5.4 Krivuljni integral

- Krivuljni integral je na neki način poopćenje određenog integrala na segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ na određeni integral po krivulji Γ zadanoj odgovarajućom parametrizacijom;

- Postoje dvije vrste krivuljnog integrala:
  - za skalarna polja;
  - za vektorska polja.

Krivulja i njeno usmjerenje

Ovdje ćemo formulirati pojam krivulje u $\mathbb{R}^3$ s provokutnim koordinatnim sustavom $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, svijesni manjkavosti što proizlaze iz svijesnog zaobilaženja razlike između parametrizabilnog skupa i krivulje.

Definicija 5.1 Skup $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ nazivamo **jednostavnom glatkom krivuljom** (s rubom) ako:

i) postoji neprekidno derivabilna vektorska funkcija $\overrightarrow{r} = \{\phi, \psi, \chi\}$ takva da je $\overrightarrow{r} = (\phi, \psi, \chi) : [a, b] \to \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ bijekcija;

ii) za svaki $t \in [a, b]$ je $\overrightarrow{r}'(t) \neq (0, 0, 0) = \tilde{\mathbf{0}}$, tj. Γ dopušta tangentu u točki $\overrightarrow{r}(t)$.

Svaki takav uređeni

$$par([a, b], \overrightarrow{r})$$

nazivamo **glatkom parametrizacijom** krivulje Γ.

Za $A = \overrightarrow{r}(a)$, $B = \overrightarrow{r}(b) \in \Gamma$ kažemo da su **rubne točke** od Γ.

Ako funkcija r nije injektivna samo u točkama a i b, tj. ako je $r(a) = r(b)$, govorimo o **jednostavno zatvorenoj** krivulji Γ.

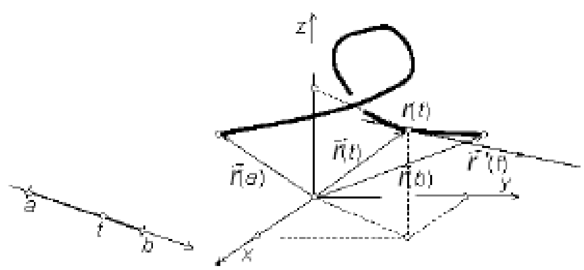
Napomenimo da

$$\overrightarrow{r}(t) = \phi(t)\,\overrightarrow{i} + \psi(t)\,\overrightarrow{j} + \chi(t)\,\overrightarrow{k}, \quad t \in [a,b]$$

nazivamo **vektorskim zapisom**, a istaknemo li koordinatne funkcije vektorske funkcije $\overrightarrow{r}$, tj.

$$x = \phi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \quad t \in [a,b]$$

dobivamo tzv. **parametarski zapis** (parametarske jednadžbe) krivulje Γ.



Tangenta na krivulju

Neka je krivulja $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ dana parametrizacijom

$$\overrightarrow{r}(t) = \phi(t)\,\overrightarrow{i} + \psi(t)\,\overrightarrow{j} + \chi(t)\,\overrightarrow{k}, \quad t \in [a,b],$$

i neka je za $t_0 \in [a,b]$, $\overrightarrow{r}'(t_0) \neq \vec{0}$. Interpretirajmo geometrijski derivaciju

$$\overrightarrow{r}'(t_0) = \phi'(t_0)\,\overrightarrow{i} + \psi'(t_0)\,\overrightarrow{j} + \chi'(t_0)\,\overrightarrow{k}\,.$$

Po definiciji je

$$\overrightarrow{r}'(t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\overrightarrow{r}(t_0+\varepsilon) - \overrightarrow{r}(t_0)}{\varepsilon}.$$

Kako je $\overrightarrow{r}'(t_0) \neq \vec{0}$, onda je, za ε dovoljno malo, vektor

$$\overrightarrow{r}(t_0+\varepsilon) - \overrightarrow{r}(t_0) \neq \vec{0}$$

i približava se vektoru smjera tangente u točki $T_0 = (\phi(t_0), \psi(t_0), \chi(t_0)) \in \Gamma$, tj. točki danoj sa $\overrightarrow{r}(t_0) = \phi(t_0)\overrightarrow{i} + \psi(t_0)\overrightarrow{j} + \chi(t_0)\vec{k}$.
Međutim granični vektor je $\vec{0}$, pa on nema smjer. Zato promatramo njemu kolinearan vektor

$$\frac{\overrightarrow{r}(t_0+\varepsilon) - \overrightarrow{r}(t_0)}{\varepsilon},$$

koji za malo ε ima veću duljinu nego $\overrightarrow{r}(t_0+\varepsilon) - \overrightarrow{r}(t_0)$.
Kako je

$$\overrightarrow{r}'(t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\overrightarrow{r}(t_0+\varepsilon) - \overrightarrow{r}(t_0)}{\varepsilon} \neq \vec{0}$$

njega uzimamo za vektor smjera tangente.

Primjer Krivulja $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ dana parametrizacijom

$$\overrightarrow{r}(t) = 2\cos t\,\overrightarrow{i} + 3\sin t\,\overrightarrow{j} + 4t\,\overrightarrow{k}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

je jednostavna glatka krivulja.

Provjerimo uvjete iz Definicije 5.1:

- $\overrightarrow{r}(t_1) = \overrightarrow{r}(t_1) \implies 2\cos t_1 = 2\cos t_2,\ 3\sin t_1 = 3\sin t_2,\ 4t_1 = 4t_2 \Longrightarrow t_1 = t_2$ (injekcija);

- funkcije $2\cos t,\ 3\sin t$ i $4t$ su neprekidno derivabilne, pa je to i $\overrightarrow{r}(t)$;

- $\overrightarrow{r}'(t) = -2\sin t\,\overrightarrow{i} + 3\cos t\,\overrightarrow{j} + 4\,\overrightarrow{k} \neq \vec{0}$ za svaki $t \in [0, 2\pi]$.

