2.7 Taylorova formula

Teorem 2.11 Neka funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, ima na nekoj ε-kugli $K(T_0, ; \varepsilon) \subseteq D$, $T_0 \equiv \left(x_1^0, ..., x_m^0\right)$ neprekidne derivacije do uključivo $(n+1)-$vog reda, $n \geq 0$, onda za svaku točku $T \equiv (x_1, ..., x_m) \in K(T_0, \varepsilon)$ vrijedi **Taylorova formula:**

$$
\begin{aligned}
f(T) \;=\; & f(T_0) + \frac{1}{1!}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - x_i^0\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) f(T_0) + ... + \\
& + \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - x_i^0\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(T_0) + R_n(T),
\end{aligned}
$$

gdje je

$$
R_n(T) = \frac{(1-\theta)^{n+1-p}}{p \cdot n!}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - x_i^0\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{n+1} f(T_\theta), \tag{4}
$$

$$
0 < \theta < 1, \;\; p \in \mathbb{N},
$$

$$
T_\theta = \left(x_1^0 + \theta\left(x_1 - x_1^0\right), ..., x_m^0 + \theta\left(x_m - x_m^0\right)\right) \in K(T_0, \varepsilon).
$$

<u>Dokaz:</u>

Ostatak $R_n(T)$ napisan u obliku (4) nazivamo **Schlömilichov oblik ostatka Taylorove formule.** Za $p = 1$ dobivamo **Cauchijev**, a za $p = n + 1$ dobivamo **Lagrangeov** oblik ostatka.

Vrijedi

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{R_n(T)}{\rho^n} = 0 \quad (\Rightarrow \lim_{\rho \to 0} R_n(T) = 0),$$

gdje je $\rho = \|T - T_0\| = d(T, T_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2}$.

Zbog toga ponekad koristimo, umjesto $R_n(T)$, oznaku $\mathcal{O}(\rho^n)$ ($\mathcal{O}(\rho^n)$ znači: ostatak $R_n(T)$ brže teži u 0 nego ρ^n). Ovaj oblik nazivamo **Peanov oblik ostatka Taylorove formule.**

<u>Uočimo:</u> Ako je f diferencijabilna onda je možemo zapisati kao

$$\triangle f(T) = df(T) + \mathcal{O}(\rho)$$

što je Taylorova formula za $n = 1$.

Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, ima na nekoj ε-kugli $K(T_0, ; \varepsilon) \subseteq D$, $T_0 \equiv \left(x_1^0, ..., x_m^0\right)$ neprekidne derivacije po volji visokog reda i ako $\lim\limits_{n \to 0} \mathcal{O}\left(\rho^n\right) = 0$, onda Taylorova formula prelazi u **Taylorov red**

$$f\left(T\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - x_i^0\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n f\left(T_0\right),$$

ili kraće, uz oznake od prije

$$f\left(T\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f\left(T_0\right)}{n!},$$

gdje je definiramo

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - x_i^0\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^0 f\left(T_0\right) \equiv f\left(T_0\right),$$

odnosno

$$d^0 f\left(T_0\right) \equiv f\left(T_0\right).$$

Primjer Razvijmo u Taylorov red oko točke $T_0 = (1, -1)$ funkciju $f(x, y) = e^{x+y}$.

<u>Uočimo:</u>

- Funkcija $f(x, y) = e^{x+y}$ neprekidne derivacije po volji visokog reda i sve su jednake f (tj. $\frac{\partial^{i+j} f}{\partial y^j \partial^i x}(x, y) = e^{x+y}$), a u točki $T_0 = (1, -1)$ imaju vrijednost 1 (tj. $\frac{\partial^{i+j} f}{\partial y^j \partial^i x}(1, -1) = e^{1-1} = 1$);

- $x - x_0 = dx = x - 1$ i $y - y_0 = dy = y + 1$

Sada je

- $$\left(\sum_{i=1}^{2}\left(x_i - x_i^0\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(1, -1) =$$

$$= \left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(1, -1)$$

$$= 1 \cdot (dx + dy)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-1)^{n-k}(y+1)^k$$

