Krivuljni integral druge vrste

Neka je

$$\overrightarrow{w} = \{w_x,\ w_y,\ w_z\} : D \to \mathbb{R}^3, \quad D \subseteq \mathbb{R}^3,$$

vektorsko polje na D a

$$\overrightarrow{r}(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad t \in [a,b],$$

parametarska jednadžba glatke krivulje $\Gamma \subseteq D$. Neka je $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ krivulja Γ usmjerena porastom parametra $t \in [a,b]$. Primijetimo da je dobro definirana kompozicija

$$[a,b] \ \xrightarrow{\overrightarrow{r}}\ D \ \xrightarrow{\overrightarrow{w}}\ \mathbb{R}^3,$$

$$t \longmapsto \overrightarrow{w}(\overrightarrow{r}(t)) = \{w_x(\overrightarrow{r}(t)), w_y(\overrightarrow{r}(t)), w_z(\overrightarrow{r}(t))\},$$

što je vektorska funkcija jedne varijable na segmentu $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Slijedi da je

$$\overrightarrow{w}(\overrightarrow{r}) \circ \overrightarrow{r}\,' : [a,b] \to \mathbb{R},$$

$$t \longmapsto \overrightarrow{w}(\overrightarrow{r}(t)) \circ \overrightarrow{r}\,'(t) =$$

$$= w_x(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \phi'(t) + w_y(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \psi'(t) + w_z(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \chi'(t),$$

realna funkcija jedne varijable na segmentu $[a,b]$.

Definicija 5.4 Ako je funkcija (skalarni produkt)

$$(\overrightarrow{w}(\overrightarrow{r})) \circ \overrightarrow{r}' : [a,b] \to \mathbb{R}$$

integrabilna, onda pripadni određeni integral

$$\int_a^b [\overrightarrow{w}(\overrightarrow{r}(t)) \circ \overrightarrow{r}'(t)]\, dt$$

nazivamo **integralom vektorskoga polja** $\overrightarrow{w}$ **po usmjerenoj krivulji** $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ (ili **krivuljnim integralom druge vrste**) i označujemo sa

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}.$$

Izravno izračunavanje krivuljnog integrala druge vrste slijedi iz definicije:

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} =$$

$$\int_a^b \left[w_x(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \phi'(t) + w_y(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \psi'(t) + \right.$$

$$\left. + w_z(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \chi'(t)\right] dt$$

Primjer 3 Izračunajmo krivuljni integral druge vrste $\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$ vektorske funkcije

$$(x,y,z) \mapsto \overrightarrow{w}(x,y,z) = \{y-z,\ z-x,\ x-y\}$$

po porastom parametra usmjerenoj krivulji $\overset{\frown}{\Gamma}$,

$$\overrightarrow{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 3t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Odgovarajućim uvrštenjima u definicijsku formulu dobivamo:

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} =$$

$$\int_0^{2\pi} [(2\sin t - 3t)\cdot(-2\sin t) + (3t - 2\cos t)\cdot 2\cos t +$$

$$+(2\cos t - 2\sin t)\cdot 3]dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (-4 + 6\cos t - 6\sin t + 6t\sin t + 6t\cos t)dt = \cdots = -20\pi.$$

Napomena: Krivuljni integral druge vrste $\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$ se obično interpretira kao rad neke sile $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{w}$ duž puta $\overrightarrow{s} = \overset{\frown}{\Gamma}$ od točke A do točke B.

Za potpunu korektnost Definicije 5.4 trebalo dokazati ovisnost krivuljnog integrala druge vrste o odabranoj glatkoj parametrizaciji samo do na predznak, tj. da je

$$\int_a^b [\overrightarrow{w}(\overrightarrow{r}(t)) \circ \overrightarrow{r}'(t)]\, dt = \pm \int_c^d [\overrightarrow{w}(p(\tau)) \circ \overrightarrow{p}'(\tau)]\, d\tau,$$

pri čemu su $([a,b],h)$ i $([c,d],p)$ bilo koje dvije glatke parametrizacije od Γ, te da su ti integrali jednaki čim h i p induciraju (porastom parametara) isto usmjerenje, a protivnih predznaka čim induciraju suprotna usmjerenja na Γ.

