Osnovne algebarske strukture
5. Vektorski prostori

Borka Jadrijević

5.1 Unutarnja i vanjska množenja

Imamo dvije vrste algebarskih operacija, tzv. unutarnja množenja i vanjska množenja.

Definicija 5.1

- *Neka je S neki neprazan skup. Svako preslikavanje $u : S \times S \longrightarrow S$,*

$$(x, y) \in S \times S \ \longrightarrow \ u\,(x, y) := xy \in S$$

  nazivamo ***unutarnje množenje*** *(ili* ***binarna operacija****) na S.*

- *Neka je S neki neprazan skup i Ω neki drugi neprazan skup. Svako preslikavanje $v : \Omega \times S \longrightarrow S$,*

$$(\alpha, x) \in \Omega \times S \ \longrightarrow \ v\,(\alpha, x) := \alpha y \in S$$

  nazivamo ***vanjsko množenje*** *na S elementima iz Ω.*

Definicija 5.2 *Neka je S neki neprazan skup.* ***Algebarska struktura*** *na S je skup S zajedno sa barem jednim unutarnjim množenjem i/ili bar jednim vanjskim množenjem koja zadovaoljavaju (neki) skup aksioma množenja.*

Najvažniji reprezentanti algebarskih struktura:

a) Strukture s unutarnjim množenjem/množenjima:

- Grupe (1 unutarnje množenje);
- Prsteni, polja (2 unutarnja množenja).

b) Strukture s barem jednim unutarnjim množenjem i barem jednim vanjskim množenjem:

- Vektorski prostori (1 unutarnje množenje i 1 vanjsko množenje);
- Algebre (2 unutarnja množenja i 1 vanjsko množenje);

5.2 Vektorski prostori

Osnovni model algebarske strukture koju nazivamo vektorski ili linerani prostor je V^3-skup klasa ekvivalencije orijentiranih dužina (vektora) koje znamo zbrajati (unutarnje množenje - binarna operacija) i množiti s realnim brojem (vanjsko množenje) s tim da te operacije zadovoljavaju neka svojstva (aksiome).

Definicija 5.3 *Neka je* $(V, +)$ *Abelova grupa i* $(F, +, \cdot)$ *polje. Nadalje, neka je*

$$h : F \times V \to V$$

preslikavanje kojeg nazivamo ***vanjsko*** *ili* ***hibridno množenje****, i kratko označujemo sa* $h(\alpha, a) = \alpha a$*, koje ima ova svojstva:*

i) **kvaziasocijativnost***, tj.*

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta) a, \quad \forall \alpha, \beta \in F,\ \forall a \in V;$$

ii) **posjedovanje jedinice***, tj.*

$$1 \cdot a = a, \quad 1 \in F \text{ i } \forall a \in V;$$

iii) **distributivnost u odnosu na zbrajanje** *u* F*, tj.*

$$(\alpha + \beta)\,a = \alpha a + \beta a, \quad \forall \alpha, \beta \in F,\ \forall a \in V;$$

iv) **distributivnost u odnosu na zbrajanje** *u* V*, tj.*

$$\alpha\,(a + b) = \alpha a + \alpha b, \quad \forall \alpha \in F,\ \forall a, b \in V.$$

Tada uređenu trojku (V, F, h) *nazivamo* ***linearni*** *ili* ***vektorski prostor*** *nad poljem* F.

Napomena:

- Elemente od V nazivamo **vektorima**, posebno neutralni element (nulu) grupe $(V, +)$ nazivamo **nulvektor** i označavamo s Θ;

- Elemente od F nazivamo **skalarima**, a s 0 i 1 označavamo nulu i jedinicu polja $(F, +, \cdot)$, redom;

- Ako je $F = \mathbb{R}$ onda govorimo o **realnom vektorskom prostoru**, a ako je $F = \mathbb{C}$ onda govorimo o **kompleksnom vektorskom prostoru**;

Primjer 5.1:

a) Skupovi V^3 i $V^3(0)$ uz standardno zbrajanje vektora (radij vektora) i množenje vektora (radij vektora) sa skalarom vektorski prostori;

b) Skup $\mathbb{R}^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \,|\alpha_i \in \mathbb{R}\}$ uz standardno koordinatno zbrajanje i množenje s elementima iz polja $\mathbb{R}$

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + (\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_n') := (\alpha_1 + \alpha_1', \alpha_2 + \alpha_2', ..., \alpha_n + \alpha_n')$$

$$\alpha\,(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) := (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, ..., \alpha\alpha_n)$$

za sve $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)\,,\ (\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_n') \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ kojeg nazivamo $n-$**dimenzionalni koordinatni prostor**.