- $$R_n(T) = \frac{(1-\theta)^{n+1-p}}{p \cdot n!} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - x_i^0\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{n+1} f(T_\theta)$$

$$= \frac{(1-\theta)^{n+1-p}}{p \cdot n!} d^{n+1} f(T_\theta) = \frac{(1-\theta)^{n+1-p}}{p \cdot n!} e^{\theta(x+y)} (dx+dy)^{n+1}$$

Sada je

- $$\lim_{n\to\infty} |R_n(T)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-\theta|^{n+1-p}}{p \cdot n!} e^{\theta(x+y)} |dx+dy|^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{p} \cdot |1-\theta|^{1-p} \cdot e^{\theta(x+y)} \cdot |dx+dy| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|1-\theta|^n}{n!} |dx+dy|^n <$$

$$< \frac{1}{p} |1-\theta|^{1-p} e^{\theta(x+y)} |x+y| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|x+y|^n}{n!} = 0$$

- $$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^{n-k} (y+1)^k, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Uočimo:

$$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^{n-k} (y+1)^{k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^{n}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

što je

$$e^{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^{n}, \quad t = x+y.$$

2.8 Lokalni ekstremi

Definicija 3.18 Za funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, kažemo da ima **lokalni maksimum** (**minimum**) u točki $T_0 \equiv \left(x_1^0, ..., x_m^0\right) \in D$, ako postoji ε-okolina $K(T_0, \varepsilon) \subseteq D$ točke T_0 sa svojstvom da je

$$\forall\, T \equiv (x_1, ..., x_m) \in K(T_0, \varepsilon) \setminus \{T_0\}, \quad f(T) < f(T_0)\,.$$

($\forall\, T \equiv (x_1, ..., x_m) \in K(T_0, \varepsilon) \setminus \{T_0\}, \qquad f(T) > f(T_0)$.)

Funkcija ima **lokalni ekstrem** u $T_0 \in D$, ako u toj točki ima ili lokalni maksimum ili lokalni minimum.

Ukoliko je

$$f(T) \leq f(T_0)\,, \quad \text{za svaki } T \equiv (x_1, ..., x_m) \in D$$

($f(T) \geq f(T_0)\,, \quad$ za svaki $T \equiv (x_1, ..., x_m) \in D$)

onda kažemo da f ima **globalni maksimum** (**minimum**) u točki $T_0 \in D$.

Primjer Funkcije

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 \text{ i } f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

imaju minimum (lokalni i globalni) u točki $(0, 0)$.

Primijetimo da je za prvu funkciju točka $(0, 0, 0)$ tjeme paraboloida (grafa) i da ona u toj točki ima parcijalne derivacije, a da je za drugu funkciju ta točka vrh stošca (grafa) i da ne postoje parcijalne derivacije u toj točci.

Teorem 2.12 (Nužan uvjet za lokalni ekstrem) Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, ima u točki $T_0 = \left(x_1^0, ..., x_m^0\right) \in D$ lokalni ekstrem i ako je u toj točki derivabilna, onda je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) = 0.$$

za svaki $i = 1, ..., m$.

<u>Dokaz:</u>

Uočimo:

- Za diferencijabilnu funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ u $T_0 \in D$, nužan uvjet je ekvivalentan sa

$$df\,(T_0) = 0.$$

- U tom slučaju točku T_0 nazivamo **stacionarna točka**. (Stacionarna točka je kandidat za ekstrem!)

  Ako je $m = 2$, geometrijski, uvjet

$$df\,(x_0, y_0) = 0$$

znači da je pripadna tangencijalna ravnima u točki $(x_0, y_0, f\,(x_0, y_0))$ paralelna s $XY-$ravninom, tj. ima jednadžbu $z = f\,(x_0, y_0)$.

Dovoljni uvjeti za lokalni ekstrem

Želimo naći dovoljne uvjete za postojanje ekstrema funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ u stacionarnoj točki $T_0 \in D$.