Napomena: Ako je $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ po dijelovima glatka krivulja, prirodno sastavljena od sukladno usmjerenih glatkih krivulja $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1, \cdots, \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{n+1}$, pripadni krivuljni integral druge vrste definiramo kao zbroj, tj.

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} \overset{\text{def.}}{=} \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} + \cdots + \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{n+1}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}.$$

Izravno iz Definicije 5.4 i svojstava Riemannova integrala slijedi valjanost ovoga teorema:

Teorem 5.5 Neka su $\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, vektorske funkcije s integrabilnim koordinatnim funkcijama, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \subseteq D$ usmjerena po dijelovima glatka krivulja. Tada je

i) $\displaystyle\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = -\int_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r};$

ii) $\displaystyle\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} (\lambda\overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{u}) \circ d\overrightarrow{r} = \lambda \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} + \mu \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{u} \circ d\overrightarrow{r}$.

Neka je vektorska funkcija $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, zadana preslikavanjima $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$, tj. $w_x = P$, $w_y = Q$ i $w_z = R$. Pridružimo li funkciji $\overrightarrow{w}$ diferencijalnu formu

$$Pdx + Qdy + Qdz,$$

uočavamo da se, formalno, krivuljni integral druge vrste podudara s integralom odgovarajuće diferencijalne forme, tj.

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} Pdx + Qdy + Rdz,$$

gdje je $d\overrightarrow{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

Primjer 4 Izračunajmo krivuljni integral druge vrste

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

ako $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ usmjerena krivulja - dužina od ishodista O do točke $B = (1,1,1)$.
Budući da se $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \overrightarrow{OB}$ može zadati kao presjek dviju ravnina: $y = x$, za svaki z, i $z = x$, za svaki y, $x \in [0,1]$ (usmjerenje porastom parametra $t = x$), to je

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} Pdx + Qdy + Rdz \; =$$

$$\int_0^1 [(x+x) + (x+x)\cdot 1 + (x+x)\cdot 1]dx \; = \; 6\int_0^1 xdx = 3.$$

Napomena: Ako je u krivuljnom integralu druge vrste $\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$ krivulja Γ (jednostavno) zatvorena, uobičajilo se to isticati oznakom

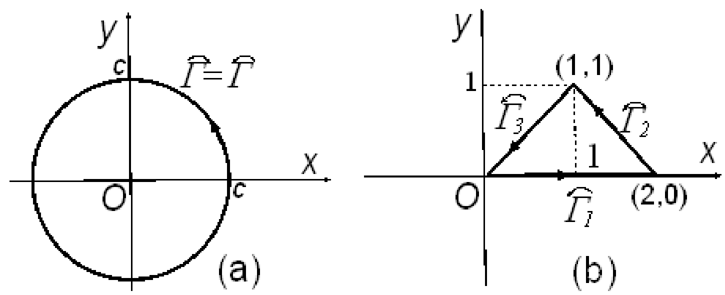
$$\oint_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$$

i nazivati **cirkulacijom** vektorskoga polja $\overrightarrow{w}$ po zatvorenoj krivulji $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$.

Primjer 5 Izračunajmo cirkulaciju ravninskoga vektroskog polja $\overrightarrow{w}(x,y)=\{x,\ xy\}$ po:

i) središnjoj kružnici $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ polumjera c (usmjerenoj po volji);

ii) rubu $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ pozitivno usmjerenoga trokuta s vrhovima $A=(2,0)$, $B=(1,1)$ i $O=(0,0)$.



