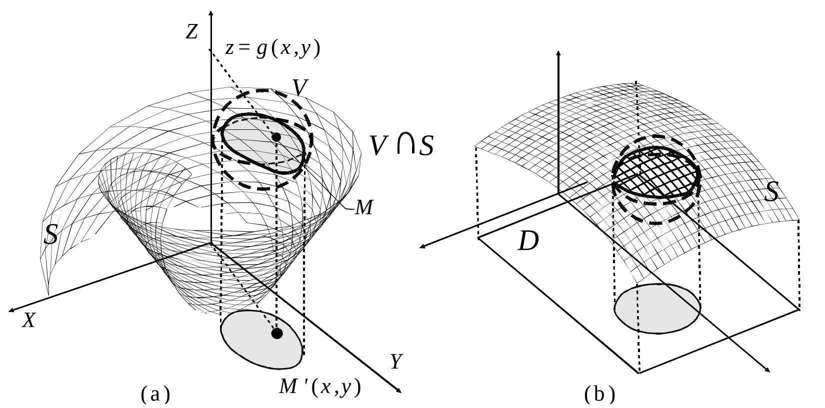
Plošni integral

Glatka ploha i njena ploština

Definicija 5.9 Neka je u $\mathbb{R}^3$ dan pravokutni koordinatni sustav $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Skup $S \subset \mathbb{R}^3$ nazivamo **plohom** ako za svaku točku $T_0 \in S$ postoje otvorena okolina $V \subseteq \mathbb{R}^3$ od T_0, otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}^2$ i preslikavanje

$$g : U \to \mathbb{R}$$

takvi da je $z = g(x, y)$, $(x, y) \in U$, jednadžba presječnoga skupa $S \cap V$.



Reći ćemo da je ploha S **glatka (u točki** $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = g(x_0, y_0)$) ako je pripadna funkcija g diferencijabilna (u točki (x_0, y_0)).

(Drugim riječima, ploha S je glatka čim u svakoj svojoj točki $T \in S$ dopušta tangencijalnu ravninu.)

Ako se za cijelu plohu S može naći jedno preslikavanje

$$g : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2,$$

tako da njegova suženja udovoljavaju Definiciji 5.9, onda se

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

naziva **eksplicitnom jednadžbom** plohe S.

Neka je $G : V \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija na otvorenom skupu $V \subseteq \mathbb{R}^3$ sa svojstvom $\operatorname{grad} G(x, y, z) \neq \overrightarrow{0}$ u svakoj točki $(x, y, z) \in V$. Tada je skup

$$S = \{(x, y, z) \in V \mid G(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

glatka ploha. Pritom je, u svakoj točki, gradijent

$$\operatorname{grad} G(x, y, z) = \left\{ \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right\}_{(x,y,z)}$$

okomit na tangencijalnu ravninu, što odmah daje jednadžbu pripadne tangencijalne ravnine.

Često ćemo plohu S zadavati **parametarski**. Pri takvom zadavanju nema privilegiranih osi, a plohu treba zamisliti kao "dvodimenzionalni skup" nastao "neprekidnom deformacijom"

$$r : D \to \mathbb{R}^3$$

nekog ravninskog područja D. Ne ulazeći u potankosti, dajemo pripadnu parametarsku jednadžbu:

$$S \ldots \vec{r}(u,v) = (\phi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)), \ \ (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

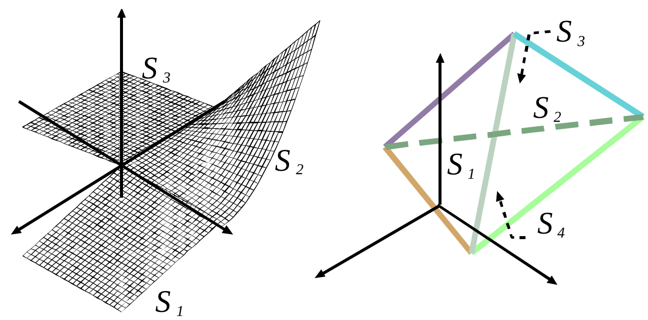
tj.

$$S \ldots \begin{cases} x = \phi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \\ z = \chi(u,v). \end{cases}$$

Tako, primjerice, ploha S zadana eksplicitnom jednadžbom $z = g(x,y)$ ima parametarski zapis ($u = x$, $v = y$)

$$r(x,y) = (x, y, g(x,y)).$$

U nekim razmatranjima i primjenama javljat će se plohe poput ovih:



Uočavamo da se radi o plohi S sastavljenoj od konačno glatkih ploha S_1,..., S_n tako da u točkama ”spojnih krivulja” ne postoje tangencijalne ravnine (ni normale).

Za takve plohe kažemo da su **po dijelovima glatke**. Pokazuje se da je skup svih točaka takve plohe u kojima nema normale ”ploštinski zanemariv” pa ćemo ga u našim razmatranjima o plošnom integralu smjeti zanemarivati.

