2. Analitička geometrija prostora

2.1 Kartezijev koordinatni sustav

Neka je O izabrana točka u prostoru E^3 i $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ desna ortonormirana baza za prostor V^3. Tada za ovu odabranu točku O i bazu B imamo bijekcije dane sa

$$T \longleftrightarrow \overrightarrow{r_T} = \overrightarrow{OT} \longleftrightarrow \overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OT}\right] \longleftrightarrow (x, y, z)\,,$$

gdje je $\overrightarrow{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Kako su

$$r : V^3 \longrightarrow V^3(O),$$
$$\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OT}\right] \xrightarrow{r} \overrightarrow{OT}$$

$$k : V^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\overrightarrow{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \xrightarrow{k} (x, y, z)$$

bijekcije, identificiramo

$$\overrightarrow{r_T} = \overrightarrow{OT} \equiv x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \equiv (x, y, z)\,,$$

i ti prikazi su jednoznačni. Uređenu trojku (x, y, z) nazivamo **pravokutne koordinate** radijvektora $\overrightarrow{r_T}$ s obzirom na danu bazu B.

Specijalno, postoje jedinstveni radijvektori takvi da je

$$\overrightarrow{OI} \equiv \vec{i} \equiv (1,0,0)\,, \quad \overrightarrow{OJ} \equiv \vec{j} \equiv (0,1,0)\,, \quad \overrightarrow{OK} \equiv \vec{k} \equiv (0,0,1)\,.$$

<u>Uočimo:</u>

- Kako su sve operacije s vektorima u V^3 definirane preko predstavnika iz $V^3(O)$ znamo: zbrajati radijus-vektore (radijvektore) (po pravilu paralelograma), množiti ih skalarom, te ih skalarno i vektorski množiti. Dakle, bijekcija $r : V^3 \longrightarrow V^3(O)$ "čuva" ove operacije!

- Zbog bijekcija $k : V^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $r : V^3 \longrightarrow V^3(O)$ znamo i pravokutne koordinate: zbroja, umnoška sa skalarom te skalarnog i vektorskog umnoška radijvektora.

Kako je i

$$h : E^3 \longrightarrow V^3(O),$$

$$T \xrightarrow{h} \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{r_{T}} \equiv (x,y,z)$$

bijekcije, možemo identificirati i

$$T \equiv (x,y,z)\,.$$

Uređenu trojku (x,y,z) nazivamo **pravokutne koordinate** točke T s obzirom na danu bazu B i točku O.

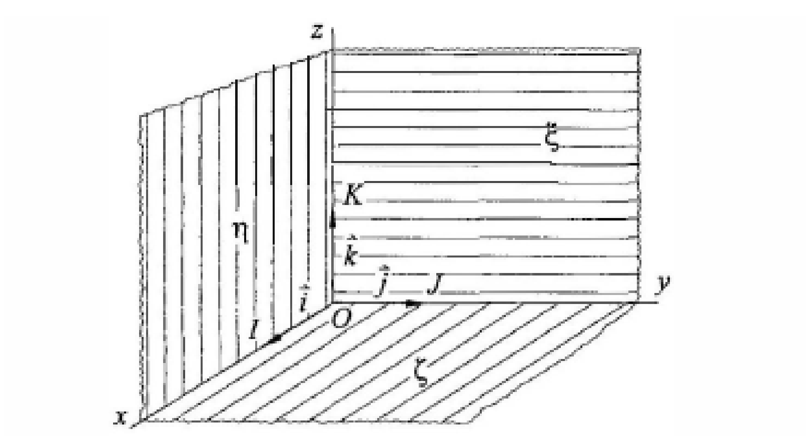
Ovako izabranu točku O u prostoru E^3 i $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ desnu ortonormiranu bazu u $V^3(O)$ (uz identifikaciju $\overrightarrow{OI} \equiv \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} \equiv \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} \equiv \vec{k}$) nazivamo **pravokutni** ili **Kartezijev koordinatni sustav** u E^3, kraće

$$\left(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\right).$$

- Točka O njegovo je **ishodište**, a $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$ **koordinatni vektori**.

- Pravce x, y, z određene točkama OI, OJ i OK, redom, koji su u parovima okomiti, nazivamo **osi** koordinatnog sustava, i to redom: x je **os apscisa**, y je **os ordinata**, a z je os **aplikata**.

- Ravnine određene koordinatnim osima, nazivamo **koordinatne ravnine** danog sustava: $xy-$ravnina, $xz-$ravnina i $yz-$ravnina.



Uočimo: Za zadani Kartezijev koordinatni sustav $\left(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\right)$:

- Svaka točka $T \in E^3$ jedinstveno je određena svojim pravokutnim koordinatama (x, y, z) (i obrnuto). Još pišemo
$$T\,(x, y, z)\,.$$
Poimence, broj x nazivamo apscisa, y ordinata, a z aplikata točke T.