Općenito, ako je F bilo koje polje (npr. $F = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$), onda je $F^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \,|\alpha_i \in F\}$ uz analogno definirane opercije zbrajanje vektora i množenje vektora sa skalarom vektorski prostor nad F. Specijalno, za $n = 1$, imamo da je svako polje vektorski prostor nad samim sobom (i nad svakim svojim potpoljem).

c) Neka je

$$P_n = \left\{ p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 \, | a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

skup svih polinoma u jednoj varijabli x s realnim koeficijentima stupnja najviše $n-1$. Onda je P_n uz standardno zbrajanje i množenje s elementima iz polja $\mathbb{R}$

$$p(x) + q(x) =$$

$$= \left(a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 \right) + \left(a'_{n-1}x^{n-1} + a'_{n-2}x^{n-2} + ... + a'_1 x + a'_0 \right)$$

$$:= \left(a_{n-1} + a'_{n-1} \right) x^{n-1} + \left(a_{n-2} + a'_{n-2} \right) x^{n-2} + ... + (a_1 + a'_1)\, x + (a_0 + a'_0)$$

$$\begin{aligned} \alpha p(x) &= \alpha \left(a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 \right) \\ &= (\alpha a_{n-1})\, x^{n-1} + (\alpha a_{n-2})\, x^{n-2} + ... + (\alpha a_1)\, x + \alpha a_0 \end{aligned}$$

za sve $p(x)\,,\, q(x) \in P_n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, vektorski prostor. Isto vrijedi i za

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \left\{ p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Analogno, imamo i za skup polinoma nad bilo kojim poljem F.

d) Neka je S bilo koji neprazni skup i F proizvoljno polje (npr. $\mathbb{R}$), tada je

$$F^S = \{f \,|\, f : S \longrightarrow F\}$$

tzv. **funkcijski vektorski prostor nad** F uz operacije

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad (\alpha f)(x) := \alpha f(x) \text{ za sve } x \in S,$$

za sve $f, g \in F^S$ i $\alpha \in F$. Specijalno, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je realni vektorski prostor.

Propozicija 5.1 *U svakom vektorskom prostoru vrijedi:*

a) $0a = \Theta$ *za svaki* $a \in V$.

b) $\alpha\Theta = \Theta$ *za svaki* $\alpha \in F$.

c) $\alpha a = \Theta$ *ako i samo ako je* $a = \Theta$ *ili* $\alpha = 0$.

Dokaz:

5.3 Linearna zavisnost i nezavisnost

Definicija 5.4 *Neka je V vektorski prostor nad poljem F, $a_1, a_2, ..., a_n \in V$ **i** $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$ proizvoljni vektori, odnosno skalari. Tada vektor*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$$

*nazivamo **linearna kombinacija** vektora $a_1, a_2, ..., a_n$ **s koeficijentima** $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.*

Definicija 5.5 *Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Za konačan skup vektora $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq V$ kažemo da je **linearno nezavisan** ako iz*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n = \Theta \tag{1}$$

*slijedi $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. U protivnom kažemo da je skup vektora $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ **linearno zavisan**.*

Napomena Iz gornje definicije slijedi da je skup vektora $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset V$ linearno zavisan ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$, od kojih je barem jedan različit od 0, tako da vrijedi (1).

Definicija 5.6 *Neka je V vektorski prostor nad poljem F i $S \subset V$ bilo koji skup vektora. Za S kažemo da je* ***linearno nezavisan*** *ako je svaki njegov konačan podskup linerano nezavisan. Za S kažemo da je* ***linearno zavisan*** *ako postoji barem jedan njegov konačan neprazan podskup koji je linearno zavisan. Smatramo da je prazan skup $\emptyset \subset V$ linearno nezavisan.*

Napomena Iz gornjih definicijh slijedi da je linearna (ne)zavisnost svojstvo skupa vektora a ne pojedinog vektora.