Tangenta u točki s radijus vektorom $\overrightarrow{r}(t_0),\ t_0 \in [0, 2\pi]$ je u kanonskom obliku dana sa

$$p \ldots \frac{x - 2\cos t_0}{-2\sin t_0} = \frac{y - 3\sin t_0}{3\cos t_0} = \frac{z - 4t_0}{4}$$

ili vektorski sa

$$\overrightarrow{p}(s) = \overrightarrow{r}(t_0) + s\,\overrightarrow{r}'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

U praksi često nastupa malo općenitiji slučaj od "glatkoga" u smislu da postoji (najviše) konačno točaka u kojima se ”krivulja Γ oštro lomi”, tj. ne dopušta tangentu. Tada je definicijskom uvjetu ii) udovoljeno svuda osim u konačno mnogo točaka $t_1, \cdots, t_n \in [a, b]$. U tom slučaju govorimo o **po dijelovima glatkoj krivulji** Γ.

Pritom smijemo zamišljati da je Γ **prirodno satavljena** od konačno jednostavnih glatkih krivulja Γ_1, Γ_2 ... , Γ_n, Γ_{n+1}, nad $[a, t_1]$, ..., $[t_{n-1}.t_n]$, $[t_n, b]$ redom, ”ljepljenjem točke $r(t_i) \in \Gamma_i$ s točkom $r(t_i) \in \Gamma_{i+1}$”, $i = 1, \cdots, n$.

Definirajmo premda ne posve korektno (ali za naše potrebe ipak zadovoljavajuće) s pojmom **usmjerene** krivulje.

Promatrajmo glatku krivulju Γ zadanu parametrizacijom $par([a, b], r)$. Ona u svakoj točki $T = r(t) \in \Gamma$ dopušta tangentu, koju kao pravac ($\cong \mathbb{R}$) možemo usmjeriti, tj. pridijeliti joj koordinatni sustav $\left(O \equiv T; \overrightarrow{i}\right)$ ili $\left(O \equiv T; -\overrightarrow{i}\right)$.

Reći ćemo da je glatka krivulja Γ **usmjerena** (ili **orijentirana**) ako je na svakoj njezinoj tangenti odabran točno jedan koordinatni sustav. Slijedi da se Γ može usmjeriti na neizmjerno načina, ali su od svih njih zanimljiva samo dva, tzv. **neprekidna usmjerenja**, koja su inducirana dvama usmjerenjima danog pravca $\mathbb{R}$.

Ne pojašnjavajući to pobliže, smijemo zamišljati da glatka krivulja dopušta točno dva (neprekidna) usmjerenja:

- jedno se dobiva "gibajući se duž Γ od rubne točke $A = r(a)$ do rubne točke $B = r(b)$ uz stalni porast varijable $t \in [a, b]$",

- a drugo "gibajući se, obratno, od točke B do točke A uz stalni pad varijable $t \in [a, b]$".

U prvomu slučaju kažemo da je:

- krivulja Γ **usmjerena** (ili **orijentirana**) **porastom parametra** t,

a u drugomu da je:

- **usmjerena** (ili **orijentirana**) **padom parametra** t.

U prvomu (drugomu) slučaju kažemo da je $A = r(a)$ **početak** (**kraj**) i da je $B = r(b)$ **kraj** (**početak**) usmjerene krivulje Γ. Pritom trebamo biti vrlo oprezni jer usmjerenje porastom parametra $t \in [a, b]$ može biti isto što i usmjerenje padom parametra $\tau \in [c, d]$ u nekoj drugoj glatkoj parametrizaciji iste krivulje.

Ako je krivulja Γ po dijelovima glatka, njezine sastavne glatke krivulje $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ dopuštaju po dva neprekidna usmjerenja.

- Reći ćemo da je Γ **usmjerena** (ili **orijentirana**) čim su $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ usmjerene **sukladno**, tj. kraj od Γ_i jest početak od Γ_{i+1}, $i = 1, \cdots, n$.
  Primijetimo da se ova definicija prirodno prenosi i na jednostavno zatvorenu po dijelovima glatku krivulju.

U posebnom slučaju jednostavno zatvorene po dijelovima glatke krivulje Γ u (koordinatiziranoj) ravnini ($\mathbb{R}^2 \equiv (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$) govor se može reducirati na tzv. **negativno** i **pozitivno usmjerenje**, tj. na ono sukladno gibanju satne kazaljke i njemu suprotno gibanje.

- Opća oznaka za (neprekidno) usmjerenu krivulju Γ bit će $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$.

- Ako je na istoj krivlji Γ zadano i suprotno usmjerenje, razlikovat ćemo ga od $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ označavajući ga s $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$.

- U posebnom slučaju jednostavno zatvorene ravninske krivulje, $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ će označavati njezino negativno usmjerenje, a $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ ono pozitivno.

