2.9 Obstojnost implicitno zadane funkcije

Jednadžbu oblika

$$F\left(x,y\right)=0,$$

gdje je $F:D\rightarrow\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}^2$ neka funkcija dviju varijabla, možemo interpretirati i kao jednadžbu kojom je implicitno zadana neka funkcija jedne varijable

$$y=f\left(x\right),\quad x\in I\subseteq\mathbb{R}.$$

Jednadžbi $F\left(x,y\right)=0$ prirodno pridružujemo skup

$$S=\left\{\left(x,y\right)\in D:F\left(x,y\right)=0\right\}.$$

(neka krivulja u ravnini).

Definicija 2.22 Za funkciju jedne varijable $f:I\rightarrow\mathbb{R}$, gdje je $I\subseteq\mathbb{R}$, za koju vrijedi

$$F\left(x,\ f\left(x\right)\right)=0,\quad\forall x\in I$$

kažemo da je implicitno zadana jednadžbom $F\left(x,y\right)=0$.

Ovo iskazujemo i ekvivalentnim zahtjevom da je graf Γ_f funkcije f sadržan u skupu S, odnosno

$$\Gamma_f=\left\{\left(x,f\left(x\right)\right):x\in I\right\}\subseteq S.$$

Uočimo:

- Ako je jednadžbom $F(x, y) = 0$ implicitno zadana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, onda je i svaka restrikcija te funkcije $f\,|_{I'} : I' \to \mathbb{R}$, $I' \subseteq I$ implicitno zadana istom jednadžbom ($\Gamma_{f|_{I'}} \subseteq \Gamma_f \subseteq S$);

- Često je jednadžbom $F(x, y) = 0$ implicitno zadano više funkcija, a djelovi od S su grafovi tih funkcija. Od interesa su slučajevi kad je tom jednadžbom implicitno zadana točno jedna funkcija, tj. kada je $\Gamma_f = S$.

Primjer:

- $$\underbrace{y - \sqrt{x} + 1}_{F(x,y)} = 0 \implies y = \sqrt{x} - 1.$$

  Zadana je funkcija: $f(x) = \sqrt{x} - 1$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

- $$\underbrace{x^2+y^2-1}_{F(x,y)}=0 \implies y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

  Ovdje je

  $$S=\left\{(x,y) : x^2+y^2-1=0\right\};$$

  centralna kružnica radijusa 1.

  Sa $F(x,y)=0$ ovdje su implicitno zadano dvije funkcije

  $$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad f_1 : [-1,1] \to \mathbb{R},$$

  $$f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R},$$

  ali i funkcija

  $$f_3(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,\ 0.5) \\ -\sqrt{1-x^2}, & x\in[0.5,\ 1] \end{cases};$$

Teorem 2.23 Neka funkcija $F : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, zadovoljava sljedeće uvjete:

i) $(\exists\, (x_0, y_0) \in D)\ F(x_0, y_0) = 0$;

ii) $(\exists\, a, b \in \mathbb{R}^+)\ [x_0 - a,\ x_0 + a] \times [y_0 - b,\ y_0 + b] = P \subseteq D$, suženje $F|_P : P \to \mathbb{R}$ je neprekidno derivabilna funkcija i

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0;$$

Tada postoji interval $(x_0 - a_0,\ x_0 + a_0)$, $0 < a_0 \leq a$ i točno jedna neprekidno derivabilna funkcija $f : (x_0 - a_0,\ x_0 + a_0) \to \mathbb{R}$, $0 < a_0 \leq a$ takva da je

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{i} \quad F(x,\ f(x)) = 0$$

za svaki $x \in (x_0 - a_0,\ x_0 + a_0)$ i vrijedi

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$$

pri čemu je $y = f(x)$.