Primjer 5.2

a) Neka je F polje. Vektori $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ...0, 1) \in F^n$ tvore linearno zavisan skup vektora vektorskog prostora F^n. Specijalno, za $F = \mathbb{R}$ i $n = 3$, nađite neki linearno zavisan skup vektora iz $\mathbb{R}^3$.

b) Neka je $P_n = \left\{p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 \,|a_i \in F\right\}$, gdje je F neko polje. Tada je skup

$$\left\{1, x, x^2, ..., x^k\right\}, \ k \leq n - 1$$

linearno zavisan skup vektora vektorskog prostora P_n. Isto tako skup

$$\{1, x, x^2, ..., x^k, ...\} \subset P,$$

gdje je $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, je (beskonačni) linearno nezavisan skup vektora (polinoma) iz P. Specijalno, za $F = \mathbb{R}$, nađite neki linearno zavisan skup vektora iz P.

Propozicija 5.2 *U svakom vektorskom prostoru V vrijedi:*

a) *Jednočlan podskup $\{a\} \subset V$ je linearno zavisan ako i samo ako je $a = \Theta$.*

b) *Podskup linearno nezavisnog skupa vektora je linearno nezavisan. Nadskup linearno zavisnog skupa vektora je linearno zavisan.*

Dokaz:

Posljedica 5.1 *Svaki skup vektora koji sadrži nulvektor je linearno zavisan.*

Dokaz:

Propozicija 5.3 *Skup vektora* $S = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \subset V$, $k > 1$, *je linearno zavisan ako i samo ako se barem jedan od vektora iz* S *može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz* S.

Dokaz:

5.4 Skup izvodnica. Baza i dimenzija.

Definicija 5.7 *Neka je* V *vektorski prostor nad poljem* F *i* $G \subset V$ *njegov podskup. Kažemo da je* G **skup izvodnica** *ili* **skup generatora** *od* V *ako za svaki* $a \in V$ *postoji* $k \in N$ *i vektori* $a_1, a_2, ..., a_k \in G$ *takvi da je*

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k$$

za neke $\alpha_1, ..., \alpha_k \in F$. *Kažemo da skup izvodnica* G **razapinje** *ili* **generira** *vektorski prostor* V.

Definicija 5.8 *Za vektorski prostor* V *kažemo da je* **konačnodimenzionalan** *ako sadrži barem jedan konačan skup izvodnica. U protivnom kažemo da je* **beskonačnodimenzionalan.**

Mi ćemo se baviti samo konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima.

Napomena

- Svaki vektorski prostor sadrži skupove izvodnica. Trivijalni je primjer $G = V$, tj. skup izvodnica je čitav prostor V.
- Očito, svaki nadskup skupa izvodnica je skup izvodnica. Najinteresantniji su minimalni skupovi izvodnica za vektorski prostor V, što vodi do pojma baze.

Definicija 5.9 *Za (uređeni) podskup $B \subset V$ vektorskog prostora V kažemo da je* ***baza*** *od V ako je:*

1) B *skup izvodnica;*

2) B *je linearno nezavisan skup.*

Primjer 5.3

a) Svaki (uređeni) skup $(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3) \in V^3$ od tri nekomplanarna vektora iz V^3 je baza od V^3.

b) (Uređeni) skup $(e_1, e_2, ..., e_n)$, gdje su $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ...0, 1) \in F$, je baza vektorskog prostora F^n.

c) $(1, i)$ je baza vektorskog prostora $\mathbb{C}$ nad (pot)poljem $\mathbb{R}$.

d) Tada je skup $\left(1, x, x^2, ..., x^{n-1}\right)$ je baza vektorskog prostora P_n. Isto tako skup

$$\left(1, x, x^2, ..., x^k, ...\right),$$

je baza vektorskog prostora $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$.

Pitanje: Postoji li baza vektorskog prostora?

Za odgovor na ovo pitanje, za proizvoljan vektorski prostor, treba nam složenija matematička teorija. Stoga ćemo na to pitanje odgovoriti za užu klasu vektorskih prostora, tj. za konačnodimenzionalne vektorske prostore.

5.5 Konačnodimenzionalni vektorski prostori

Od sada bavit ćemo se konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima. Dakle, nadalje kad kažemo vektorski prostor podrazumijevat ćemo da je to konačnodimenzionalni vektorski prostor.