- Pretpostavimo da postoji ε-kugla $K(T_0, \varepsilon) \subseteq D$ točke T_0 na kojoj f ima neprekidne druge parcijalne derivacije i barem jedna od njih je različita od 0 u T_0;

- Budući je T_0 stacionarna točka iz Taylorove formule za $T \in K(T_0, \varepsilon)$ dobivamo

  $$f(T) = f(T_0) + \frac{d^2 f(T_0)}{2!} + \mathcal{O}\left(\rho^2\right), \quad \rho = d(T_0, T),$$

  i $d^2 f(T_0) \neq 0$.

- Ako je T_0 lokalni ekstrem postoji δ-kugla $K(T_0, \delta) \subseteq D$, $\delta \leq \varepsilon$, točke T_0 tako da je da je prirast $\Delta f(T) = f(T) - f(T_0)$ stalnog predznaka, tj. $\frac{d^2 f(T_0)}{2!} + \mathcal{O}\left(\rho^2\right)$ stalnog predznaka.

• Definirajmo funkciju $g : K(T_0, \delta) \to \mathbb{R}$ danu sa

$$g\left(T\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - x_i^0\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f\left(T_0\right)$$

Sada je

$$\Delta f\left(T\right) = g\left(T\right) + \mathcal{O}\left(\rho^2\right).$$

• Imamo četiri mogućnosti:

i) $\left(\forall\, T \in K(T_0, \delta)\right),\, g\left(T\right) > 0$
(f ima lok. minim. u T_0);

ii) $\left(\forall\, T \in K(T_0, \delta)\right),\, g\left(T\right) < 0$
(f ima lok. maks. u T_0);

iii) ili $\left(\forall\, T \in K(T_0, \delta)\right),\, g\left(T\right) \geq 0$ ili $\left(\forall\, T \in K(T_0, \delta)\right)$, $g\left(T\right) \leq 0$
(f može a ne mora imati lok. ekstrem u T_0 - potrebni dodatni uvjeti);

iv) g mijenja predznak na $K(T_0, \delta)$, tj. postoje barem tri točke $T_1, T_2, T_3 \in K(T_0, \delta)$ tako da je $g\left(T_1\right) > 0$, $g\left(T_1\right) = 0$, $g\left(T_1\right) < 0$.
(f nema lok. ekstrem u T_0);

Pokažimo i) i ii) u nešto izmjenjenom obliku.

Teorem 2.13 (Dovoljni uvjeti za lokalni ekstrem) Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, dvaput diferencijabilna na nekoj ε-kugli $K(T_0, \varepsilon) \subseteq D$. Neka je T_0 stacionarnaj točka $T_0 \in D$ i neka barem jedna od drugih parcijalnih derivacija funkcije f ne iščezava na $K(T_0; \varepsilon)$. Ako su sve determinante

$$D_r = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(T_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_1}(T_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^{i2} f}{\partial x_1 \partial x_r}(T_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_r}(T_0) \end{vmatrix}, \ r = 1, ..., m,$$

- Ako su sve determinante $D_r > 0$, tada je f u točki T_0 ima lokalni minimum;

- Ako je $D_r > 0$ za r paran, a $D_r < 0$ za r neparan, tada je f u točki T_0 ima lokalni maksimum.

Specijalno:

- **Dovoljni uvjeti za lokalni ekstrem funkcije dvije varijable:** Neka je $T_0 = (x_0, y_0) \in D$ stacionarna točka dvaput diferencijabilne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, i neka barem jedna od drugih parcijalnih derivacija funkcije f ne iščezava na $K(T_0; \varepsilon) \subseteq D$. Neka je

$$D_2 = f''_{xx}(T_0) \cdot f''_{yy}(T_0) - \left[f''_{xy}(T_0)\right]^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} f''_{xx}(T_0) & f''_{xy}(T_0) \\ f''_{xy}(T_0) & f''_{yy}(T_0) \end{vmatrix}.$$

Tada vrijedi:

- Ako je $D_2 > 0$ i $f''_{xx}(T_0) > 0$, tada je f u točki T_0 ima lokalni minimum $f(T_0)$;

- Ako je $D_2 > 0$ i $f''_{xx}(T_0) < 0$, tada je f u točki T_0 ima lokalni maksimum $f(T_0)$;

- Ako je $D_2 < 0$, tada f u točki T_0 nema ekstrem.