Krivuljni integral prve vrste

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ funkcija (skalarno polje na D), a

$$\vec{r}(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad t \in [a, b],$$

parametizacija glatke krivulje $\Gamma \subseteq D$. Tada je dobro definirana kompozicija

$$[a, b] \ \xrightarrow{r}\ D \ \xrightarrow{f}\ \mathbb{R},$$

$$t \mapsto (f \circ r)(t) = f(\phi(t), \psi(t), \chi(t)),$$

što je realna funkcija jedne varijable na segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
Nadalje, kako je $\vec{r}'(t) = (\phi'(t), \psi'(t), \chi'(t)), \quad t \in [a, b]$, onda je

$$|\overrightarrow{r}'(t)| = \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}, \quad t \in [a, b],$$

pa je umnožak funkcija

$$t \mapsto ((f \circ r) \cdot |\overrightarrow{r}'|)\,(t) = f\,(r(t)) \cdot |\overrightarrow{r}'(t)|\text{ , tj.}$$

$$t \mapsto f(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}, \quad t \in [a, b],$$

realna funkcija jedne varijable na segmentu $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Definicija 5.2 Neka je dana skalarna funkcija $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^3$ i neka parametizacija glatke krivulje $\Gamma \subseteq D$

$$\vec{r}(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad t \in [a,b].$$

Ako je realna funkcija jedne varijable

$$t \mapsto f(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}, \quad t \in [a,b]$$

integrabilna, onda pripadni određeni integral

$$\int_a^b f(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt =$$

$$\int_a^b f(r(t)) \cdot |\overrightarrow{r}'(t)|\, dt$$

nazivamo **integralom skalarnoga polja f po krivulji Γ** (ili **krivuljnim integralom prve vrste**) i označujemo s

$$\int_\Gamma f ds.$$

Neka su točke $T_0, T \in \Gamma$ bliske točke, tj. neka T_0 dana sa $\overrightarrow{r}(t_0)$, a T sa $\overrightarrow{r}(t_0 + dt)$, dt dovoljno malen. Tangenta na Γ u T_0 je dana u vektorskom obliku sa

$$\overrightarrow{p}(s) = \overrightarrow{r}(t_0) + (s - t_0)\,\overrightarrow{r}'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Imamo:

- za $s = t_0$ dobivamo $\overrightarrow{p}(s) = \overrightarrow{r}(t_0)$, tj. dobivamo upravo točku T_0 (leži na tangenti i na Γ);

- za $s = t_0 + dt$, $dt > 0$, dobivamo točku S (leži na tangenti) koja je dana sa $\overrightarrow{p}(s) = \overrightarrow{r}(t_0) + dt\,\overrightarrow{r}'(t_0)$;

- udaljenost tih točaka je $d\,(T_0, S) = |\overrightarrow{p}(s) - \overrightarrow{r}(t_0)| = |\overrightarrow{r}'(t_0)|\,dt$;

- budući je dt dovoljno mali, onda su točke $T(\in \Gamma)$ i S (na tangenti) jako blizu, pa duljinu ds dijela krivulje (luka) Γ između T_0 i T možemo aproksimirati sa $d\,(T_0, S)$, tj. uzimamo da je "duljinski element" krivulje (luka) Γ

$$|\overrightarrow{r}'(t)|\,dt \equiv ds.$$

Sada oznaka $\displaystyle\int_\Gamma f\,ds$ ima puni smisao jer je

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_a^b f\left(r(t)\right) \cdot |\overrightarrow{r}'(t)|\,dt.$$

Napomena U praksi, kad krivulja Γ predstavlja model tanke žice, a f je funkcija njezine (”linearne”) gustoće, krivuljni integral $\displaystyle\int_\Gamma f\,ds$ računa masu te žice.

Ako je $f \equiv 1$, onda $\displaystyle\int_\Gamma ds$ računa masu duljinu luka krivulje Γ.

Treba napomenuti da, apriori, nije jasno je li Definicija 5.2 posve korektna. Naime, uz nju bi valjalo dokazati da krivuljni integral $\int\limits_\Gamma f\,ds$ ne ovisi o odabranoj parametrizaciji krivulje Γ, tj. da je

$$\int_a^b f(r(t)) \cdot |\overrightarrow{r}'(t)|\,dt = \int_c^d f(p(\tau)) \cdot |\overrightarrow{p}'(\tau)|\,d\tau,$$

pri čemu su $([a,b],r)$ i $([c,d],p)$ bilo koje dvije glatke parametrizacije od Γ. Budući da bi to zahtijevalo opširnije razmatranje, ne ćemo se u to upuštati.

Primjer 1 Izračunajmo krivuljni integral prvoga tipa $\int\limits_{\Gamma} f ds$ pri čemu je

$$f(x, y, z) = x + z$$

i Γ zadana jednadžbama

$$x = t, \quad y = \tfrac{\sqrt{6}}{2}t^2, \quad z = t^3, \quad t \in [0, 1].$$

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt$$

$$\int_0^1 (t + t^3)\sqrt{1 + 6t^2 + 9t^4} dt = \int_0^1 (t + t^3)(1 + 3t^2) dt$$

$$= \int_0^1 (t + 4t^3 + 3t^5) dt = 2.$$

Napomenimo da se u slučaju po dijelovima glatke krivulje Γ, prirodno sastavljene od glatkih krivulja $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_{n+1}$, pripadni krivuljni integral prve vrste smije definirati kao zbroj, tj.

$$\int_\Gamma f ds \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\Gamma_1} f ds + \cdots + \int_{\Gamma_{n+1}} f ds.$$

Izravno iz Definicije 5.2 i svojstava Riemannova integrala slijedi da je krivuljni integral prve vrste linearni funkcional, tj. da vrijedi:

Teorem 5.3 Neka su $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, integrabilne funkcija, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $\Gamma \subseteq D$ po dijelovima glatka krivulja. Tada je

$$\int_\Gamma (\lambda f + \mu g) ds = \lambda \int_\Gamma f ds + \mu \int_\Gamma g ds.$$