- Pravokutne koordinate točke T podudaraju s pravokutnim koordinatama radijvektora $\overrightarrow{r_T}$ te točke u danom sustavu. Specijalno:
$$I = (1, 0, 0)\,, \quad J = (0, 1, 0)\,, \quad K = (0, 0, 1)$$

Propozicija 2.1 *Neka su* $A\,(x_1, y_1, z_1)$ *i* $B\,(x_2, y_2, z_2)$ *dvije točke iz prostora* E^3 *dane svojim koordinatama u odnosu na neki Kartezijev koordinatni sustav. Onda vektor* $\left[\overrightarrow{AB}\right]$ *ima u tom sustavu koordinate*
$$\left[\overrightarrow{AB}\right] = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\,.$$
Dokaz:

Napomena: Vrijedi
$$\left[\overrightarrow{AB}\right] = \left[\overrightarrow{OC}\right],$$
gdje je $C\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\,.$

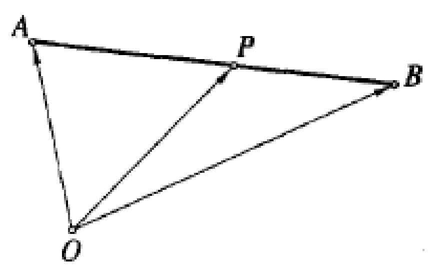
Propozicija 2.2 *Neka su* $A(x_1, y_1, z_1)$ *i* $B(x_2, y_2, z_2)$ *dvije točke iz prostora* E^3 *dane svojim koordinatama u odnosu na neki Kartezijev koordinatni sustav. Onda je njihova udaljenost*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Dokaz:

Dijeljenje dužine u zadanom omjeru. Podijeliti dužinu $\overline{AB}$ u danom omjeru $\lambda : 1$ znači odrediti točku P unutar te dužine takvu da vrijedi:

$$|\overline{AP}| : |\overline{PB}| = \lambda : 1.$$



Propozicija 2.3 *Neka su* $A\,(x_1, y_1, z_1)$ *i* $B\,(x_2, y_2, z_2)$ *dvije točke iz prostora* E^3 *dane svojim koordinatama u odnosu na neki Kartezijev koordinatni sustav. Onda su koordinate točke* P *koja dijeli dužinu* $\overline{AB}$ *u omjeru* $\lambda : 1$ *dane s:*

$$P(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}).$$

Specijalno, koordinate polovišta P *od* $\overline{AB}$ *su*

$$P(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}).$$

Dokaz:

Konveksna kombinacija. Konveksna kombinacija dvaju vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ je vektor oblika

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

pri čemu za skalare vrijedi λ_1 i λ_2 vrijedi $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ i $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Propozicija 2.4 *Neka su dani vektori* $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ *svojim radijvektorima* $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$ *u nekom Kartezijevom koordinatnom sustavu. Onda konveksnoj kombinaciji ta dva vektora odgovara radijvektor* $\overrightarrow{OP}$ *točke* P *koja se nalazi unutar dužine* $\overline{AB}$.

Dokaz:

Slična tvrdnja vrijedi i za tri točke: radijvektor svake točke unutar trokuta određenog s te tri točke, konveksna je kombinacija radijvektora njegovih vrhova.

Specijalno: Težište trokuta $\triangle ABC$ je ona točka T za koju vrijedi

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

2.2 Ravnina

Svaka ravnina Π u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određena:

1. ili s tri različite točke koje sve ne pripadaju istom pravcu;

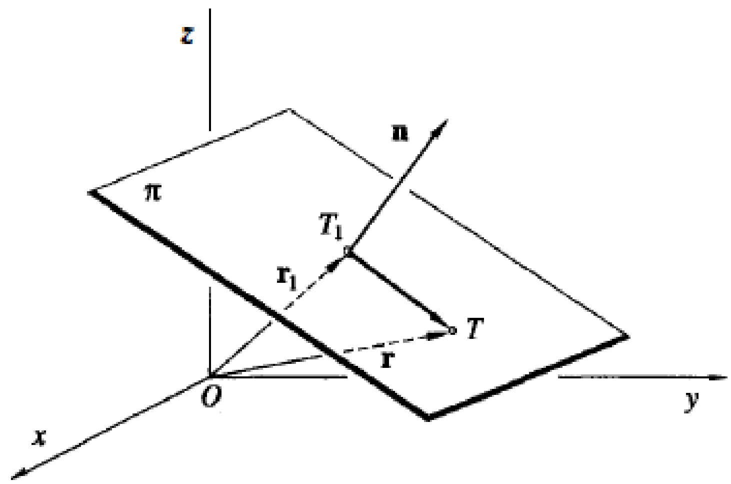
2. ili s pravcem i jednom točkom koja ne pripada tom pravcu;

3. ili s dva različita pravca (koja nisu mimosmjerna);

4. ili s pravcem okomitim na Π i točkom $T_1 \in \Pi$.

