2.3 Parcijalne derivacije viših redova

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, definiramo, kao parcijalne derivacije prvih parcijalnih derivacija $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., m$ (jer to su funkcije od m varijabli!).
Dakle, ako je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : A_i \longrightarrow \mathbb{R},\ A_i \subseteq D,$$

derivablna po varijabli x_j, $j \in \{1, 2, ..., m\}$ u točki $T_0 \in A_i$, onda broj

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j}(T_0) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(T_0) \equiv f''_{x_j x_i}$$

nazivamo **druga parcijalna derivacija funkcije f po** varijablama x_i i x_j (redom) u točki T_0.

Ako funkcija f ima sve parcijalne derivacije drugog reda u točki T_0, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(T_0)$, $i, j = 1, 2, ..., m$, onda kažemo da je funkcija f **dvaput derivabilna u točki** T_0.

Neka je $A_{ij} \subseteq D$ skup svih točaka $T \in D$ u kojima $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ima parcijalnu derivaciju drugog reda po varijablama x_i i x_j (redom). Tada dobivamo m^2 funkcija svaka od m varijabli:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \ : \ A_{ij} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ i, j = 1, 2, ..., m$$

$$T \ \in \ A_{ij} \ \xrightarrow{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(T) \in \mathbb{R}.$$

Funkciju $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : A_{ij} \longrightarrow \mathbb{R}$ tada nazivamo **druga parcijalna derivacija od f po** x_i i x_j (redom).

Ako je $A = \bigcap_{i,j=1}^{m} A_{ij} \subseteq D$, $A \neq \emptyset$ (tada su na A definirane sve $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$) kažemo da je f **dvaput derivabilna na skupu** $A \subseteq D$ (i svakom skupu $B \subseteq A$);

Ako je f dvaput derivabilna u svakoj točki $T \in D$ (tj. ako je $A = D$), govorimo o **dvaput derivabilnoj funkciji**.

Slično (induktivno), definiramo i **parcijalne derivacije** $n-$**tog reda.**

Teorem 2.6 (Schwartzov) Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, derivabilna na nekoj ε-kugli $K((x_0, y_0); \varepsilon) \subseteq D$ i neka f ima na toj kugli i parcijalnu derivaciju drugoga reda po x i y redom, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Ako je funkcija

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{K((x_0,y_0);\varepsilon)} : K((x_0, y_0); \varepsilon) \to \mathbb{R}$$

neprekidna u točki (x_0, y_0), onda postoji parcijalna derivacija drugoga reda funkcije f po y i x redom u točki (x_0, y_0) i pritom je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

<u>Dokaz:</u>

Primjer 2.9 Promatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanu propisom

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Funkcija f je derivabilna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ i pritom je

$$f'_x(x,y) = y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

$$f'_y(x,y) = x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Nadalje, obje ove parcijalne derivacije su derivabilne funkcije (na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) i vrijedi

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = f''_{xy}(x,y).$$

Pogledajmo sada što je s derivabinošću u točki $(0,0)$!

Budući da je $f(x,0) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $f(0,y) = 0$ za svaki $y \in \mathbb{R}$, to je f derivabilna i u $(0,0)$ i $f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0)$. Primijetimo da je

$$f'_x(x,0) = 0,\ f'_y(x,0) = x,\ f'_x(0,y) = -y,\ f'_y(0,y) = 0,$$

pa za druge mješovite parcijalne derivacije od f u $(0,0)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} f''_{yx}(0,0) &= \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f'_x(0, 0+\triangle y) - f'_x(0,0)}{\triangle y} = \\ &= \lim_{\triangle y \to 0} \frac{-\triangle y - 0}{\triangle y} = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{xy}(0,0) &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f'_y(0+\triangle x, 0) - f'_y(0,0)}{\triangle x} = \\ &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x - 0}{\triangle x} = 1, \end{aligned}$$

Dakle, funkcija f je dvaput derivabilna. Međutim, "mješovite" druge parcijalne derivacije $f''_{yx}(0,0)$ i $f''_{xy}(0,0)$ su međusobno različite! Uzrok, dakako, leži u prekidnosti funkcije $f''_{xy}(x,y)$ u točki $(0,0)$.