Napomena: Često se (po dijelovima) glatka krivulja $\Gamma \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^3$ zadaje kao presjek dviju ploha zadanih jednadžbama

$$G(x, y, z) = 0 \quad \text{i}$$

$$H(x, y, z) = 0.$$

Tada treba ”eliminacijom treće varijable” dobiti jednadžbe $y = g(x)$, za svaki z, i $z = h(x)$, za svaki y, pri čemu je $x \in [a, b]$, dviju novih ploha s istim presjekom Γ. Pritom su g i h neprekidno derivabilne funkcije na $[a, b]$.
Prednost novih ploha je tomu što je njima zadana parametrizacije $x = t$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $t \in [a, b]$, krivulje Γ, pa se pripadni krivuljni integral prve vrste može izračunati po formuli

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(x, g(x), h(x)) \cdot \sqrt{1 + g'(x)^2 + h'(x)^2} dx.$$

Pritom se u slučaju ravninske krivulje $\Gamma \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$ može dobivamo $h \equiv c_0$, pa je tada

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(x, g(x)) \cdot \sqrt{1 + g'(x)^2} dx.$$

Primjer 2 Izračunajte $\int\limits_\Gamma f ds$ ako je $f(x, y, z) = x^3 yz$ i Γ krivulja koja je presjek ploha $z = x^2 + y^2$, $z = 1$ ($y \geq 0$).

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{array}\right\} \overset{z}{\Longrightarrow} x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow \Gamma_1 \equiv \left\{\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \ \Gamma \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \qquad , t \in [0, \pi] \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \\ z' = 0 \end{array} \right\}, \quad ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (0)^2} dt = dt$$

$$\int_\Gamma f ds = \int_\Gamma x^3 yz ds = \int_0^\pi (\cos^3 t)^3 \sin t dt = 0$$

Primjer 3 Izračunajmo krivuljni integral prve vrste $\int\limits_{\Gamma} f ds$ ako je $f(x,y) = xy$ ako je

(a) Γ ... $y = -x + 1$, $x \in [0,1]$;

(b) Γ ... $y = -x^2 + 1$, $x \in [0,1]$.

Uočimo da u oba primjera krivulja Γ povezuje točke $A = (0,1)$ i $B = (1,0)$.

(a) $\displaystyle\int_{\Gamma} f ds = \int_0^1 x(-x+1)\sqrt{1+(-1)^2}dx = \sqrt{2}\int_0^1 (-x^2+x)dx = \frac{\sqrt{2}}{6}$;

(b) $\displaystyle\int_{\Gamma} f ds = \int_0^1 x(-x^2+1)\sqrt{1+(-2x)^2}dx = \cdots = \frac{25\sqrt{5}-11}{120}$.

(Ovo pokazuje da je bitno po kojoj se krivulji integrira, tj. da krivuljni integral prve vrste ne ovisi samo o krajnjim točkama!)

Krivuljni integral druge vrste

Neka je

$$\overrightarrow{w} = \{w_x,\ w_y,\ w_z\} : D \to \mathbb{R}^3, \quad D \subseteq \mathbb{R}^3,$$

vektorsko polje na D, a

$$\overrightarrow{r}(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad t \in [a, b],$$

parametarska jednadžba glatke krivulje $\Gamma \subseteq D$. Neka je $\overset{\frown}{\Gamma}$ krivulja Γ usmjerena porastom parametra $t \in [a, b]$. Primijetimo da je dobro definirana kompozicija

$$[a, b] \xrightarrow{\overrightarrow{r}} D \xrightarrow{\overrightarrow{w}} \mathbb{R}^3,$$

$$t \longmapsto \overrightarrow{w}(\overrightarrow{r}(t)) = \{w_x(\overrightarrow{r}(t)), w_y(\overrightarrow{r}(t)), w_z(\overrightarrow{r}(t))\},$$

što je vektorska funkcija jedne varijable na segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Slijedi da je skalarni produkt

$$\overrightarrow{w}(\overrightarrow{r}) \circ \overrightarrow{r}\,' : [a, b] \to \mathbb{R},$$

$$t \longmapsto \overrightarrow{w}(\overrightarrow{r}(t)) \circ \overrightarrow{r}\,'(t) =$$

$$= w_x(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \phi'(t) + w_y(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \psi'(t) + w_z(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \chi'(t),$$

realna funkcija jedne varijable na segmentu $[a, b]$.

Definicija 5.4 Neka je dana vektorska funkcija $\overrightarrow{w} = \{w_x,\ w_y,\ w_z\} : D \to \mathbb{R}^3, \quad D \subseteq \mathbb{R}^3$, a

$$\overrightarrow{r}(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad t \in [a, b],$$

parametarska jednadžba glatke krivulje $\Gamma \subseteq D$. Neka je $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ krivulja Γ usmjerena porastom parametra $t \in [a, b]$. Ako je realna funkcija jedne varijable

$$t \mapsto w_x(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \phi'(t) + w_y(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \psi'(t) +$$

$$+ w_z(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \chi'(t), \quad t \in [a, b]$$

integrabilna, onda pripadni određeni integral

$$\int_a^b \left[w_x(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \phi'(t) + w_y(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \psi'(t) + \right.$$

$$\left. + w_z(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \chi'(t) \right] dt = \int_a^b [\overrightarrow{w}(\overrightarrow{r}(t)) \circ \overrightarrow{r}'(t)]\, dt$$

nazivamo **integralom vektorskoga polja $\overrightarrow{w}$ po usmjerenoj krivulji $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$** (ili **krivuljnim integralom druge vrste**) i označujemo sa

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}.$$

Primjer 3 Izračunajmo krivuljni integral druge vrste $\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$ vektorske funkcije

$$(x, y, z) \mapsto \overrightarrow{w}(x, y, z) = \{y - z,\ z - x,\ x - y\}$$

po porastom parametra usmjerenoj krivulji $\overset{\frown}{\Gamma}$,

$$\overrightarrow{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 3t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Odgovarajućim uvrštenjima u definicijsku formulu dobivamo:

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} =$$

$$\int_0^{2\pi} [(2\sin t - 3t) \cdot (-2\sin t) + (3t - 2\cos t) \cdot 2\cos t +$$

$$+(2\cos t - 2\sin t) \cdot 3]dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (-4 + 6\cos t - 6\sin t + 6t\sin t + 6t\cos t)dt = \cdots = -20\pi.$$

Napomena: Krivuljni integral druge vrste $\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$ se obično interpretira kao rad neke sile $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{w}$ duž puta $\overrightarrow{s} = \overset{\frown}{\Gamma}$ od točke $A = \overrightarrow{r}(a)$ do točke $B = \overrightarrow{r}(b)$.