Definicija 2.1 *Vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$ je okomit na ravninu Π, ako je svaki njegov nosač okomit na Π. Takav vektor $\vec{n}$ nazivamo* **vektor normale ravnine** Π.

Neka je ravnina Π određena s točkom $T_1 \in \Pi$ i normalom $\vec{n}$ na tu ravninu (Π je jednoznačno određena s T_1 i $\vec{n}$, prema 4.).



Imamo: $T \in \Pi$, $T \neq T_1$, ako i samo ako je vektor $\left[\overrightarrow{T_1T}\right]$ paralelan Π (tj. $\overline{T_1T} \in \Pi$). Dakle,

$$T \in \Pi \Longleftrightarrow \vec{n} \ \perp \ \left[\overrightarrow{T_1T}\right],$$

tj.

$$T \in \Pi \Longleftrightarrow \vec{n} \cdot \left[\overrightarrow{T_1T}\right] = 0.$$

Budući je

$$\overrightarrow{T_1T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OT_1} = \vec{r}_T - \vec{r}_{T_1},$$

onda je

$$\vec{n} \cdot ([\vec{r}_T] - [\vec{r}_{T_1}]) = 0$$

što je <u>**vektorska**</u> jednadžba ravnine Π. Izvedimo odavde jednadžbu ravnine u algebarskom obliku.

Neka su točke $T_1\,(x_1, y_1, z_1)$ i $T\,(x, y, z)$ dane svojim koordinatama i $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$. Tada je

$$\vec{n} \cdot ([\vec{r}_T] - [\vec{r}_{T_1}]) = 0 \Longrightarrow$$

$$A\,(x - x_1) + B\,(y - y_1) + C\,(z - z_1) = 0 \qquad (1)$$

Iz (1) slijedi

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_1 - By_1 - Cz_1)}_{D} = 0 \Longrightarrow$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2)$$

Jednadžba (2) se naziva **opća** jednadžba ravnine.

Uočimo:

$$D = -\vec{n} \cdot \left[\overrightarrow{OT_1}\right].$$

Ravnina se neće promijeniti ako vektoru normale $\vec{n}$ promjenimo duljinu ili orijentaciju (svi vektori normale su kolinearni):

$$\vec{n}_1 = \lambda \vec{n},\ \lambda \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0$$

je opći oblik iste ravnine Π.

Ako normalu $\vec{n}$ orijentiramo tako da je

$$0 \leq \measuredangle \left(\vec{n}, \left[\overrightarrow{OT_1}\right]\right) \leq \frac{\pi}{2},$$

tada je

$$\vec{n} \cdot \left[\overrightarrow{OT_1}\right] \geq 0.$$

Kako je u (2)

$$D = -\vec{n} \cdot \left[\overrightarrow{OT_1}\right] \Longrightarrow D \leq 0.$$

Primjer 1 *Nađite jednadžbu ravnine* Π *koja prolazi točkom* $T_1\,(1, -2, 1)$ *i čija je normala* $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}.$

<u>I način:</u> *Iz jednadžbe (1) dobivamo*

$$1 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - (-2)) + (-4)\,(z - 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Pi \ldots . \;\; x - y - 4z + 1 = 0$$

<u>II način:</u> *Iz jednadžbe (2) dobivamo*

$$1 \cdot x - 1 \cdot y - 4 \cdot z + D = 0$$

$$T_1 \in \Pi \;\; \Rightarrow 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 + D = 0 \;\; \Rightarrow \;\; D = 1 \;\; \Rightarrow$$

$$\Pi \ldots . \;\; x - y - 4z + 1 = 0$$

Množenjem predhodne jednadžbe s -1 *dobivamo*

$$\Pi \ldots \quad -x+y+4z-1=0 \Longrightarrow$$

$$\vec{n}_1 = -\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k} \quad \textit{\textbf{normala na}}\ \Pi \ \textit{\textbf{i}} \quad -D = \ \vec{n}\cdot\left[\overrightarrow{OT_1}\right] \geq 0$$

Neka je $\vec{n}_0$ jedinični vektor normale od Π. Tada je

$$\vec{n}_0 = \cos\varphi_1\vec{i}+\cos\varphi_2\vec{j}+\cos\varphi_3\vec{k},$$

gdje je

$$\varphi_1 = \measuredangle\left(\vec{n}_0, \overrightarrow{i}\right), \ \ \varphi_2 = \measuredangle\left(\vec{n}_0, \vec{j}\right), \ \ \varphi_3 = \measuredangle\left(\vec{n}_0, \vec{k}\right).$$