(i) Ovdje je $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ zadana parametrizacijom $x=c\cos t$, $y=c\sin t$, $t\in[0,2\pi]$, pa je

$$\oint_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w}\circ d\overrightarrow{r} = \oint_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} xdy + xydy =$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[c\cos t\cdot(-c\sin t)+c\cos t\cdot c\sin t\cdot c\cos t\right]dt=$$

$$c^2\int_0^{2\pi}(\cos t - c\cos^2 t)(-\sin t)dt=\cdots=0;$$

ii) Ovdje je $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ usmjerena po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja sukladno sastavljena od $\overset{\curvearrowright}{\Gamma_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_2} = \overrightarrow{AB}$ i $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_3} = \overrightarrow{BO}$ s parametrizacijama (redom):

- $y = 0$, $x \in [0, 2]$, usmjerena porastom parametra x;

- $y = -x + 2$, $x \in [1, 2]$, usmjerena padom parametra x;

- $y = x$, $x \in [0, 1]$, usmjerena padom parametra x.

(Dakako da je moguća i drukčija parametrizacija, npr. $\overrightarrow{r} = (\phi, \psi) : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\phi(t) = \begin{cases} 6t, & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ -3t + 3, & t \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases} ,$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ 6t - 2, & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ -6t + 6, & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} ,$$

usmjerena porastom parametra t.) Tako dobivamo

$$\oint_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = \int_{\overset{\frown}{\Gamma_1}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} + \int_{\overset{\frown}{\Gamma_2}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} + \int_{\overset{\frown}{\Gamma_3}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$$

$$= \int_0^2 (x + x \cdot 0 \cdot 0) dx + \int_2^1 (x + x(-x+2)(-1)) dx +$$

$$\int_1^0 (x + x \cdot x \cdot 1) dx = \cdots = \tfrac{1}{3}.$$

Krivuljni integral u potencijalnom polju

Raznovrsni primjeri krivuljnog integrala druge vrste pokazuju da on ponekad ne ovisi o usmjerenoj krivulji po kojoj se integrira, nego samo o njezinoj početnoj i krajnjoj točki. Sada ćemo vidjeti kakva su to vektorska polja krivuljni integrali kojih ovise samo o početku i kraju integracijske krivulje.

Definicija 5.6 Neka je $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidno vektorsko polje. Reći ćemo da krivuljni **integral** vektorskoga polja $\overrightarrow{w}$ **ne ovisi o integracijskom putu**, ako za svake dvije točke $A, B \in D$ i svake dvije po dijelovima glatke krivulje $\overset{\frown}{\Gamma}_1, \overset{\frown}{\Gamma}_2 \subseteq D$ što povezuju A i B, usmjerene od A prema B, vrijedi

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}_1} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}_2} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}.$$

Upravo definirano svojstvo karakterizira ovaj teorem:

Teorem 5.7 Neka je $\overrightarrow{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ neprekidno vektorsko polje na otvorenom i povezanom području $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Tada pripadni krivuljni integral ne ovisi o integracijskom putu ako i samo ako je $\overrightarrow{w}$ potencijalno polje.

Dokaz: $(\Longrightarrow)$ Pretpostavimo da krivuljni integral vektorskoga polja

$$\overrightarrow{w} = \{w_x, w_y, w_z\}$$

ne ovisi o integracijskom putu, tj. da je

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}_1} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}_2} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$$

za ma koje dvije usmjerene krivulje od točke A do točke B u D .

Treba dokazati da postoji neko skalarno polje $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ takvo da je

$$\overrightarrow{w} = -\operatorname{grad} f.$$

U tu svrhu učvrstimo bilo koju točku $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ pa za svaku točku $T = (x, y, z) \in D$ odaberimo bilo koju po dijelovima glatku krivulju $\overset{\frown}{\Gamma} \subseteq D$ što spaja T_0 i T (takva postoji po pretpostavci na D), usmjerenu od T_0 prema T.