Lema 5.1 *Neka je* $G = \{a_1, ..., a_k, ..., a_n\}$ *skup izvodnica vektorskog prostora* V*. Ako se* $a_k \in G$ *može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz* G *onda je i* $G \diagdown \{a_k\}$ *takoder skup izvodnica.*

Dokaz:

Teorem 5.1 *Neka je* V *netrivijalan vektorski prostor i* $G = \{a_1, ..., a_n\} \subset V$ *skup izvodnica od* V*. Tada* G *sadrži podskup koji je baza od* V*.*

Dokaz:

Posljedica 5.2 *Svaki netrivijalni vektorski prostor ima bazu*.

Dokaz:

Napomena: Dakle, dokazali smo da svaki konačnodimenzionalni vektorski prostor ima barem jednu konačnu bazu.

Modifikacija Propozicije 5.3:

Lema 5.2 *Neka je* $S = (a_1, a_2, ..., a_s)$ *uređeni skup vektora koji je linearno zavisan i* $a_1 \neq \Theta$. *Onda se barem jedan od vektora iz* S *može prikazati kao linearna kombinacija svojih predhodnika u* S.

Dokaz:

Teorem 5.2 *Svake dvije baze vektorskog prostora* V *su ekvipotentne (jednakobrojne).*

Dokaz:

Zbog gornjeg teorema ima smisla sljedeća definicija:

Definicija 5.10 (Algebarska) dimenzija *netrivijalnog vektorskog prostora* V *nad* F, *u oznaci* $\dim V$ *ili* $\dim_F V$ *je kardinalni broj neke baze prostora* V. *Ako je* $\dim V = n$, *onda kažemo da je* V $n-$**dimenzionalni vektorski prostor**. *Dimenzija trivijalnog vektorskog prostora* $\{\Theta\}$ *je po dogovoru* 0.

Primjer 5.4

- $\dim V^3 = 3, \quad \dim \mathbb{R}^2 = 2, \quad \dim \mathbb{R}^n = \dim F^n = n, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2, \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1,$
  $\dim_F F = 1, \dim P_n = n, \quad \dim P = \varkappa_0$ (alef nula).

Teorem 5.3 *Neka je $S = \{a_1, ..., a_k\} \subset V$ linearno nezavisan skup vektora vektorskog prostora V. Tada je S podskup neke baze od V.*

Dokaz:

Napomena: Iz dokaza slijedi da proširenje skupa S do baze nije jednoznačno.

Posljedica 5.3 *Neka je V $n-$dimenzionalan vektorski prostor. Tada je svaki linearno nezavisni podskup od n vektora iz V baza prostora V. Nadalje, svaki podskup od V koji sadrži više od n vektora linearno zavisan.*

Dokaz:

Napomena: Dakle, maksimalan broj linearno nezavisnih vektora u nekom vektorskom prostoru jedanak je dimenziji tog prostora.

Još jedno svojstvo baze:

Teorem 5.4 *Neka je* $S = \{a_1, a_2, ..., a_s\}$ *linearno nezavisan skup vektora iz vektorskog prostora* V. *Ako se neki vektor iz* V *može prikazati kao linearna kombinacija elemenata iz* S, *onda je taj prikaz jedinstven*. *Posebno, prikaz svakog vektora iz* V *kao linearne kombinacije vektora neke baze* $B = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *od* V *je jedinstven.*

Dokaz:

Neka je V $n-$dimenzionalan vektorski prostor i $B = (a_1, a_2, ..., a_n)$ neka njegova (fiksirana) baza. Tada se svaki vektor $a \in V$, po Teorem 5.4, može na jedinstven način prikazati u obliku

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n.$$

Kako je gornji prikaz jednoznačan, putem baze B dolazimo do preslikavanja $k : V \longrightarrow F^n$ definiranog s

$$k(a) = k(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

koje je bijekcija i kojeg nazivamo **koordinatizacija** vektorskog prostora V (u odnosu na bazu B). Kako je preskilavanje $k : V \longrightarrow F^n$ bijekcija, za zadanu bazu B, identificiramo

$$a \equiv k(a) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

5.6 Potprostor. Linearna ljuska.

Definicija 5.11 *Neka je V vektorski prostor nad poljem F* i *$L \neq \emptyset$ podskup od V. Kažemo da je $L \subset V$* ***potprostor*** *od V ako je i sam vektorski prostor s obzirom na operacije zbrajanja i množenja vektora sa sklararom definirane na V. Pišemo $L < V$.*

Napomena: Svaki vektorski prostori V ima dva **trivijalna potprostora**: $\{\Theta\}$ i V. Ako je L potprostor od V i $L \neq V$, onda L nazivamo **pravim** potprostorom od V.

