5. REKURZIVNE RELACIJE

5.1 Fibonaccijev slijed (niz)

Primjer rekurzivnih relacija:

Svaki par zečica-zec dobiva tijekom svakog sljedećeg mjeseca par mladih: zečicu i zeca.

Pitanje: Ako je na početku bio samo jedan par $f_0 = 1$, koliko će parova f_n biti nakon n mjeseci?

Rješenje je jednoznačno određeno nizom prirodnih brojeva (f_n), $n = 0, 1, 2, ..$ koji je dan rekurzivnom relacijom

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n = 2, 3, ..$$

gdje je $f_0 = 1$ i $f_1 = 1$.

Definicija *Fibonaccijev slijed (niz)* (F_n) definira se početnim vrijednostima $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$ i rekurzivnom relacijom

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 2, 3, ...$$

Propozicija 1 (A. de Moivre) Za Fibonaccijev slijed (F_n) vrijedi "zatvorena formula"

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Napomena: Može se pokazati (iz zatvorene formule) da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

Ovaj broj naziva se **zlatni prerez** (**božanski omjer**).

Posljedica 1 Broj F_n u Fibonaccijevom slijedu jednak je cijelom broju koji je nabliži broju $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Slijed (F_n) ima eksponencijalni rast.

5.1 Linearne rekurzivne relacije

Opći oblik linearne rekurzivne relacije reda r je

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_r a_{n-r} + f(n), \qquad n \geq r, \tag{1}$$

gdje su $c_1, c_2, ..., c_r$ zadani realni ili kompleksni brojevi i $c_r \neq 0$, a $f : \{r, r+1, ...\} \to \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$).

Ovdje je $n-$ti član ***rekurzivno*** određen vrijednostima *predhodnih* članova $a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_{n-r}$.

Cilj: Riješiti (1) po a_n, tj. uz zadane *početne vrijednosti* $a_0, a_1, ... , a_{r-1}$ naći a_n eksplicitno kao funkciju od n (zatvorenu formu).

Linearne homogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima

Rekurzivna relacija (1) je homogena ako je $f(n) \equiv 0$ za sve n. Dakle, imamo

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_r a_{n-r}, \qquad n \geq r. \qquad (2)$$

Propozicija 2 Ako za dva slijeda (a'_n) i (a''_n) , $n \geq 0$ vrijedi rekurzivna relacija (2), onda vrijedi i za njihovu linearnu kombinaciju $(\lambda a'_n + \mu a''_n)$, gdje su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) bilo koji skalari.

Rješenje od (2) tražimo u obliku:

$$a_n = x^n, \qquad \underline{\textit{Eulerova supstitucija}}.$$

Uvrštavanjem u (2) za $x \neq 0$ dobivamo

$$x^n = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... + c_r x^{n-r}, \qquad n \geq r,$$

što povlači (dijeljenjem s $x^{n-r} \neq 0$)

$$x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - ... - c_r = 0. \qquad (3)$$

Po Osnovnom teoremu algebre *karakteristična jednadžba* (3) ima u skupu kompleksnih brojeva r korijena $x_1, x_2, ..., x_r$ (neki mogu biti međusobno jednaki).
Zbog pretpostavke $c_r \neq 0$ niti jedan x_i nije 0.

Razlikujemo dva slučaja:

1. Slučaj r različitih korijena karakteristične jednadžbe

Teorem 1 Neka su svi korijeni $x_1, x_2, ..., x_r$ karakteristične jednadžbe međusobno različiti. Tada je opće rješenje linearne homogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima jednako linearnoj kombinaciji

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + ... + \lambda_r x_r^n, \quad n = 0, 1, 2, ... \qquad (4)$$

gdje su $\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_r$ bilo koji kompleksni brojevi.

2. Slučaj kada postoje višestruki korijeni karakteristične jednadžbe

Lema1 Ako je kompleksni broj x_0 $k-$struki korijen polinoma $P\left(x\right)$, onda je on $\left(k-1\right)-$struki korijen derivacije $P'\left(x\right)$.

Propozicija 3 Ako je kompleksni broj x_0 $k-$struki korijen karakteristične jednadžbe (3), onda svaki od k sljedova

$$a_n = x_0^n, \quad a_n = n x_0^n,\ ..., a_n = n^{k-1} x_0^n,$$

predstavlja rješenje rekurzivne relacije (2).