Pretpostavka povlači da je time dobro definirana funkcija

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = -\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}.$$

Odaberimo dovoljno mali $\delta > 0$ tako da dužina $\overline{TT_1}$ bude sadržana u D, pri čemu $T_1 = (x + dx, y, z)$ i $0 < |dx| \leq \delta$. (Takav δ postoji jer je skup D otvoren.)

Neka je $\overset{\frown}{\Gamma}_1$ usmjerena krivulja sukladno sastavljena od $\overset{\frown}{\Gamma}$ i $\overrightarrow{TT_1}$. Tada je

$$f(x + dx, y, z) = -\int_{\overset{\frown}{\Gamma}_1} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} =$$

$$-\left(\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} + \int_{\overrightarrow{TT_1}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}\right),$$

pa je

$$\frac{f(x+dx,y,z)-f(x,y,z)}{dx} = -\frac{1}{dx}\int_{\overrightarrow{TT_1}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} =$$

$$= -\frac{1}{dx}\int_x^{x+dx} w_x(t,y,z)dt,$$

pri čemu je t druga oznaka za varijablu x (da se ne pobrka s granicama), y i z su ovdje konstante, a $r(t) = (t,y,z)$, $t \in [x, x+dx]$, je parametrizacija usmjerene dužine $\overrightarrow{TT_1}$. Budući da je koordinatna funkcija w_x neprekidna, to je neprekidna i funkcija $t \mapsto w_x(t,y,z)$. Prema tomu,

$$\lim_{dx\to 0}\frac{1}{dx}\int_x^{x+dx} w_x(t,y,z)dt = w_x(x,y,z),$$

što povlači

$$\begin{aligned} w_x(x,y,z) &= -\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx,y,z)-f(x,y,z)}{dx} = \\ &= -\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Na isti način se dokaže da je

$$w_y(x,y,z) = -\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \quad \text{i} \quad w_z(x,y,z) = -\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z},$$

pa je doista $\overrightarrow{w} = -\operatorname{grad} f$.

$(\Longleftarrow)$ Obratno, ako je vektorsko polje $\overrightarrow{w}$ potencijalno onda iz $\overrightarrow{w} = -\operatorname{grad} f$ slijedi

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = -\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Tada za bilo koju usmjerenu krivulju $\overset{\frown}{\Gamma}$ u X, od točke $A = (x_1, y_1, z_1)$ do točke $B = (x_2, y_2, z_2)$, zadana parametarskom jednadžbom

$$\overrightarrow{r}(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad t \in [a, b],$$

dobivamo

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz =$$

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f\left(\overrightarrow{r}(t)\right)}{\partial x}\phi'(t) + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{r}(t)\right)}{\partial y}\psi'(t) + \frac{\partial f\left(\overrightarrow{r}(t)\right)}{\partial z}\chi'(t) \right) dt =$$

$$\int_a^b d(f \circ \overrightarrow{r})(t) = f\left(\overrightarrow{r}(b)\right) - f\left(\overrightarrow{r}(a)\right) =$$

$$= f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1).$$

Prema tomu, krivuljni integral

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\,\overrightarrow{r} = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)$$

ne ovisi o $\overset{\frown}{\Gamma} = \overset{\frown}{AB}$, nego samo o A i B.

Napomena: Primijenimo li Teorem 5.7 na bilo koju po dijelovoma glatku jednostavno zatvorenu krivulju $\Gamma \subseteq X$, dobivamo da pripadna cirkulacija potencijalnog vektorskog polja $\overrightarrow{w}$ iščezava,

$$\oint_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\,\overrightarrow{r} = 0.$$

Slijedi da iščezavanje cirkulacije, također, karakterizira potencijalnost vektorskog polja $\overrightarrow{w}$ na području D.

