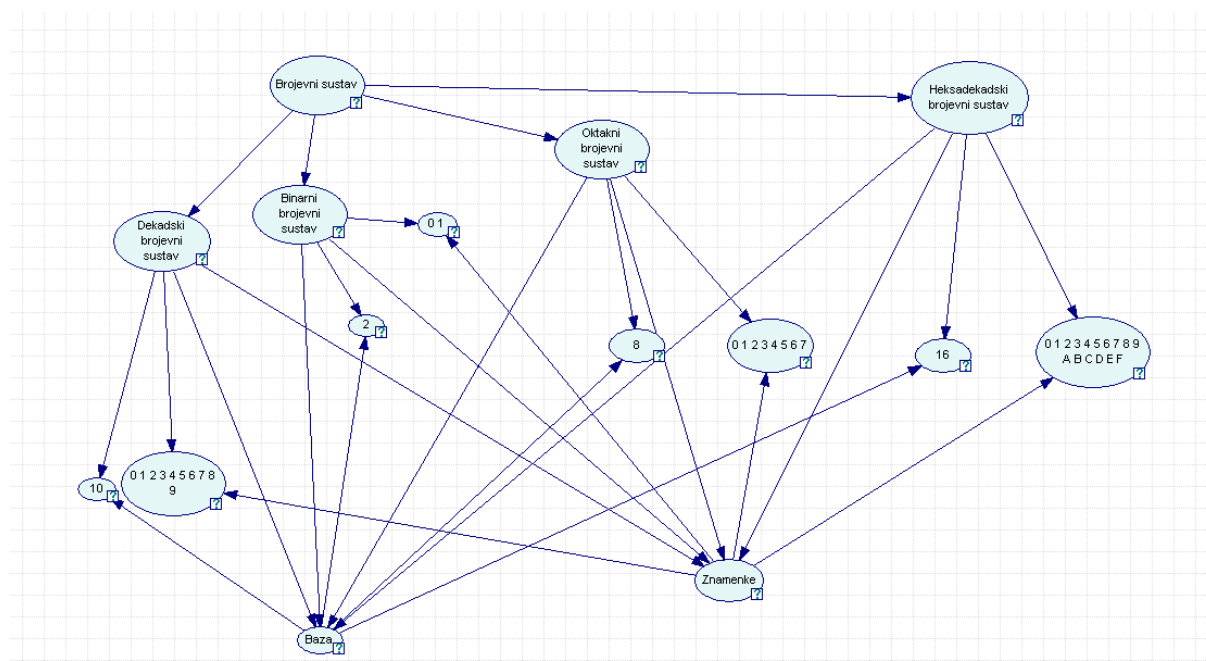
Slika 3.1 Model učenika prije testiranja (dio)

Bayesova mreža

Za potrebe realizacije novog pristupa u probabilističkom modeliranju učenika, koristi se Bayesova mreža sa 88 čvorova, čije varijable su logičke (2 stanja: *Istina* i *Laž*) (Slika 3.2 i Slika 3.3). Ovih 88 varijabli predstavlja 88 koncepata čije vjerojatnosti će biti ispitivane kako bi se što bolje zaključilo o znanju učenika. Stanja *Istina* i *Laž* predstavljaju poznavanje odnosno nepoznavanje koncepata. Važno je naglasiti da ima 5 korjenskih čvorova (čvorovi bez roditelja): **Računalni sustav**, **Model računalnog sustava**, **Programski jezik**, **Logički sklop** i **Brojevni sustav**.



Slika 3.2 Prvi dio Bayesove mreže



Slika 3.3 Drugi dio Bayesove mreže

U prethodnom poglavlju je naglašeno da su za inicijalizaciju Bayes-ove mreže potrebne a “priori” vjerojatnosti svakog korjenskog čvora, te tablica uvjetnih vjerojatnosti za svaku varijablu. U nastavku će se detaljno opisati postupak određivanja istih. Definirat će se dvije funkcije X_a i X_v koje će biti od iznimne važnosti u određivanju “a priori” vjerojatnosti korjenskih čvorova, ali i u postavljanju dokaza kod testiranja uspješnosti.

Napravit će se tri Bayesove mreže koje će biti jednake po broju čvorova, no razlika će biti u računanju uvjetnih vjerojatnosti. Postavljanje „a priori“ vjerojatnosti i postavljanje dokaza kako bi sve tri mreže funkcionirale, također iziskuje posebnu pažnju. Te tri različite mreže će biti testirane na temelju dokaza, koji će biti postavljeni na 5 načina, te će se tako dobiti ukupno 15 modela. Na kraju poglavlja će se provjeriti koji od tih modela najtočnije predviđa stvarno znanje učenika.

3.1 Računanje „a priori“ vjerojatnosti

Na temelju prethodno objašnjenih vrijednosti funkcije X_a određuju se vrijednosti funkcije X_v . Vrijednost $X_v(K_x)$ predstavlja normiranu sumu vrijednosti funkcije X_a bridova prema nadkonceptima koncepta K_x i bridova prema podkonceptima koncepta K_x . Vrijednost se nalazi u intervalu $[0,1]$. Smatramo da učenik potpuno poznaje koncept K_x akko je $X_v(K_x) = 1$, što je istina samo ako je poznavanje svih relacija prema nadkonceptima i podkonceptima na razini 4. Tada je vjerojatnost poznavanja koncepta najviša, odnosno jednaka 1.

Već je naglašeno da funkcija X_v ovisi o vrijednostima funkcije X_a , i računa se na sljedeći način:

$$X_v = \frac{\frac{\text{sumaR}}{\text{broj_roditelja}} + \frac{\text{sumaD}}{\text{broj_djece}}}{8} \quad (2)$$

gdje sumaR i sumaD predstavljaju sljedeće:

- Ako je za neki koncept za svaki brid prema roditeljima $X_a = -1$, onda je suma svih X_a vrijednosti prema roditeljima 0 i označavamo $\text{sumaR} = 0$.
- Ako je za neki koncept za svaki brid prema djeci $X_a = -1$, onda je suma svih X_a vrijednosti prema djeci 0, tj, $\text{sumaD} = 0$.
- Ako je za neki koncept za samo neke od bridova prema roditeljima $X_a = -1$, onda u sumi svih X_a vrijednosti prema roditeljima te bridove izbacujemo, stoga je sumaR zbroj vrijednosti svakog brida za koji nije $X_a = -1$.
- Ako je za neki koncept za samo neke od bridova prema djeci $X_a = -1$, onda u sumi svih X_a vrijednosti prema djeci te bridove izbacujemo, pa je sumaD zbroj vrijednosti svakog brida za koji nije $X_a = -1$.

Priložena je tablica vrijednosti funkcije X_v koja opisuje model učenika prije provjeravanja znanja (koncepti_prije ([Prilog B](#))). Primjera radi, na sljedećoj slici (Slika 3.4), prikazat će se dio te tablice, i demonstrirati računanje nekoliko $X_v(X_k)$ gdje je X_k bilo koji koncept.

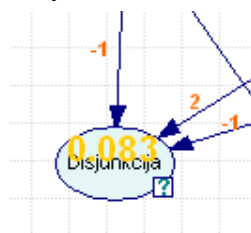
X_k	$X_v(X_k)$
2	0
8	0
10	0
16	0
01	0
01234567	0
0123456789	0
0123456789A B C D E F	0
1.44MB	0.125
Aplikacijska programska podrška	0.375
Aritmetička operacija	0
Aritmetičko-logička jedinica	0.375
Asembler	0
Basic	0
Baza	0
Binarni brojevni sustav	0
Brojevni sustav	0.25
C	0.25
Centralna jedinica	0.25
Centralna procesorska jedinica	0.5
Dekadski brojevni sustav	0
Disjunkcija	0.083
Disketa	0
DOS	0
Fortran	0.125
Heksa-dekadski brojevni sustav	0

Slika 3.4 Vrijednosti funkcije $X_v(X_k)$

Primjer 3.1

Na Sliku 3.4 koncept Disjunkcija ima vrijednost 0.083. Ta vrijednost dobivena je na sljedeći način:

Na Sliku 3.2 vidi se da čvor Disjunkcija ima 3 roditelja, a u tablici model_znanje1 se može iščitati vrijednost funkcije X_a prema svakom od roditelja. Kako bi bilo jasnije, na sljedećoj slici (Slika 3.5) prikazane su vrijednosti funkcije X_a prema svakom od roditelja.



Slika 3.5

Lako se prema, prema formuli (2) na prethodnoj stranici, dobije

$$X_v(\text{Disjunkcija}) = \frac{2}{8} = 0.083$$

Broj djece je zanemaren jer taj čvor nema djece.

Dosad je nekoliko puta naglašeno da su za inicijalizaciju Bayesove mreže potrebne „a priori“ vjerojatnosti korjenskih čvorova i uvjetne vjerojatnosti svakog čvora (o njima će se govoriti u nastavku).

Prema tablici koncepti_prije ([Prilog B](#)) očito je da za korjenske čvorove **Računalni sustav**, **Model računalnog sustava**, **Programski jezik**, **Logički sklop** i **Brojevni sustav** vrijedi:

$$X_v (\text{Računalni sustav})=0.33$$

$$X_v (\text{Model računalnog sustava})= 0.083$$

$$X_v (\text{Programski jezik})=0.1$$

$$X_v (\text{Logički sklop})= 0.0416$$

$$X_v (\text{Brojevni sustav})= 0.25$$

Za koncept *Programski jezik* vrijednost prema funkciji X_v ispada 0, no zbog mogućnosti slučajne pogreške stavit ćemo da je vrijednost 0.1.

Upravo te vrijednosti predstavljaju vrijednosti korjenskih čvorova za *Istinu. Laž* se dobije kao komplement, tj. vrijedi sljedeće:

Računalni sustav	Istina	0.33
	Laž	0.67
Model računalnog sustava	Istina	0.083
	Laž	0.917
Programski jezik	Istina	0.1
	Laž	0.9
Logički sklop	Istina	0.0416
	Laž	0.9584
Brojevni sustav	State0	0.25
	State1	0.75

Osim određivanja „a priori“ vjerojatnosti, funkcija X_v ima još jednu primjenu. U daljnjem radu, opisat će se način postavljanja dokaza uz pomoć vrijednosti te funkcije, no prije toga definirati će se način određivanja uvjetnih vjerojatnosti.

3.2 Računanje uvjetnih vjerojatnosti

Kako bi odredili model Bayesove mreže koji daje što bolje i točnije rezultate, izračunati će se uvjetne vjerojatnosti na 3 načina. U *prvom* načinu, uvjetne vjerojatnosti će ovisiti samo o broju roditelja te varijable, u *drugom* načinu ovisit će o i broju roditelja i broju djece, dok će u *trećem* načinu ovisiti samo o broju djece. Dakle, te mreže koje nastanu su protipovi Bayesove mreže koji se razlikuju po računanju uvjetnih vjerojatnosti. Sve tri mreže su priložene i napravljene u programu GeNIe ([Prilog E – Mreza 1](#), [Prilog F - Mreza 2](#), [Prilog G - Mreza 3](#)). Zajedničko im je što svaka od njih ima iste „a priori“ vjerojatnosti korjenskih

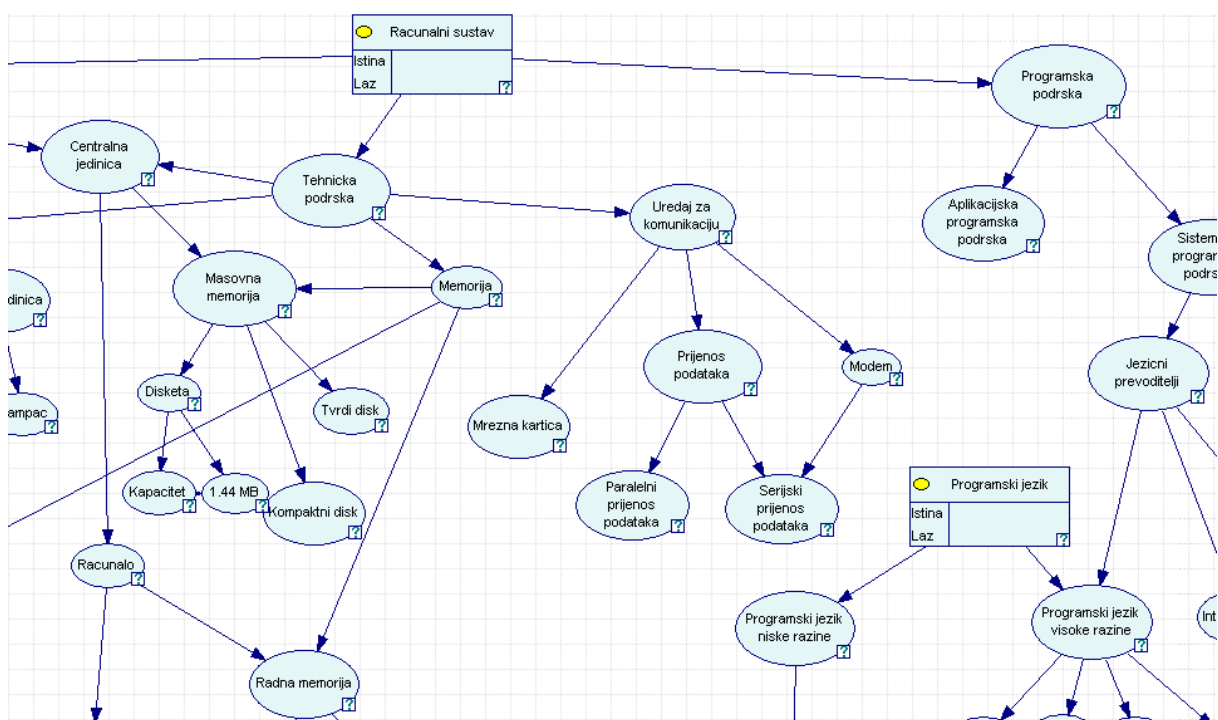
čvorova. Također, u svakom od pristupa se određuje „težina“ *Istine*. Naime, pošto je vjerojatnost slučajne pogreške ili slučajnog pogotka 0.1, to znači da je vjerojatnost stvarne pogreške ili stvarnog pogotka 0.9. Upravo se ova vrijednost 0.9 u svakom pristupu dijeli s različitim kvantifikatorima (brojem roditelja, brojem djece i roditelja, brojem djece) i na taj način se određuje „težina“ *Istine* u tablici uvjetne vjerojatnosti.

3.2.1 Uvjetne vjerojatnosti ovisne samo o roditeljima varijable

Neka je K slučajna varijabla u Bayesovoj mreži koja nije korijen. Neka je M skup svih roditelja slučajne varijable K , te neka je n kardinalni broj tog skupa M . Tablica uvjetne vjerojatnosti za čvor K ima 2^n redaka. Svaki redak sadrži jednu od 2^n kombinacija vrijednosti *Istina* i *Laž*, stoga u svakom retku postoji p vrijednosti *Istina*. Stoga će svaka *Istina* vrijednost iznositi $\frac{0.9}{n}$

Vjerojatnost za *Laž* dobije se kao komplement.

Primjer



Slika 3.6 Isječak Bayesove mreže

Budući je **Računalni sustav** korjenski čvor, za njega vrijedi:

	Racunalni sustav
Istina 33%	
Laž 67%	

kako je prethodno navedeno.

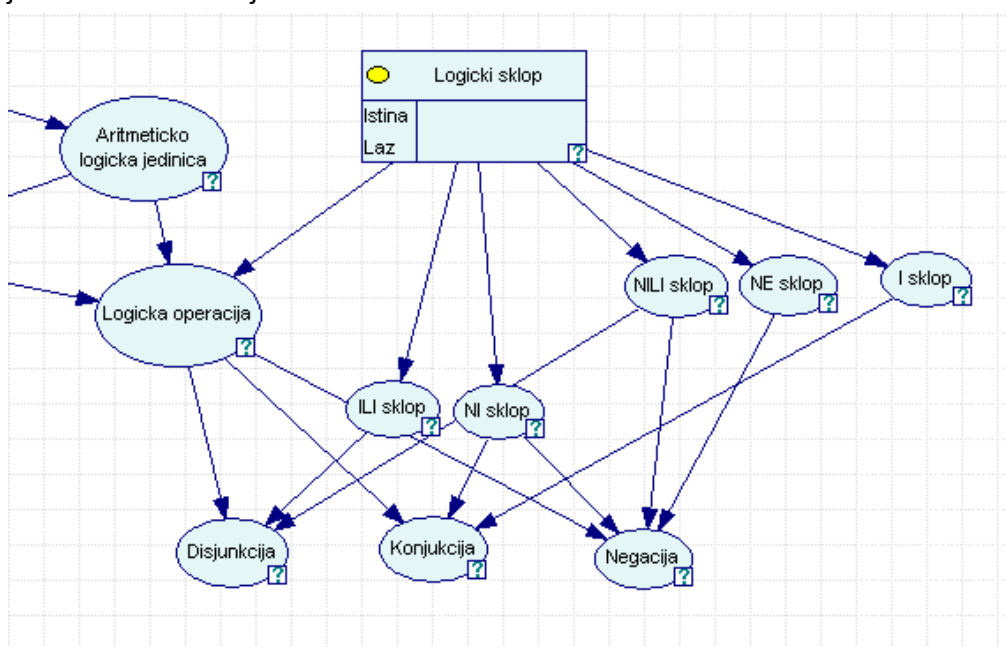
Čvor **Programska podrška** ima jednoga roditelja **Racunalni sustav** (Slika 3.6), pa tada vrijedi da svaka vrijednost Istina u tablici uvjetnih vjerojatnosti iznosi $\frac{0.9}{1} = 0.9$. Vrijednost za Laž dobijemo kao komplement i ona iznosi 0.1. Dakle, uvjetna vjerojatnost varijable **Programska podrška** je dana sa:

Racunalni sustav	Istina	Laž
Istina	0.9	0.1
Laž	0.1	0.9

Dalje će se, primjera radi, izračunati uvjetna vjerojatnost čvora **Masovna memorija** koji ima dva roditelja **Centralna jedinica** i **Memorija** (Slika 3.6). U ovom slučaju svaka Istina u tablici uvjetnih vjerojatnosti iznosi $\frac{0.9}{2} = 0.45$. Dakle, uvjetna vjerojatnost varijable **Masovna memorija** je dana sa:

Centralna jedinica	Memorija	Istina		Laž	
		Istina	Laž	Istina	Laž
Istina		0.9	0.45	0.45	0.1
Laž		0.1	0.55	0.55	0.9

Na sljedećoj slici (Slika 3.7) prikazano je nekoliko čvorova, između ostalih i čvor **Negacija**. Vidi se da taj čvor ima 4 roditelja.