Propozicija 5.4 *Neprazan podskup $L \subset V$ vektorskog prostora V je njegov potprostor ako i samo ako je zatvoren s obzirom na operacije u V, tj. ako vrijedi:*

1) $a + b \in L$ *za sve* $a, b \in L$;

2) $\alpha a \in L$ *za sve* $\alpha \in F$ *i* $a \in L$.

Dokaz:

Posljedica 5.4 *Neprazan podskup $L \subset V$ vektorskog prostora V njegov potprostor ako i samo ako vrijedi:*

$$\textit{za svaki izbor} \ \ \alpha, \beta \in F \ \text{ i } \ a, b \in L \implies \alpha a + \beta b \in L. \tag{1}$$

Dokaz:

Napomena: Iz prethodne propozicije slijedi: Ako je L potprostor vektorskog prostora V onda je bilo koja linearna kombinacija vektora iz L opet vektor iz L, tj.

$$\text{za svaki izbor} \ \ \alpha_i \in F \ \text{ i } \ a_i \in L, \ \ i = 1, ..., k \implies \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k \in L.$$

Primjer 5.5

a) $V^2 \subset V^3$ je potprostor od V^3;

b) Uz odgovarajući dogovor imamo $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset ... \subset \mathbb{R}^n \subset ... \subset \mathbb{R}^\infty$, i svaki od ovih vektorskih prostora je potprostor sljedećeg;

c) Imamo $P_1 \subset P_2 \subset ... \subset P_n \subset ... \subset P$ (polinomi!), i svaki od ovih vektorskih prostora je potprostor sljedećeg.

Definicija 5.12 *Neka je $S \subset V$ podskup vektorskog prostora V. Onda definiramo* ***linearnu ljusku*** *ili* ***linearni omotač*** *$[S]$ skupa S na sljedeći način:*

1) *Ako je $S = \emptyset$, onda je $[S] = [\emptyset] = \{\Theta\}$.*

2) *Ako je $S \neq \emptyset$, onda je $[S]$ skup svih linearnih kombinacijh vektora iz S.*

Propozicija 5.5 *Za svaki podkup $S \subset V$ linearna ljuska $[S]$ je potprostor od V.*

Dokaz:

Napomena: Skup S očito skup izvodnica za linearnu ljusku $[S]$.

Teorem 5.5 *Ako je $L \subset V$ potprostor vektorskog prostora V, onda je $\dim L \leq \dim V$.*

Dokaz:

5.7 Presjek i suma potprostora

Presjek dva potprostora nikada nije prazan, on barem sadrži nulvektor Θ. Vrijedi i više:

Propozicija 5.6 *Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Tada je i $L \cap M$ potprostor od V i to je najveći potprostor koji je sadržan i u L i u M.*

Dokaz:

Napomena: Slično se pokaže za bilo koju familiju potprostora od V, tj. za $\{L_\alpha < V \,|\alpha \in A\}$ da je presjek svih potprostora L_α potprostor od V, odnosno

$$\bigcap_{\alpha \in A} L_\alpha < V.$$

Zanima nas **najmanji potprostor od V koji sadrži skup S.** Ako je $L < V$ najmanji potprostor od V koji sadrži S, onda za svaki potprostor $M < V$, za koji je $S \subset M$, vrijedi $L < M$.

Očito L je najmanji potprostor od V koji sadrži S ako i samo ako je

$$L = \bigcap_{\alpha \in A} L_\alpha, \quad S \subset L_\alpha,$$

tj. L je presjek svih potprostora L_α koji sadrže S.

Propozicija 5.7 *Linearna ljuska $[S]$ skupa S je najmanji potprostor vektorskog prostora V koji sadrži S.*

<u>Dokaz</u>:

Primjer 5.6 Neka je $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ desna ortonormirana baza u V^3.

- Linearna ljuska $\left[\left\{\vec{i}\right\}\right]$ skupa $\left\{\vec{i}\right\}$ je skup svih vektora iz V^3 koji su kolinearni s $\vec{i}$ i to je očito najmanji potprostor vektorskog prostora V^3 koji sadrži $\vec{i}$ i za njega je očito $\left\{\vec{i}\right\}$ skup izvodnica.