Sada je (1) oblika

$$\cos\varphi_1\left(x-x_1\right)+\cos\varphi_2\left(y-y_1\right)+\cos\varphi_3\left(z-z_1\right)=0$$

a (2) oblika

$$\cos\varphi_1\cdot x+\cos\varphi_2\cdot y+\cos\varphi_3\cdot z-p=0, \qquad (3)$$

gdje je

$$p = \vec{n}_0\cdot\left[\overrightarrow{OT_1}\right].$$

Imamo

$$0 \leq \measuredangle\left(\vec{n}_0, \left[\overrightarrow{OT_1}\right]\right) \leq \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow p \geq 0.$$

Jednadžba (3), uz $p \geq 0$, se naziva **normalna** ili **Hesseova** jednadžba ravnine.

Ako je $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektor normale od Π, tada je $\vec{n}_0 = \pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ jedinični vektor normale, tj.

$$\vec{n}_0 = \pm\frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

pa je (3) oblika

$$\pm\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \tag{4}$$

Ako je predznak biramo tako dobjemo Hesseovu jednadžbu, tj. $p \geq 0$, tada je u (4), za $D \neq 0$,

$$(-sgnD)\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \tag{5}$$

pa je

$$\cos\varphi_1 = \frac{(-sgnD)A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{(-sgnD)B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{(-sgnD)C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$p = \frac{sgnD \cdot D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ako je $D = 0$, tada je i $p = 0$, pa je svejedno je koji predznak uzimamo.

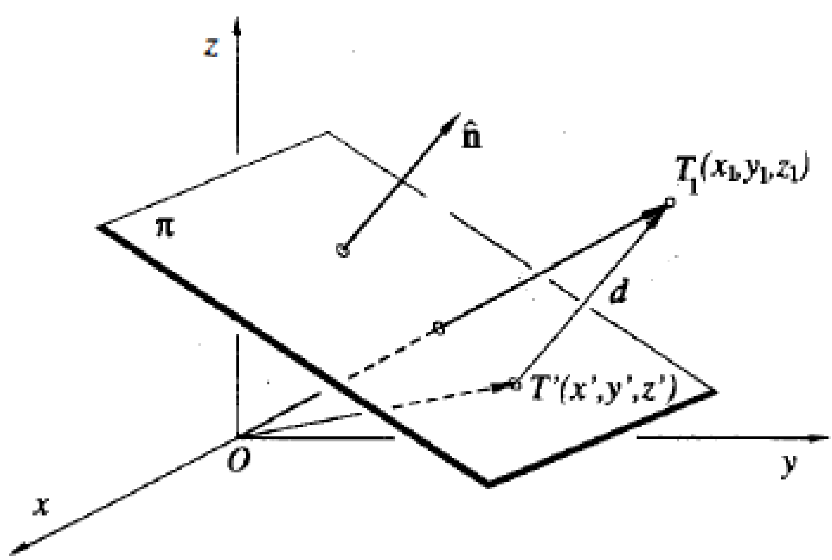
Primjer 2 *Nađite Hesseovu jednadžbu ravnine* $-x+y+4z-1=0$. *Iz (5) dobivamo*

$$(-sgn\,(-1))\cdot\frac{(-1)\cdot x+1\cdot y+4\cdot z-1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}}=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{-1}{\sqrt{18}}x+\frac{1}{\sqrt{18}}y+\frac{4}{\sqrt{18}}y-\frac{1}{\sqrt{18}}=0$$

Udaljenost točke od ravnine Neka je $T_1\,(x_1,y_1,z_1)$ neka točka i Π dana ravnina. Udaljenost točke T_1 od ravnine Π jednaka je udaljenosti točke T_1 do njezine projekcije $T'(x',y',z')$ na ravninu Π.



Neka je $\vec{n}_0 = \cos\varphi_1\vec{i} + \cos\varphi_2\vec{j} + \cos\varphi_3\vec{k}$ jedinični vektor normale od Π i pretpostavimo da je $0 \leq \measuredangle\left(\vec{n}_0, \left[\overrightarrow{OT'}\right]\right) \leq \frac{\pi}{2}$. Tada je

$$\Pi..... \cos\varphi_1 \cdot x + \cos\varphi_2 \cdot y + \cos\varphi_3 \cdot z - p = 0,$$

gdje je

$$p = \vec{n}_0 \cdot \left[\overrightarrow{OT'}\right] \geq 0.$$

Vektori $\vec{n}_0, \left[\overrightarrow{T'T_1}\right]$ kolinearni, pa je

$$\varphi = \measuredangle\left(\vec{n}_0, \left[\overrightarrow{T'T_1}\right]\right) = 0 \text{ ili } \pi.$$