Slika 3.7 Isječak Bayesove mreže

Svaka Istina u tablici vjerojatnosti iznosi $\frac{0.9}{4} = 0.225$, pa je uvjetna vjerojatnost varijable

Negacija nešto složenija i dana sa:

logicka opera...	Istina								Laz							
NI sklop	Istina				Laz				Istina				Laz			
NIL sklop	Istina	Laz	Istina	Laz	Istina	Laz	Istina	Laz	Istina	Laz	Istina	Laz	Istina	Laz		
NE sklop	Istina	Laz	Istina	Laz	Istina	Laz	Istina	Laz	Istina	Laz	Istina	Laz	Istina	Laz		
Istina	0.9	0.675	0.675	0.45	0.675	0.45	0.45	0.225	0.675	0.45	0.45	0.225	0.45	0.225	0.225	0.1
Laz	0.1	0.325	0.325	0.55	0.325	0.55	0.55	0.775	0.325	0.55	0.55	0.775	0.55	0.775	0.775	0.9

Struktura

Struktura mreže 1 je dana sljedećom tablicom, a ispod tablice se nalazi objašnjenje.

Tablica 3.1 Mreža 1 - struktura

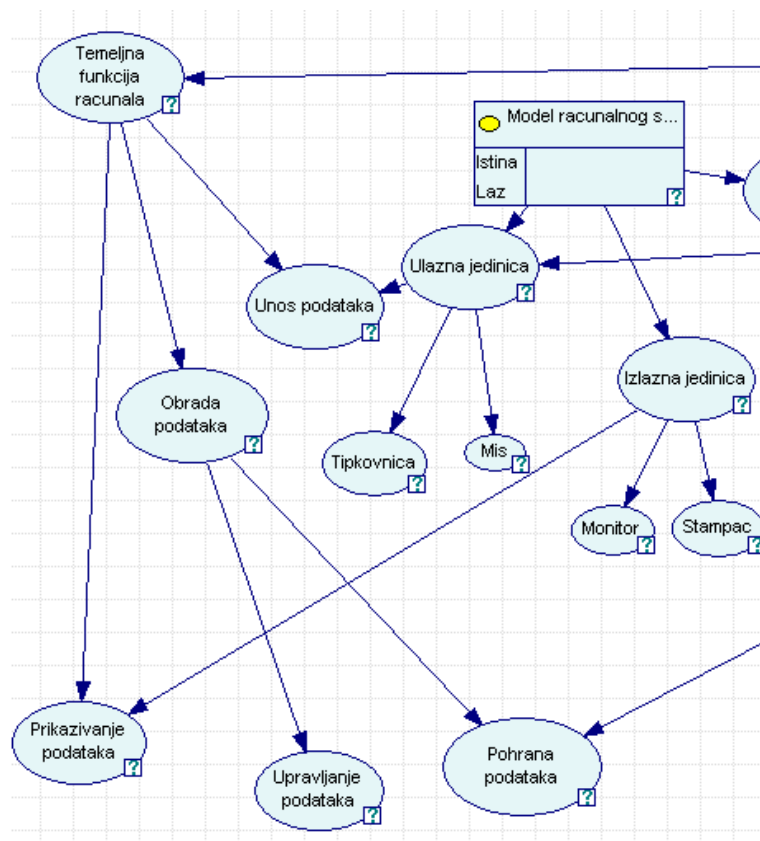
\sum roditelja	Broj čvorova	Postotak ukupnog broja
	5	5.68%
1	57	64.79%
2	20	22.73%
3	3	3.4%
4	3	3.4%
	$\sum = 88$	$\sum = 100\%$

Nije potrebno naglašavati da ova mreža ima 5 korjenskih čvorova i oni čine 5.68% ukupnog broja čvorova. Nadalje, mreža kreirana na ovaj način ima 57 čvorova koji imaju samo jednog roditelja i čini 64.77% od ukupnog broja svih čvorova. 20 čvorova ima 2 roditelja i to je 22.72% od ukupnog broja svih čvorova. 3 su čvora sa 3 roditelja što je 3.4%, a također su 3 čvora sa 4 roditelja.

3.2.2 Uvjetne vjerojatnosti ovisne i o roditeljima i o djeci varijable

Neka je K slučajna varijabla u Bayesovoj mreži koja nije korijen i neka je M skup svih roditelja slučajne varijable K, a L skup svih potomaka te varijable. Neka su su n i r kardinalni broj skupova M i L respektivno. Tablica uvjetne vjerojatnosti za čvor K ima 2^n redaka. Svaki redak sadrži jednu od 2^n kombinacija vrijednosti **Istina** i **Laž**, stoga u svakom retku postoji p vrijednosti **Istina**. Svaka vrijednost Istina će iznositi $\frac{0.9}{n+r}$. Vjerojatnost za Laž dobije se kao komplement.

Primjer



Slika 3.8 Isječak Bayesove mreže

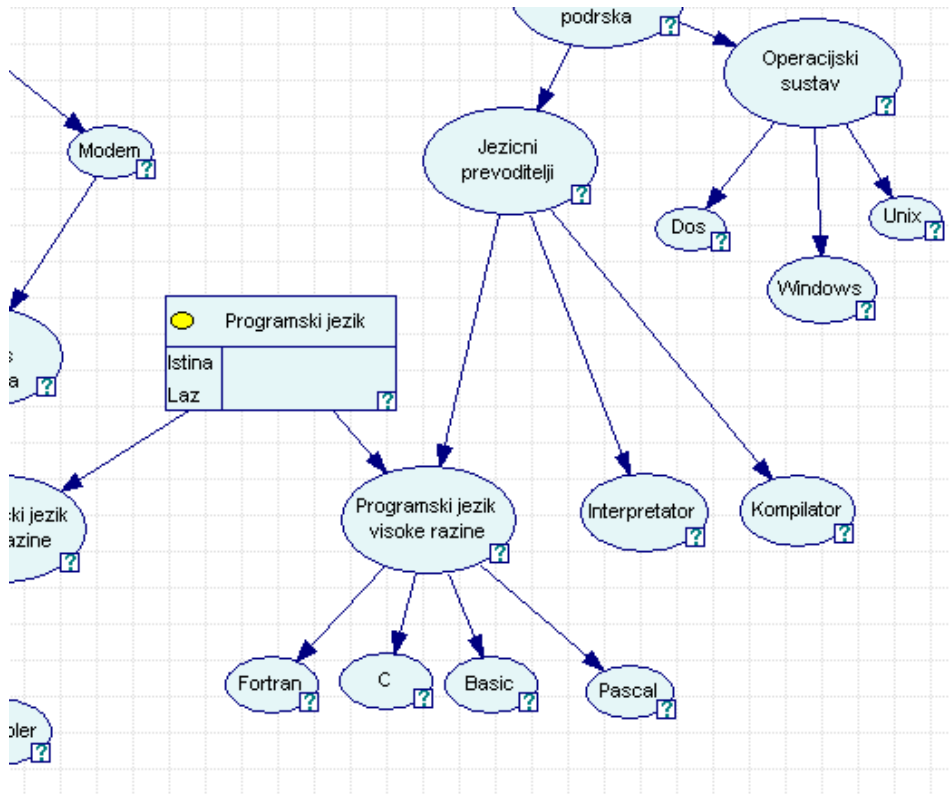
Na prethodnoj slici (Slika 3.8) vidi se da varijabla **Obrada podataka** ima 1 roditelja i 2 potomka, stoga u tablici uvjetne vjerojatnosti svaka Istina iznosi $\frac{0.9}{1+2} = \frac{0.9}{3} = 0.3$. Vrijednost za Laž dobijemo kao komplement. Dakle, uvjetna vjerojatnost varijable **Obrada podataka** je dana sa:

Temeljna funk.c...	Istina	Laž
► Istina	0.3	0.1
Laž	0.7	0.9

Varijabla **Ulazna jedinica** ima 2 roditelja i 3 potomka (Slika 3.8), stoga u tablici uvjetne vjerojatnosti svaka Istina iznosi $\frac{0.9}{2+3} = \frac{0.9}{5} = 0.18$. Vrijednost za Laž dobijemo kao komplement. Dakle, uvjetna vjerojatnost varijable **Ulazna jedinica** je dana sa:

Model racunaln...	Istina		Laž	
Tehnicka podr...	Istina	Laž	Istina	Laž
► Istina	0.36	0.18	0.18	0.1
Laž	0.64	0.82	0.82	0.9

Varijabla **Programski jezik visoke razine** ima 2 roditelja i čak 4 potomka (Slika 3.9), stoga u tablici uvjetne vjerojatnosti svaka Istina iznosi $\frac{0.9}{2+4} = \frac{0.9}{6} = 0.15$. Vrijednost za Laž dobijemo kao komplement.



Slika 3.9 Isječak Bayesove mreže

Dakle, uvjetna vjerojatnost varijable **Programski jezik visoke razine** je dana sa:

Programski jezik	Istina	Laz	Istina	Laz
Jezicni prevodit...	Istina	Laz	Istina	Laz
Istina	0.3	0.15	0.15	0.1
Laz	0.7	0.85	0.85	0.9

Struktura

U ovoj mreži uvjetne vjerojatnosti su ovisile o sumi roditelja i djece nekog čvora. Korjenski čvorovi imaju već dane "a priori" vjerojatnosti koje su dobivene i objašnjenje prethodno, no, također postoje čvorovi bez ijednog potomka. Takvi čvorovi imaju jednake uvjetne vjerojatnosti kao i u prvoj mreži. Sljedeća tablica (Tablica 3.2) opisuje strukturu te mreže, a ispod tablice se nalazi objašnjenje.

Tablica 3.2 Mreža 2 - struktura

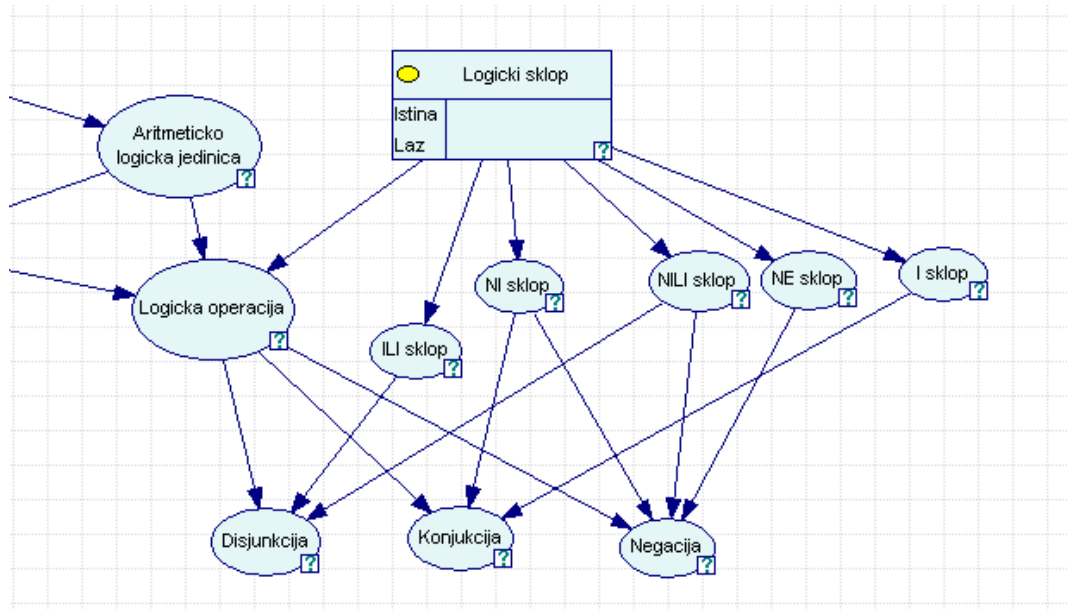
\sum roditelja i potomaka	Broj čvorova	Postotak ukupnog broja
	5	5.68%
1	26	29.55%
2	25	28.41%
3	10	11.36%
4	11	12.5%
5	7	7.96 %
6	2	2.27%
8	2	2.27%
	$\sum = 88$	$\sum = 100\%$

U ovoj mreži, kao u prethodnom slučaju postoji 5 korjenskih čvorova koji tvore 5.68% od ukupnog broja čvorova, i oni su predstavljeni u prvom retku. Čvorova sa ukupno 1 potomkom ili roditeljom ima sveukupno 26 što čini 29.54% ukupnog broja svih čvorova. Čvorova sa ukupno 2 roditelja i potomka ima 25, odnosno 28.4%. Čvorova sa ukupno 3 roditelja i potomka ima čak 10 što je 11.36%, a sa 4 čak 11 čvorova, odnosno 12.5%. Razlika u odnosu na Mrežu 1 je što postoji čak 7 čvorova sa ukupno 5 roditelja i potomaka ili 7.96%. Također, u ovoj mreži postoje 2 čvora sa ukupno 6 roditelja i potomaka, te također 2 čvora sa ukupno 8 istih i svaka skupina od njih je 2.27% od ukupnog broja čvorova. Razlika između prve i druge mreže su očite u ovom smislu.

3.2.3 Uvjetne vjerojatnosti ovisne samo o djeci varijable

Neka je K slučajna varijabla u Bayesovoj mreži koja nije korijen i koja ima potomke, te neka je M skup svih roditelja slučajne varijable K , a L skup svih potomaka te varijable. Neka su n i r kardinalni broj skupova M i L respektivno. Tablica uvjetne vjerojatnosti za čvor K ima 2^n redaka. Svaki redak sadrži jednu od 2^n kombinacija vrijednosti *Istina* i *Laž*, stoga u svakom retku postoji p vrijednosti *Istina*. Svaka vrijednost *Istina* će iznositi $\frac{0.9}{l}$. Vjerojatnost za *Laž* dobijemo kao komplement. Varijable koje nemaju potomaka imaju vrijednosti 0.5 za *Istinu*, i 0.5 za *Laž*.

Primjer



Slika 3.10 Isječak Bayesove mreže

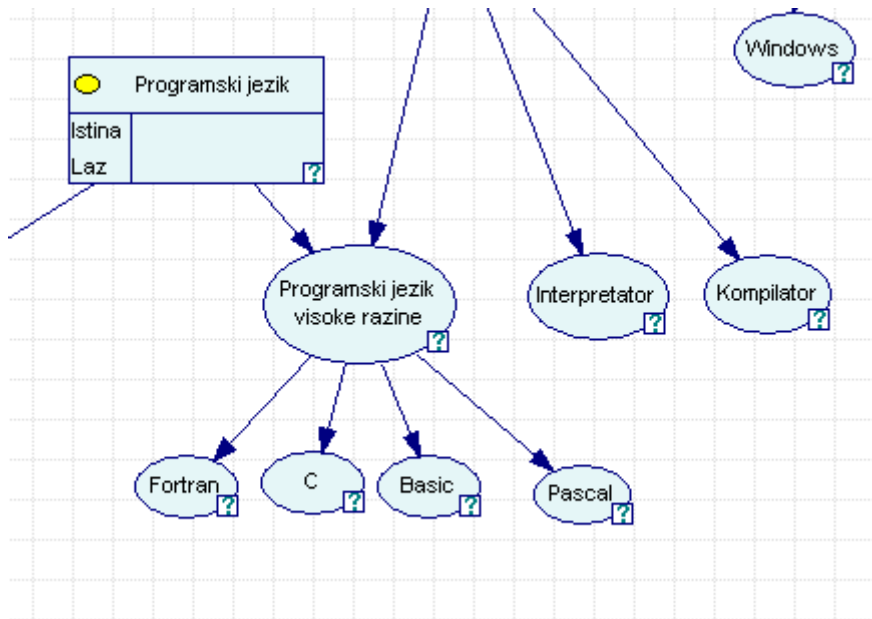
Na prethodnoj slici (Slika 3.10) vidi se da varijabla **Logička operacija** ima 3 potomka, stoga u tablici uvjetne vjerojatnosti svaka Istina iznosi $\frac{0.9}{3} = 0.3$. Vrijednost za Laž dobijemo kao komplement. Dakle, uvjetna vjerojatnost varijable **Logička operacija** je dana sa:

Operacija	Istina				Laz			
	Istina	Laz	Istina	Laz	Istina	Laz	Istina	Laz
Logički sklop								
Aritmetičko logi...								
► Istina	0.9	0.6	0.6	0.3	0.6	0.3	0.3	0.1
Laz	0.1	0.4	0.4	0.7	0.4	0.7	0.7	0.9

Varijabla **NILI sklop** ima 2 potomka (Slika 3.10), stoga u tablici uvjetne vjerojatnosti svaka Istina iznosi $\frac{0.9}{2} = 0.45$. Vrijednost za Laž dobijemo kao komplement. Dakle, uvjetna vjerojatnost varijable **NILI sklop** je dana sa:

Logički sklop	Istina	Laz
► Istina	0.45	0.1
Laz	0.55	0.9

Na sljedećoj slici (Slika 3.11) bit će prikazana primjera radi varijabla sa 4 potomka:



Slika 3.11 Isječak Bayesove mreže

Varijabla **Programski jezik visoke razine** ima 4 potomka, stoga u tablici uvjetne vjerojatnosti svaka Istina iznosi $\frac{0.9}{4} = 0.225$. Vrijednost za Laž dobijemo kao komplement. Dakle, uvjetna vjerojatnost varijable **Programski jezik visoke razine** je dana sa:

Programski jezik	Istina	Laz	Istina	Laz
Jezicni prevodit...	Istina	Laz	Istina	Laz
Istina	0.45	0.225	0.225	0.1
Laz	0.55	0.775	0.775	0.9

Struktura

U ovoj mreži (Mreza 3) uvjetne vjerojatnosti su ovisile o broju potomaka nekog čvora. Korjenski čvorovi imaju već dane "a priori" vjerojatnosti, no također postoje čvorovi bez ijednog potomka.