Za potpunu korektnost Definicije 5.4 trebalo dokazati ovisnost krivuljnog integrala druge vrste o odabranoj glatkoj parametrizaciji samo do na predznak, tj. da je

$$\int_a^b [\overrightarrow{w}(\overrightarrow{r}(t)) \circ \overrightarrow{r}'(t)]\, dt = \pm \int_c^d [\overrightarrow{w}(p(\tau)) \circ \overrightarrow{p}'(\tau)]\, d\tau,$$

pri čemu su $([a,b],h)$ i $([c,d],p)$ bilo koje dvije glatke parametrizacije od Γ, te da su ti integrali jednaki čim h i p induciraju (porastom parametara) isto usmjerenje, a protivnih predznaka čim induciraju suprotna usmjerenja na Γ.

Napomena: Ako je $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ po dijelovima glatka krivulja, prirodno sastavljena od sukladno usmjerenih glatkih krivulja $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1, \cdots, \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{n+1}$, pripadni krivuljni integral druge vrste definiramo kao zbroj, tj.

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} \overset{\text{def.}}{=} \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} + \cdots + \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{n+1}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}.$$

Izravno iz Definicije 5.4 i svojstava Riemannova integrala slijedi valjanost ovoga teorema:

Teorem 5.5 Neka su $\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, vektorske funkcije s integrabilnim koordinatnim funkcijama, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \subseteq D$ usmjerena po dijelovima glatka krivulja. Tada je

i) $\displaystyle\int_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = -\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$;

ii) $\displaystyle\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} (\lambda\overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{u}) \circ d\overrightarrow{r} = \lambda\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} + \mu\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{u} \circ d\overrightarrow{r}$.

Neka je vektorska funkcija $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, zadana preslikavanjima $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$, tj. $w_x = P$, $w_y = Q$ i $w_z = R$. Pridružimo li funkciji $\overrightarrow{w}$ diferencijalnu formu

$$Pdx + Qdy + Qdz,$$

uočavamo da se, formalno, krivuljni integral druge vrste podudara s integralom odgovarajuće diferencijalne forme, tj.

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} Pdx + Qdy + Rdz,$$

gdje je $d\overrightarrow{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

Primjer 4 Izračunajmo krivuljni integral druge vrste

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

ako $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ usmjerena krivulja - dužina od ishodišta O do točke $B = (1,1,1)$.

Budući da se $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \overrightarrow{OB}$ može zadati kao presjek dviju ravnina: $y = x$, za svaki z, i $z = x$, za svaki y, $x \in [0,1]$ (usmjerenje porastom parametra $t = x$), to je

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$\int_0^1 (x+x)dx + (x+x) \cdot 1dx + (x+x) \cdot 1dx = 6\int_0^1 xdx = 3.$$

Napomena: Ako je u krivuljnom integralu druge vrste $\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$ krivulja Γ (jednostavno) zatvorena, uobičajilo se to isticati oznakom

$$\oint_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$$

i nazivati **cirkulacijom** vektorskoga polja $\overrightarrow{w}$ po zatvorenoj krivulji $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$.

Primjer 5 Izračunajmo cirkulaciju ravninskoga vektroskog polja $\overrightarrow{w}(x,y) = \{x,\ xy\}$ po:

i) središnjoj kružnici $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ polumjera c (usmjerenoj po volji);

ii) rubu $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ pozitivno usmjerenoga trokuta s vrhovima $A = (2,0)$, $B = (1,1)$ i $O = (0,0)$.

(i) Ovdje je $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ zadana parametrizacijom $x = c\cos t$, $y = c\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, pa je

$$\oint_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = \oint_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} xdy + xydy =$$

$$= \int_0^{2\pi} [c\cos t \cdot (-c\sin t) + c\cos t \cdot c\sin t \cdot c\cos t]\, dt =$$

$$c^2 \int_0^{2\pi} (\cos t - c\cos^2 t)(-\sin t)dt = \cdots = 0;$$

ii) Ovdje je $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ usmjerena po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja sukladno sastavljena od $\overset{\curvearrowright}{\Gamma_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_2} = \overrightarrow{AB}$ i $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_3} = \overrightarrow{BO}$ s parametrizacijama (redom):

- $y = 0$, $x \in [0, 2]$, usmjerena porastom parametra x;
- $y = -x + 2$, $x \in [1, 2]$, usmjerena padom parametra x;
- $y = x$, $x \in [0, 1]$, usmjerena padom parametra x.

Tako dobivamo

$$\oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma_1}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} + \int_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_2}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} + \int_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_3}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$$

$$= \int_0^2 (x + x \cdot 0 \cdot 0)dx + \int_2^1 (x + x(-x+2)(-1))dx +$$

$$\int_1^0 (x + x \cdot x \cdot 1)dx = \cdots = \tfrac{1}{3}.$$

Dakako da je moguća i drukčija parametrizacija, npr.

$$\overrightarrow{r} = (\phi, \psi) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 6t, & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ -3t+3, & t \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases} \quad ,$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ 6t-2, & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ -6t+6, & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \quad ,$$

usmjerena porastom parametra t.