Primjer:

Vidjeli smo da su jednadžbom

$$\underbrace{x^2+y^2-1}_{F(x,y)}=0,$$

zadane dvije funkcije

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad f_1:[-1,1]\to\mathbb{R},$$

$$f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad f_2:[-1,1]\to\mathbb{R},$$

Ovdje je $F(x,y)=x^2+y^2-1$ neprekidno derivabilna funkcija na $\mathbb{R}^2$ i

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y.$$

U točki $(0,1)$ imamo

$$F(0,1)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,1)=0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,1)=2\neq 0,$$

pa su sve pretpostavke Teorem 2.23 ispunjene i zato mora postojati interval I (okolina) oko 0 i točno jedna neprekidno derivabilna funkcija $f:I\to\mathbb{R}$ zadana implicitno sa $x^2+y^2-1=0$.

Očito je

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad f : (-1,1) \to \mathbb{R}.$$

Međutim

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad f_1 : [-1,1] \to \mathbb{R},$$

ne zadovoljava uvjete jer f_1 nije derivabilna u $x = -1$
i $x = 1$.
Sada je

$$f'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = -\frac{0}{2} = 0$$

(ili $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$).

Uočimo da u točki $(1,0)$ imamo $F(1,0) = 0$, ali je $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 0$, pa Teorem 2.23 nije primjenjiv.

Ovo možemo poopćiti:

Jednadžbu oblika

$$F\left(x_1, ..., x_m, x_{m+1}\right) = 0,$$

gdje je $F : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ možemo interpretirati i kao jednadžbu kojom je implicitno zadana neka funkcija

$$y = f\left(x_1, ..., x_m\right), \quad \left(x_1, ..., x_m\right) \in A \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Jednadžbi $F\left(x_1, ..., x_m, x_{m+1}\right) = 0$ prirodno pridružujemo skup

$$S = \left\{\left(x_1, ..., x_m, x_{m+1}\right) \in D : F\left(x_1, ..., x_m, x_{m+1}\right) = 0\right\}.$$

(neka ploha u $\mathbb{R}^{m+1}$).

Definicija 2.24 Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$, gdje je $A \subseteq \mathbb{R}^m$, za koju vrijedi

$$F\left(x_1, ..., x_m, f\left(x_1, ..., x_m\right)\right) = 0, \quad \forall x \in A$$

kažemo da je implicitno zadana jednadžbom $F\left(x_1, ..., x_m, x_{m+1}\right) = 0.$

Ovo iskazujemo i ekvivalentnim zahtjevom da je graf Γ_f funkcije f sadržan u skupu S, odnosno

$$\Gamma_f = \left\{\left(x_1, ..., x_m, f\left(x_1, ..., x_m\right)\right) : \left(x_1, ..., x_m\right) \in A\right\} \subseteq S.$$

Teorem 2.25 Neka funkcija $F : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ otvoren, zadovoljava sljedeće uvjete:

i) $\left(\exists \left(x_1^0, ..., x_{m+1}^0\right) \in D\right) \; F\left(x_1^0, ..., x_{m+1}^0\right) = 0;$

ii) F je neprekidno derivabilna funkcija i

$$\frac{\partial F}{\partial x_{m+1}}\left(x_1^0, ..., x_{m+1}^0\right) \neq 0;$$

Tada postoji okolina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ točke $\left(x_1^0, ..., x_m^0\right)$ i točno jedna neprekidno derivabilna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, takva da je

$$f\left(x_1^0, ..., x_m^0\right) = x_{m+1}^0 \quad \text{i} \quad F\left(x_1, ..., x_m,\ f\left(x_1, ..., x_m\right)\right) = 0$$

za svaki $(x_1, ..., x_m) \in A$ i vrijedi

$$f'_{x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(x_1, ..., x_m, x_{m+1}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{m+1}}\left(x_1, ..., x_m, x_{m+1}\right)}$$

za $i = 1, ..., m$, pri čemu je $x_{m+1} = f\left(x_1, ..., x_m\right).$

Primjer:

Budući
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \implies z = \pm\sqrt{x^2+y^2},$$
onda su jednadžbom

$$\underbrace{x^2 + y^2 - z^2}_{F(x,y,z)} = 0,$$

zadane dvije funkcije

$$f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$f_2(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}, \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Ovdje je

$$S = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 - z^2 = 0\right\};$$

kružni stožac s vrhom u $(0,0,0)$.