Tablica 3.3 Mreza 3 - struktura

\sum potomaka	Broj čvorova	Postotak ukupnog broja
	5	5.68%
0	39	44.31%
1	12	13.63%
2	14	15.94%
3	9	10.22%
4	9	10.22%
	$\sum = 88$	$\sum = 100\%$

Kao u prethodne dvije mreže, iz prethodne tablice je jasno da korjenskih čvorova ima 5, i oni čine 5.68% od ukupnog broja čvorova, predstavljeni u prvom retku. Postoji 39 čvorova bez potomaka i oni čine 44.31% od ukupnog broja svih čvorova. Čvorovi bez potomaka imaju vjerojatnosti 0.5 za sve kombinacije Istina/Laž što je prethodno naglašeno. 12 čvorova ima jednog potomka što iznosi 13.63% od ukupnog broja, 14 čvorova ima 2 potomka i čini 15.94%, dok po 9 čvorova postoji sa 3 odnosno 4 potomka, i oni zajedno čine ostalih 20.44% svih čvorova.

3.3 Zaključivanje o znanju učenika na temelju Bayesove mreže

Dakle, do sada su poznati podaci o znanju učenika prije testiranja. Također, su stvoreni uvjeti za inicijalizaciju Bayesove mreže misleći pritom na „a priori“ vjerojatnosti korijenskih čvorova i uvjetne vjerojatnosti. U ovom poglavlju testirat će se sve tri mreže i pokazat će se koja od te tri mreže najbolje predviđa učenikovo znanje na temelju znanja učenika prije testiranja.

Također, napravljeno je i znanje učenika nakon testiranja. To znanje predstavlja stvarno znanje učenika i dobiveno je na temelju ispitivanja učenika. To znanje je potrebno kako bi se usporedile sve tri mreže. Dakle, na temelju stvarnog znanja, poznato je koje koncepte je svladao učenik, a koje ne, a tri mreže će biti iskorištene kako bi se pokazalo koja od njih najbolje predviđa stvarno znanje učenika.

Već je spomenuto postojanje tablice model_znanje2 koja sadrži model učenika nakon provjeravanja znanja. Tablica je dobivena na analogan način kao i model_znanje1, dakle uz pomoć funkcije X_a koja omogućava pridjeljivanje težina onim bridovima koji povezuju koncepte čija je povezanost provjeravana određenim pitanjem u testu. Svaki brid će imati pridijeljenu težinu između 0 i 4 (što odgovara mogućim bodovima), dok će svi ostali bridovi u grafu područnog znanja imati pridijeljenu vrijednost -1, što će označavati da poznavanje povezanosti ta dva koncepta nismo provjeravali.

3.3.1 Postavljanje dokaza

Važnost funkcije X_v nije samo u određivanju „a priori“ vjerojatnosti korijenskih čvorova već služi za postavljanje dokaza. Postavljanje dokaza obavit će se na 5 načina kako bi se što bolje ispitala učinkovitost i pouzdanost modela. Važno je naglasiti da će se promatrati tablica koncepti_poslije ([Prilog D](#)) koja prikazuje vrijednosti funkcije X_v svakog koncepta.

3.3.1.1 Prvi način postavljanja dokaza

Neka je X_k bilo koji koncept. Ako je $X_v(X_k) \geq 0.9$ smatra se da je učenik svladao taj koncept i postavlja se dokaz na **Istina**. Slično, ako za neki koncept vrijedi $1 - X_v(X_k) \geq 0.9$, smatrat će se da učenik nije svladao taj koncept i postavlja se dokaz na **Laž**.

Primjer 3.2

Na Slika 3.4 se vidi da je $X_v(\text{Model racuna ln og sustava}) = 0.083$. Jasno je da $1 - X_v(\text{Model racuna ln og sustava}) = 0.917$, što je veće od 0.9, pa se smatra da učenik nije svladao taj koncept i u Testiranju 1, koje će se uraditi u nastavku, postaviti će se dokaz na Laž na varijabli *Model racuna ln og sustava*.

Sljedeća tablica prikazuje 4 dokaza koji su rezultat ovakvog načina postavljanja dokaza.

Tablica 3.4 Lista dokaza –prvi način postavljanja dokaza

Istina	Laž
	Disjunkcija Logički sklop Model računalnog sustava Negacija
<i>Ukupno : 0</i>	<i>Ukupno : 4</i>

3.3.1.2 Drugi način postavljanja dokaza

Neka je X_k bilo koji koncept. Ako je $X_v(X_k) \geq 0.8$ smatra se da je učenik svladao taj koncept i postavlja se dokaz na **Istina**. Slično, ako za neki koncept vrijedi $1 - X_v(X_k) \geq 0.8$, smatrat će se da učenik nije svladao taj koncept i postavlja se dokaz na **Laž**.

Primjer 3.3

Na Slika 3.4 se vidi da je $X_v(\text{Fortran}) = 0.125$. Jasno je da $1 - X_v(\text{Fortran}) = 0.875$ što je veće od 0.8, pa se smatra da učenik nije svladao taj koncept i u testiranju mreža, koje će se uraditi u nastavku, postaviti će se dokaz na Laž na varijabli Fortran.

Prema navedenom, postojati će 12 dokaza danih u sljedećoj tablici.

Tablica 3.5 Lista dokaza - drugi način postavljanja dokaza

Istina	Laž
	1.44MB
	Disjunkcija
	Fortran
	Informacija
	Izlazna jedinica
	Kapacitet
	Logički sklop
	Memorija
	Model računalnog sustava
	Negacija
	Pascal
	Pohrana podataka
<i>Ukupno : 0</i>	<i>Ukupno : 12</i>

3.3.1.3 Treći način postavljanja dokaza

Neka je X_k bilo koji koncept. Ako je $X_v(X_k) \geq 0.75$ smatra se da je učenik svladao taj koncept i postavlja se dokaz na **Istina**. Slično, ako za neki koncept vrijedi $1 - X_v(X_k) \geq 0.75$, smatrat će se da učenik nije svladao taj koncept i postavlja se dokaz na **Laž**.

Primjer 3.4

Na Sliku 3.4 se vidi da je $X_v(\text{Brojevni_sustav}) = 0.25$, stoga je jasno da $1 - X_v(\text{Brojevni_sustav}) = 0.75$ što je jednako 0.75 , pa se smatra da učenik nije svladao taj koncept i u testiranju mreža, koje će se uraditi u sljedećem poglavlju, postaviti će se dokaz na Laž na varijabli Brojevni sustav.

Prema navedenom, postojati će 24 dokaza danih u sljedećoj tablici, 4 **Istine** i 18 **Lazi**.

Tablica 3.6 Lista dokaza – treći način postavljanja dokaza

Istina	Laž
Prikazivanje podataka	1.44MB
Temeljna funkcija računala	Brojevni sustav
Unos podataka	C
Uređaj za komunikaciju	Centralna jedinica
	Disjunkcija
	Fortran
	Informacija
	Izlazna jedinica
	Kapacitet
	Logička operacija
	Logički sklop
	Memorija
	Model računalnog sustava
	Negacija
	Pascal
	Podatak
	Pohrana podataka
	Računalo
<i>Ukupno : 4</i>	<i>Ukupno : 18</i>

3.3.1.4 Četvrti način postavljanja dokaza

Neka je X_k bilo koji koncept. Ako je $X_v(X_k) \geq 0.65$ smatra se da je učenik svladao taj koncept i postavlja se dokaz na **Istina**. Slično, ako za neki koncept vrijedi $1 - X_v(X_k) \geq 0.65$, smatrat će se da učenik nije svladao taj koncept i postavlja se dokaz na **Laž**.

Primjer 3.5

Na Sliku 3.4 se vidi da je $X_v(\text{Ulazna jedinica}) = 0.312$, stoga je jasno da $1 - X_v(\text{Ulazna jedinica}) = 0.688$ što je veće od 0.65 , pa se smatra da učenik nije svladao taj koncept i u testiranju mreža, koje će se uraditi u sljedećem poglavlju, postaviti će se dokaz na Laž na varijabli *Ulazna jedinica*.

Prema navedenom, postojati će ukupno 24 dokaza danih u sljedećoj tablici, 4 **Istine** i 20 **Lazi**.

Tablica 3.7 Lista dokaza – četvrti način postavljanja dokaza

Istina	Laž
Prikazivanje podataka	1.44MB
Temeljna funkcija računala	Brojevni sustav
Unos podataka	C
Uređaj za komunikaciju	Centralna jedinica
	Disjunkcija
	Fortran
	Informacija
	Izlazna jedinica
	Kapacitet
	Logička operacija
	Logički sklop
	Memorija
	Model računalnog sustava
	Negacija
	Pascal
	Podatak
	Pohrana podataka
	Računalni sustav
	Računalo
	Ulazna jedinica
<i>Ukupno : 4</i>	<i>Ukupno : 20</i>

3.3.1.5 Peti način postavljanja dokaza

Neka je X_k bilo koji koncept. Ako je $X_v(X_k) \geq 0.6$ smatra se da je učenik svladao taj koncept i postavlja se dokaz na **Istina**. Slično, ako za neki koncept vrijedi $1 - X_v(X_k) \geq 0.6$, smatrat će se da učenik nije svladao taj koncept i postavlja se dokaz na **Laž**.

Primjer 3.6

Na Sliku 3.4 se vidi da je $X_v(\text{Aplikacijska programska podrška}) = 0.375$, stoga je jasno da $1 - X_v(\text{Aplikacijska programska podrška}) = 0.625$ što je veće od 0.6 , pa se smatra da učenik nije svladao taj koncept i u testiranju mreža, koje će se uraditi u sljedećem poglavlju, postaviti će se dokaz na Laž na varijabli *Aplikacijska programska podrška*.

Prema navedenom, postojati će čak 31 dokaz i svi su navedeni u sljedećoj tablici, 4 **Istine** i 27 **Laži**.

Tablica 3.8 Lista dokaza

Istina	Laž
Prikazivanje podataka	1.44MB
Temeljna funkcija računala	Aplikacijska programska podrška
Unos podataka	Aritmetičko logička jedinica
Uređaj za komunikaciju	Brojevni sustav
	C
	Centralna jedinica
	Disjunkcija
	Fortran
	Informacija
	Izlazna jedinica
	Kapacitet
	Logička operacija
	Logički sklop
	Memorija
	Model računalnog sustava
	Modem
	Mrežna kartica
	Negacija
	Obrada podataka
	Operacija
	Pascal
	Podatak
	Pohrana podataka
	Prijenos podataka
	Računalni sustav
	Računalo
	Ulazna jedinica
<i>Ukupno : 4</i>	<i>Ukupno : 27</i>

Usporedbom postavljenih dokaza u načinima određivanja dokaza razlike su očite u samom broju. Prema prvom načinu određivanja dokaza postoji 4 dokaza, a svako ostalo određivanje dokaza, redom čini nadskup od prethodnog. Logično je pretpostaviti da se javljaju razlike postavljanjem 4 dokaza u mreži (prvi način postavljanja dokaza), odnosno postavljanjem 31 dokaza u mreži (prvi način postavljanja dokaza) što će se pokazati u nastavku. Također je logično pretpostaviti da više dokaza implicira i točniji model. U daljnjem radu, pokazat će se da je bitno dokaze postaviti na kvalitetan način, te da ne igra ulogu kvantiteta dokaza. Točnije, u nastavku će se provesti pet testiranja, Testiranje 1, Testiranje 2, Testiranje 3,

Testiranje 4 i Testiranje 5. Svako od navedenih testiranja temelji se na prethodno postavljenim dokazima, i važno je napomenuti da svako od testiranja obuhvaća sve tri mreže (Mreža 1, Mreža 2 i Mreža 3) opisane u prethodnom poglavlju.

3.4 Ispitivanje učinkovitosti i pouzdanosti modela

U ovom poglavlju pristupa se testiranju napravljenog i opisanog. Naime, postavljajući dokaze, testirat će se pojedinačno Mreža 1, Mreža 2 i Mreža 3 i dobiveni rezultati usporedit će se sa učenikovim znanjem nakon testiranja. Na taj način saznat će se koja od mreža najbolje predviđa učenikovo znanje. Provedeno je pet testiranja čiji rezultati se nalaze u prilogu pod nazivima Testiranje 1 (Prilog T1), Testiranje 2 (Prilog T2), Testiranje 3 (Prilog T3), Testiranje 4 (Prilog T4) i Testiranje 5 (Prilog T5). Sva testiranja obuhvaćaju testiranje Mreže 1, Mreže 2 i Mreže 3, što znači da će se promatrati ukupno 15 modela.

Testiranje 1, Testiranje 2, Testiranje 3, Testiranje 4, Testiranje 5 se temelje na prvom, drugom, trećem, četvrtom, petom načinu postavljanja dokaza respektivno.

Rezultati svakog Testiranja su prikazani tablicom od 4 stupca. U prvom stupcu se nalazi ime koncepta, a u sljedećim stupcima redom:

- stvarne vrijednosti učenika dobivene nakon ispitivanja, to su vrijednost iz tablice koncepti_poslije (Prilog D)
- vrijednosti dobivene na temelju testiranja mreže 1 u programu GeNIe
- vrijednosti dobivene na temelju testiranja mreže 2 u programu GeNIe
- vrijednosti dobivene na temelju testiranja mreže 3 u programu GeNIe

Sve navedeno nalazi se u prilogu kako je već spomenuto. Budući da provedeno ispitivanje učenika na kojem su donešeni zaključci o stvarnom znanju učenika nisu obuhvaćali sve koncepte, tj. postoje koncepti koji nisu ispitivani, nema smisla uspoređivati rezultate testiranja sa konceptima koji nisu ispitivani. Uspoređivanje će biti napravljeno s konceptima za koje je vrijednosti funkcije X_v poslije ispitivanja različita od nule, te na konceptima koji nisu dokazi.

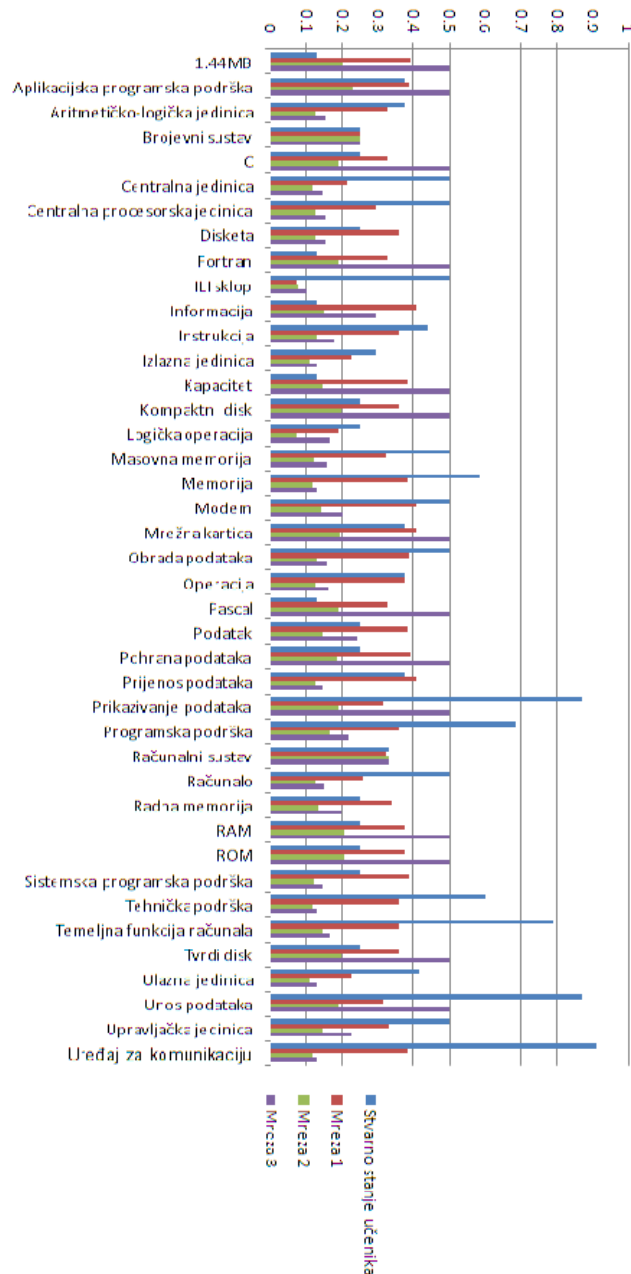
Testiranja su provedena u programu GeNIe, potom svi rezultati ubačeni u Excel na temelju kojih je napravljena usporedba. Zajedničko svim trima mrežama je sljedeće:

- broj koncepata
- a „priori“ vjerojatnosti korjenskih čvorova
- dokazi

Bitna razlika su uvjetne vjerojatnosti koje su u svakoj mreži dobivene na poseban način. Prethodno je objašnjen način određivanja uvjetnih vjerojatnosti za svaki čvor, a „priori“ vjerojatnosti korjenskih čvorova te način postavljanja dokaza.

3.4.1 Testiranje 1

Na sljedećoj slici (Slika 3.12) prikazan je graf usporedbe stvarnog znanja učenika i predviđanja redom Mreže 1, Mreže 2 i Mreže 3. Uspoređivale su se dobivene vrijednosti za 41 koncept.



Slika 3.12 Graf – Testiranje 1

Budući je sa grafa teško ustanoviti u kojoj mjeri se podudaraju predviđanja sa stvarnim znanjem, u sljedećoj tablici se nalaze podaci prema kojima je napravljen graf, s označenim preklapanjima. Zelenom bojom označene su vrijednosti koje se razlikuju manje ili jednako 0.1 i za njih se može reći da se podudaraju. Plavom bojom označene su vrijednosti koje se

razlikuju više od 0.1, a manje ili jednako od 0.2. Crvenom bojom označene su vrijednosti koje se razlikuju više od 0.2 i za njih će se smatrati da su promašaji. Ove vrijednosti su određene heuristički i nemaju potporu u literaturi.