Da bismo definirali plohinu ploštinu polazimo od pretpostavke da je ploština paralelograma $\square$ određenoga vrhovima T_i, $i = 1, 2, 3, 4$

$$P(\square) = \left|\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_4}\right|$$

Neka je, u danom pravokutnom koordinatnom sustavu $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Budući da taj paralelogram leži u ravnini zadanoj jednadžbom

$$z - z_1 = p(x - x_1) + q(y - y_1),$$

to je

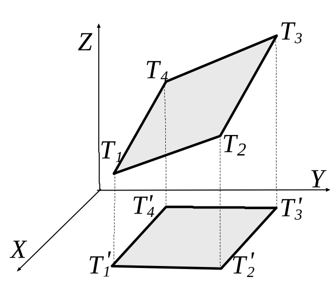
$$P(\Box) = \left\| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & p(x_2 - x_1) + q(y_2 - y_1) \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & p(x_4 - x_1) + q(y_4 - y_1) \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \left| -p\overrightarrow{i} - q\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \right| \cdot \left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{matrix} \right\|$$

$$= \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot P\left(\Box'\right),$$

gdje je $\Box'$ (također paralelogram, s vrhovima T_i', $i = 1, 2, 3, 4$) okomita projekcija paralelograma $\Box$ u XY-ravninu.



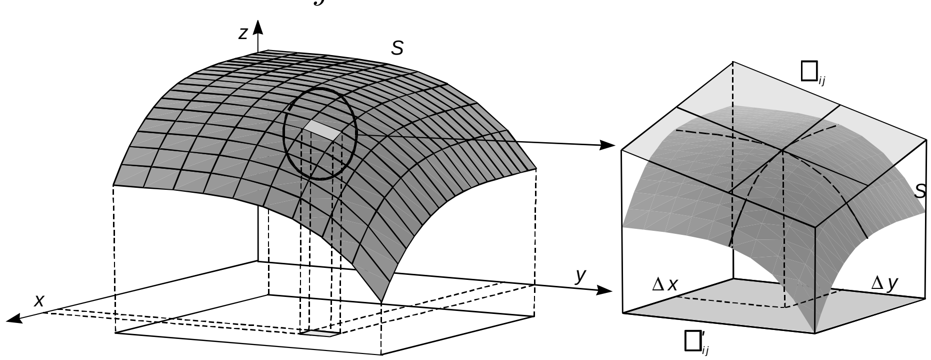
Naime,

$$P\left(\square'\right)=\left|\overrightarrow{T_1'T_2'}\times\overrightarrow{T_1'T_4'}\right|=$$

$$\left\|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & 0\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{cc}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_4-x_1 & y_4-x_1\end{array}\right\|.$$

Neka je $z=g(x,y)$, $(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$, eksplicitna jednadžba glatke plohe S. Uočimo bilo koji pravokutnik $\square'\subseteq D$ pa promatrajmo dio S' dio plohe S što se okomito projicira na $\square'$.

Podijelimo $\square'$ usporednicama s x- i y-osi na više "malih" pravokutnika $\square'_{ij}$, $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots m$. To će uvjetovati odgovarajuću podjelu od S' na više "malih" ploha S'_{ij}, od kojih je svaka određena suženjem funkcije g na $\square'_{ij}$, $i=1,\cdots,n$.



Označimo s $\Box_{ij}$ "mali" paralelogram u toj tangencijalnoj ravnini koji se okomito projicira na "mali" pravokutnik $\Box'_{ij}$.

"Mali" paralelogram $\Box_{ij}$ i "mala" ploha S'_{ij} imaju približno jednaku površinu, naravno, pretpostavljajući dovoljno sitnu podjelu pravokutnika $\Box'$.

Zato za pripadnu površinu uzimamo (približno)

$$P(S') = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(S'_{ij}) \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(\Box_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sqrt{1+p_{ij}^2+q_{ij}^2}\,P(\Box'_{ij}).$$

Budući da je $P(\Box'_{ij}) = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$, pri čemu su Δx_i i Δy_j razmaci između odgovarajućih susjednih usporednica, to je

$$P(S') \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sqrt{1+p_{ij}^2+q_{ij}^2} \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j,$$

$$p_{ij} = \frac{\partial g(x_i,y_j)}{\partial x}, q_{ij} = \frac{\partial g(x_i,y_j)}{\partial y}.$$

Sjećajući se definicije određenog integrala skalarne funkcije, uočavamo da se na desnoj strani pojavila integralna suma skalarne funkcije

$$(x, y) \mapsto \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2},$$

pa ima smisla određeni integral

$$\iint_{\square'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

smatrati površinom plohe S'. Jasno je sada da se to smije proširiti preko D na S.

Dakle, ako je $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, eksplicitna jednadžba glatke plohe S, tada je

$$P(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

njezina površina.

Definicija 5.10 Neka je $g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, diferencijabilna funkcija, a $D \subseteq X$ zatvoreno područje omeđeno po dijelovima glatkom jednostavno zatvorenom krivuljom. Neka je S ploha zadana jednadžbom $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$. Tada njezinu **ploštinu** definiramo kao broj

$$P(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Primijetimo da u slučaju konstantne funkcije $g(x, y) = c \in \mathbb{R}$ na D dobivamo $S = D$ i

$$P(D) = \iint_D dxdy,$$

što se slaže s prije poznatom formulom.