Ovo povlači

$$\left[\overrightarrow{T'T_1}\right] \cdot \vec{n}_0 = \left|\left[\overrightarrow{T'T_1}\right]\right| |\vec{n}_0| \cos\varphi = \pm\left|\overline{T'T_1}\right| = \pm d\left(T_1, \Pi\right).$$

ili

$$d\left(T_1, \Pi\right) = \pm\left(\cos\varphi_1\left(x_1 - x'\right) + \cos\varphi_2\left(y_1 - y'\right) + \cos\varphi_3\left(z_1 - z'\right)\right).$$

Kako je $T' \in \Pi$, onda je

$$\cos\varphi_1 \cdot x' + \cos\varphi_2 \cdot y' + \cos\varphi_3 \cdot z' = p,$$

što povlači

$$d\left(T_1, \Pi\right) = \pm\left(\cos\varphi_1 \cdot x_1 + \cos\varphi_2 \cdot y_1 + \cos\varphi_3 \cdot z_1 - p\right).$$

Uočimo:

- Predznak $-$ dobivamo kad su ishodište O i T_1 u istom poluprostoru određenom s Π ($\varphi = \pi$), a $+$ ako su u različitim poluprostorima ($\varphi = 0$).

- Ako je $T_1 = O = (0,0,0)$ ishodište, onda je udaljenost $d(0,\Pi) = p$.

Dakle,

$$d(T_1,\Pi) = \left|\cos\varphi_1 \cdot x_1 + \cos\varphi_2 \cdot y_1 + \cos\varphi_3 \cdot z_1 - p\right|. \qquad (6)$$

Ako je Π ravnina dana s jednadžbom $Ax + By + Cz + D = 0$, onda je (6) oblika

$$d(T_1,\Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Primjer 3 *Nađite udaljenost ravnine* $-x+y+4z-1=0$ *od ishodišta i točke* $T_1 = (3,1,-2)$ *od te ravnine. Hesseova jednadžba ove ravnine je*

$$\frac{-1}{\sqrt{18}}x + \frac{1}{\sqrt{18}}y + \frac{4}{\sqrt{18}}y - \frac{1}{\sqrt{18}} = 0$$

(Primjer 2) pa je

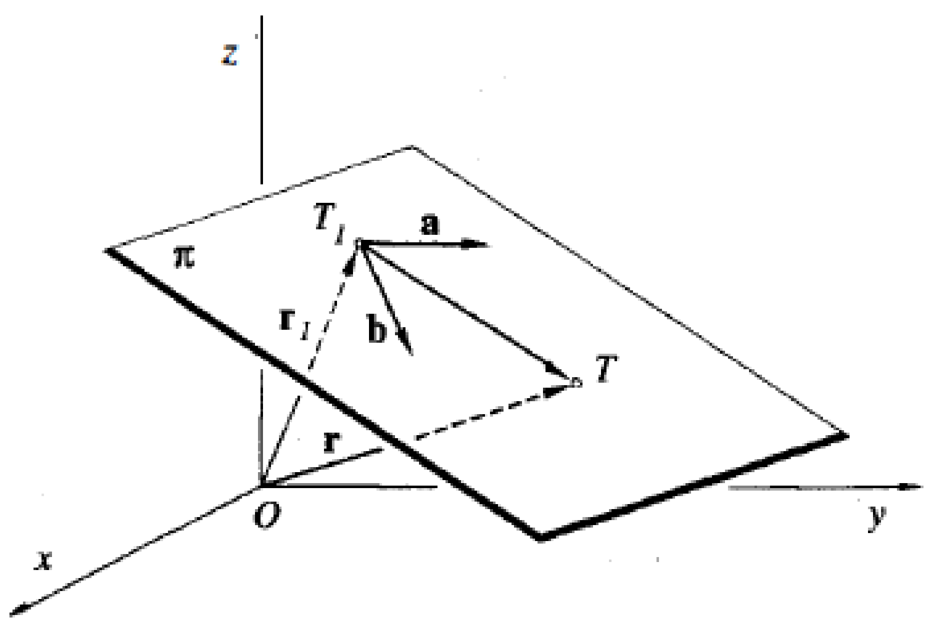
$$d(0,\Pi) = \frac{1}{\sqrt{18}}$$

i

$$
\begin{aligned}
d\left(T_1, \Pi\right) &= \left|\frac{-1}{\sqrt{18}} \cdot 3+\frac{1}{\sqrt{18}} \cdot 1+\frac{4}{\sqrt{18}} \cdot(-2)-\frac{1}{\sqrt{18}}\right| \\
&= \left|-\frac{11}{\sqrt{18}}\right|=\frac{11}{6} \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Uočimo: Ovdje su ishodište O i T_1 u istom poluprostoru određenom s ovom ravninom ($\varphi = \pi$).