- Slično, linearna ljuska $\left[\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}\right]$ skupa $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ je skup svih vektora iz V^3 koji su komplanarni s $\vec{i}$ i $\vec{j}$. To je očito najmanji potprostor vektorskog prostora V^3 koji sadrži $\vec{i}$ i $\vec{j}$ i za njega je očito $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ skup izvodnica.

Unija dvaju vektorskih potprostora od V općenito nije potprostor od V. Primjer:

$$\left[\left\{\vec{i}\right\}\right] \cup \left[\left\{\vec{j}\right\}\right] \not< V^3.$$

Izmino, ako je $L \subset M$ te L i M potprostori od V, tada je $L \cup M = M < V$.

Zanima nas koji je to najmanji potprostori od V koji sadrži potprostore L i M.

Definicija 5.13 *Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Tada* ***sumu potprostora*** *L i M definiramo kao najmanji potprostor od V koji sadrži i L i M, tj. kao*

$$L + M := [L \cup M]\,.$$

Primjer 5.7

$$\left[\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}\right] + \left[\left\{\vec{k}\right\}\right] \;=\; \left[\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}\right] = V^3 \quad \text{ili}$$

$$\left[\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}\right] + \left[\left\{\vec{j}, \vec{k}\right\}\right] \;=\; \left[\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}\right] = V^3.$$

Propozicija 5.8 *Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Tada je*

$$L + M = \{a + b : a \in L, b \in M\} .$$

Dokaz

Općenito:

- Za bilo koju familiju potprostora od V, tj. za $\{L_\alpha < V \,|\alpha \in A\}$ definiramo

$$+_{\alpha \in A} L_\alpha := [\cup_{\alpha \in A} L_\alpha] .$$

- Generalizacija Propozicije 5.8 za konačno potprostora L_i, $i = 1, ..., n$, od V:

$$L_1 + L_2 + ... + L_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i : a_i \in L_i \right\}$$

Teorem 5.6 (Teorem o dimenziji) *Neka su L i M potprostori od V. Tada je*

$$\dim (L + M) = \dim (L) + \dim (M) - \dim (L \cap M) .$$

Dokaz:

Primjer 5.8

$$\left[\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}\right]+\left[\left\{\vec{j},\vec{k}\right\}\right]=V^3$$

$$\Longrightarrow \quad \dim\left(\left[\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}\right]+\left[\left\{\vec{j},\vec{k}\right\}\right]\right)$$

$$=\dim\left(\left[\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}\right]\right)+\dim(\left[\left\{\vec{j},\vec{k}\right\}\right]\Big)-\dim(\left[\left\{\vec{j}\right\}\right])=2+2-1=3=\dim\left(V^3\right)$$

Definicija 5.14 *Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Za sumu $L+M$ potprostora L i M kažemo da je* ***direktna suma*** *ako je $L\cap M=\{\Theta\}$. Oznaka $L\oplus M$.*

Propozicija 5.9 *Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Suma $L+M$ je direktna ako i samo ako svaki vektor $x\in L+M$ ima jedinstven prikaz u obliku*

$$x=a+b,\ \ a\in L,\ \ b\in M.$$

Dokaz:

Propozicija 5.10 *Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Suma $L+M$ je direktna ako i samo vrijedi*

$$\dim(L+M) = \dim(L) + \dim(M).$$

Dokaz:

Posljedica 5.5 *Ako je suma $L+M$ je direktna, onda je unija baza od L i M jedna baza od $L+M = L \oplus M$.*

Dokaz: Iz dokaza Teorema 5.6.

Primjer 5.9

$$\left[\left\{\vec{i}\right\}\right] + \left[\left\{\vec{k}\right\}\right] = \left[\left\{\vec{i}\right\}\right] \oplus \left[\left\{\vec{k}\right\}\right] = \left[\left\{\vec{i}, \vec{k}\right\}\right]$$

Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Ako je $L \oplus M = V$, onda L i M nazivamo **direktnim sumandima** prostora V i kažemo da se prostor V može rastaviti u direktnu sumu potprostora L i M.