Nadalje, budući da su potencijalnost i bezvrtložnost (na konveksnom području) ekvivalentna svojstva (v. Teorem 4.23), vrijedi ovaj korolar:

Korolar 5.8 Neka je $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^3$ diferencijabilno vektorsko polje na konveksnom području $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Tada je

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \iff \oint_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = 0$$

za svaku po dijelovima glatku jednostavno zatvorenu krivulju $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \subseteq D$.

Teorem 5.7 i Korolar 5.8 ukazuju na veliku važnost potencijalnih (bezvrtložnih) vektorskih polja. Ponovimo samo to da je opći oblik takvoga potencijala $f : D \to \mathbb{R}$, za dano vektorsko polje $\overrightarrow{w}$ na $D \subseteq \mathbb{R}^3$, integral totalnog diferencijala

$$w_x dx + w_y dy + w_z dz \equiv df,$$

tj.

$$f(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} w_x(t,y,z)dt -$$

$$\int_{y_0}^{y} w_y(x_0,u,z)du - \int_{z_0}^{z} w_z(x_0,y_0,v)dv,$$

pri čemu je $(x_0, y_0, z_0) \in D$ bilo koja odabrana točka.

Primjer 6 Izračunajmo $\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r}$ ako je

$\overrightarrow{w}(x,y,z) = \left\{3x^2yz + y + 5,\ x^3z + x - z,\ x^3y - y - 7\right\}$ i

i) $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ bilo koji luk od $A \equiv O = (0,0,0)$ do $B = (1,1,1)$;

ii) $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ bilo koja usmjerena po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja.

i) Očito je da je vektorsko polje $\overrightarrow{w}$ neprekidno diferencijabilno na prostoru $\mathbb{R}^3$. Budući da je

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{\partial w_y}{\partial z} \quad (= x^3 - 1),$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial x} \quad (= 3x^2y),$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial y} \quad (= 3x^2z + 1),$$

to je $\operatorname{rot} \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ pa je $\overrightarrow{w}$ betvrtložno polje, dakle, i potencijalno. Slijedi,

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = f(1,1,1) - f(0,0,0),$$

gdje je potencijal f od $\overrightarrow{w}$ određen relacijom (uzmimo $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$)

$$f(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} (3t^2yz + y + 5)dt -$$

$$-\int_{y_0}^{y} ((x_0)^3z + x_0 - z)du - \int_{z_0}^{z} ((x_0)^3y_0 - y_0 - 7)dv =$$

$$-\int_{0}^{x} (3t^2yz + y + 5)dt - \int_{0}^{y} (-z)du - \int_{0}^{z} (-7)dv =$$

$$= -x^3yz - yx - 5x + zy + 7z.$$

Prema tomu,

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = f(0,0,0) - f(1,1,1) = 0 - 1 = -1.$$

(b) Ovdje se radi o cirkulaciji bezvrtložnoga polja pa je

$$\oint_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{w} \circ d\overrightarrow{r} = 0.$$

Greenova formula

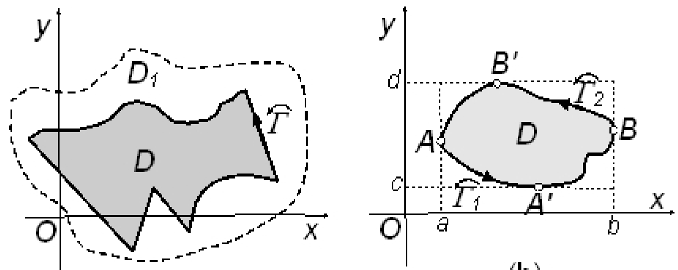
U ovomu pododjeljku ćemo izvesti osnovnu formulu integralnog računa za funkcije dviju varijabla, koja je prirodno poopćenje Newton-Leibnizove formule. Radi se o tomu da se (dvostruki) integral na prikladnom području $D \subset \mathbb{R}^2$ svede na (krivuljni) integral po **rubu** od D.