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ je neprekidno derivabilna funkcija na $\mathbb{R}^3$ i

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 2y \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = -2z$$

U točki $(0,1,-1)$ imamo

$$F(0,1,-1)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,1,-1)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,1,-1)=1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,-1)=2\neq 0,$$

pa su sve pretpostavke Teorem 2.25 ispunjene i zato mora postojati okolina A oko $(0,1)$ i točno jedna neprekidno derivabilna funkcija $f:A\to\mathbb{R}$ zadana implicitno sa $x^2+y^2-z^2=0$. Očito je

$$f(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}, \;\; f:K((0,1),\varepsilon)\to\mathbb{R}, \; \varepsilon\leq 1.$$

Sada je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) \; = \; -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,-1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,-1)}=-\frac{0}{2}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \; = \; -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,-1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,-1)}=-\frac{1}{2}=0$$

(provjeriti deriviranjem $f(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$).

Uočimo da u točki $(0,0,0)$ imamo $F(0,0,0)=0$, ali je $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0)=0$, pa Teorem 2.25 nije primjenjiv.

3. Integriranje skalarnih funkcija

3.1 Višestruki integral

Prisjetimo se: Neka je f omeđena funkcija na segmentu $[a,b]$ i neka je segment $[a,b]$ točkama $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ podijeljen na n djelova duljina $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $i = 1, ..., n$, i neka je $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$ (po volji odabran). Tada rastavu segmenta $[a,b]$,

$$D \equiv \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{D}\left([a,b]\right) \equiv \mathcal{D},$$

možemo pridjeliti broj, tzv. **integralnu sumu**

$$S_\xi\left(f, D, \xi_1, ..., \xi_n\right) \equiv S_\xi\left(f, D\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \Delta x_i \in \mathcal{D}\left([a,b]\right) \equiv \mathcal{D}$$

Za funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je **integrabilna (u Riemannovom smislu**) ako postoji broj

$$J = J(f) \equiv \lim_{\max\{\Delta x_i\} \to 0} S_\xi\left(f, D\right).$$

Broj J nazivamo (**Riemannovim) određenim integralom** i označujemo sa

$$J \equiv \int_a^b f(x)\,dx.$$

Preciznije: Za omeđenu funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je **integrabilna (u Riemannovom smislu**) ako postoji broj $J = J(f) \in \mathbb{R}$ takav da, za svaki $\varepsilon > 0$, postoji neki rastav D_0 segmenta $[a,b]$ sa svojstvom da za svaki rastav D što profinjuje D_0 i svaku integralnu sumu $S_\xi(f,D)$, bude

$$|S_\xi(f,D) - J| < \varepsilon$$

Simbolički:

$$(\exists J \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists D_0 \in \mathcal{D})\,(\forall D \in \mathcal{D})\,(\forall S_\xi(f,D))$$

$$D_0 \supseteq D \implies |S_\xi(f,D) - J| < \varepsilon$$

Napomena: Ukoliko je $f(x) \geq 0$ Riemannova suma $S_\xi(f,D)$ daje aproksimaciju površine ravninskog lika ispod krivulje $y = f(x)$ za $x \in [a,b]$, sumom površina pravokutnika, a određeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ daje pravu površinu tog lika.