Tablica 3.9 Rezultati Testiranja 1 s preklapanjem

Koncept	Stvarno znanje učenika	Mreza 1	Mreza 2	Mreza 3
1.44MB	0.125	0.393	0.199	0.5
Aplikacijska programska podrška	0.375	0.387	0.232	0.5
Aritmetičko-logička jedinica	0.375	0.326	0.122	0.153
Brojevni sustav	0.25	0.25	0.25	0.25
C	0.25	0.326	0.189	0.5
Centralna jedinica	0.5	0.211	0.114	0.144
Centralna procesorska jedinica	0.5	0.294	0.123	0.152
Disketa	0.25	0.358	0.123	0.154
Fortran	0.125	0.326	0.189	0.5
ILI sklop	0.5	0.074	0.076	0.1
Informacija	0.125	0.408	0.15	0.293
Instrukcija	0.437	0.356	0.128	0.177
Izlazna jedinica	0.291	0.224	0.109	0.125
Kapacitet	0.125	0.386	0.143	0.5
Kompaktni disk	0.25	0.358	0.195	0.5
Logička operacija	0.25	0.19	0.073	0.166
Masovna memorija	0.5	0.323	0.119	0.156
Memorija	0.583	0.385	0.114	0.125
Modem	0.5	0.408	0.14	0.2
Mrežna kartica	0.375	0.408	0.191	0.5
Obrada podataka	0.5	0.387	0.128	0.158
Operacija	0.375	0.376	0.122	0.162
Pascal	0.125	0.326	0.189	0.5
Podatak	0.25	0.385	0.144	0.242
Pohrana podataka	0.25	0.394	0.186	0.5
Prijenos podataka	0.375	0.408	0.122	0.143
Prikazivanje podataka	0.875	0.317	0.189	0.5
Programska podrška	0.687	0.359	0.165	0.215
Računalni sustav	0.33	0.324	0.329	0.33
Računalo	0.5	0.259	0.122	0.15
Radna memorija	0.25	0.34	0.131	0.198
RAM	0.25	0.372	0.204	0.5
ROM	0.25	0.372	0.204	0.5
Sistemska programska podrška	0.25	0.387	0.12	0.143
Tehnička podrška	0.6	0.356	0.116	0.126
Temeljna funkcija računala	0.791	0.359	0.141	0.166
Tvrđi disk	0.25	0.358	0.195	0.5
Ulazna jedinica	0.416	0.224	0.109	0.125
Unos podataka	0.875	0.317	0.189	0.5
Upravljačka jedinica	0.5	0.33	0.143	0.222
Uređaj za komunikaciju	0.916	0.385	0.114	0.125

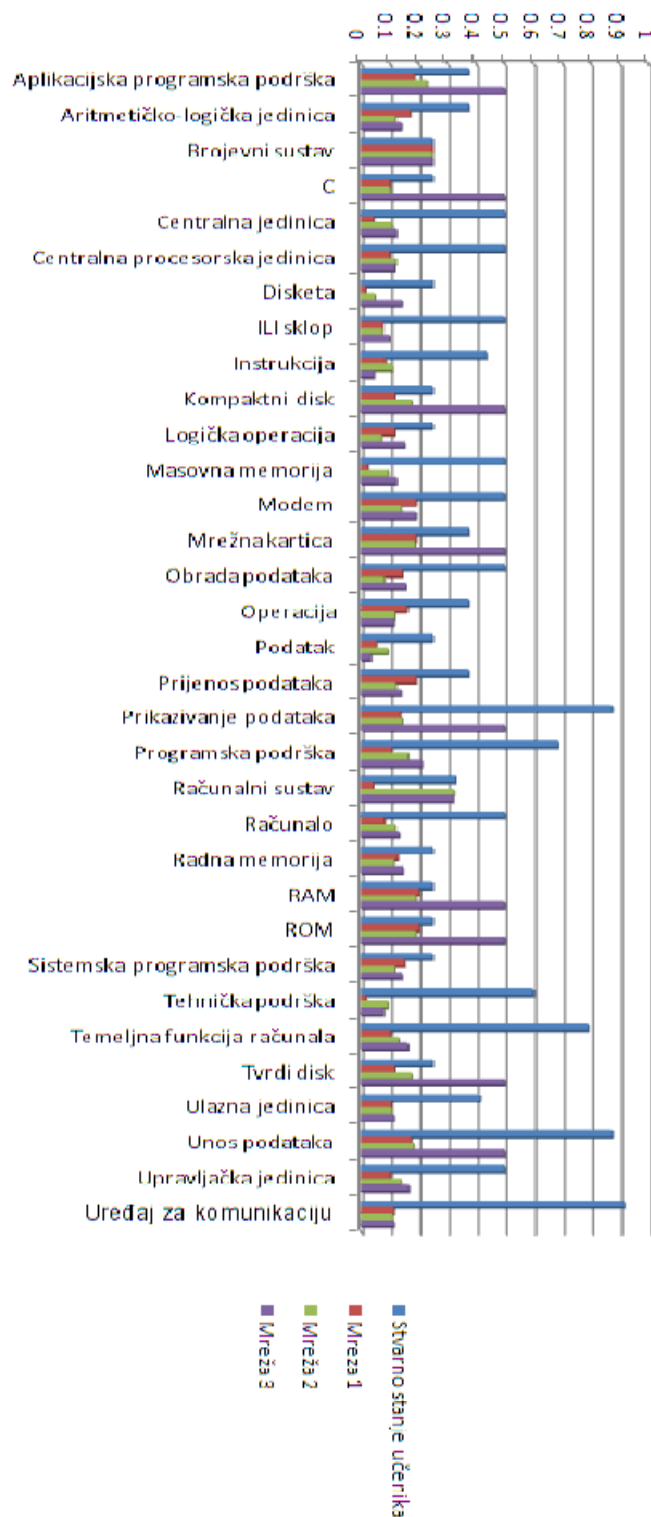
Usporedba mreza 1 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa 15 koncepata koji se podudaraju što iznosi 36.6% podudaranja. 13 koncepata su između 0.1 i 0.2 što iznosi 31.7%, te također 13 promašaja što daje preostalih 31.7%.

Usporedba mreza 2 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa 13 koncepata koji se podudaraju što iznosi 31.7% podudaranja. 7 koncepata su između 0.1 i 0.2 što iznosi 17.07%, preostalih 21 od 41 koncepta su promašaji, i oni čine preostalih 51.23%.

Usporedba mreza 3 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa 6 koncepata koji se podudaraju što iznosi 14.63% podudaranja. 5 koncepata su između 0.1 i 0.2 što iznosi 12.19% te čak 30 promašaja, a to daje preostalih 73.18%.

3.4.2 Testiranje 2

Na sljedećoj slici (Slika 3.13) prikazan je graf usporedbe stvarnog znanja učenika i predviđanja redom Mreze 1, Mreze 2 i Mreze 3. Uspoređivale su se dobivene vrijednosti za 33 koncepta.



Slika 3.13 Graf – Testiranje 2

Budući je sa grafa teško ustanoviti u kojoj mjeri se podudaraju predviđanja sa stvarnim znanjem, u sljedećoj tablici se nalaze podaci prema kojima je napravljen graf, s označenim preklapanjima. Zelenom bojom označene su vrijednosti koje se razlikuju manje ili jednako 0.1 i za njih se može reći da se podudaraju. Plavom bojom označene su vrijednosti koje se

razlikuju više od 0.1, a manje ili jednako od 0.2. Crvenom bojom označene su vrijednosti koje se razlikuju više od 0.2 i za njih će se smatrati da su promašaji. Ove vrijednosti su određene heuristički i nemaju potporu u literaturi.

Tablica 3.10 Rezultati Testiranja 2 s preklapanjem

Koncept	Stvarno znanje učenika	Mreža 1	Mreža 2	Mreža 3
Aplikacijska programska podrška	0.375	0.186	0.231	0.5
Aritmetičko-logička jedinica	0.375	0.171	0.121	0.141
Brojevni sustav	0.25	0.25	0.25	0.25
C	0.25	0.102	0.101	0.5
Centralna jedinica	0.5	0.043	0.11	0.124
Centralna procesorska jedinica	0.5	0.099	0.122	0.118
Disketa	0.25	0.016	0.049	0.143
ILI sklop	0.5	0.075	0.076	0.1
Instrukcija	0.437	0.085	0.111	0.045
Kompaktni disk	0.25	0.119	0.176	0.5
Logička operacija	0.25	0.119	0.073	0.153
Masovna memorija	0.5	0.024	0.095	0.124
Modem	0.5	0.192	0.139	0.192
Mrežna kartica	0.375	0.192	0.189	0.5
Obrada podataka	0.5	0.144	0.082	0.157
Operacija	0.375	0.16	0.119	0.115
Podatak	0.25	0.054	0.093	0.034
Prijenos podataka	0.375	0.192	0.122	0.14
Prikazivanje podataka	0.875	0.136	0.145	0.5
Programska podrška	0.687	0.107	0.164	0.212
Računalni sustav	0.33	0.042	0.325	0.322
Računalo	0.5	0.082	0.121	0.133
Radna memorija	0.25	0.128	0.115	0.146
RAM	0.25	0.203	0.192	0.5
ROM	0.25	0.203	0.192	0.5
Sistemska programska podrška	0.25	0.152	0.119	0.142
Tehnička podrška	0.6	0.019	0.093	0.079
Temeljna funkcija računala	0.791	0.103	0.131	0.164
Tvrdi disk	0.25	0.119	0.176	0.5
Ulazna jedinica	0.416	0.106	0.107	0.115
Unos podataka	0.875	0.175	0.184	0.5
Upravljačka jedinica	0.5	0.102	0.139	0.166
Uređaj za komunikaciju	0.916	0.115	0.111	0.115

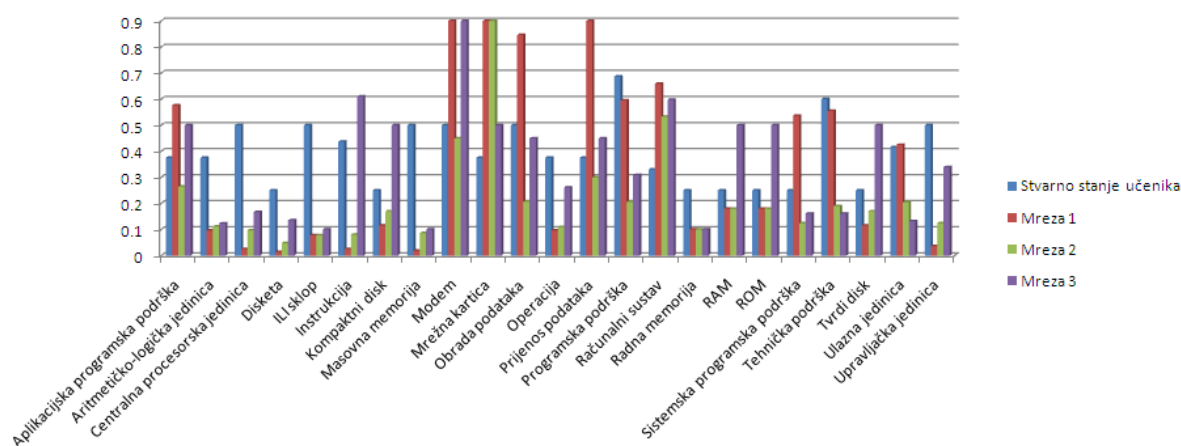
Usporedba mreža 1 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa 4 koncepta koji se podudaraju što iznosi 12.12% podudaranja. 9 koncepta su između 0.1 i 0.2 što iznosi 27.27%, i preostalo je 20 promašaja što čini 61.88%.

Usporedba mreža 2 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa 6 koncepta koji se podudaraju što iznosi 18.18% podudaranja. 6 koncepta su između 0.1 i 0.2 što iznosi 18.18%, preostalih 21 koncepta su promašaji i oni čine preostalih 36.36%.

Usporedba mreža 3 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa koncepta koji se podudaraju što iznosi 9% podudaranja. 4 koncepta su između 0.1 i 0.2 što iznosi 12.12% te čak 26 promašaja, a to daje preostalih 78.88%.

3.4.3 Testiranje 3

Na sljedećoj slici (Slika 3.14) prikazan je graf usporedbe stvarnog znanja učenika i predviđanja redom Mreze 1, Mreze 2 i Mreze 3. Uspoređivale su se dobivene vrijednosti za 23 koncepta.



Slika 3.14 Graf – Testiranje 3

Budući je sa grafa teško ustanoviti u kojoj mjeri se podudaraju predviđanja sa stvarnim znanjem, u sljedećoj tablici se nalaze podaci prema kojima je napravljen graf, s označenim preklapanjima. Zelenom bojom označene su vrijednosti koje se razlikuju manje ili jednako 0.1 i za njih se može reći da se podudaraju. Plavom bojom označene su vrijednosti koje se razlikuju više od 0.1, a manje ili jednako od 0.2. Crvenom bojom označene su vrijednosti koje se razlikuju više od 0.2 i za njih će se smatrati da su promašaji. Ove vrijednosti su određene heuristički i nemaju potporu u literaturi.

Tablica 3.11 Rezultati Testiranja 3 s preklapanjem

Koncept	Stvarno znanje učenika	Mreza 1	Mreza 2	Mreza 3
Aplikacijska programska podrška	0.375	0.576	0.265	0.5
Aritmetičko-logička jedinica	0.375	0.097	0.112	0.123
Centralna procesorska jedinica	0.5	0.025	0.096	0.167
Disketa	0.25	0.014	0.048	0.135
ILI sklop	0.5	0.078	0.078	0.1
Instrukcija	0.437	0.025	0.08	0.61
Kompaktni disk	0.25	0.115	0.17	0.5
Masovna memorija	0.5	0.019	0.087	0.1
Modem	0.5	0.9	0.45	0.9
Mrežna kartica	0.375	0.9	0.9	0.5
Obrada podataka	0.5	0.846	0.207	0.45
Operacija	0.375	0.097	0.109	0.261
Prijenos podataka	0.375	0.9	0.3	0.45
Programska podrška	0.687	0.595	0.206	0.309
Računalni sustav	0.33	0.659	0.532	0.598
Radna memorija	0.25	0.1	0.1	0.1
RAM	0.25	0.18	0.18	0.5
ROM	0.25	0.18	0.18	0.5

<i>Sistemska programska podrška</i>	0.25	0.536	0.124	0.161
<i>Tehnička podrška</i>	0.6	0.555	0.19	0.161
<i>Tvrđi disk</i>	0.25	0.115	0.17	0.5
<i>Ulazna jedinica</i>	0.416	0.425	0.205	0.132
<i>Upravljačka jedinica</i>	0.5	0.036	0.124	0.339

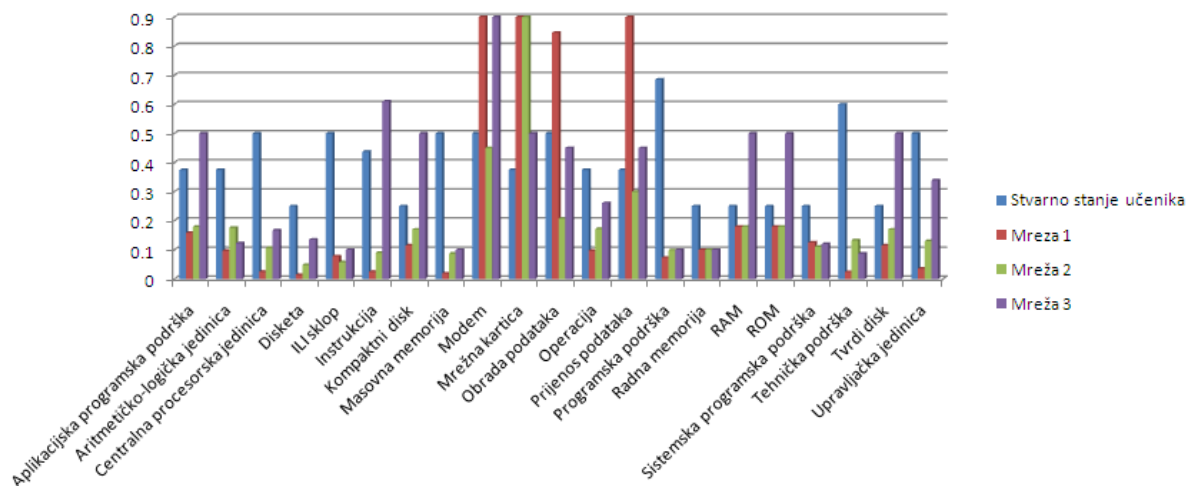
Usporedba mreza 1 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa 5 konceptata koji se podudaraju što iznosi 21.73% podudaranja. 4 koncepta su između 0.1 i 0.2 što iznosi 17.39%, i preostalo je 14 promašaja što čini 60.80%.

Mreza 2 u ovom Testiranju daje identične rezultate kao Mreza 1.

Usporedba mreza 3 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa 6 konceptata koji se podudaraju što iznosi 26.08% podudaranja. 4 koncepta su između 0.1 i 0.2 što iznosi 17.39% te čak 13 promašaja, a to daje preostalih 56.53%.

3.4.4 Testiranje 4

Na sljedećoj slici (Slika 3.15) prikazan je graf usporedbe stvarnog znanja učenika i predviđanja redom Mreze 1, Mreze 2 i Mreze 3. Uspoređivale su se dobivene vrijednosti za 21 koncept.



Slika 3.15 Graf – Testiranje 4

Budući je sa grafa teško ustanoviti u kojoj mjeri se podudaraju predviđanja sa stvarnim znanjem, u sljedećoj tablici se nalaze podaci prema kojima je napravljen graf, s označenim preklapanjima. Zelenom bojom označene su vrijednosti koje se razlikuju manje ili jednako 0.1 i za njih se može reći da se podudaraju. Plavom bojom označene su vrijednosti koje se razlikuju više od 0.1, a manje ili jednako od 0.2. Crvenom bojom označene su vrijednosti koje

se razlikuju više od 0.2 i za njih će se smatrati da su promašaji. Ove vrijednosti su određene heuristički i nemaju potporu u literaturi.