Teorem 5.7 (Greenov teorem) Neka su $P, Q : X \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije na otvorenom skupu $X \subseteq \mathbb{R}^2$ te neka je $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma} \subset X$ pozitivno usmjerena po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja. Tada vrijedi tzv. **Greenova formula**

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy$$

$$= \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

pri čemu je $D \subseteq X$ područje omeđeno krivuljom Γ, tj. $\partial D = \Gamma$.



(a) (b)

Strogi dokaz ovoga teorema pretpostavlja puno više predznanja nego što smo ga do sada stekli. Stoga ćemo dokazati samo jedan poseban slučaj, ali ipak dovoljno općenit da obuhvati naše praktične potrebe.

Dokaz: Pretpostavimo, dakle, da su P i Q neprekidno diferencijabilne funkcije i da je područje D takvo da mu usporednice s koordinatnim osima sijeku rub $\partial D = \Gamma$ u najviše dvjema točkama (v. crtež (b)).

Neka su $x = a$, $x = b$, $y = c$ i $y = d$ jednadžbe onih usporednica što dodiruju ∂D, pa je područje

$$D \subseteq [a, b] \times [c, d]$$

i omeđeno je grafovima dviju funkcija $\phi_{1,2} : [a, b] \to \mathbb{R}$, odnosno, $\psi_{1,2} : [c, d] \to \mathbb{R}$, tj.

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), x \in [a, b]\right\},$$

odnosno,

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), y \in [c,d]\right\}.$$

Pritom je $\phi_1(a) = \phi_2(a)$, $\phi_1(b) = \phi_2(b)$, $\psi_1(c) = \psi_2(c)$ i $\psi_1(d) = \psi_2(d)$.

Označimo s $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1$ graf G_{ϕ_1} usmjeren porastom varijable x, a s $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_2$ graf G_{ϕ_2} usmjeren padom varijable x. Tada je $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma} = \overset{\curvearrowleft}{\partial D}$ sukladno sastavljena od $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1$ i $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_2$.

Budući da je funkcija P neprekidno diferencijabilna, to je funkcija $f \equiv \dfrac{\partial P}{\partial y}$ neprekidna pa je i integrabilna na D. Taj je integral

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy)dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(P(x,\phi_2(x)) - P(x,\phi_1(x))\right) dx -$$

$$- \int_b^a P(x,\phi_2(x))dx - \int_a^b P(x,\phi_1(x))dx =$$

$$- \int_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_2} P(x,y)dx + c_0(x,y)dy - \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1} P(x,y)dx + c_0(x,y)dy =$$

$$= - \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} Pdx.$$

Posve slično, sukladno rastavivši $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ na $\overset{\curvearrowleft}{G}_{\psi_1}$, usmjerenu padom varijable y, i $\overset{\curvearrowright}{G}_{\psi_2}$, usmjerenu porastom varijable y, i stavivši $g \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ dobivamo:

$$\iint_D g(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(x,y)dy)dx = \cdots$$

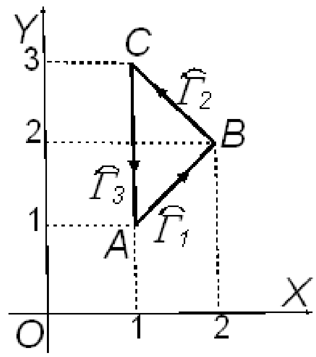
$$= \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} c_0(x,y) \cdot dx + Q(x,y)dy = \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} Qdy.$$

Zbrajanjem dobivenih integrala proizlazi Greenova formula.

Primjer 7 Izračunajmo cirkulaciju

$$\oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy$$

po pozitivno usmjerenom rubu $\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle} \equiv \overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$ trokuta $\triangle ABC$, $A=(1,1)$, $B=(2,2)$, $C=(1,3)$.