Parametarska jednadžba ravnine. Neka je ravnina Π određena s točkom $T_1 \in \Pi$ i s dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ paralelna s tom ravninom tj. neka je Π je "razapeta" je vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (Π je jednoznačno određena s T_1, $\vec{a}$ i $\vec{b}$, prema 1. ili prema 3.).



Imamo: $T \in \Pi$, $T \neq T_1$, ako i samo ako je vektor $\left[\overrightarrow{T_1T}\right]$ paralelan Π (tj. $\overline{T_1T} \in \Pi$).

Dakle, ako je $T \in \Pi$, tada su vektori $\left[\overrightarrow{T_1T}\right]$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ komplanarni, pa postoje jedinsveni skalari λ, $\mu \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\left[\overrightarrow{T_1T}\right] = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

Kako je

$$\overrightarrow{T_1T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OT_1} = \vec{r}_T - \vec{r}_{T_1},$$

imamo

$$\left[\vec{r}_T\right] = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \left[\vec{r}_{T_1}\right]. \tag{7}$$

Neka su točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T(x, y, z)$ dane svojim koordinatama te $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, tada (7) povlači

$$\begin{aligned} x &= \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + x_1 \\ y &= \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + y_1 \\ z &= \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 + z_1 \end{aligned}$$

što je **parametarska jednadžba ravnine** Π.

Nadalje, kako su vektori $\left[\overrightarrow{T_1T}\right]$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ komplanarni, tada je njihov mješoviti produkt

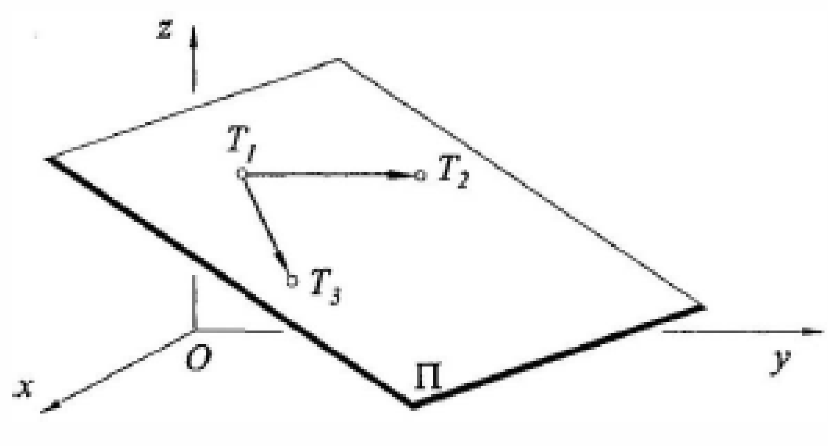
$$\left[\left[\overrightarrow{T_1T}\right], \vec{a}, \vec{b}\right] = 0.$$

Ako su točke i vektori zadani koordinatno kao prije, imamo

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (8)$$

što je **jednadžba ravnine određene fiksnom točkom i dvama nekolinearnim vektorima.**

Jednadžba ravnine kroz tri točke. Neka je ravnina Π određena s tri točke $T_1, T_2, T_3 \in \Pi$ koje ne leže na jednom pravcu (Π je jednoznačno određena s te tri točke prema 1.)



Neka su te točke zadane pomoću svojih koordinata $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$. Definirajmo

$$\vec{a} \;:=\; \left[\overrightarrow{T_1T_2}\right] = [\vec{r}_{T_2}] - [\vec{r}_{T_1}]$$

$$\vec{b} \;:=\; \left[\overrightarrow{T_1T_3}\right] = [\vec{r}_{T_3}] - [\vec{r}_{T_1}] \,.$$

Ako je $T\,(x, y, z) \in \Pi$, tada su vektori $\left[\overrightarrow{T_1T}\right]$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ komplanarni, pa iz (8) imamo

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (9)$$

što je **jednadžba ravnine kroz tri točke.**

Segmentni oblik ravnine.

Želimo li skicirati položaj ravnine u prostoru, to ćemo najlakše učiniti izdvojimo li točke na koordinatnim osima koje pripadaju toj ravnini.

Neka je $Ax + By + Cz + D = 0$ opća jednadžba ravnine Π.