Napomena Schwartzov teorem možemo poopćiti i na više derivacije (ako su neprekidne), tj. opet nije bitan poredak deriviranja.

Teorem 2.7 Neka su funkciji $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ na nekoj $\varepsilon-$kugli $K(T_0; \varepsilon) \subseteq D$ neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo $r-$tog reda. Ako na toj $\varepsilon-$kugli f ima i sve parcijalne derivacije $(r+1)-$vog reda i ako su one sve neprekidne u točki T_0, onda vrijednosti parcijalnih derivacija $(r+1)-$vog reda u točki T_0 ne ovise o redosljedu deriviranja po pojedinim varijablama.

Primjer 2.10 Odredimo sve parcijalne derivacije drugoga reda i treće parcijalne derivacije po x, y i x redom, te po x, x, i y redom (ondje gdje postoje) za funkciju

$$f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 y + x \ln y.$$

Definicijsko područje D je otvorena poluravnina $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$ i funkcija f je derivabilna. Pritom je, u bilo kojoj točki $(x,y) \in D$,

$$f'_x(x,y) = 2xy + \ln y,$$

$$f'_y(x,y) = x^2 + \frac{x}{y}.$$

Primijetimo da su i obje parcijalne derivacije derivabilne funkcije, tj. da je funkcija f dvaput derivabilna, i da je

$$f''_{xx}(x,y) = 2y,\ f''_{yx}(x,y) = 2x + \frac{1}{y},$$

$$f''_{xy}(x,y) = 2x + \frac{1}{y},\ f''_{yy}(x,y) = -\frac{x}{y^2}.$$

Napokon, očito je da je f i triput (zapravo, po volji mnogo puta) derivabilna i da je $f'''_{xyx}(x,y) = 2 = f'''_{yxx}(x,y)$.

<u>Uočimo:</u> sve parcijalne derivacije (svih redova) su neprekidne, pa vrijedi Schwartzov teorem.

2.5 Diferencijali viših redova

Diferencijale viših redova definirat ćmo induktivno (slično kao za funkcije jedne varijable). Sjetimo se:

Diferencijal funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ u točki T_0 smo definirali linearan funkcional

$$df\left(T_0\right) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},$$

gdje je njegova vrijednost u točki (vektoru) $T = T_0 + dT \equiv (x_1, ..., x_m) = \left(x_1^0 + dx_1, ..., x_m^0 + dx_m\right)$ dana sa

$$df\left(T_0\right)(T) = df\left(T_0\right)\left(\left(x_1, ..., x_m\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(T_0\right) \triangle x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(T_0\right) dx_i \equiv df\left(T\right).$$

Imamo

$$df\left(T_0\right) \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(T_0\right) \cdot d^i \equiv df \in Hom\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$$

Dakle, ako je funkcija diferencijablna onda je dobro definirana funkcija (**diferencijal** od f)

$$df : D \to Hom\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right), \quad T \to df\left(T\right)$$

koja svakoj točki $T \in D$ pridjeljuje diferencijal od f u toj točki. Kako je $Hom\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \cong \mathbb{R}^m$, diferencijal od f možemo shvatiti kao vektorsku funkciju

$$df : D \to Hom\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right) \cong \mathbb{R}^m, \quad T \to \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(T\right), ..., \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(T\right)\right)$$