- Ako je $D_2 = 0$ ne možemo zaključiti ništa o ekstremu. U ovom slučaju možemo imati ekstrem, ali i sedlastu točku. Tu je potrebno daljnje ispitivanje.

- **Dovoljni uvjeti za lokalni ekstrem funkcije tri varijable:** Neka je $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ stacionarna točka dvaput diferencijabilne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, i neka barem jedna od drugih parcijalnih derivacija funkcije f ne iščezava na $K(T_0; \varepsilon) \subseteq D$. Neka je

$$D_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(T_0) & f''_{xy}(T_0) & f''_{xz}(T_0) \\ f''_{xy}(T_0) & f''_{yy}(T_0) & f''_{yz}(T_0) \\ f''_{xz}(T_0) & f''_{yz}(T_0) & f''_{zz}(T_0) \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(T_0) & f''_{xy}(T_0) \\ f''_{xy}(T_0) & f''_{yy}(T_0) \end{vmatrix} \qquad \text{i} \qquad D_1 = f''_{xx}(T_0)$$

- Ako je $D_3 > 0$, $D_2 > 0$ i $D_1 > 0$, tada je f u točki T_0 ima lokalni minimum $f(T_0)$;
- Ako je $D_3 < 0$, $D_2 > 0$ i $D_1 < 0$, tada je f u točki T_0 ima lokalni maksimum $f(T_0)$;
- U svim ostalim slučajevima kada je $D_2 \neq 0$, f u točki T_0 nema lokalni ekstrem;
- Ako je $D_2 = 0$ nema odluke.

Primjer Odrediti ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Vrijedi:

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4y = 4\left(x^3 - y\right) = 0 \Rightarrow x^3 = y,$$

$$f_y(x,y) = 4y^3 - 4x = 4\left(y^3 - x\right) = 0 \Rightarrow y^3 = x.$$

Slijedi

$$x^9 - x = x\,(x-1)\,(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right) = 0,$$

i $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ su nultočke. Stacionarne točke su

$$T_1 = (0,0),\ T_2 = (1,1),\ T_3 = (-1,-1).$$

Budući da je

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2,\ f_{xy}(x,y) = -4,\ f_{yy}(x,y) = 12y^2,$$

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16$$

imamo:

- $$D(0,0)=\left(144x^2y^2-16\right)\Big|_{(x,y)=(0,0)}=-16$$

  i funkcija f u T_1 nema ekstrem;

- $$D(1,1)=\left(144x^2y^2-16\right)\Big|_{(x,y)=(1,1)}=128,\ f_{xx}(1,1)=12$$

  i funkcija f u T_2 ima lokalni minimum $z_{\min}=-1$;

- $$D(-1,-1)=\left(144x^2y^2-16\right)\Big|_{(x,y)=(-1,-1)}=128,$$
  $$f_{xx}(-1,-1)=12$$

  i funkcija f u T_3 ima lokalni minimum $z_{\min}=-1$.

Prisjetimo se: Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu (zatvorenom intrevalu) $[a, b]$, onda ona na tom intervalu poprima (globalnu) minimalnu i maksimalnu vrijednost.

Teorem 3.21 Ako je $z = f(x, y)$ neprekidna na zatvorenom omeđenom skupu $D \subseteq \mathbb{R}^2$, tada postoje točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) u kojima f ima globalni maksimum $f(x_1, y_1)$ i globalni minimum $f(x_2, y_2)$, redom.

Traženje globalnih ekstrema:

a) Nađu se stacionarne točke (lokalni ekstremi) funkcije f i vrijednosti od f u njima;

b) Nađu točke ekstrema od f na rub od D i vrijednosti od f u njima;

c) Točka kojoj pripada najveća vrijednost od f iz $a)$ i $b)$ je točka globalnog maksimuma, a točka kojoj pripada najmanja vrijednost od f je točka globalnog minimuma.

Primjer (auditorne vježbe).