Krivuljni integral u potencijalnom polju

Raznovrsni primjeri krivuljnog integrala druge vrste pokazuju da on ponekad ne ovisi o usmjerenoj krivulji po kojoj se integrira, nego samo o njezinoj početnoj i krajnjoj točki. Sada ćemo vidjeti kakva su to vektorska polja krivuljni integrali kojih ovise samo o početku i kraju integracijske krivulje.

Definicija 5.6 Neka je

$$\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^3, D \subseteq \mathbb{R}^3,$$

neprekidno vektorsko polje. Reći ćemo da krivuljni **integral** vektorskoga polja $\overrightarrow{w}$ **ne ovisi o integracijskom putu**, ako za svake dvije točke $A, B \in D$ i svake dvije po dijelovima glatke krivulje $\overset{\curvearrowright}{\Gamma_1}, \overset{\curvearrowright}{\Gamma_2} \subseteq D$ što povezuju A i B, usmjerene od A prema B, vrijedi

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma_1}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma_2}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}.$$

Upravo definirano svojstvo karakterizira ovaj teorem:

Teorem 5.7 Neka je $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^3$ neprekidno vektorsko polje na otvorenom i povezanom području $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Tada pripadni krivuljni integral ne ovisi o integracijskom putu ako i samo ako je $\overrightarrow{w}$ potencijalno polje.

Dokaz: $(\Longleftarrow)$ Ako je vektorsko polje $\overrightarrow{w}$ potencijalno onda iz $\overrightarrow{w} = -\operatorname{grad} f$ slijedi

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = -\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Tada za bilo koju usmjerenu krivulju $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ u X, od točke $A = (x_1, y_1, z_1)$ do točke $B = (x_2, y_2, z_2)$, zadana parametarskom jednadžbom

$$\overrightarrow{r}(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad t \in [a, b],$$

dobivamo

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz =$$

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f\left(\overrightarrow{r}(t)\right)}{\partial x}\phi'(t) + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{r}(t)\right)}{\partial y}\psi'(t) + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{r}(t)\right)}{\partial z}\chi'(t) \right) dt =$$

$$\int_a^b d(f \circ \overrightarrow{r})(t) = f\left(\overrightarrow{r}(b)\right) - f\left(\overrightarrow{r}(a)\right) \underset{\overrightarrow{r}(a)=A}{\overset{\overrightarrow{r}(b)=B}{=}}$$

$$= f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1).$$

Prema tomu, krivuljni integral

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)$$

ne ovisi o $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \overset{\curvearrowright}{AB}$, nego samo o A i B.

$(\Longrightarrow)$ Pretpostavimo da krivuljni integral vektorskoga polja

$$\overrightarrow{w} = \{w_x, w_y, w_z\}$$

ne ovisi o integracijskom putu, tj. da je

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$$

za ma koje dvije usmjerene krivulje od točke A do točke B u D .
Treba dokazati da postoji neko skalarno polje $f : D \to \mathbb{R}$ takvo da je

$$\overrightarrow{w} = -\operatorname{grad} f.$$

U tu svrhu učvrstimo bilo koju točku $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ pa za svaku točku $T = (x, y, z) \in D$ odaberimo bilo koju po dijelovima glatku krivulju $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \subseteq D$ što spaja T_0 i T (takva postoji po pretpostavci na D), usmjerenu od T_0 prema T.

Pretpostavka povlači da je time dobro definirana funkcija

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = -\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}, \text{ tj.}$$

$$f(x,y,z) = -\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} w_x dx + w_y dy + w_z dz$$

Odaberimo za put integracije $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ krivulju (izlomljenu liniju) koja se sastoji od tri brida kvadra K čiji su suprotni vrhovi $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i $T = (x,y,z)$. Dakle spojnica $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \overset{\curvearrowright}{T_0 T}$ se sastoji od tri dužine: Parametrizirane kao slijedi:

- $\overline{T_0T_1}$, $T_1 = (x_0, y_0, z)$. Parametrizacija: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = u$, $u \in [z_0, z]$;

- $\overline{T_1T_2}$, $T_2 = (x_0, y, z)$. Parametrizacija: $x = x_0$, $y = s$, $z = z$, $s \in [y_0, y]$;

- $\overline{T_2T}$. Parametrizacija: $x = t$, $y = y$, $z = z$, $t \in [x_0, x]$;

Sada je

$$-\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} = -\left(\int_{\overline{T_0T_1}} + \int_{\overline{T_1T_2}} + \int_{\overline{T_2T}}\right), \text{ tj.}$$

$$f(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} w_z\,(x_0,y_0,u)\,du -$$

$$-\int_{y_0}^{y} w_y\,(x_0,s,z)\,ds - \int_{x_0}^{x} w_x\,(t,y,z)\,dt$$

Tvrdimo da je ovako definirana funkcija potencijal od $\overrightarrow{w} = \{w_x, w_y, w_z\}$, tj. da je

$$\overrightarrow{w} = -\operatorname{grad} f \iff w_x = -\frac{\partial f}{\partial x}, w_y = -\frac{\partial f}{\partial y}, w_z = -\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Pridjetimo se

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y,z) - f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

Odaberimo dovoljno mali Δx tako da dužina $\overline{TS}$ bude sadržana u D, pri čemu $S = (x+\Delta x, y, z)$ (Takav Δx postoji jer je skup D otvoren).

