Definicija 6 Kažemo da je realan broj r gomilište niza $\{a_n\}$ ako svaka $\varepsilon-$ okolina od r sadrži beskonačno članova tog niza, odnosno

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N})\quad (\exists n' \in \mathbb{N})\quad \text{takav da je}$$

$$n' > n \quad \text{i} \quad |a_{n'} - r| < \varepsilon.$$

Najveće gomilište se naziva limes superior i označava s

$$\limsup a_n,$$

a najmanje gomilište se naziva limes inferior i označava

$$\liminf a_n.$$

Napomena: Limes je gomilište, dok gomilište općenito ne mora biti limes.

Ukoliko je niz $\{a_n\}$ konvergentan onda je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup a_n = \liminf a_n.$$

Primjer

1. Za niz čiji je opći član $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ imamo

$$-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \ -\frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ -\frac{5}{6},\ \ldots,\ (-1)^n \frac{n}{n+1},\ \ldots .$$

Članovi niza s parnim indeksom n se "gomilaju" oko 1, dok se članovi niza s neparnim indeksom "gomilaju" oko -1. Dakle,

$$\liminf a_n = -1, \quad \limsup a_n = 1.$$

2. Za niz čiji je opći član $a_n = \cos n\frac{\pi}{2}$ imamo

$$0,\ \ -1,\ 0,\ 1,\ \ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ \cos n\frac{\pi}{2},\ \ldots .$$

Članovi niza s neparnim indeksom n se "gomilaju" oko 0, dok se članovi niza s parnim indeksom oblika $4k-2$ "gomilaju" oko -1, a članovi niza s parnim indeksom oblika $4k$ "gomilaju" oko 1. Dakle, skup svih gomilišta je

$$\{-1,\ 0,\ 1\},$$

pa je

$$\liminf a_n = -1, \quad \limsup a_n = 1.$$

Možemo proširiti pojam gomilišta s $-\infty$ i $-\infty$.

Za $+\infty$ kažemo je gomilište niza $\{a_n\}$ ako

$$(\forall r > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; (\exists n' \in \mathbb{N}) \;\; \text{takav da je}$$

$$n' > n \;\; \text{i} \;\; a_{n'} > r.$$

Za $-\infty$ kažemo je gomilište niza $\{a_n\}$ ako

$$(\forall r < 0)\,(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; (\exists n' \in \mathbb{N}) \;\; \text{takav da je}$$

$$n' > n \;\; \text{i} \;\; a_{n'} < r.$$

Primjer

Niz čiji je opći član

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ paran}, \\ n, & n \text{ neparan} \end{cases},$$

tj. niz

$$1,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 5,\ \frac{1}{6},\ 7,\ \ldots\ .$$

ima dva gomilišta 0 i $+\infty$. Članovi niza s parnim indeksom n se "gomilaju" oko 0, dok članovi niza s neparnim indeksom rastu ("gomilaju se" prema $+\infty$). Dakle,

$$\liminf a_n = 0, \quad \limsup a_n = +\infty.$$

Definicija 7 Podniz niza $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ je svaka kompozicija $a \circ n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdje je $n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija (niz u $\mathbb{N}$).

Dakle, podniz nekog niza $\{a_n\}$ je ponovno niz. Općenito, $k-$ti član podniza $a \circ n$ je

$$(a \circ n)(k) = a(n(k)) = a_{n(k)} = a_{n_k}.$$

Uočimo: podniz niza $\{a_n\}$ je niz

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4}, ..., \ a_{n_k}, ...$$

tj. niz $\{a_{n_k}\}$ sastavljen od članova niza $\{a_n\}$ tako da vrijedi $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k$ ... .