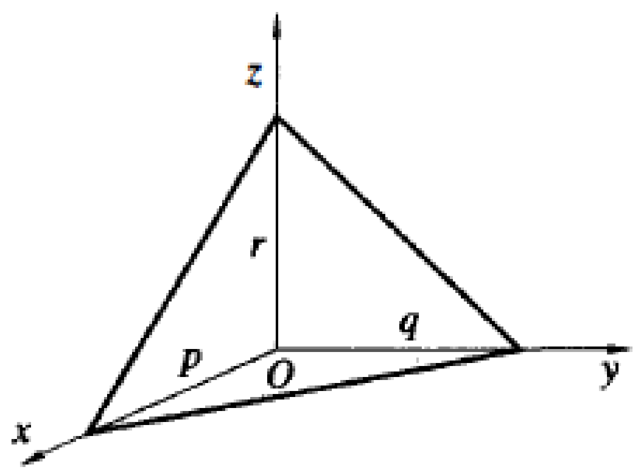
• Ukoliko je $D = 0$, ravnina prolazi ishodištem.

- Ako je pak $D \neq 0$, tada, dijeljenjem s $-D$, gornju jednadžbu možemo svesti na oblik:

$$\Pi \dots \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{y}{r} = 1 \tag{8}$$

koji nazivamo **segmentni oblik** jednadžbe ravnine.

- Točke $P(p, 0, 0)$, $Q(0, q, 0)$ i $R(0, 0, r)$ su presjeci Π s koordinatnim osima x, y, z, redom. Brojeve p, q, r nazivamo **segmentima,** a njihove apsolutne vrijednosti predstavljaju duljine odrezaka na koordinatnim osima.

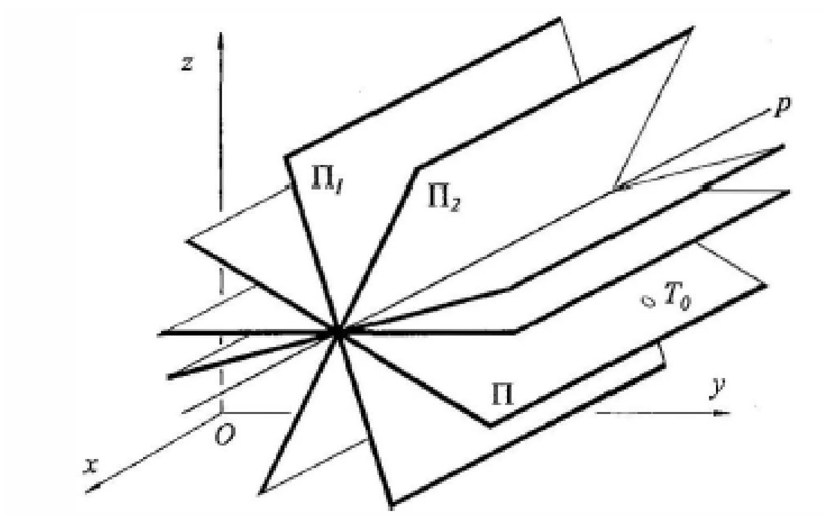


Primjer 4 *Odredimo segmentni oblik jednadžbe ravnine zadane s $2x - 6y + z - 2 = 0$. Dijeljenjem s 2 dobivamo*

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-\frac{1}{3}} + \frac{z}{2} = 1.$$

Pramen ravnina.

Dvije ravnine Π_1 i Π_2 (u općem položaju - ako nisu paralelne) sijeku se duž jednog pravca p. Uvjet za to je da njihovi vektori normale $\vec{n}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ i $\vec{n}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$ nisu kolinearni. Kroz presječni pravac p može se provući beskonačna familija ravnina koju nazivamo **pramen (svezak) ravnina**.



Neka su

$$\Pi_1 \ ... \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 \ = \ 0$$

$$\Pi_2 \ ... \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 \ = \ 0$$

jednadžbe ravnina koje određuju neki pramen ravnina. Neka je $T(x, y, z)$ bilo koja točka koja leži na presječnom pravcu. Koordinate te točke moraju zadovoljavati obje gornje jednadžbe. To znači da će ta točka zadovoljavati jednadžbu oblika

$$\lambda\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\mu\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0, \tag{9}$$

za proizvoljne λ, $\mu\in\mathbb{R}$. Jednadžbu (9) možemo zapisati kao

$$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)z+(\lambda D_1+\mu D_2)=0,$$

što za odabrane λ, $\mu\in\mathbb{R}$ predstavlja opću jednadžbu ravnine s normalom $\lambda\vec{n}_1+\mu\vec{n}_2$.