Definicija 2.8 Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ difrerencijabilna funkcija. Ako je diferencijal od f u točki T_0, $df\left(T_0\right)$, diferencijabilna funkcija u točki T_0, onda kažemo da je f **dvaput diferencijabilna u točki** T_0. Pripadni diferencijal

$$df\left(df\right)\left(T_0\right) \equiv d^2 f\left(T_0\right) : D \to Hom\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \cong \mathbb{R}^m$$

nazivamo **drugim diferencijalom od** f **u točki** T_0, gdje je

$$df\left(df\right)\left(T_0\right)\left(T\right) = d^2 f\left(T_0\right)\left(T\right) = d\left(df\left(T_0\right)\left(T\right)\right)\left(T\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(T_0\right) \cdot dx_i \cdot dx_j \equiv d^2 f\left(T\right) \in \mathbb{R}$$

Imamo

$$d^2 f\left(T_0\right) \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(T_0\right) \cdot d^i \cdot d^j \equiv df \in Hom\left(\mathbb{R}^{m^2}, \mathbb{R}\right)$$

Ako je diferencijal df diferencijabilna funkcija u svakoj točki iz $T \in D$, tj. ako je f dvaput diferencijabilna u svakoj točki $T \in D$, onda kažemo da je f **dvaput diferencijabilna funkcija**. Tada je dobro definirana vektorska funkcija

$$d^2 f \equiv df\,(f) : D \to Hom\,(\mathbb{R}^m, Hom\,(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})) \cong$$

$$\cong Hom\,(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m^2} \cong Hom\left(\mathbb{R}^{m^2}, \mathbb{R}\right)$$

$$T \to d^2 f\,(T) \equiv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(T), ..., \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m}(T)\right)$$

koju nazivamo **drugi diferencijal** od f.

Više diferencijale od f u T_0 definiramo induktivno: Ako je r-ti diferencijal od f

$$d^r f : D \to Hom\left(\mathbb{R}^{m^r}, \mathbb{R}\right) \cong \mathbb{R}^{m^r}$$

u točki T_0, $d^r f\,(T_0)$, diferencijabilna funkcija u točki T_0, onda $(r+1)$**-vi diferencijal od** f **u točki** T_0 definiramo kao

$$df\,(d^r f)\,(T_0) = d^{r+1} f\,(T_0) : D \to Hom\left(\mathbb{R}^{m^r}, \mathbb{R}\right) \cong \mathbb{R}^{m^r},$$

gdje je

$$df\left(d^r f\right)\left(T_0\right)\left(T\right)=d^{r+1}f\left(T_0\right)\left(T\right)=d\left(d^r f\left(T_0\right)\left(T\right)\right)\left(T\right)=$$

$$=\sum_{i_1=1}^{m}\cdots\sum_{i_{r+1}=1}^{m}\frac{\partial^{r+1}f}{\partial x_{i_i}\cdots\partial x_{i_{r+1}}}\left(T_0\right)\cdot dx_{i_1}\cdots dx_{i_{r+1}}$$

$$\equiv d^{r+1}f\left(T\right)\in\mathbb{R}$$

Tada je dobro definirana vektorska funkcija

$$d^{r+1}f:D\to Hom\left(\mathbb{R}^m,Hom\left(\mathbb{R}^{m^r},\mathbb{R}\right)\right)\cong$$

$$\cong\mathbb{R}^{m^{r+1}}\cong Hom\left(\mathbb{R}^{m^{r+1}},\mathbb{R}\right)$$

$$T\to d^{r+1}f\left(T\right)\equiv\left(\frac{\partial^{r+1}f}{\partial x_1\cdots\partial x_1}\left(T\right),...,\frac{\partial^{r+1}f}{\partial x_m\cdots\partial x_m}\left(T\right)\right)$$

koju nazivamo $(r+1)$**-vi diferencijal** od f.