Primjer 5.10

$$\left[\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}\right]+\left[\left\{\vec{k}\right\}\right]=\left[\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}\right]\oplus\left[\left\{\vec{k}\right\}\right]=\left[\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}\right]=V^3.$$

Napomena: Generalizacija direktne sume za konačno potprostora od V: Neka su L_i, $i=1,...,k$, potprostori od V, a $L=L_1+L_2+...+L_k$ njihova suma. Kažemo da je L **direktna suma** i pišemo

$$L=\bigoplus_{i=1}^{k}L_i=L_1\oplus L_2+...\oplus L_k,$$

ako vrijedi

$$(L_1+...+L_{i-1}+L_{i+1}+...+L_k)\cap L_i=\{\Theta\}\,,\ \text{ za sve } i=1,...,k.$$

Može se pokazati da je suma $L=L_1+L_2+...+L_k$ *je direktna ako i samo vrijedi da svaki* $x\in L$ *ima jedinstven prikaz u obliku*

$$x=\sum_{i=1}^{n}a_i,\ a_i\in L_i.$$

Teorem 5.7 *Neka je $L < V$ bilo koji potprostor vektorskog prostora V. Tada postoji potprostor $M < V$ takav da je $V = L \oplus M$.*

Dokaz:

Potprostor M iz prethodnog teorema nazivamo **direktnim komplementom** potprostora L. Iz konstrukcije je jasno da on nije jednoznačno određen. Npr.

$$V^3 = \left[\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}\right] \oplus \left[\left\{\vec{k}\right\}\right] \quad \text{i} \quad V^3 = \left[\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}\right] \oplus \left[\left\{\vec{i} + \vec{k}\right\}\right]$$

5.7 Kvocijentni prostor

Neka je V vektorski prostor nad F i $L < V$ potprostor od V. Tada je $(L, +)$ podgrupa Abelove (aditivne) grupe $(V, +)$, pa je dobro definirana kvocijentna grupa

$$V/L = \{a + L \mid a \in V\}$$

i ona je komutativna. Prisjetimo se, u ovoj grupi binarana operacija je dana sa

$$(a + L) + (b + L) = (a + b) + L$$

i neutralni elemet je $\Theta + L = L$.

Može se pokazati da je za bilo koji skalar $\alpha \in F$ i bilo koju klasu $a + L \in V/L$ vrijedi

$$\alpha(a + L) \subset \alpha a + L$$

gdje je $\alpha(a + L) = \{\alpha (a + x) \mid x \in L\}$. Zbog toga je dobro definirano preslikavanje (množenje sa skalarom u V/L) :

$$h \;:\; F \times V/L \to V/L$$
$$h(\alpha, a + L) \;\equiv\; \alpha (a + L) := \alpha a + L.$$

Pokazuje se da je uz ovako definirane operacije zbrajanja i množenja sa skalarom, V/L vektorski prostor nad F i taj vektorski prostor nazivamo **kvocijentni prostor** prostora V po potprostoru L.

Elemente od V/L nazivamo **linearnim mnogostrukostima** u V.

Npr. $a+L$ je linearna mnogostrukost generirana elementom a "paralelana" potprostoru L. Još kažemo da je ta mnogostrukost dobivena "translacijom potprostora L za vektor a". Motivacija potječe iz $V^3(0) : V^3(0)$ je disjunktna unija mnogostrukosti paralelnih prostoru L.

Teorem 5.8 *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad F i neka je $L < V$ njegov potprostor. Tada vrijedi*

$$\dim(V/L) = \dim(V) - \dim(L).$$

Dokaz: Skica.

Dimenziju prostora V/L nazivamo **kodimenzijom** potprostora L u prostoru V.

5.8 Algebra

Definicija 5.15 *Neka je* $(V, +)$ *vektorski prostor nad poljem* F. *Neka je na* V *definirano i drugo unutrašnje množenje*

$$\cdot\ : V \times V \to V$$

koje ima ova svojstva:

i) **kvaziasocijativnost**, *tj*.

$$(\alpha a)\, b = \alpha\, (ab) = a\, (\alpha b)\,, \quad \forall \alpha \in F,\ \forall a, b \in V;$$

ii) **distributivnost**

$$\begin{aligned} a\,(b + c) &= ab + ac, \quad \forall a, b, c \in V; \\ (a + b)\, c &= ac + bc, \quad \forall a, b, c \in V \end{aligned}$$

Tada V *nazivamo* **algebrom** *nad poljem* F.

Primjer

1. V^3 - **klasična algebra vektora** (uz vektorski produkt vektora). To je algebra koja je antikomutativna, neasocijativna i nema jedinicu.

2. $Hom_F V$ - **linearna algebra** (linearni operatori na vektorskom prostoru V). To je algebra koja je nekomutativna, asocijativna i ima jedinicu.