Teorem 2 Neka su $x_1, x_2, ..., x_m$ svi različiti korijeni karakteristične jednadžbe kratnosti k_1, $k_2, ...k_m$. Rješenje $a_n^{(i)}$ od (2), koje odgovara korijenu x_i kratnosti k_i, je linearna kombinacija k_i sljedova

$$a_n^{(i)} = \lambda_1^{(i)} x_i^n + \lambda_2^{(i)} n x_i^n + ... + \lambda_{k_i}^{(i)} n^{k_i - 1} x_i^n, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

pri čemu su $\lambda_1^{(i)}$, $\lambda_2^{(i)}, ..., \lambda_{k_i}^{(i)}$ kompleksni koeficijenti. Opće rješenje je dano sa

$$a_n = a_n^{(1)} + ... + a_n^{(m)}. \tag{5}$$

(ovdje imamo ukupno $r = k_1 + k_2 + ... + k_m$ slobodnih koeficijenata).

Linearne nehomogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima

Opći oblik je

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_r a_{n-r} + f(n), \qquad n \geq r, \tag{6}$$

gdje su c_1, c_2, ..., c_r zadani realni ili kompleksni brojevi i $c_r \neq 0$, a $f : \{r, r+1, ...\} \to \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$).

Propozicija 4. Neka je $\left(a_n^{(0)}\right)$ opće rješenje pripadne homogene rekurzivne relacije je dano Teoremom 2. Ako znamo neko patikularno rješenje $\left(a_n^{(p)}\right)$od (6) onda je opće rješenje nehomogene rekurzivne relacije (6) dano sa

$$a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(p)}. \tag{7}$$

Napomena: Općenito nalaženje partikularnog rješenja je općenito komplicirano, ali u nekim slučajevima postoje recepti. Evo nekih:

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
$C\ (const.)$	A
Cn	$An + B$
$P_k(n)$	$Q_k(n)$
$C\alpha^n$	$A\alpha^n$
$C\alpha^n \cos\beta n + D\alpha^n \sin\beta n$	$A\alpha^n \cos\beta n + B\alpha^n \sin\beta n$

Primjedba: Ako je $f(n) = C\alpha^n$ i $x = \alpha$ korijen karakteristične jednadžbe, onda partikularno rješenje ne možemo tražiti u obliku $a_n^{(p)} = A\alpha^n$.

5.2 Primjeri

Primjer 1 Dana je rekurzivna relacija

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2n, \qquad n \geq 2$$

uz početni uvjet $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

Primjer 2 Dana je rekurzivna relacija

$$a_n = a_{n-1} + n - 1, \qquad n \geq 1$$

uz početni uvjet $a_0 = 0$.

Primjer 3 Hanojske kule.

- Imamo n kolutova s rupom u sredini, svi različitih polumjera i na ravnoj podlozi zabodena tri štapića;
- Svi kolutovi su nanizani na jedan štapić tako da je kolut s većim polumjerom uvijek ispod onog s manjim polumjerom;
- Cilj: Prenijeti sve kolutove (jedan po jedan) na drugi štapić tako da ni u jednom trenutku ne bude onaj s većim polumjerom ispod onog s manjim. Pri tome svaki od štapića možemo koristiti za privremeno smještanje kolutova;
- Pitanje: Koliki je najmanji broj prijenosa a_n potreban da se svih n kolutova prenese s prvog na drugi štapić?

Induktivni opis:

- Za $n = 1$ (jedan kolut) imamo samo jedan prijenos $a_1 = 1$;
- Pretpostavimo da znamo prenijeti n kolutova (imamo a_n prijenosa).
- Za prijenos $n + 1$ koluta imamo sljedeće:

- prenesemo n kolutova na drugi štapić (ukupno a_n prijenosa);
- prenosimo najveći kolut na treći štapić (ukupno 1 prijenos);
- prenesemo n kolutova s drugog na drugi štapić (ukupno a_n prijenosa).

Dakle, vrijedi

$$a_{n+1} = 2a_n + 1,\ a_1 = 1$$

<u>Rješenje je:</u>

$$a_n = 2^n - 1,\ n \in \mathbb{N}$$

<u>Napomena:</u> Zapravo imamo

$$a_{n+1} \leq 2a_n + 1.$$

Ali budući je

$$a_{n+1} \geq 2a_n + 1$$

imamo jednakost.