Za $m = 2$ imamo

$$d^2 f(T) \equiv d^2 f(T_0)(T) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T_0) \cdot dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(T_0) \cdot dx \cdot dy +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(T_0) \cdot dy \cdot dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(T_0) \cdot dy^2 =$$

(Schwartzov teorem)

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T_0) \cdot dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(T_0) \cdot dy \cdot dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(T_0) \cdot dy^2 \right) \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y^2} \cdot dy \right)^2 f(T_0)$$

Općenito, zbog Schwartzovog teorema formalno možemo pisati

$$d^r f(T) \equiv d^r f(T_0)(T) =$$

$$\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_r=1}^{m} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_i} \cdots \partial x_{i_r}}(T_0) \cdot dx_{i_1} \cdots dx_{i_r} =$$

$$\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} \cdot dx_m \right)^r f(T_0)$$

Primjer Neka je $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^3$. Odredite $d^2 f((1, -1)), d^3 f((1, -1))$.

2.6 Egzaktna diferencijalna forma

Promatrajmo funkcije $f_i : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $i = 1, ..., m$. Formalni zbroj

$$f_1 dx_1 + ... + f_m dx_m,$$

pri čemu su dx_i, $i = 1, ..., m$, formalne oznake za priraste varijabli, nazivamo **diferencijalnom formom** na D. To je u stvari skalarna funkcija koja svakoj točki $T \in D$ pridružuje vrijednost

$$f_1(T) dx_1 + ... + f_m(T) dx_m,$$

Primjer Diferencijal diferencijabilne funkcije

$$df(T_0)(T) \equiv df(T) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) dx_i$$

diferencijabilne funkcije f je diferencijalna forma $T \to df(T)$, gdje je

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \ i = 1, ..., m.$$

Definicija 2.9 Neka su $f_i : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $i = 1, ..., m$ neprekidno derivabilne funkcije. Reći ćemo da je pripadna diferencijabilna forma

$$f_1 dx_1 + ... + f_m dx_m,$$

egzaktna (ili **točna)** na otvorenom skupu $A \subseteq D$, ako postoji diferencijabilna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, za koju je

$$f_1(T) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(T), ..., f_m(T) = \frac{\partial f}{\partial x_m}(T),$$

tj.

$$df(T) = f_1(T)\, dx_1 + ... + f_m(T)\, dx_m$$

za svaki $T \in A$.

<u>Uočimo:</u> Funkcija iz gornje definicije, ako postoji, ima i sve parcijalne derivacije drugog reda koje su neprekidne funkcije, pa po Schwartzovom teoremu mora biti

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

za sve $i, j \in \{1, ..., m\}$.

Definicija 2.10 Za skup A kažemo da je **zvjezdast** ako postoji točka $T_0 \equiv \left(x_1^0, ..., x_m^0\right) \in A$, takva da je za svaku točku $T_1 \equiv \left(x_1^1, ..., x_m^1\right) \in A$, dužina

$$\overline{T_0 T_1} =$$

$$\left\{T \equiv (x_1, ..., x_m) : x_i = x_i^0 + t\left(x_i^1 - x_i^0\right), \, t \in [0,1], \, i = 1, ..., m\right\}$$

sadržana u skupu A.

Teorem 2.10 Neka su $f_i : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $i = 1, ..., m$ neprekidno derivabilne funkcije na otvorenom zvjezdastom skupu $A \subseteq D$. Pripadna diferencijalna forma je egzaktna na A ako i samo ako je

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

na A, za sve $i, j \in \{1, ..., m\}$.

Primjer Ispitajte je li diferencujalna forma

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

egzaktna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

<u>Uočimo:</u>

- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nije zvjezdast;

- Ako je
$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = P(x,y)\,dx \; + Q(x,y)\,dy,$$
gdje je
$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \text{ i } Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

- Funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ su imaju neprekidne parcijalne derivacije po volji visokog reda.

- $$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2}{x^2+y^2}$$
za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \diagdown \{(0,0)\}$.

- forma nije egzaktna na $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \diagdown \{(0,0)\}$.

- forma je egzaktna na svakom otvorenom pravokutniku koji ne sadrži $(0,0)$.