Neka je $\overset{\frown}{\Gamma_1}$ usmjerena krivulja sukladno sastavljena od $\overset{\frown}{\Gamma}$ i $\overrightarrow{TS}$. Tada je

$$f(x+\Delta x, y, z) = -\int_{\overset{\frown}{\Gamma}_1} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} =$$

$$-\left(\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} + \int_{\overrightarrow{TS}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}\right),$$

pa je

$$\frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = -\frac{1}{\Delta x}\int_{\overrightarrow{TS}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} =$$

$$= -\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} w_x(t, y, z)dt,$$

Budući da je koordinatna funkcija w_x neprekidna, to je neprekidna i funkcija $t \mapsto w_x(t, y, z)$. Prema tomu,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} w_x(t, y, z)dt = w_x(x, y, z),$$

što povlači

$$w_x(x, y, z) = -\lim_{dx \to 0}\frac{f(x+dx, y, z) - f(x, y, z)}{dx} =$$

$$= -\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}.$$

Na isti način se dokaže da je

$$w_y(x,y,z) = -\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \quad \text{i} \quad w_z(x,y,z) = -\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z},$$

pa je doista $\overrightarrow{w} = -\operatorname{grad} f$. $\square$

Napomena: Primijenimo li Teorem 5.7 na bilo koju po dijelovoma glatku jednostavno zatvorenu krivulju $\Gamma \subseteq X$, dobivamo da pripadna cirkulacija potencijalnog vektorskog polja $\overrightarrow{w}$ isčezava,

$$\oint_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = 0.$$

Slijedi da isčezavanje cirkulacije, također, karakterizira potencijalnost vektorskog polja $\overrightarrow{w}$ na području D.

Nadalje, budući da su potencijalnost i bezvrtložnost (na konveksnom području) ekvivalentna svojstva (v. Teorem 4.23), vrijedi ovaj korolar:

Korolar 5.8 Neka je $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^3$ diferencijabilno vektorsko polje na konveksnom području $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Tada je

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \iff \oint_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = 0$$

za svaku po dijelovima glatku jednostavno zatvorenu krivulju $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \subseteq D$.

Teorem 5.7 i Korolar 5.8 ukazuju na veliku važnost potencijalnih (bezvrtložnih) vektorskih polja. Ponovimo samo to da je opći oblik takvoga potencijala $f : D \to \mathbb{R}$, za dano vektorsko polje $\overrightarrow{w}$ na $D \subseteq \mathbb{R}^3$, integral totalnog diferencijala

$$w_x dx + w_y dy + w_z dz \equiv df,$$

tj.

$$f(x, y, z) = -\int_{x_0}^{x} w_x(t, y, z)dt -$$

$$\int_{y_0}^{y} w_y(x_0, u, z)du - \int_{z_0}^{z} w_z(x_0, y_0, v)dv,$$

pri čemu je $(x_0, y_0, z_0) \in D$ bilo koja odabrana točka.

Primjer 6 Izračunajmo $\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$ ako je

$\overrightarrow{w}(x,y,z) = \left\{3x^2yz + y + 5,\ x^3z + x - z,\ x^3y - y - 7\right\}$ i

i) $\overset{\frown}{\Gamma}$ bilo koji luk od $A \equiv O = (0,0,0)$ do $B = (1,1,1)$;

ii) $\overset{\frown}{\Gamma}$ bilo koja usmjerena po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja.

i) Očito je da je vektorsko polje $\overrightarrow{w}$ neprekidno diferencijabilno na prostoru $\mathbb{R}^3$. Budući da je

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{\partial w_y}{\partial z} \quad (= x^3 - 1),$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial x} \quad (= 3x^2y),$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial y} \quad (= 3x^2z + 1),$$

to je $\operatorname{rot} \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ pa je $\overrightarrow{w}$ betvrtložno polje, dakle, i potencijalno. Slijedi,

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = f(1,1,1) - f(0,0,0),$$

gdje je potencijal f od $\overrightarrow{w}$ određen relacijom (uzmimo $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$)

$$f(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} (3t^2yz + y + 5)dt -$$

$$-\int_{y_0}^{y} ((x_0)^3 z + x_0 - z)du - \int_{z_0}^{z} ((x_0)^3 y_0 - y_0 - 7)dv =$$

$$-\int_{0}^{x} (3t^2yz + y + 5)dt - \int_{0}^{y} (-z)du - \int_{0}^{z} (-7)dv =$$

$$= -x^3yz - yx - 5x + zy + 7z.$$

Prema tomu,

$$\int_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = f(0,0,0) - f(1,1,1) = 0 - 1 = -1.$$

(b) Ovdje se radi o cirkulaciji bezvrtložnoga polja pa je

$$\oint_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = 0.$$

Greenova formula

U ovomu pododjeljku ćemo izvesti osnovnu formulu integralnog računa za funkcije dviju varijabla, koja je prirodno poopćenje Newton-Leibnizove formule. Radi se o tomu da se (dvostruki) integral na prikladnom području $D \subset \mathbb{R}^2$ svede na (krivuljni) integral po **rubu** od D.

Teorem 5.7 (Greenov teorem) Neka su $P, Q : X \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije na otvorenom skupu $X \subseteq \mathbb{R}^2$ te neka je $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma} \subset X$ pozitivno usmjerena po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja. Tada vrijedi tzv. **Greenova formula**

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy$$

$$= \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

pri čemu je $D \subseteq X$ područje omeđeno krivuljom Γ, tj. $\partial D = \Gamma$.

Strogi dokaz ovoga teorema pretpostavlja puno više predznanja nego što smo ga do sada stekli. Stoga ćemo dokazati samo jedan poseban slučaj, ali ipak dovoljno općenit da obuhvati naše praktične potrebe.

Dokaz: Pretpostavimo, dakle, da su P i Q neprekidno diferencijabilne funkcije i da je područje D takvo da mu usporednice s koordinatnim osima sijeku rub $\partial D = \Gamma$ u najviše dvjema točkama (v. crtež (b)).