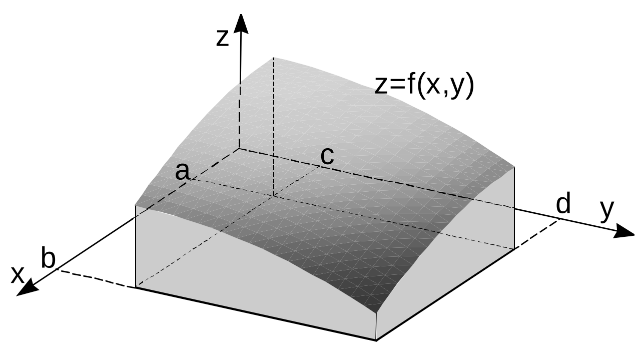
Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na zatvorenom pravokutniku

$$K = [a, b] \times [c, d] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d\right\}$$

i neka je $f(x, y) \geq 0, (x, y) \in K$. Graf G_f funkcije f je ploha čija je jednadžba $z = f(x, y)$. Označimo sa T "pseudokvadar" određen s pravokutnikom K i grafom G_f funkcije f nad njim (Slika 1.), tj.

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in K,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\right\}.$$

Izračunajmo volumen V tijela T.



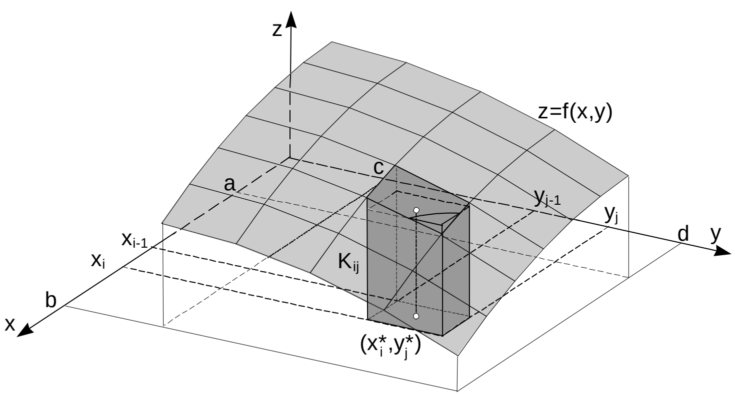
Slika 1.

Postupiti ćemo slično izračunu površine, ovdje upisivajući kvadre koji će aproksimirati volumen odgovarajućeg pseudokvadra. Segment $[a, b]$ podijelimo diobenim točkama $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ na m podsegmenata $[x_{i-1}, x_i]$ duljine $\triangle x_i$. Segment $[c, d]$ podijelimo diobenim točkama $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ na n podsegmenata $[y_{j-1}, y_j]$ duljine $\triangle y_j$.

Rastavi segmenata $[a, b]$ i $[c, d]$ određuju rastav pravokutnika K na pravokutnike

$$K_{ij} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j\right\},$$

$i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n,$ površine $\triangle K_{ij} = \triangle x_i \triangle y_j$. U svakom pravokutniku K_{ij} odaberimo proizvoljnu točku (ξ_i^1, ξ_j^2) i volumen kvadra kojemu je baza pravokutnik K_{ij} i visina $f(\xi_i^1, \xi_j^2)$ iznosi $V_{ij} = f(\xi_i^1, \xi_j^2)\triangle K_{ij}$. Taj volumen možemo uzeti kao aproksimaciju volumena pseudokvadra određenog pravokutnikom K_{ij} i grafom Γ_f funkcije f nad njim.



Slika 2.

Jasno je da traženi volumen V tijela T možemo aproksimirati zbrojem svih ovako dobivenih V_{ij}, tj.

$$V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i^1, \xi_j^2)\triangle K_{ij}.$$

Dakako da će aproksimacija volumena V biti bolja kada je rastav pravokutnika K finiji, tj. kada su m i n veći, pa stoga možemo uzeti da je

$$V = \lim_{\max\{\Delta K_{ij}\}\to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i^1, \xi_j^2) \triangle K_{ij}.$$

Poopćimo ovo:

Neka je dan kvadar

$$K = [a_1, b_1] \times ... \times [a_m, b_m] \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Nadalje, neka je za svaki i, $i = 1, ..., m$, dan rastav segmenta $[a_i, b_i]$

$$D^i = \left\{ x_0^i, ..., x_{k_i}^i \right\} \in \mathcal{D}^i \left([a_i, b_i] \right) \equiv \mathcal{D}^i,$$