Tablica 3.12 Rezultati Testiranja 4 s preklapanjem

Koncept	Stvarno znanje učenika	Mreža 1	Mreža 2	Mreža 3
Aplikacijska programska podrška	0.375	0.158	0.179	0.5
Aritmetičko-logička jedinica	0.375	0.097	0.176	0.123
Centralna procesorska jedinica	0.5	0.025	0.107	0.167
Disketa	0.25	0.014	0.048	0.135
ILI sklop	0.5	0.078	0.058	0.1
Instrukcija	0.437	0.025	0.09	0.61
Kompaktni disk	0.25	0.115	0.17	0.5
Masovna memorija	0.5	0.019	0.087	0.1
Modem	0.5	0.9	0.45	0.9
Mrežna kartica	0.375	0.9	0.9	0.5
Obrada podataka	0.5	0.846	0.207	0.45
Operacija	0.375	0.097	0.172	0.261
Prijenos podataka	0.375	0.9	0.3	0.45
Programska podrška	0.685	0.073	0.099	0.1
Radna memorija	0.25	0.1	0.1	0.1
RAM	0.25	0.18	0.18	0.5
ROM	0.25	0.18	0.18	0.5
Sistemska programska podrška	0.25	0.125	0.111	0.12
Tehnička podrška	0.6	0.024	0.133	0.087
Tvrđi disk	0.25	0.115	0.17	0.5
Upravljačka jedinica	0.5	0.036	0.13	0.339

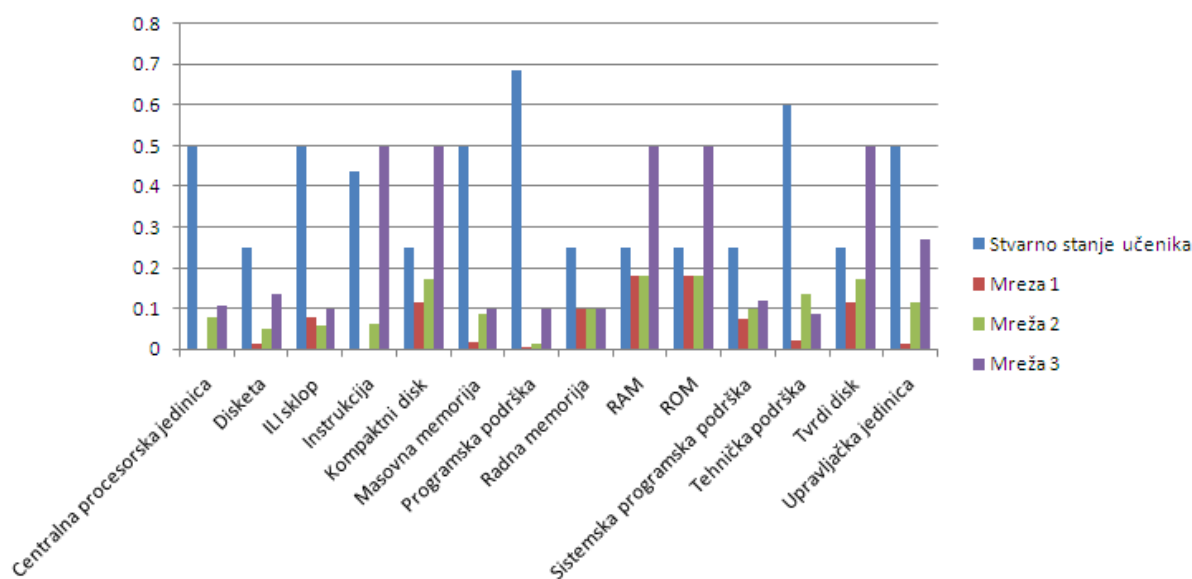
Usporedba mreža 1 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa 2 koncepta koji se podudaraju što iznosi 9.52% podudaranja. 4 koncepta su između 0.1 i 0.2 što iznosi 19.04%, i preostalo je 15 promašaja što čini 71.44%.

Usporedba mreža 2 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa 6 koncepta koji se podudaraju što iznosi 28.57% podudaranja. 5 koncepta su između 0.1 i 0.2 što iznosi 23.8%, preostalih 10 koncepta su promašaji i oni čine preostalih 47.63%.

Usporedba mreža 3 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa 3 koncepta koji se podudaraju što iznosi 14.28% podudaranja. 7 koncepta su između 0.1 i 0.2 što iznosi 33.3% te 11 promašaja, a to daje preostalih 52.42%.

3.4.5 Testiranje 5

Na sljedećoj slici (Slika 3.16) prikazan je graf usporedbe stvarnog znanja učenika i predviđanja redom Mreže 1, Mreže 2 i Mreže 3. Uspoređivale su se dobivene vrijednosti za 14 koncepta.



Slika 3.16 Graf – Testiranje 5

Budući je sa grafa teško ustanoviti u kojoj mjeri se podudaraju predviđanja sa stvarnim znanjem, u sljedećoj tablici se nalaze podaci prema kojima je napravljen graf, s označenim preklapanjima. Zelenom bojom označene su vrijednosti koje se razlikuju manje ili jednako 0.1 i za njih se može reći da se podudaraju. Plavom bojom označene su vrijednosti koje se razlikuju više od 0.1, a manje ili jednako od 0.2. Crvenom bojom označene su vrijednosti koje se razlikuju više od 0.2 i za njih će se smatrati da su promašaji. Ove vrijednosti su određene heuristički i nemaju potporu u literaturi.

Tablica 3.13 Rezultati Testiranja 5 s preklapanjem

Koncept	Stvarno znanje učenika	Mreža 1	Mreža 2	Mreža 3
Centralna procesorska jedinica	0.5	0.002	0.076	0.108
Disketa	0.25	0.014	0.048	0.135
I/I sklop	0.5	0.078	0.058	0.1
Instrukcija	0.437	0.002	0.063	0.497
Kompaktni disk	0.25	0.115	0.17	0.5
Masovna memorija	0.5	0.019	0.087	0.1
Programska podrška	0.687	0.008	0.012	0.1
Radna memorija	0.25	0.1	0.1	0.1
RAM	0.25	0.18	0.18	0.5
ROM	0.25	0.18	0.18	0.5
Sistemska programska podrška	0.25	0.074	0.1	0.12
Tehnička podrška	0.6	0.024	0.133	0.087
Tvrdi disk	0.25	0.115	0.17	0.5
Upravljačka jedinica	0.5	0.014	0.115	0.27

Usporedba mreža 1 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa 2 koncepta koji se podudaraju što iznosi 14.28% podudaranja. 4 koncepta su između 0.1 i 0.2 što iznosi 28.57%, i preostalo je 8 promašaja što čini 57.15%.

Usporedba mreža 2 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa 4 koncepta koji se podudaraju što iznosi 28.57% podudaranja. 2 koncepta su između 0.1 i 0.2 što iznosi 14.28% ,preostalih 8 koncepta su promašaji i oni čine preostalih 57.15%.

Usporedba mreža 3 sa stvarnim znanjem učenika, prema grafu i tablici rezultira sa 1 koncepta koji se podudaraju što iznosi 7.14% podudaranja. 3 koncepta su između 0.1 i 0.2 što iznosi 21.42% te 10 promašaja, a to daje preostalih 71.44%.

3.4.6 Interpretacija rezultata

Ideja ovog rada bila je stvoriti probabilistički model koji će predvidjeti znanje učenika na temelju nekoliko poznatih koncepta. Nakon definirane mreže pokazano je na koje načine se mogu određivati uvjetne vjerojatnosti, te „a priori“ vjerojatnosti korjenskih čvorova. Posebna pažnja se posvetila određivanju dokaza, jer postavljanje dokaza čini razlike između mreža. U sljedećim tablicama nalaze se rezultati svih Testiranja prema broju pogodaka i promašaja, posebno za svaku mrežu i svako Testiranje. U Tablici 3.15 nalaze se isti ti rezultati prikazani u postotcima.

3.14 Rezultati Testiranja prema broju pogodaka i promašaja

	Mreža 1			Mreža 2			Mreža 3		
Testiranje 1	15	13	13	13	7	21	6	5	30
Testiranje 2	4	9	20	6	6	21	3	4	26
Testiranje 3	5	4	14	5	4	14	6	4	13
Testiranje 4	2	4	15	6	5	10	3	7	11
Testiranje 5	2	4	8	4	2	8	1	3	10

Tablica 3.15 Rezultati Testiranja prema broju pogodaka i promašaja u postotcima

	Mreža 1			Mreža 2			Mreža 3		
Testiranje1	37	32	32	32	17	51	15	12	73
Testiranje2	12	27	62	18	18	36	9	12	79
Testiranje3	22	17	61	22	17	61	26	17	56
Testiranje4	9	19	71	28	24	48	14	33	52
Testiranje5	14	28	57	28	14	57	7	21	71

Analizirajući posebno **Mreža 1**, **Mreža 2** i **Mreža 3** prema prethodnoj tablici, nije teško zaključiti da **Mreža 3** ima „najgore“ rezultate. Takav rezultat može se pripisati postavljanju uvjetnih vjerojatnosti 0.5 za *Istinu*, i 0.5 za *Laz* za sve čvorove bez potomaka. Pogotke u toj mreži pripisat će se slučajnosti. Eliminirajući **Mrežu 3** i promatrajući Tablica 3.15 **Mreža 1** ima bolje rezultate samo u *Testiranju 1*, dok u *Testiranju 3* ima identične rezultate. *Testiranje 2* i

Testiranje 4 je pripalo **Mrezi 2** u vidu rezultata. Sveukupno gledajući, **Mreza 2** ima malo bolje rezultate, no tesko je izdvojiti koja je bolja.

Promatrano je sveukupno 15 modela, a model koji ima najviše preklapanja sa stvarnim znanjem učenika pripada **Mrezi 1** u Testiranju 1. U odnosu na ostale modele taj model ima jako nizak broj pogrešaka, te također, u odnosu na ostale modele, jako visok broj pogodaka, i upravo zbog toga se izdvaja kao model za budućnost.

Promatrajući prethodne tablice, a posebno Tablica 3.15, te pokušavajući odgovoriti koje Testiranje najbolje predviđa stvarno znanje, nije teško vidjeti da je to *Testiranje 1*. Naime, provedena Testiranja su se razlikovala po postavljanju dokaza. Probabilistički model će najbolje predvidjeti znanje ako se dokazi „dobro“ postave. „Dobro“ postavljanje dokaza ovisi o kvaliteti, a ne kvantiteti. Primijetimo, *Testiranje 1* se temelji na samo 4 dokaza, a svako ostalo ima više dokaza. Konačno, Testiranje 5, ima čak 31 dokaz, no dokaze u Testiranju 5 je predstavljao svaki koncept čija je vrijednost funkcije X_v veća ili jednaka od 0.6. Na taj način se pokupilo dosta koncepata koji ne bi trebali biti dokazi, pa sve skupa rezultira sa dosta promašaja. Testiranje 1, prisjetimo se, temeljilo se na dokazima, čije vrijednosti funkcije X_v su veće ili jednake od 0.9. Na temelju rezultata ovog rada, smatra se da učenik poznaje neki koncept i da u probabilističkom modelu, temeljenom na Bayesovoj mreži, on predstavlja dokaz, jedino ako mu je vrijednost funkcije X_v veća ili jednaka od 0.9.

Pokazalo se da se na temelju malog, ali kvalitetno odabranog broja dokaza može bolje predvidjeti znanje učenika nego na temelju mnogo dokaza koji si neutemeljeni. U daljnjim ispitivanjima probabilističkih modela, trebalo bi provesti šire istraživanje i vidjeti u kolikom postotku prethodno definirani modeli točno predviđaju znanje učenika, ali na većem uzorku modela učenika.

4 Zaključak

Želja da se omogući novo, moderno i kvalitetno obrazovanje zahtijeva jako puno ispitivanja. U ovom radu je opisan probabilistički model temeljen na Bayesovoj mreži koji bi trebao predstavljati novi način modeliranja učenika. Uporaba tog modela je ilustrirana kroz primjer predviđanja stanja znanja učenika. Probabilistički modeli doprinose obrazovanju jer unaprijeđuju proces učenja i poučavanja učenika. Osnovu unaprijeđenja čini potreba za učinkovitim modelom koji bi na temelju primljenih informacija, donosio zaključke o pojmovima koje je učenik svladao, a koje nije.

Problem koji se javlja kod modeliranja učenika je neizvjesnost. Naime, inteligentni tutorski sustav treba izgraditi model na temelju malog broja informacija koje primi od učenika. Te informacije mogu biti različito interpretirane, stoga je uloga probabilističkih modela posebno važna. Izgraditi model koji će na temelju malog broja informacija donijeti kvalitetne zaključke i uz sve to prilagoditi učeniku učenje zahtijeva dosta truda. Bayesova mreža teoretski omogućuje navedeno, no posebno je važno ispitati najbolji način implementacije Bayesove mreže u modeliranju učenika.

Osnova ovog rada je bila pronaći najbolji način izgradnje probabilističkog modela za modeliranje učenika. Promatrane su brojne implementacije, a posebni naglasci su stavljani na određivanje uvjetnih vjerojatnosti i postavljanje dokaza. Vjerujući na samom početku rada da je najvažnije određivanje uvjetnih vjerojatnosti, pokazalo se da ništa manje nije važno ni kvalitetno postaviti dokaze. Model koji između svih testiranih modela predstavlja najbolje rezultate je model kod kojeg su uvjetne vjerojatnosti određene u ovisnosti o broju roditelja i u kojem su dokazi koncepti kod kojih je vrijednost funkcije X_v veća ili jednaka 0.9. U budućnosti bi trebalo pronaći odgovore zašto je taj model pogriješio u 32% slučajeva, te otkloniti mogućnost greške.

Tehnologije u obrazovanju nisu nova stvar, no kako bi obrazovanje pratilo taj svakodnevni napredak, bitno je omogućiti učenje u čijem je središtu učenik. Predložena metodologija još uvijek mora pokazati svoju praktičnu korisnost u podučavanju učenika za što će zasigurno biti potrebno vrijeme. Upotreba predloženog modela u ovom radu zahtijeva provjeravanje postignutih rezultata na većem uzorku modela učenika.

5 Literatura

[Charniak, 1991]

Charniak, E. (1991). *Bayesian Networks without tears*. AI magazine, 12(4), 50.

[Millan & Perez, 2002]

Millan E. i Perez J.L (2002) - A Bayesian Diagnostic Algorithm for Student Modeling and its Evaluation

[Vanlehn & Niu, 2001]

Kurt Vanlehn & Zhendong Niu, 2001 - Bayesian student modeling, user interfaces and feedback

[Prcela, 2010]

Prcela Marin, 2010 - Predstavljanje znanja zasnovano na integraciji ontologija i Bayesovih mreža, doktorska disertacija, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu

[Grubišić, (2003)]

Grubišić A. (2003), Modeliranje učenika probabilističkim mrežama, seminarski rad, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu

[Stankov, 2005]

Stankov, S. (2005), *Suvremena informacijska tehnologija u nastavi*, Fakultet prirodoslovno matematičkih znanosti i odgojnih područja Sveučilišta u Splitu, interna skripta, Split, siječanj 2005. www.pmfst.hr/~stankov/pregled_fpmz.htm

[Žnidaršič, 2005]

Žnidaršič Martin, Bayesove verjetnostne mreže, *Seminarska naloga pri predmetu Avtomatsko učenje*

[Burns & Capps, 1988]

Burns, H. L., & Capps, C. G. (1988). *Foundations of intelligent tutoring systems: An introduction*. Foundations of intelligent tutoring systems (M. C. Poison, J. J. Richardson (Ed.)), pp. 1-19. Lawrence Erlbaum, London.

[Bloom, 1984]

Bloom, B. S. (1984). *The 2 Sigma Problem: The Search for Methods of Group Instruction as Effective as One-to-One Tutoring*. Educational Researcher, 13(6), pp. 4-16.

[Gross & Yellen, 1998]

Gross, J. L., & Yellen, J. (1998). *Graph Theory and Its Applications*, 1st ed.. CRC Press.

[Veljan, 1989]

Veljan, D. (1989). *Kombinatorika s teorijom grafova*. Zagreb: Školska knjiga.

6 Prilozi

- Prilog A – model_znanje1
- Prilog B – koncepti_prije
- Prilog C – model_znanje2
- Prilog D – koncepti_poslije
- Prilog E – Mreza 1
- Prilog F – Mreza 2
- Prilog G – Mreza 3
- Prilog T1 – Testiranje 1
- Prilog T2 – Testiranje 2
- Prilog T3 – Testiranje 3
- Prilog T4 – Testiranje 4
- Prilog T5 – Testiranje 5

6.1 Prilog A – model_znanje1

model_znanje1		
Aritmetička operacija	Oduzimanje	-1
Aritmetička operacija	Zbrajanje	-1
Aritmetičko-logička jedinica	Aritmetička operacija	-1
Aritmetičko-logička jedinica	Ložička operacija	2
Baza		2 -1
Baza		8 -1
Baza		10 -1
Baza		16 -1
Binarni brojevni sustav		2 -1
Binarni brojevni sustav	0 1	-1
Binarni brojevni sustav	Baza	-1
Binarni brojevni sustav	Znamenke	-1
Brojevni sustav	Binarni brojevni sustav	2
Brojevni sustav	Dekadski brojevni sustav	-1
Brojevni sustav	Hekasadekadski brojevni sustav	-1
Brojevni sustav	Oktalni brojevni sustav	-1
Centralna jedinica	Masovna memorija	0
Centralna jedinica	Računalo	1
Centralna procesorska jedinica	Aritmetičko logička jedinica	2
Centralna procesorska jedinica	Upravljačka jedinica	2
Dekadski brojevni sustav		10 -1
Dekadski brojevni sustav	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	-1
Dekadski brojevni sustav	Baza	-1
Dekadski brojevni sustav	Znamenke	-1
Disketa	1.44MB	-1
Disketa	Kapacitet	-1
Hekasadekadski brojevni sustav		16 -1
Hekasadekadski brojevni sustav	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F	-1
Hekasadekadski brojevni sustav	Baza	-1
Hekasadekadski brojevni sustav	Znamenke	-1
I sklop	Konjunktija	-1
ILI sklop	Disjunktija	2
Informacija	Značenje	0
Instrukcija	Operacija	2
Instrukcija	Podatak	1
Izlazna jedinica	Monitor	-1
Izlazna jedinica	Prikazivanje podataka	3
Izlazna jedinica	Štampač	-1
Jezični prevoditelji	Interpretator	-1
Jezični prevoditelji	Kompilator	-1
Jezični prevoditelji	Programski jezik visoke razine	-1
Kapacitet	1.44 MB	-1
Logička operacija	Disjunktija	-1
Logička operacija	Konjunktija	-1
Logička operacija	Negacija	2
Logički sklop	I sklop	-1
Logički sklop	ILI sklop	2
Logički sklop	Logička operacija	-1
Logički sklop	NE sklop	-1
Logički sklop	NI sklop	-1
Logički sklop	NILI sklop	-1
Masovna memorija	Disketa	0
Masovna memorija	Kompaktni disk	0
Masovna memorija	Tvrđi disk	0
Memorija	Masovna memorija	0
Memorija	Pohrana podataka	3
Memorija	Radna memorija	0