<u>Uočimo:</u>

- Za $\lambda=0$ (i $\mu\neq 0$) dobivamo ravninu Π_2, a za $\mu=0$ (i $\lambda\neq 0$) dobivamo ravninu Π_1.
- Ako je $\lambda=1$, dobivamo sve ravnine pramena, osim ravnine Π_2 :

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\mu\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0,\ \ \mu\in\mathbb{R} \tag{10}$$

Primjer 5 *Odredimo jednadžbu ravnine koja prolazi presječnicom ravnina*

$$\Pi_1 \ ...\ 2x-3y+z-1\ =\ 0$$

$$\Pi_2 \ ...\ x-y+2z-3\ =\ 0$$

i točkom $T_0=(3,1,0)$. *Očito ravnine nisu paralelene i*

$T_0 \notin \Pi_2$, *pa koristeći (10), dobivamo*

$2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 0 - 1 + \mu\,(3 - 1 + 2 \cdot 0 - 3) = 0 \Longrightarrow \mu = 2.$

Sada je

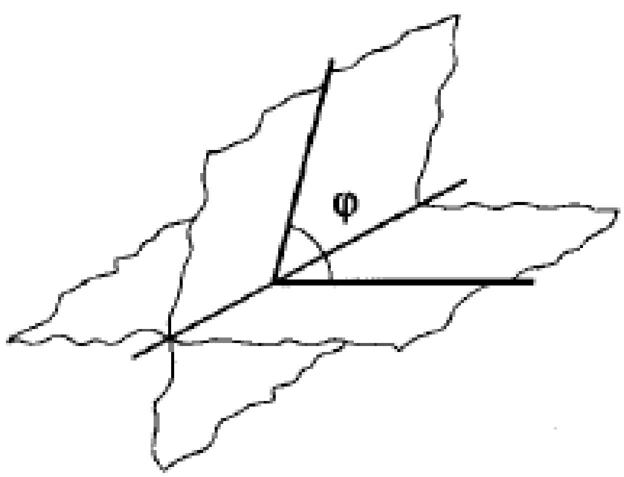
$$2x - 3y + z - 1 + 2 \cdot (x - y + 2z - 3) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Pi \;...4x - 5y + 5z - 7 = 0.$$

Kut između ravnina.

Kut φ između dviju ravnina Π_1 i Π_2 geometrijski:

- Ako su ravnine paralelne ili se podudaraju, tada je $\varphi = 0$.

- Ako se ravnine sijeku u pravcu p, tada kroz bilo koju točku $T_1 \in p$ položimo ravninu Π okomitu na p . Ona siječe zadane ravnine duž dva pravca p_1 i p_2 . Kut φ definira se kao (manji) kut između tih dvaju pravaca ($0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$).

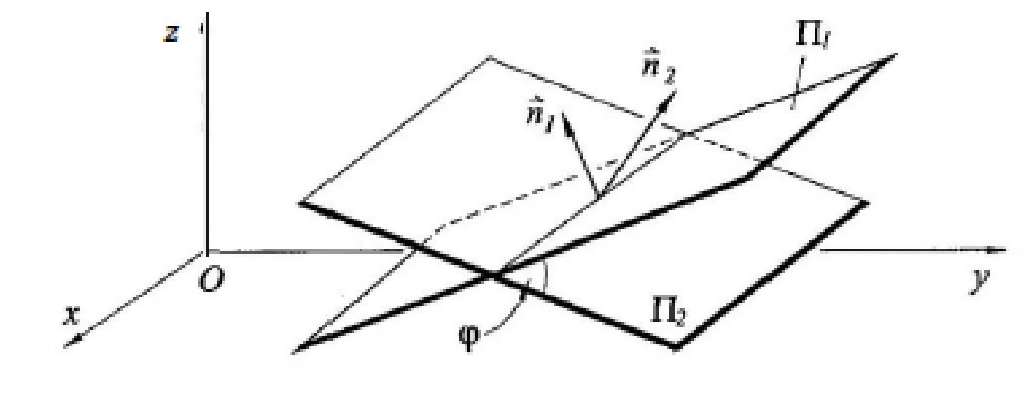


Neka su $\vec{n}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ i $\vec{n}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$ normale ravnina Π_1 i Π_2, redom. Očito je

$$\varphi = \measuredangle\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right), \text{ ako je } \quad 0 \leq \measuredangle\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

ili

$$\varphi = \pi - \measuredangle\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right), \quad \text{ako je } \frac{\pi}{2} < \measuredangle\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right) \leq \pi.$$



U svakom slučaju imamo

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|},$$

odnosno

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Posebno ako su Π_1 i Π_2 okomite, onda je

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \text{ili} \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Ako su Π_1 i Π_2 paralelne (ili se podudaraju), onda je

$$\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \quad \text{ili} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Primjer 6 *Odredimo kut (kosinus kuta) između ravnina*

$$\Pi_1 \ \ldots \ 2x - 3y + z - 1 = 0$$

$$\Pi_2 \ \ldots \ x - y + 2z - 3 = 0$$

Imamo

$$\cos\varphi = \frac{|2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$