Ako ploha S nije glatka, ali ju se može rastaviti po dijelovima glatkim krivuljama na konačno mnogo "disjunktnih" glatkih ploha $S_1, \cdots, S_n$, onda je njezina površina zbroj

$$P(S) = P(S_1) + \cdots + P(S_n).$$

U slučaju plohe S, što se okomito projicira na područje D, implicitno zadane jednadžbom $G(x,y,z)=0$, formula za ploštinu prelazi u

$$P(S)=\iint_D \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial z}\right|}dxdy,$$

pri čemu naznačene parcijalne derivacije treba iskazati funkcijama od x i y.

Napokon, formaliziramo li $P(S)=\iint_D dS$, smijemo reći da je

$$dS \equiv \sqrt{1+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

infinitezimalni **ploštinski element.** (Strogo, bolje bi bilo pisati $dP(S)$ umjesto dS!).

Plošni integral prve vrste

Definicija 5.11 Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidna funkcija (skalarno polje), a $S \subseteq X$ glatka ploha zadana jednadžbom $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, na zatvorenom području D omeđenom po dijelovima glatkom jednostavno zatvorenom krivuljom. Tada dvostruki integral

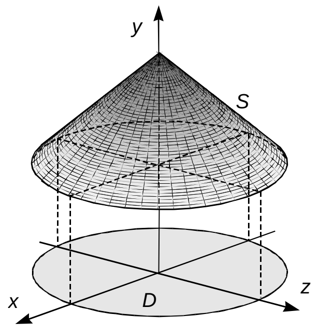
$$\iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

nazivamo **plošnim integralom prve vrste** skalarnoga polja f po plohi S i označujemo ga s

$$\iint_S f dS.$$

(Primijetimo da je oznaka u skladu s prethodnim razmatranjem.)

Primjer 1 Izračunati površinu dijela stožaste plohe $y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}$ koji je određen uvjetom $1 \leq y \leq 2$.



Slika 1.

Ploha S ("privilegirana" y-os) i njena projekcija D (krug $x^2 + z^2 \leq 1$) na xz-ravninu prikazani su na Slici 1.

Treba izračunati

$$P(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial(2-\sqrt{x^2+z^2})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(2-\sqrt{x^2+z^2})}{\partial z}\right)^2} dxdz.$$

$$P(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right)^2 + \left(-\frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right)^2} dxdz =$$

$$\iint_{x^2+z^2\leq 1} \sqrt{2} dxdz = \sqrt{2} \iint_{x^2+z^2\leq 1} dxdz = \sqrt{2} P(D) = \sqrt{2}\pi.$$

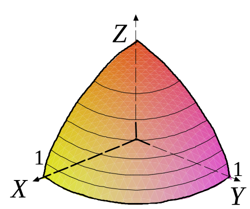
Primjer 2 Izračunajmo plošni integral prve vrste $\iint_S f dS$, ako je

$$f(x,y,z) = x + y + z,$$

a S dio jedinične središnje sfere u I. oktantu .
Budući da je

$$S \ldots z \; = \; g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$(x,y) \; \in \; D \ldots \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases},$$



to je

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

pa je

$$1+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Prema tomu,

$$\iint_S f\,dS=\iint_D\left(x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\overset{\textit{polarne koordinate}}{=} \;\ldots =$$

$$\iint_{D_{\rho,\varphi}}\left(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+\sqrt{1-\rho^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\cdots=\frac{3\pi}{4}.$$

Napomena: Ako je glatka ploha S zadana parametarski jednadžbama $x = \phi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $z = \chi(u,v)$, onda iz Definicije 5.10 i prethodnih razmatranja slijedi da se pripadni plošni integral prve vrste izračunava po formuli

$$\iint_S f dS = \iint_{D_{u,v}} f(\phi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv,$$

pri čemu je

$$E = \left(\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi(u,v)}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial\phi(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial v} + \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v} + \frac{\partial\chi(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi(u,v)}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi(u,v)}{\partial v}\right)^2.$$

Napomena:

(i) Aproksimiramo li plohu S tvarnim objektom kojemu je "debljina zanemariva prema dužini i širini" (tkanina, tanka koža, tanki lim ili sl.) gustoće $f(x, y, z)$, onda pripadni plošni integral prve vrste mjeri masu toga objekta.

(ii) Ako je ploha S po dijelovima glatka i sastavljena od konačno mnogo glatkih ploha $S_1, \cdots, S_n$ onda se njezin plošni integral prve vrste definira kao pripadni zbroj, tj.

$$\iint_S f dS = \iint_{S_1} f dS + \cdots + \iint_{S_n} f dS.$$

Na kraju navedimo očiglednu linearnost plošnog integrala prve vrste:

Teorem 5.11 Neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidne funkcije, $S \subseteq X$ po dijelovima glatka ploha i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\iint_S (\lambda f + \mu g)\, dS = \lambda \iint_S f dS + \mu \iint_S g dS.$$