Model računalnog sustava	Centralna jedinica		2
Model računalnog sustava	Izlazna jedinica		-1
Model računalnog sustava	Ulazna jedinica		-1
Modem	Serijski prijenos podataka		-1
NE sklop	Negacija		-1
NI sklop	Konjunktija		-1
NI sklop	Negacija		-1
NILI sklop	Disjunktija		-1
NILI sklop	Negacija		-1
Obrada podataka	Pohrana podataka		-1
Obrada podataka	Upravljanje podataka		-1
Oktalni brojevni sustav		8	-1
Oktalni brojevni sustav	0 1 2 3 4 5 6 7		-1
Oktalni brojevni sustav	Baza		-1
Oktalni brojevni sustav	Znamenke		-1
Operacija	Aritmetička operacija		-1
Operacija	Logička operacija		2
Operacijski sustav	Dos		-1
Operacijski sustav	Unix		-1
Operacijski sustav	Windows		-1
Podatak	Informacija		1
Prijenos podataka	Paralelni prijenos podataka		-1
Prijenos podataka	Serijski prijenos podataka		-1
Programska podrška	Aplikacijska programska podrška		3
Programska podrška	Sistemska programska podrška		0
Programski jezik	Programski jezik niske razine		-1
Programski jezik	Programski jezik visoke razine		-1
Programski jezik niske razine	Asembler		-1
Programski jezik visoke razine	Basic		0
Programski jezik visoke razine	C		2
Programski jezik visoke razine	Fortran		1
Programski jezik visoke razine	Pascal		1
Računalni sustav	Programska podrška		3
Računalni sustav	Tehnička podrška		2
Računalni sustav	Temeljna funkcija računala		3
Računalo	Centralna procesorska jedinica		2
Računalo	Radna memorija		0
Radna memorija	RAM		0
Radna memorija	ROM		0
Sistemska programska podrška	Jezični prevoditelji		-1
Sistemska programska podrška	Operacijski sustav		-1
Sistemska programska podrška	Uslužni programi		-1
Tehnička podrška	Centralna jedinica		1
Tehnička podrška	Izlazna jedinica		0
Tehnička podrška	Memorija		0
Tehnička podrška	Ulazna jedinica		3
Tehnička podrška	Uređaj za komunikaciju		3
Temeljna funkcija računala	Obrada podataka		3
Temeljna funkcija računala	Prikazivanje podataka		3
Temeljna funkcija računala	Unos podataka		3
Ulazna jedinica	Miš		-1
Ulazna jedinica	Tipkovnica		-1
Ulazna jedinica	Unos podataka		3
Upravljačka jedinica	Instrukcija		2
Uređaj za komunikaciju	Modem		3
Uređaj za komunikaciju	Mrežna kartica		3
Uređaj za komunikaciju	Prijenos podataka		3
Znamenke	0 1		-1
Znamenke	0 1 2 3 4 5 6 7		-1
Znamenke	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9		-1
Znamenke	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F		-1

6.2 Prilog B – koncepti_prije

koncepti_prije	
X _k	$X_v (X_k)$
	2 0
	8 0
	10 0
	16 0
0 1	0
0 1 2 3 4 5 6 7	0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F	0
1.44MB	0.125
Aplikacijska programska podrška	0.375
Aritmetička operacija	0
Aritmetičko-logička jedinica	0.375
Asembler	0
Basic	0
Baza	0
Binarni brojevni sustav	0
Brojevni sustav	0.25
C	0.25
Centralna jedinica	0.25
Centralna procesorska jedinica	0.5
Dekadski brojevni sustav	0
Disjunkcija	0.083
Disketa	0
DOS	0
Fortran	0.125
Heksadekadski brojevni sustav	0
I sklop	0
ILI sklop	0.5
Informacija	0.125
Instrukcija	0.4375
Interpretator	0
Izlazna jedinica	0.125
Jezični prevoditelji	0
Kapacitet	0.125
Kompaktni disk	0
Kompilator	0
Konjunktija	0
Logička operacija	0.25
Logički sklop	0.0416
Masovna memorija	0
Memorija	0.125
Miš	0
Model računalnog sustava	0.083
Modem	0.375
Monitor	0
Mrežna kartica	0.375
NE sklop	0
Negacija	0.0625
NI sklop	0
NILI sklop	0
Obrada podataka	0.375
Oduzimanje	0
Oktalni brojevni sustav	0
Operacija	0.375

Operacijski sustav	0
Paralelni prijenos podataka	0
Pascal	0.125
Podatak	0.25
Pohrana podataka	0.1875
Prijenos podataka	0.375
Prikazivanje podataka	0.75
Programska podrška	0.5625
Programski jezik	0
Programski jezik niske razine	0
Programski jezik visoke razine	0
Računalni sustav	0.33
Računalo	0.25
Radna memorija	0
RAM	0
ROM	0
Serijski prijenos podataka	0
Sistemska programska podrška	0
Štampač	0
Tehnička podrška	0.425
Temeljna funkcija računala	0.75
Tipkovnica	0
Tvrđi disk	0
Ulazna jedinica	0.3125
Unix	0
Unos podataka	0.75
Upravljačka jedinica	0.5
Upravljanje podataka	0
Uređaj za komunikaciju	0.75
Uslužni programi	0
Windows	0
Zbrajanje	0
Značenje	0
Znamenke	0

6.3 Prilog C – model_znanje2

model_znanje2		
Aritmetička operacija	Zbrajanje	-1
Aritmetičko-logička jedinica	Aritmetička operacija	-1
Aritmetičko-logička jedinica	Loička operacija	2
Baza		2 -1
Baza		8 -1
Baza		10 -1
Baza		16 -1
Binarni brojevni sustav		2 -1
Binarni brojevni sustav	0 1	-1
Binarni brojevni sustav	Baza	-1
Binarni brojevni sustav	Znamenke	-1
Brojevni sustav	Binarni brojevni sustav	2
Brojevni sustav	Dekadski brojevni sustav	-1
Brojevni sustav	Hekasadekadski brojevni sustav	-1
Brojevni sustav	Oktalni brojevni sustav	-1
Centralna jedinica	Masovna memorija	2
Centralna jedinica	Računalo	2
Centralna procesorska jedinica	Aritmetičko logička jedinica	2
Centralna procesorska jedinica	Upravljačka jedinica	2
Dekadski brojevni sustav		10 -1
Dekadski brojevni sustav	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	-1
Dekadski brojevni sustav	Baza	-1
Dekadski brojevni sustav	Znamenke	-1
Disketa	1.44MB	-1
Disketa	Kapacitet	-1
Hekasadekadski brojevni sustav		16 -1
Hekasadekadski brojevni sustav	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F	-1
Hekasadekadski brojevni sustav	Baza	-1
Hekasadekadski brojevni sustav	Znamenke	-1
I sklop	Konjunkcija	-1
ILI sklop	Disjunkcija	2
Informacija	Značenje	0
Instrukcija	Operacija	2
Instrukcija	Podatak	1
Izlazna jedinica	Monitor	-1
Izlazna jedinica	Prikazivanje podataka	4
Izlazna jedinica	Štampač	-1
Jezični prevoditelji	Interpretator	-1
Jezični prevoditelji	Kompilator	-1
Jezični prevoditelji	Programski jezik visoke razine	-1
Kapacitet	1.44 MB	-1
Logička operacija	Disjunkcija	-1
Logička operacija	Konjunkcija	-1
Logička operacija	Negacija	2
Logički sklop	I sklop	-1
Logički sklop	ILI sklop	2
Logički sklop	Logička operacija	-1
Logički sklop	NE sklop	-1
Logički sklop	NI sklop	-1
Logički sklop	NILI sklop	-1
Masovna memorija	Disketa	2
Masovna memorija	Kompaktni disk	2
Masovna memorija	Tvrđi disk	2
Memorija	Masovna memorija	2
Memorija	Pohrana podataka	4
Memorija	Radna memorija	2
Model računalnog sustava	Centralna jedinica	2

Model računalnog sustava	Izlazna jedinica	-1
Model računalnog sustava	Ulazna jedinica	-1
Modem	Serijski prijenos podataka	-1
NE sklop	Negacija	-1
NI sklop	Konjunktija	-1
NI sklop	Negacija	-1
NILI sklop	Disjunktija	-1
NILI sklop	Negacija	-1
Obrada podataka	Pohrana podataka	-1
Obrada podataka	Upravljanje podataka	-1
Oktalni brojevi sustav		8 -1
Oktalni brojevi sustav	0 1 2 3 4 5 6 7	-1
Oktalni brojevi sustav	Baza	-1
Oktalni brojevi sustav	Znamenke	-1
Operacija	Aritmetička operacija	-1
Operacija	Logička operacija	2
Operacijski sustav	Dos	-1
Operacijski sustav	Unix	-1
Operacijski sustav	Windows	-1
Podatak	Informacija	1
Prijenos podataka	Paralelni prijenos podataka	-1
Prijenos podataka	Serijski prijenos podataka	-1
Programska podrška	Aplikacijska programska podrška	3
Programska podrška	Sistemska programska podrška	2
Programski jezik	Programski jezik niske razine	-1
Programski jezik	Programski jezik visoke razine	-1
Programski jezik niske razine	Asembler	-1
Programski jezik visoke razine	Basic	0
Programski jezik visoke razine	C	2
Programski jezik visoke razine	Fortran	1
Programski jezik visoke razine	Pascal	1
Računalni sustav	Programska podrška	3
Računalni sustav	Tehnička podrška	2
Računalni sustav	Temeljna funkcija računala	3
Računalo	Centralna procesorska jedinica	2
Računalo	Radna memorija	2
Radna memorija	RAM	2
Radna memorija	ROM	2
Sistemska programska podrška	Jezični prevoditelji	-1
Sistemska programska podrška	Operacijski sustav	-1
Sistemska programska podrška	Uslužni programi	-1
Tehnička podrška	Centralna jedinica	2
Tehnička podrška	Izlazna jedinica	2
Tehnička podrška	Memorija	2
Tehnička podrška	Ulazna jedinica	4
Tehnička podrška	Uređaj za komunikaciju	4
Temeljna funkcija računala	Obrada podataka	4
Temeljna funkcija računala	Prikazivanje podataka	3
Temeljna funkcija računala	Unos podataka	3
Ulazna jedinica	Miš	-1
Ulazna jedinica	Tipkovnica	-1
Ulazna jedinica	Unos podataka	4
Upravljačka jedinica	Instrukcija	2
Uređaj za komunikaciju	Modem	4
Uređaj za komunikaciju	Mrežna kartica	3
Uređaj za komunikaciju	Prijenos podataka	3
Znamenke	0 1	-1
Znamenke	0 1 2 3 4 5 6 7	-1
Znamenke	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	-1
Znamenke	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F	-1

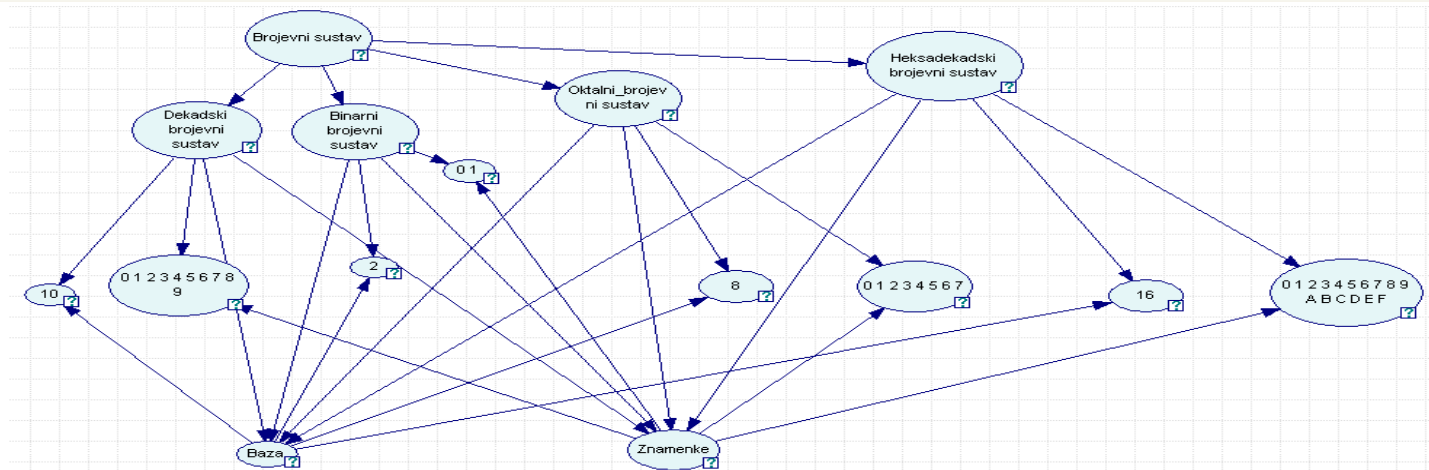
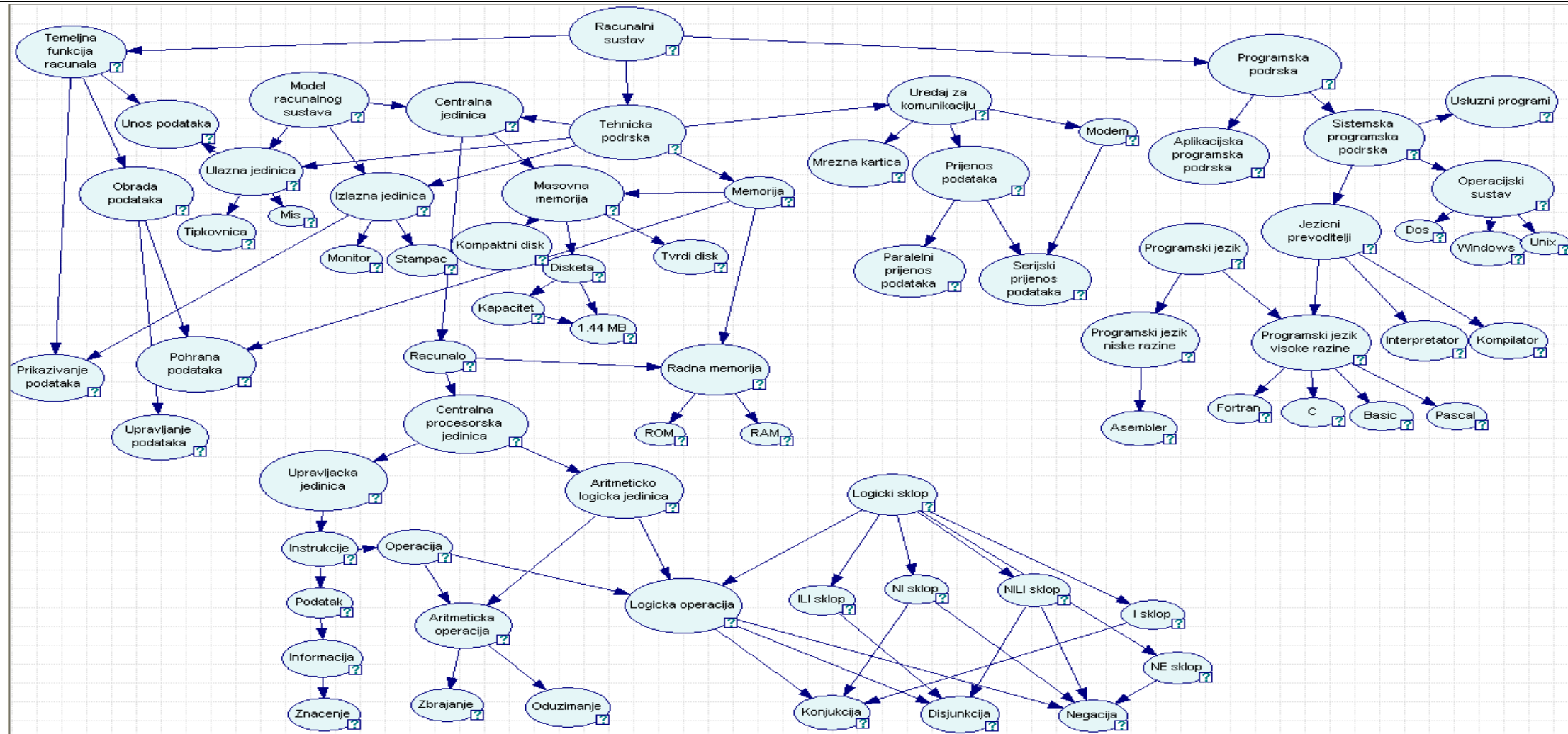
6.4 Prilog D – koncepti_poslije

koncepti_poslije		
X _k	X_v	(X_k)
	2	0
	8	0
	10	0
	16	0
0 1		0
0 1 2 3 4 5 6 7		0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9		0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F		0
1.44MB		0.125
Aplikacijska programska podrška		0.375
Aritmetička operacija		0
Aritmetičko-logička jedinica		0.375
Asembler		0
Basic		0
Baza		0
Binarni brojevni sustav		0
Brojevni sustav		0.25
C		0.25
Centralna jedinica		0.5
Centralna procesorska jedinica		0.5
Dekadski brojevni sustav		0
Disjunkcija		0.083
Disketa		0.25
DOS		0
Fortran		0.125
Heksadekadski brojevni sustav		0
I sklop		0
ILI sklop		0.5
Informacija		0.125
Instrukcija		0.4375
Interpretator		0
Izlazna jedinica		0.2917
Jezični prevoditelji		0
Kapacitet		0.125
Kompaktni disk		0.25
Kompilator		0
Konjukcija		0
Logička operacija		0.25
Logički sklop		0.0416
Masovna memorija		0.5
Memorija		0.583
Miš		0
Model računalnog sustava		0.083
Modem		0.5
Monitor		0
Mrežna kartica		0.375
NE sklop		0
Negacija		0.0625
NI sklop		0
NILI sklop		0
Obrada podataka		0.5
Oduzimanje		0
Oktaalni brojevni sustav		0
Operacija		0.375

Operacijski sustav	0
Paralelni prijenos podataka	0
Pascal	0.125
Podatak	0.25
Pohrana podataka	0.25
Prijenos podataka	0.375
Prikazivanje podataka	0.875
Programska podrška	0.6875
Programski jezik	0
Programski jezik niske razine	0
Programski jezik visoke razine	0
Računalni sustav	0.33
Računalo	0.5
Radna memorija	0.25
RAM	0.25
ROM	0.25
Serijski prijenos podataka	0
Sistemska programska podrška	0.25
Štampač	0
Tehnička podrška	0.6
Temeljna funkcija računala	0.7917
Tipkovnica	0
Tvrđi disk	0.25
Ulazna jedinica	0.4167
Unix	0
Unos podataka	0.875
Upravljačka jedinica	0.5
Upravljanje podataka	0
Uređaj za komunikaciju	0.916
Uslužni programi	0
Windows	0
Zbrajanje	0
Značenje	0
Znamenke	0