$x_0^i = a_i < x_1^i < ... < x_{k_i}^i = b_i$, kojim je segment $[a_i, b_i]$ podijeljen na k_i djelova duljina $\Delta x_{j_i}^i$, $j_i = 1, ..., k_i$. Direktni produkt

$$D^1 \times ... \times D^m \equiv D \in \mathcal{D} \left(K \right) \equiv \mathcal{D}$$

nazivamo **rastavom** danog kvadra K. Na ovaj način kvadar K je rastavljen na $k_1 \cdot ... \cdot k_m$ podkvadra oblika

$$[x^1_{j_{i-1}},\ x^1_{j_i}] \times ... \times [x^m_{j_{m-1}},\ x^m_{j_m}]$$

$j_i = 1, ..., k_i,\ \ i = 1, ..., m$, "volumena" $\Delta x^1_{j_1} \cdot ... \cdot \Delta x^m_{j_m}$.

Neka je

$$\xi \equiv \left(\xi^1_{j_1}, ..., \xi^m_{j_m}\right)$$

proizvoljno odabrana točka iz svakog podkvadra $[x^1_{j_{i-1}}, x^1_{j_i}] \times ... \times [x^m_{j_{m-1}}, x^m_{j_m}]$.

Nadalje, neka je zadana

$$f : K \equiv [a_1, b_1] \times ... \times [a_m, b_m] \to \mathbb{R}$$

omeđena funkcija. Rastavu $D \in \mathcal{D}$ kvadra K, možemo pridjeliti broj, tzv. **integralnu sumu**

$$S_\xi (f, D) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{k_m} f\left(\xi^1_{j_1}, ..., \xi^m_{j_m}\right) \Delta x^1_{j_1} \cdot ... \cdot \Delta x^m_{j_m}.$$

Definicija 3.1 Neka je $f : K \equiv [a_1, b_1] \times ... \times [a_m, b_m] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Kažemo da je f **integrabilna (u Riemannovom smislu**) ako postoji broj

$$J = J(f) \equiv \lim_{\max\left\{\Delta x^1_{j_1} \cdot ... \cdot \Delta x^m_{j_m}\right\} \to 0} S_\xi (f, D).$$

Broj J nazivamo (**Riemannovim) određenim integralom od f** i označujemo sa

$$J \equiv \int\limits_K f \quad \text{ili} \quad J \equiv \int\limits_K \cdots \int f\left(x_1, ..., x_m\right) dx_1 \cdot ... \cdot dx_m$$

i govorimo o **višestrukom ($m-$strukom) integralu**.

Preciznije: Za omeđenu funkciju

$$f : K \equiv [a_1, b_1] \times ... \times [a_m, b_m] \longrightarrow \mathbb{R}$$

kažemo da je **integrabilna (u Riemannovom smislu**) ako postoji broj $J = J(f) \in \mathbb{R}$ takav da je

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists D_0 \in \mathcal{D})\,(\forall D \in \mathcal{D})\,(\forall S_\xi\,(f, D))$$

$$D_0 \supseteq D \implies \left|S_\xi\,(f, D) - J\right| < \varepsilon$$

Specijalno imamo:

- za $m = 2$
$$J \equiv \iint\limits_K f\,(x, y)\,dxdy.$$
- za $m = 3$
$$J \equiv \iiint\limits_K f\,(x, y, z)\,dxdydz.$$

Napomena: Lako je dokazati da za omeđene funkcije f i g vrijedi:

1.
$$\int_K (f+g) = \int_K f + \int_K g$$

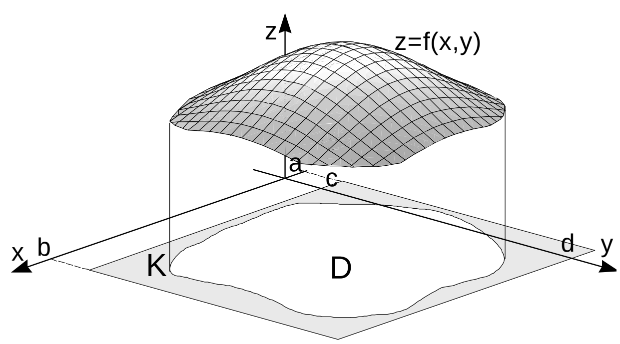
2.
$$\int_K cf = c\int_K f,\ c \in \mathbb{R}.$$