Neka su $x = a$, $x = b$, $y = c$ i $y = d$ jednadžbe onih usporednica što dodiruju ∂D, pa je područje

$$D \subseteq [a, b] \times [c, d]$$

i omeđeno je grafovima dviju funkcija $\phi_{1,2} : [a, b] \to \mathbb{R}$, odnosno, $\psi_{1,2} : [c, d] \to \mathbb{R}$, tj.

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), x \in [a, b]\right\},$$

odnosno,

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), y \in [c, d]\right\}.$$

Pritom je $\phi_1(a) = \phi_2(a)$, $\phi_1(b) = \phi_2(b)$, $\psi_1(c) = \psi_2(c)$ i $\psi_1(d) = \psi_2(d)$.

Označimo s $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1$ graf G_{ϕ_1} usmjeren porastom varijable

x, a s $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_2$ graf G_{ϕ_2} usmjeren padom varijable x. Tada je $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma} = \overset{\curvearrowleft}{\partial D}$ sukladno sastavljena od $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1$ i $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_2$.

Budući da je funkcija P neprekidno diferencijabilna, to je funkcija $f \equiv \dfrac{\partial P}{\partial y}$ neprekidna pa je i integrabilna na D. Taj je integral

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy)dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \tfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(P(x,\phi_2(x)) - P(x,\phi_1(x)) \right) dx =$$

$$- \int_b^a P(x,\phi_2(x))dx - \int_a^b P(x,\phi_1(x))dx =$$

$$-\int_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_2} P(x,y)dx + c_0(x,y)dy - \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1} P(x,y)dx + c_0(x,y)dy =$$

$$= -\oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} Pdx.$$

Posve slično, sukladno rastavivši $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ na $\overset{\curvearrowleft}{G}_{\psi_1}$, usmjerenu padom varijable y, i $\overset{\curvearrowright}{G}_{\psi_2}$, usmjerenu porastom varijable y, i stavivši $g \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ dobivamo:

$$\iint_D g(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(x,y)dy)dx = \cdots$$

$$= \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} c_0(x,y) \cdot dx + Q(x,y)dy = \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} Qdy.$$

Zbrajanjem dobivenih integrala proizlazi Greenova formula.

Primjer 7 Izračunajmo cirkulaciju

$$\oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy$$

po pozitivno usmjerenom rubu $\partial\overset{\curvearrowleft}{\triangle} \equiv \overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ trokuta $\triangle ABC$, $A=(1,1)$, $B=(2,2)$, $C=(1,3)$.

Primijenit ćemo Greenovu formulu na $P(x,y) = 2(x^2+y^2)$ i $Q(x,y)=(x+y)^2$.

$$\oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy =$$

$$= \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right))dxdy =$$

$$\iint_{\Delta} (2x-2y)dxdy = 2\int_1^2 \left(\int_x^{-x+4} (x-y)dy \right) dx =$$

$$= \cdots = -\frac{4}{3}.$$

Za provjeru izračunti traženu cirkulaciju izravno, tj. integrirajući po

- $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1 = \overrightarrow{AB}$ ($y=x$, $x \in [1,2]$, parametar raste),

- $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_2 = \overrightarrow{BC}$ ($y = -x + 4$, $x \in [1, 2]$, parametar pada) i
  $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_3 = \overrightarrow{CA}$ ($x = 1$, $y \in [1, 3]$, parametar pada).

Primijetimo da smo u ovomu primjeru Greenovu formulu iskoristili u ”obratnom smjeru”, tj. da smo krivuljni integral preveli u dvostruki integral.

Takva i jest njezina česta primjena u praksi. ”Pravi smjer” trebamo, uglavnom, u teorijskim razmatranjima.

Korolar 5.8 Pod uvjetima u Teoremu 5.7 vrijedi formula

$$P(D) = \frac{1}{2} \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} -y dx + x dy.$$

za ploštinu ravninskog područja D.

Dokaz: Znamo da je

$$P(D) = \iint_D dx dy.$$

Odaberimo bilo koje dvije neprekidno diferencijabilne (na D) skalarne funkcije P i Q za koje je

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = c_1.$$

Primjerice, to smiju biti $P(x,y) = -\dfrac{y}{2}$ i $Q(x,y) = \dfrac{x}{2}$. Ostalo slijedi iz Teorema 5.7.

Napomena: Greenov teorem vrijedi i na području $D \subseteq \mathbb{R}^2$ koje je višestruko povezano (v. crteže), tj. na području rub kojega se sastoji od više po dijelovima glatkih jednostavno zatvorenih krivulja Γ_0, Γ_1, ..., Γ_n, pri čemu su Γ_1,..., Γ_n međusobno disjunktne, sve leže u unutrašnjem (omeđ enom) području s obzirom na

Γ_0 i svaka Γ_i leži u vanjskom području s obzirom na Γ_j, $i \neq j = 1, \cdots, n$.Usmjerimo li Γ_0 geometrijski pozitivno, a sve ostale Γ_1, ..., Γ_n negativno, Greenova formula poprima zapis

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy =$$

$$= \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_0}} (Pdx + Qdy) + \sum_{i=1}^{n} \oint_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma_i}} (Pdx + Qdy).$$

Napomena: Gledamo li na funkcije P i Q kao na koordinatne funkcije nekog ravninskog vektorskog polja $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{w}(x, y) = \{P(x, y),\ Q(x, y)\}$, Greenovu formulu možemo zapisati i ovako:

$$\iint_D \left(\operatorname{rot} \overrightarrow{w} \circ \overrightarrow{k} \right) dxdy = \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\partial D}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$$

na što ćemo se vratiti, u općenitijem slučaju, kasnije.