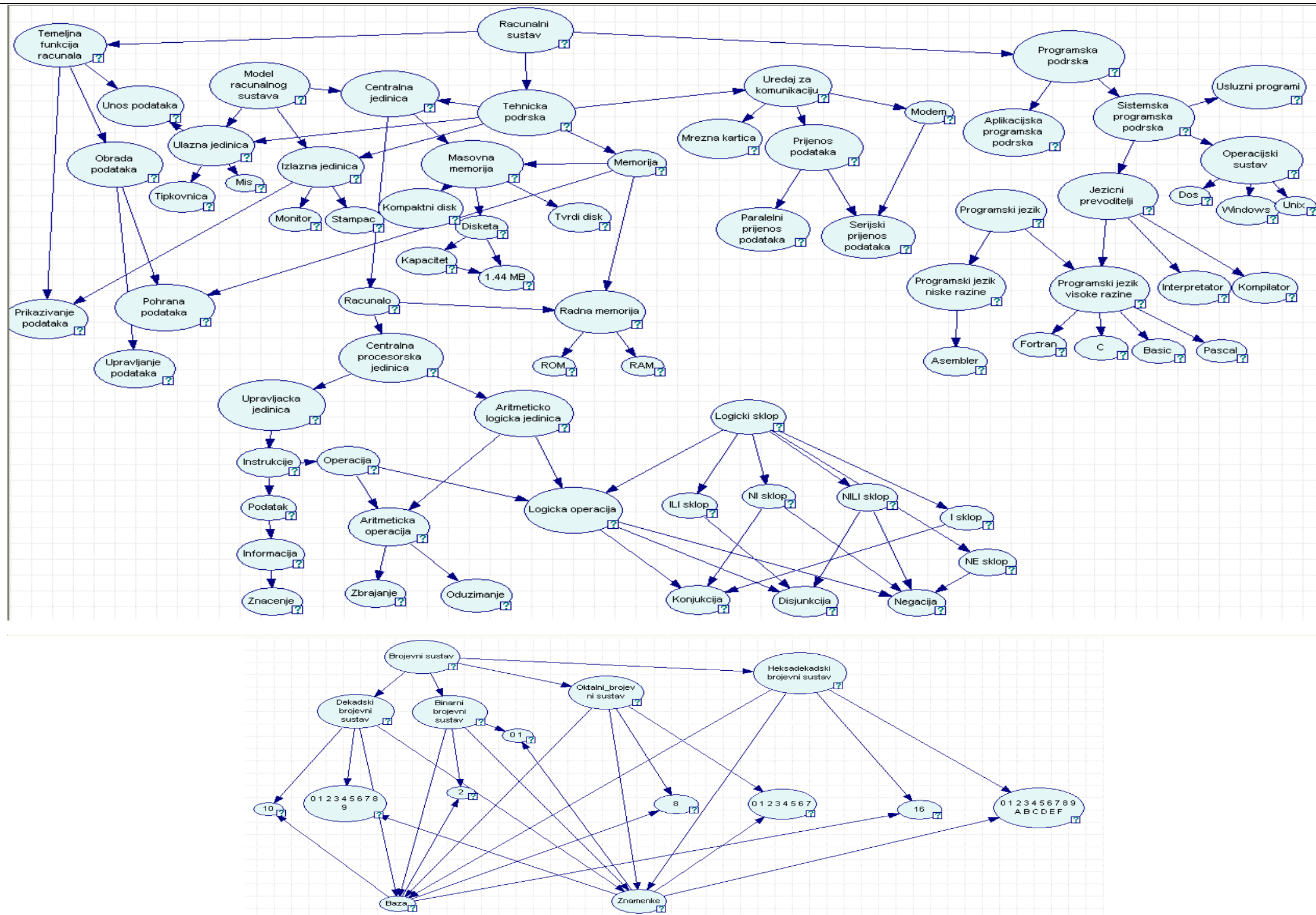
6.5 Prilog E – Mreza 1

Mreza 1



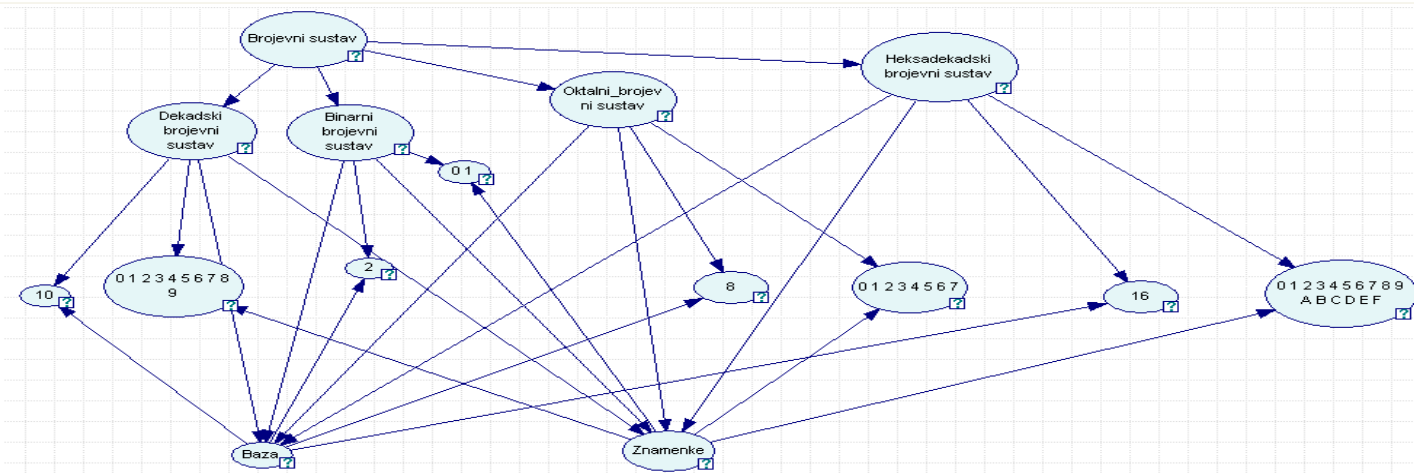
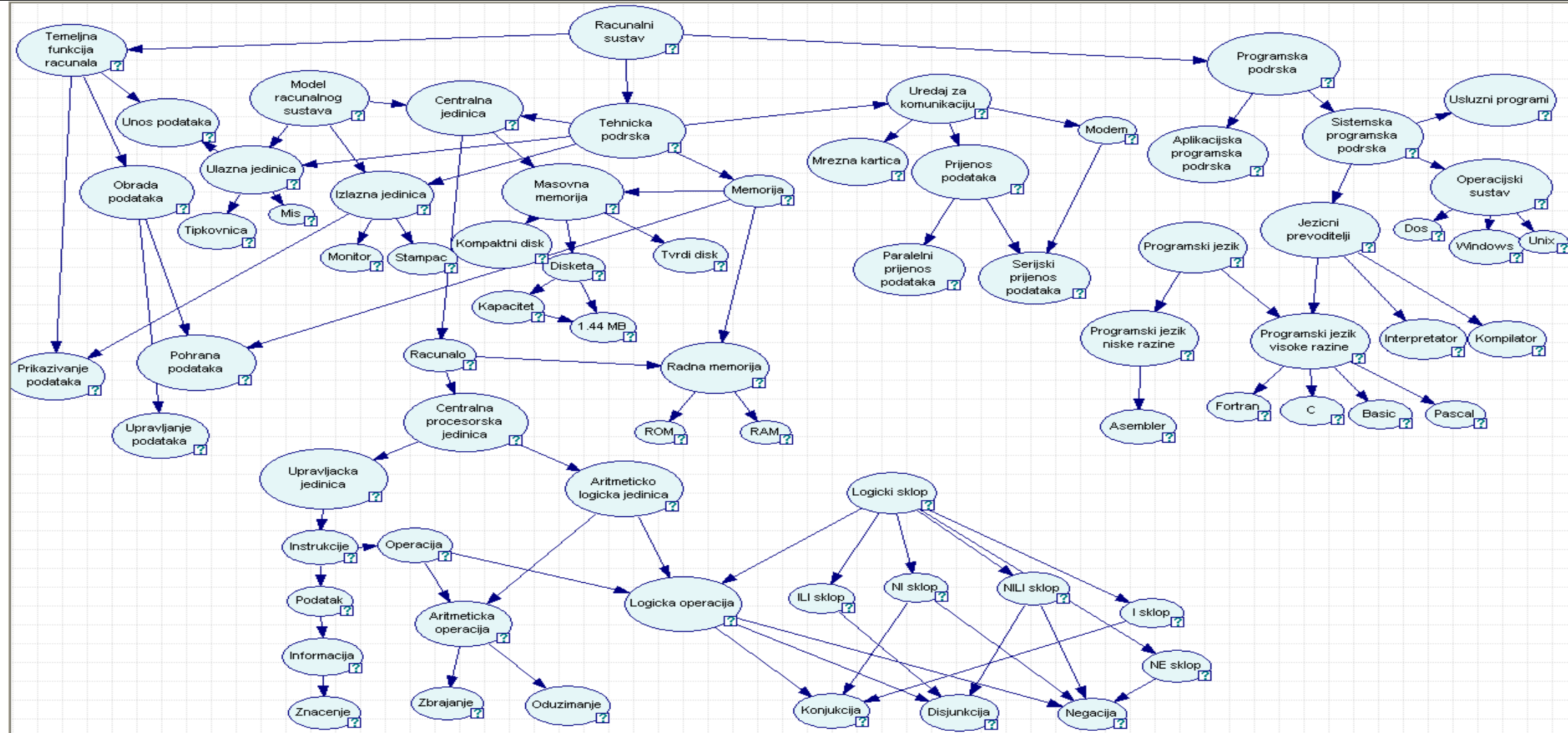
6.6 Prilog F – Mreza 2

Mreza 2



6.7 Prilog G – Mreza 3

Mreza 3



6.8 Prilog T1 – Testiranje 1

Koncept	Stvarno znanje učenika	Mreža 1	Mreža 2	Mreža 3
2	0	0.337	0.183	0.5
8	0	0.337	0.183	0.5
10	0	0.337	0.183	0.5
16	0	0.337	0.183	0.5
0 1	0	0.337	0.183	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7	0	0.337	0.183	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0	0.337	0.183	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F	0	0.337	0.183	0.5
1.44MB	0.125	0.393	0.199	0.5
Aplikacijska programska podrška	0.375	0.387	0.232	0.5
Aritmetička operacija	0	0.366	0.132	0.213
Aritmetičko-logička jedinica	0.375	0.326	0.122	0.153
Asembler	0	0.244	0.208	0.5
Basic	0	0.326	0.189	0.5
Baza	0	0.319	0.114	0.179
Binarni brojevni sustav	0	0.3	0.12	0.131
Brojevni sustav	0.25	0.25	0.25	0.25
C	0.25	0.326	0.189	0.5
Centralna jedinica	0.5	0.211	0.114	0.144
Centralna procesorska jedinica	0.5	0.294	0.123	0.152
Dekadski brojevni sustav	0	0.3	0.12	0.15
Disjunkcija	0.083	Dokaz: laz	Dokaz: laz	Dokaz: laz
Disketa	0.25	0.358	0.123	0.154
DOS	0	0.428	0.192	0.5
Fortran	0.125	0.326	0.189	0.5
Heksadekadski brojevni sustav	0	0.3	0.12	0.131
I sklop	0	0.1	0.1	0.1
ILI sklop	0.5	0.074	0.076	0.1
Informacija	0.125	0.408	0.15	0.293
Instrukcija	0.437	0.356	0.128	0.177
Interpreter	0	0.428	0.192	0.5
Izlazna jedinica	0.291	0.224	0.109	0.125
Jezični prevoditelji	0	0.41	0.115	0.128
Kapacitet	0.125	0.386	0.143	0.5
Kompaktni disk	0.25	0.358	0.195	0.5
Kompilator	0	0.428	0.192	0.5
Konjunkcija	0	0.179	0.153	0.5
Logička operacija	0.25	0.19	0.073	0.166
Logički sklop	0.041	Dokaz: laz	Dokaz: laz	Dokaz: laz
Masovna memorija	0.5	0.323	0.119	0.156
Memorija	0.583	0.385	0.114	0.125
Miš	0	0.279	0.187	0.5
Model računalnog sustava	0.083	Dokaz: laz	Dokaz: laz	Dokaz: laz
Modem	0.5	0.408	0.14	0.2
Monitor	0	0.279	0.187	0.5
Mrežna kartica	0.375	0.408	0.191	0.5
NE sklop	0	0.082	0.084	0.1
Negacija	0.062	Dokaz: laz	Dokaz: laz	Dokaz: laz
NI sklop	0	0.082	0.084	0.1
NILI sklop	0	0.061	0.064	0.1
Obrada podataka	0.5	0.387	0.128	0.158

<i>Oduzimanje</i>	0	0.393	0.205	0.5
<i>Oktalni brojevni sustav</i>	0	0.3	0.12	0.131
<i>Operacija</i>	0.375	0.376	0.122	0.162
<i>Operacijski sustav</i>	0	0.41	0.115	0.128
<i>Paralelni prijenos podataka</i>	0	0.426	0.198	0.5
<i>Pascal</i>	0.125	0.326	0.189	0.5
<i>Podatak</i>	0.25	0.385	0.144	0.242
<i>Pohrana podataka</i>	0.25	0.394	0.186	0.5
<i>Prijenos podataka</i>	0.375	0.408	0.122	0.143
<i>Prikazivanje podataka</i>	0.875	0.317	0.189	0.5
<i>Programska podrška</i>	0.687	0.359	0.165	0.215
<i>Programski jezik</i>	0	0.1	0.1	0.1
<i>Programski jezik niske razine</i>	0	0.18	0.135	0.18
<i>Programski jezik visoke razine</i>	0	0.282	0.111	0.129
<i>Računalni sustav</i>	0.33	0.324	0.329	0.33
<i>Računalo</i>	0.5	0.259	0.122	0.15
<i>Radna memorija</i>	0.25	0.34	0.131	0.198
<i>RAM</i>	0.25	0.372	0.204	0.5
<i>ROM</i>	0.25	0.372	0.204	0.5
<i>Serijski prijenos podataka</i>	0	0.417	0.194	0.5
<i>Sistemska programska podrška</i>	0.25	0.387	0.12	0.143
<i>Štampač</i>	0	0.279	0.187	0.5
<i>Tehnička podrška</i>	0.6	0.356	0.116	0.126
<i>Temeljna funkcija računala</i>	0.791	0.359	0.141	0.166
<i>Tipkovnica</i>	0	0.279	0.187	0.5
<i>Tvrdi disk</i>	0.25	0.358	0.195	0.5
<i>Ulazna jedinica</i>	0.416	0.224	0.109	0.125
<i>Unix</i>	0	0.428	0.192	0.5
<i>Unos podataka</i>	0.875	0.317	0.189	0.5
<i>Upravljačka jedinica</i>	0.5	0.33	0.143	0.222
<i>Upravljanje podataka</i>	0	0.41	0.202	0.5
<i>Uređaj za komunikaciju</i>	0.916	0.385	0.114	0.125
<i>Uslužni programi</i>	0	0.41	0.196	0.5
<i>Windows</i>	0	0.428	0.192	0.5
<i>Zbrajanje</i>	0	0.393	0.205	0.5
<i>Značenje</i>	0	0.426	0.152	0.5
<i>Znamenke</i>	0	0.319	0.114	0.179

6.9 Prilog T2 – Testiranje 2

Koncept	Stvarno znanje učenika	Mreža 1	Mreža 2	Mreža 3
2	0	0.337	0.183	0.5
8	0	0.337	0.183	0.5
10	0	0.337	0.183	0.5
16	0	0.337	0.183	0.5
0 1	0	0.337	0.183	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7	0	0.337	0.183	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0	0.337	0.183	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F	0	0.337	0.183	0.5
1.44MB	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Aplikacijska programska podrška	0.375	0.186	0.231	0.5
Aritmetička operacija	0	0.221	0.131	0.191
Aritmetičko-logička jedinica	0.375	0.171	0.121	0.141
Asembler	0	0.216	0.206	0.5
Basic	0	0.102	0.101	0.5
Baza	0	0.319	0.114	0.179
Binarni brojevni sustav	0	0.3	0.12	0.131
Brojevni sustav	0.25	0.25	0.25	0.25
C	0.25	0.102	0.101	0.5
Centralna jedinica	0.5	0.043	0.11	0.124
Centralna procesorska jedinica	0.5	0.099	0.122	0.118
Dekadski brojevni sustav	0	0.3	0.12	0.15
Disjunkcija	0.083	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Disketa	0.25	0.016	0.049	0.143
DOS	0	0.277	0.191	0.5
Fortran	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Heksadekadski brojevni sustav	0	0.3	0.12	0.131
I sklop	0	0.1	0.1	0.1
ILI sklop	0.5	0.075	0.076	0.1
Informacija	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Instrukcija	0.437	0.085	0.111	0.045
Interpreter	0	0.244	0.186	0.5
Izlazna jedinica	0.2917	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Jezični prevoditelji	0	0.18	0.108	0.128
Kapacitet	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Kompaktni disk	0.25	0.119	0.176	0.5
Kompilator	0	0.244	0.186	0.5
Konjunkcija	0	0.163	0.153	0.5
Logička operacija	0.25	0.119	0.073	0.153
Logički sklop	0.041	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Masovna memorija	0.5	0.024	0.095	0.124
Memorija	0.583	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Miš	0	0.185	0.185	0.5
Model računalnog sustava	0.083	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Modem	0.5	0.192	0.139	0.192
Monitor	0	0.1	0.1	0.5
Mrežna kartica	0.375	0.192	0.189	0.5
NE sklop	0	0.083	0.084	0.1
Negacija	0.062	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
NI sklop	0	0.083	0.084	0.1
NILI sklop	0	0.062	0.064	0.1
Obrada podataka	0.5	0.144	0.082	0.157
Oduzimanje	0	0.277	0.205	0.5
Oktalni brojevni sustav	0	0.3	0.12	0.131
Operacija	0.375	0.16	0.119	0.115