Primjer

1. Za niz čiji je opći član $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$, tj. niz

$$-\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ -\frac{3}{4}, \ \frac{4}{5}, \ -\frac{5}{6}, \ ... \ , \ (-1)^n \frac{n}{n+1}, \ ... \ .$$

ima dva konvergentna podniza $a_{2k} = \frac{2k}{2k+1}$ i $a_{2k-1} = -\frac{2k-1}{2k}$. Vrijedi

$$\lim_{k \to \infty} a_{2k} = 1, \quad \lim_{k \to \infty} a_{2k-1} = 1.$$

Uočimo:

$$\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{5}{6}, \ \frac{4}{5}, \ \frac{4}{5}, \ldots,$$

tj. $a_2, a_1, a_5, a_4, a_4, \ldots$, nije podniz (indeks strogo ne raste).

2. Promotrimo niz čiji je opći član $a_n = q^n$, tj. niz

$$q, \ q^2, \ q^3, \ q^4, \ q^5, \ \ldots, \ q^n, \ \ldots .$$

Ovaj niz nazivamo <u>geometrijski niz.</u> Razlikujemo slučajeve:

- $|q| < 1 \Longrightarrow$ niz konvergira i $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$;

- $|q| > 1 \Longrightarrow$ niz divergira:

  – za $q > 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$;

  – za $q < -1$, niz ima dva "gomilišta" $+\infty$ i $-\infty$;

- $q = 1 \Longrightarrow$ niz konvergira (stacionaran niz) i $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$;

- $q = -1 \Longrightarrow$ niz divergira (ima dva gomilišta 1 i -1).

Svojstva konvergentnih (pod)nizova

Teorem 2 Niz $\{a_n\}$ ima gomilište r ako i samo ako postoji barem jedan podniz koji konvergira prema r.

Teorem 3 Ako je niz $\{a_n\}$ konvergentan, tada je i svaki podniz $\{a_{n_k}\}$ konvergentan i vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Teorem 4 Svaki konvergentan niz je omeđen.
Dokaz:

Teorem 5 Svaki niz ima monoton podniz.
Dokaz:

Teorem 6 Svaki monoton i omeđen niz je konvergentan. Posebno, svaki rastući niz koji je omeđen odozgo je konvergentan, te svaki padajući niz koji je omeđen odozdo je konvergentan.
Dokaz:

Teorem 7 (Bolzano - Weierstrassov) Svaki omeđen niz ima konvergentan podniz.
Dokaz:

Primjer

1. Niz

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

je strogo rastući, tj. može se pokazati da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \overset{knjiga}{\cdots} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.$$

Također, može se pokazati da je niz (a_n) omeđen odozgo, tj. da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \overset{knjiga}{\cdots} < 3.$$

Dakle, po Teoremu 6 niz $\{a_n\}$ konvergira. Limes tog niza označavamo s

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

2. Pokažimo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0. \tag{L1}$$

Razlikujemo slučajeve:

- $a = 1 \Longrightarrow$ niz konvergira (stacionaran niz) i

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1;$$

- $a > 1$

Pokažimo (L1) koristeći Definiciju 4 (def. limesa). Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $|a_n - a| < \varepsilon$, tj.

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon.$$

Treba pronaći n_0 (iz Definicije 4). Imamo

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| \; < \; \varepsilon \iff \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \iff \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon \iff$$

$$\frac{1}{n}\ln a \; < \; \ln(1+\varepsilon) \iff n > \frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$$

$$\Longrightarrow \quad n \geq \left\lfloor \frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)} \right\rfloor + 1 = n_0.$$

• $0 < a < 1$

Pokažimo (L1) koristeći Definiciju 4 (def. limesa). Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $|a_n - a| < \varepsilon$, tj.

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon.$$

Treba pronaći n_0 (iz Definicije 4). Imamo

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| \;<\; \varepsilon \;\Leftrightarrow\; 1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \sqrt[n]{a} > 1 - \varepsilon \;\overset{0<\varepsilon<1}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1}{n}\ln a \;>\; \ln(1-\varepsilon) \;\Leftrightarrow\; n > \frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}$$

$$\Longrightarrow \quad n \geq \left\lfloor \frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)} \right\rfloor + 1 = n_0.$$

<u>Uočimo:</u> za $\varepsilon \geq 1$ je $n_0 = 1$.