Primijenit ćemo Greenovu formulu na $P(x,y) = 2(x^2+y^2)$ i $Q(x,y) = (x+y)^2$.

$$\oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy =$$

$$= \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right))dxdy =$$

$$\iint_{\Delta}(2x-2y)dxdy = 2\int_1^2 \left(\int_x^{-x+4}(x-y)dy\right)dx =$$

$$= \cdots = -\frac{4}{3}.$$

Za provjeru izračunti traženu cirkulaciju izravno, tj. integrirajući po

- $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1 = \overrightarrow{AB}$ ($y = x$, $x \in [1,2]$, parametar raste),

- $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_2 = \overrightarrow{BC}$ ($y = -x+4$, $x \in [1,2]$, parametar pada) i
  $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_3 = \overrightarrow{CA}$ ($x = 1$, $y \in [1,3]$, parametar pada).

Primijetimo da smo u ovomu primjeru Greenovu formulu iskoristili u "obratnom smjeru", tj. da smo krivuljni integral preveli u dvostruki integral.

Takva i jest njezina česta primjena u praksi. "Pravi smjer" trebamo, uglavnom, u teorijskim razmatranjima.

Korolar 5.8 Pod uvjetima u Teoremu 5.7 vrijedi formula

$$P(D) = \frac{1}{2} \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} -ydx + xdy.$$

za ploštinu ravninskog područja D.

Dokaz: Znamo da je

$$P(D) = \iint_D dxdy.$$

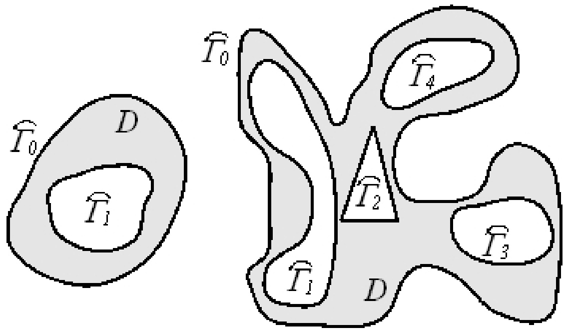
Odaberimo bilo koje dvije neprekidno diferencijabilne (na D) skalarne funkcije P i Q za koje je

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = c_1.$$

Primjerice, to smiju biti $P(x,y) = -\dfrac{y}{2}$ i $Q(x,y) = \dfrac{x}{2}$. Ostalo slijedi iz Teorema 5.7.

Napomena: Greenov teorem vrijedi i na području $D \subseteq \mathbb{R}^2$ koje je višestruko povezano (v. crteže), tj. na području rub kojega se sastoji od više po dijelovima glatkih jednostavno zatvorenih krivulja Γ_0, Γ_1, ..., Γ_n, pri čemu su Γ_1,..., Γ_n međusobno disjunktne, sve leže u unutrašnjem (omeđ enom) području s obzirom na

Γ_0 i svaka Γ_i leži u vanjskom području s obzirom na Γ_j, $i \neq j = 1, \cdots, n$.



Usmjerimo li Γ_0 geometrijski pozitivno, a sve ostale Γ_1, ..., Γ_n negativno, Greenova formula poprima zapis

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy =$$

$$= \oint_{\overset{\frown}{\Gamma_0}} (Pdx + Qdy) + \sum_{i=1}^{n} \oint_{\overset{\frown}{\Gamma_i}} (Pdx + Qdy).$$

Napomena: Gledamo li na funkcije P i Q kao na koordinatne funkcije nekog ravninskog vektorskog polja $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{w}(x, y) = \{P(x, y),\ Q(x, y)\}$, Greenovu formulu možemo zapisati i ovako:

$$\iint_D \left(\mathrm{rot}\, \overrightarrow{w} \circ \overrightarrow{k} \right) dxdy = \oint_{\overset{\frown}{\partial D}} \overrightarrow{w} \circ d\,\overrightarrow{r}$$

na što ćemo se vratiti, u općenitijem slučaju, kasnije.