Operacijski sustav	0	0.222	0.114	0.128
Paralelni prijenos podataka	0	0.253	0.197	0.5
Pascal	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Podatak	0.25	0.054	0.093	0.034
Pohrana podataka	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Prijenos podataka	0.375	0.192	0.122	0.14
Prikazivanje podataka	0.875	0.136	0.145	0.5
Programska podrška	0.687	0.107	0.164	0.212
Programski jezik	0	0.056	0.093	0.1
Programski jezik niske razine	0	0.145	0.132	0.18
Programski jezik visoke razine	0	0.003	0.001	0.129
Računalni sustav	0.33	0.042	0.325	0.322
Računalo	0.5	0.082	0.121	0.133
Radna memorija	0.25	0.128	0.115	0.146
RAM	0.25	0.203	0.192	0.5
ROM	0.25	0.203	0.192	0.5
Serijski prijenos podataka	0	0.244	0.193	0.5
Sistemska programska podrška	0.25	0.152	0.119	0.142
Štampač	0	0.1	0.1	0.5
Tehnička podrška	0.6	0.019	0.093	0.079
Temeljna funkcija računala	0.791	0.103	0.131	0.164
Tipkovnica	0	0.185	0.185	0.5
Tvrđi disk	0.25	0.119	0.176	0.5
Ulazna jedinica	0.416	0.106	0.107	0.115
Unix	0	0.277	0.191	0.5
Unos podataka	0.875	0.175	0.184	0.5
Upravljačka jedinica	0.5	0.102	0.139	0.166
Upravljanje podataka	0	0.215	0.165	0.5
Uređaj za komunikaciju	0.916	0.115	0.111	0.115
Uslužni programi	0	0.222	0.195	0.5
Windows	0	0.277	0.191	0.5
Zbrajanje	0	0.277	0.205	0.5
Značenje	0	0.1	0.1	0.5
Znamenke	0	0.319	0.114	0.179

6.10 Prilog T3 – Testiranje 3

Koncept	Stvarno znanje učenika	Mreža 1	Mreža 2	Mreža 3
2	0	0.773	0.175	0.5
8	0	0.773	0.175	0.5
10	0	0.773	0.175	0.5
16	0	0.773	0.175	0.5
0 1	0	0.773	0.175	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7	0	0.773	0.175	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0	0.773	0.175	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F	0	0.773	0.175	0.5
1.44MB	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Aplikacijska programska podrška	0.375	0.576	0.265	0.5
Aritmetička operacija	0	0.169	0.128	0.237
Aritmetičko-logička jedinica	0.375	0.097	0.112	0.123
Asembler	0	0.207	0.206	0.5
Basic	0	0.1	0.1	0.5
Baza	0	0.81	0.11	0.155
Binarni brojevni sustav	0	0.9	0.1	0.1
Brojevni sustav	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
C	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Centralna jedinica	0.5	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Centralna procesorska jedinica	0.5	0.025	0.096	0.167
Dekadski brojevni sustav	0	0.9	0.1	0.1
Disjunkcija	0.083	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Disketa	0.25	0.014	0.048	0.135
DOS	0	0.523	0.192	0.5
Fortran	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Heksadekadski brojevni sustav	0	0.9	0.1	0.1
I sklop	0	0.1	0.1	0.1
ILI sklop	0.5	0.078	0.078	0.1
Informacija	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Instrukcija	0.437	0.025	0.08	0.61
Interpretator	0	0.483	0.187	0.5
Izlazna jedinica	0.2917	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Jezični prevoditelji	0	0.478	0.108	0.132
Kapacitet	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Kompaktni disk	0.25	0.115	0.17	0.5
Kompilator	0	0.483	0.187	0.5
Konjunkcija	0	0.137	0.137	0.5
Logička operacija	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Logički sklop	0.041	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Masovna memorija	0.5	0.019	0.087	0.1
Memorija	0.583	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Miš	0	0.4405265	0.26426307	0.5
Model računalnog sustava	0.083	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Modem	0.5	0.9	0.45	0.9
Monitor	0	0.1	0.1	0.5
Mrežna kartica	0.375	0.9	0.9	0.5
NE sklop	0	0.085	0.085	0.1
Negacija	0.0625	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
NI sklop	0	0.085	0.085	0.1
NILI sklop	0	0.065	0.065	0.1
Obrada podataka	0.5	0.846	0.207	0.45
Oduzimanje	0	0.235	0.203	0.5
Oktalni brojevni sustav	0	0.9	0.1	0.1
Operacija	0.375	0.097	0.109	0.261

<i>Operacijski sustav</i>	0	0.528	0.115	0.132
<i>Paralelni prijenos podataka</i>	0	0.82	0.34	0.5
<i>Pascal</i>	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Podatak</i>	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Pohrana podataka</i>	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Prijenos podataka</i>	0.375	0.9	0.3	0.45
<i>Prikazivanje podataka</i>	0.875	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina
<i>Programska podrška</i>	0.687	0.595	0.206	0.309
<i>Programski jezik</i>	0	0.042	0.093	0.1
<i>Programski jezik niske razine</i>	0	0.134	0.132	0.18
<i>Programski jezik visoke razine</i>	0	0.0007	0.0001	0.13
<i>Računalni sustav</i>	0.33	0.659	0.532	0.598
<i>Računalo</i>	0.5	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Radna memorija</i>	0.25	0.1	0.1	0.1
<i>RAM</i>	0.25	0.18	0.18	0.5
<i>ROM</i>	0.25	0.18	0.18	0.5
<i>Serijski prijenos podataka</i>	0	0.811	0.376	0.5
<i>Sistemska programska podrška</i>	0.25	0.536	0.124	0.161
<i>Štampač</i>	0	0.1	0.1	0.5
<i>Tehnička podrška</i>	0.6	0.555	0.19	0.161
<i>Temeljna funkcija računala</i>	0.791	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina
<i>Tipkovnica</i>	0	0.44	0.264	0.5
<i>Tvrdi disk</i>	0.25	0.115	0.17	0.5
<i>Ulazna jedinica</i>	0.416	0.425	0.205	0.132
<i>Unix</i>	0	0.523	0.192	0.5
<i>Unos podataka</i>	0.875	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina
<i>Upravljačka jedinica</i>	0.5	0.036	0.124	0.339
<i>Upravljanje podataka</i>	0	0.776	0.266	0.5
<i>Uređaj za komunikaciju</i>	0.916	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina
<i>Uslužni programi</i>	0	0.528	0.199	0.5
<i>Windows</i>	0	0.523	0.192	0.5
<i>Zbrajanje</i>	0	0.235	0.203	0.5
<i>Značenje</i>	0	0.1	0.1	0.5
<i>Znamenke</i>	0	0.81	0.11	0.155

6.11 Prilog T4 – Testiranje 4

Koncept	Stvarno znanje učenika	Mreža 1	Mreža 2	Mreža 3
2	0	0.773	0.175	0.5
8	0	0.773	0.175	0.5
10	0	0.773	0.175	0.5
16	0	0.773	0.175	0.5
0 1	0	0.773	0.175	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7	0	0.773	0.175	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0	0.773	0.175	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F	0	0.773	0.175	0.5
1.44MB	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Aplikacijska programska podrška	0.375	0.158	0.179	0.5
Aritmetička operacija	0	0.169	0.147	0.237
Aritmetičko-logička jedinica	0.375	0.097	0.176	0.123
Asembler	0	0.216	0.206	0.5
Basic	0	0.1	0.1	0.5
Baza	0	0.81	0.11	0.155
Binarni brojevni sustav	0	0.9	0.1	0.1
Brojevni sustav	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
C	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Centralna jedinica	0.5	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Centralna procesorska jedinica	0.5	0.025	0.107	0.167
Dekadski brojevni sustav	0	0.9	0.1	0.1
Disjunkcija	0.083	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Disketa	0.25	0.014	0.048	0.135
DOS	0	0.26	0.191	0.5
Fortran	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Heksadekadski brojevni sustav	0	0.9	0.1	0.1
I sklop	0	0.1	0.1	0.1
ILI sklop	0.5	0.078	0.058	0.1
Informacija	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Instrukcija	0.437	0.025	0.09	0.61
Interpretator	0	0.226	0.185	0.5
Izlazna jedinica	0.2917	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Jezični prevoditelji	0	0.158	0.107	0.124
Kapacitet	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Kompaktni disk	0.25	0.115	0.17	0.5
Kompilator	0	0.226	0.185	0.5
Konjunkcija	0	0.137	0.351	0.5
Logička operacija	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Logički sklop	0.041	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Masovna memorija	0.5	0.019	0.087	0.1
Memorija	0.583	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Miš	0	0.1	0.1	0.5
Model računalnog sustava	0.083	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Modem	0.5	0.9	0.45	0.9
Monitor	0	0.1	0.1	0.5
Mrežna kartica	0.375	0.9	0.9	0.5
NE sklop	0	0.085	0.071	0.1
Negacija	0.062	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
NI sklop	0	0.085	0.071	0.1
NILI sklop	0	0.065	0.04	0.1
Obrada podataka	0.5	0.846	0.207	0.45
Oduzimanje	0	0.235	0.217	0.5
Oktalni brojevni sustav	0	0.9	0.1	0.1
Operacija	0.375	0.097	0.172	0.261

<i>Operacijski sustav</i>	0	0.2	0.113	0.124
<i>Paralelni prijenos podataka</i>	0	0.82	0.34	0.5
<i>Pascal</i>	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Podatak</i>	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Pohrana podataka</i>	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Prijenos podataka</i>	0.375	0.9	0.3	0.45
<i>Prikazivanje podataka</i>	0.875	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina
<i>Programska podrška</i>	0.685	0.073	0.099	0.1
<i>Programski jezik</i>	0	0.056	0.093	0.1
<i>Programski jezik niske razine</i>	0	0.145	0.132	0.18
<i>Programski jezik visoke razine</i>	0	0.0003	0.0001	0.129
<i>Računalni sustav</i>	0.33	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Računalo</i>	0.5	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Radna memorija</i>	0.25	0.1	0.1	0.1
<i>RAM</i>	0.25	0.18	0.18	0.5
<i>ROM</i>	0.25	0.18	0.18	0.5
<i>Serijski prijenos podataka</i>	0	0.811	0.376	0.5
<i>Sistemska programska podrška</i>	0.25	0.125	0.111	0.12
<i>Štampač</i>	0	0.1	0.1	0.5
<i>Tehnička podrška</i>	0.6	0.024	0.133	0.087
<i>Temeljna funkcija računala</i>	0.7917	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina
<i>Tipkovnica</i>	0	0.1	0.1	0.5
<i>Tvrđi disk</i>	0.25	0.115	0.17	0.5
<i>Ulazna jedinica</i>	0.416	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Unix</i>	0	0.26	0.191	0.5
<i>Unos podataka</i>	0.875	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina
<i>Upravljačka jedinica</i>	0.5	0.036	0.13	0.339
<i>Upravljanje podataka</i>	0	0.776	0.266	0.5
<i>Uređaj za komunikaciju</i>	0.916	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina
<i>Uslužni programi</i>	0	0.2	0.189	0.5
<i>Windows</i>	0	0.26	0.191	0.5
<i>Zbrajanje</i>	0	0.235	0.217	0.5
<i>Značenje</i>	0	0.1	0.1	0.5
<i>Znamenke</i>	0	0.81	0.11	0.155

6.12 Prilog T5 – Testiranje 5

Koncept	Stvarno znanje učenika	Mreža 1	Mreža 2	Mreža 3
2	0	0.773	0.175	0.5
8	0	0.773	0.175	0.5
10	0	0.773	0.175	0.5
16	0	0.773	0.175	0.5
0 1	0	0.773	0.175	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7	0	0.773	0.175	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0	0.773	0.175	0.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F	0	0.773	0.175	0.5
1.44MB	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Aplikacijska programska podrška	0.375	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Aritmetička operacija	0	0.1	0.1	0.1
Aritmetičko-logička jedinica	0.375	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Asembler	0	0.217	0.206	0.5
Basic	0	0.1	0.1	0.5
Baza	0	0.81	0.11	0.155
Binarni brojevni sustav	0	0.9	0.1	0.1
Brojevni sustav	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
C	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Centralna jedinica	0.5	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Centralna procesorska jedinica	0.5	0.002	0.076	0.108
Dekadski brojevni sustav	0	0.9	0.1	0.1
Disjunkcija	0.083	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Disketa	0.25	0.014	0.048	0.135
DOS	0	0.227	0.19	0.5
Fortran	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Heksadekadski brojevni sustav	0	0.9	0.1	0.1
I sklop	0	0.1	0.1	0.1
ILI sklop	0.5	0.078	0.058	0.1
Informacija	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Instrukcija	0.437	0.002	0.063	0.497992
Interpretator	0	0.195	0.184	0.5
Izlazna jedinica	0.291	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Jezični prevoditelj	0	0.119	0.105	0.124
Kapacitet	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Kompaktni disk	0.25	0.115	0.17	0.5
Kompilator	0	0.195	0.184	0.5
Konjunkcija	0	0.137	0.351	0.5
Logička operacija	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Logički sklop	0.041	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Masovna memorija	0.5	0.019	0.087	0.1
Memorija	0.583	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Miš	0	0.1	0.1	0.5
Model računalnog sustava	0.083	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Modem	0.5	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Monitor	0	0.1	0.1	0.5
Mrežna kartica	0.375	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
NE sklop	0	0.085	0.071	0.1
Negacija	0.062	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
NI sklop	0	0.085	0.071	0.1
NILI sklop	0	0.065	0.04	0.1
Obrada podataka	0.5	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
Oduzimanje	0	0.18	0.18	0.5
Oktalni brojevni sustav	0	0.9	0.1	0.1
Operacija	0.375	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz

<i>Operacijski sustav</i>	0	0.159	0.112	0.124
<i>Paralelni prijenos podataka</i>	0	0.1	0.1	0.5
<i>Pascal</i>	0.125	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Podatak</i>	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Pohrana podataka</i>	0.25	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Prijenos podataka</i>	0.375	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Prikazivanje podataka</i>	0.875	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina
<i>Programska podrška</i>	0.687	0.008	0.012	0.1
<i>Programski jezik</i>	0	0.058	0.093	0.1
<i>Programski jezik niske razine</i>	0	0.146	0.132	0.18
<i>Programski jezik visoke razine</i>	0	0.0003	0.0001	0.129
<i>Računalni sustav</i>	0.33	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Računalo</i>	0.5	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Radna memorija</i>	0.25	0.1	0.1	0.1
<i>RAM</i>	0.25	0.18	0.18	0.5
<i>ROM</i>	0.25	0.18	0.18	0.5
<i>Serijski prijenos podataka</i>	0	0.1	0.1	0.5
<i>Sistemska programska podrška</i>	0.25	0.074	0.1	0.12
<i>Štampač</i>	0	0.1	0.1	0.5
<i>Tehnička podrška</i>	0.6	0.024	0.133	0.087
<i>Temeljna funkcija računala</i>	0.7917	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina
<i>Tipkovnica</i>	0	0.1	0.1	0.5
<i>Tvrdi disk</i>	0.25	0.115	0.17	0.5
<i>Ulazna jedinica</i>	0.416	Dokaz:laz	Dokaz:laz	Dokaz:laz
<i>Unix</i>	0	0.227	0.19	0.5
<i>Unos podataka</i>	0.875	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina
<i>Upravljačka jedinica</i>	0.5	0.014	0.115	0.27
<i>Upravljanje podataka</i>	0	0.1	0.1	0.5
<i>Uređaj za komunikaciju</i>	0.916	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina	Dokaz:Istina
<i>Uslužni programi</i>	0	0.159	0.18	0.5
<i>Windows</i>	0	0.227	0.19	0.5
<i>Zbrajanje</i>	0	0.18	0.18	0.5
<i>Značenje</i>	0	0.1	0.1	0.5
<i>Znamenke</i>	0	0.81	0.11	0.155

SAŽETAK

Probabilistički model učenika temeljen na Bayesovoj mreži zaključuje o stanju znanja učenika i daljnje učenje ovisi o tim zaključcima. Poučavanje se usmjerava na pojmove koji se ne smatraju naučenim. Kako bi se implementirala Bayesova mreža u modeliranje učenika, potrebno je odrediti "a priori" vjerojatnosti korjenskih čvorova kao i uvjetne vjerojatnosti svih ostalih čvorova. Pojmovi za koje se smatra da su naučeni, odnosno da nisu naučeni predstavljaju dokaze. Na temelju dokaza zaključuje se koje pojmove je potrebno ponovno učiti, a koje ne.

U radu je ispitano 15 probabilističkih modela temeljenih na Bayesovoj mreži. Svi modeli su prezentirani u programskom alatu GeNIe. U svakom modelu posebna pažnja je posvećena određivanju "a priori" vjerojatnosti, uvjetnih vjerojatnosti i postavljanju dokaza kako bi se na što bolji način ispitala uspješnost predviđanja stanja znanja učenika pojedinim modelom. Na koncu su analizirani dobiveni rezultati i predstavljene smjernice na koje treba obratiti pažnju u modeliranju učenika uz pomoć Bayesovih mreža.

Ključne riječi:

probabilistički model učenika, Bayesova mreža, stanje znanja učenika, „a priori“ vjerojatnost, uvjetne vjerojatnosti, dokaz, GeNIe

SUMMARY

Probabilistic student model based on Bayesian network concludes about the state of students knowledge and further learning depends on these conclusions. The teaching focuses on the concepts which are not considered learned. To implement the Bayesian network into student modelling, it is necessary to determine „prior“ probability of the root nodes as well as the conditional probabilities of all other nodes. The concepts that are believed to have been learned or that are not learned represent the evidence. Based on the evidence it is concluded which concepts need to be re-learned, and which not.

The study has examined 15 probabilistic models based on Bayesian network. All models are presented in software tool GeNIe. In each model, special attention has been devoted to defining „prior“ probability, conditional probability and to setting up the evidence to find the better way to test the successfulness of prediction of the state of students knowledge with each model. Finally, the obtained results are analyzed and the guidelines are presented which must be considered in the modelling of students by using Bayesian networks.

Key words:

probabilistic student model, Bayesian network, state of students knowledge, „prior“ probability, the conditional probability, evidence, GeNIe