3. Može se pokazati

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Svojstva limesa

Teorem 8 Neka su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konvergentni. Tada vrijedi:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

iv) ako za svaki n vrijedi $b_n \neq 0$ i ako je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, tada je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n},$$

v) ako za svaki n vrijedi $a_n > 0$ i ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, tada je

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = \lim_{n\to\infty}(a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Teorem 9 Ako za nizove $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $a_n \leq b_n \leq c_n$ i ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, tada je i

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Red realnih brojeva

Red realnih brojeva na neki način poopćenje (konačnog) zbrajanja na "zbrajanje" beskonačno (prebrojivo) pribrojnika.

Definicija 8 Red realnih brojeva je uređeni par $((a_n), (s_k))$ realnih nizova (a_n) i (s_k), pri čemu je

$$s_k = a_1 + a_2 + ... + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Broj a_n nazivamo $n-$ti član reda, broj $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ nazivamo $n-$ta parcijalna suma, a niz (s_k) niz parcijalnih suma.

Red $(\{a_n\}, \{s_k\})$ kraće zapisujemo kao

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_k + ...$$

Definicija 9 Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da konvergira ako konvergira niz pripadnih parcijalnih suma (s_k). U tom slučaju graničnu vrijednost

$$\lim_{k \to \infty} s_k = s$$

nazivamo sumom reda i pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Još se koriste izrazi: red je konvergentan ili niz $\{a_n\}$ je zbrojiv ili sumabilan.

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne konvergira kažemo da divergira.

Dva pitanja:

1. Je li red konvergira?

2. Ako red konvergira, kolika mu je suma?

Primjer Red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \quad q \in \mathbb{R}.$$

nazivamo <u>geometrijski red</u>. Uočimo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Ispitajmo konvergenciju geometrijskog reda u ovisnosti o $q \in \mathbb{R}$. Uočimo da je ovdje

$$a_n = q^{n-1} \quad \text{i} \quad s_k = 1 + q + q^2 + ... + q^{k-1}.$$

Razlikujemo slučajeve:

- $q = 1 \Longrightarrow s_k = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = k$
  $\Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} s_k = \lim\limits_{k\to\infty} k = +\infty$, red divergira;

- $q = -1 \Longrightarrow s_k = 1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^{k-1} \Longrightarrow$

$$s_k = \begin{cases} (1-1) + (1-1) + ... + (1-1) = 0, & k \text{ paran} \\ (1-1) + (1-1) + ... + (1-1) + 1 = 1, & k \text{ neparan} \end{cases}$$

Dakle, niz (s_k) je niz

$$1,\ 0,\ 1,\ 0....1,\ 0,\ 1, ... \text{ .}$$

Ovaj niz ima dva gomilišta 1 i 0, dakle divergira, pa red divergira.

- $q \neq \pm 1 \implies$ (suma kon. geom. reda) $\implies$

$$s_k = 1 + q + q^2 + ... + q^{k-1} = \frac{1-q^k}{1-q} \implies$$

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1-q^k}{1-q} = \frac{1}{1-q} \lim_{k\to\infty} \left(1-q^k\right) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1-q} \cdot (1-0) = \frac{1}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{divergira} & |q| > 1. \end{cases}.$$

Dakle red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konvergira za $|q| < 1$, a inače (za $|q| \geq 1$) divergira.

Primjer Red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

konvergira i suma mu je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

Teorem 10 (nužan uvjet konvergencije) Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz:

Ova tvrdnja je ekvivalentna tvrdnji:

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ onda je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

Dakle, postoje redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ za koje vrijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a divergentni su, ali su redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ za koje vrijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ jedini "kandidati" za konvergenciju.

Primjer Red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

je divergentan (vidjeti u knjizi Primjer 6.10 str. 229.), ali je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Primjer Red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}$$

je divergentan (po Teoremu 10) jer je je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} \neq 1.$