3. Ako je $f(x_1,...,x_m) \le g(x_1,...,x_m)$ za svaki $(x_1,...,x_m) \in K$ tada je
$$\int_K f \le \int_K g.$$

Za omeđenu funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, pri čemu je $D \subset \mathbb{R}^m$ omeđen skup (Slika 4.5.), pripadni višestruki integral definiramo pomoću njezinoga trivijalnog proširenja

$$\widetilde{f}(x_1, ..., x_m) = \begin{cases} f(x_1, ..., x_m), & (x_1, ..., x_m) \in D \\ 0, & (x_1, ..., x_m) \in K \setminus D \end{cases}$$

na neki kvadar $K \supseteq D$ (takav uvijek postoji jer je D omeđen).



Slika 3.

Sjetimo se, za $m = 2$, interpretacije integrala pozitivne funkcije preko volumena:

- volumen ispod grafa funkcije f nad D i volumen ispod grafa funkcije $\widetilde{f}$ nad K su jednaki, pa ima smisla integral funkcije f nad D definirati preko integrala funkcije $\widetilde{f}$ nad K (lako se vidi da taj integral, ako postoji, ne ovisi o odabranom pravokutniku).

Definicija 3.2 Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija pri čemu je $D \subset \mathbb{R}^m$ omeđen skup. Neka je $K \subset \mathbb{R}^m$ bilo koji pravokutnik što sadrži D, a funkcija $\widetilde{f} : K \to \mathbb{R}$ trivijalno proširenje funkcije f. Ako je funkcija $\widetilde{f}$ integrabilna onda **integral** *(*na D*)* od f definiramo formulom

$$\int \cdots \int_{D} f(x_1, ..., x_m)\, dx_1 \cdot ... \cdot dx_m = \tag{1}$$

$$\int \cdots \int_{K} \widetilde{f}(x_1, ..., x_m)\, dx_1 \cdot ... \cdot dx_m.$$

ili kraće

$$\int_D f = \int_K \widetilde{f}.$$

Napomena Vrijedi:

1.
$$\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g$$

2.
$$\int_D cf = c\int_D f,\ c \in \mathbb{R}.$$

3. Ako je $D = D_1 \cup D_2$ i $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ (ili $\int_{D_1 \cap D_2} f = 0$)

onda je

$$\int_{D=D_1\cup D_2} f = \int_{D_2} f + \int_{D_1} f$$

3.2 Računanje višestrukih integrala

Prisjetimo se (jednostrukog) integrala realne funkcije jedne varijable kojega, naravno, nismo izračunavali po definiciji, nego primjenom Newton-Leibnizove formule, tj. primjenom neodređenog integrala.

Istu tehniku primijeninimo i na dvostruki integral, trostruki integral (i općenito višestruki integral).

Izračun dvostrukog integrala $\iint_{K=[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$ svodi na izračun dvaju jednostrukih integrala.

Grubo rečeno: Prvo izračunajmo određeni integral $\int_c^d f(x,y)dy$ uzimajući da je varijabla x konstanta.

Rezultat će biti funkcija u varijabli x i potom nju integrirajmo uzimajući a i b kao granice integracije.

Pokazuje se da vrijedi tzv. **Fubinijev teorem**:

Teorem 3.3 (Fubini) Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, pri čemu je $K = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ pravokutnik. Tada vrijedi

- $(\forall x \in [a, b])$ funkcija $y \to f(x, y)$ je R-integrabilna na $[c, d]$;
- funkcija $x \to F(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ je R-integrabilna na $[a, b]$;
- $$\int\limits_K f = \int\limits_{[a,b]} F \qquad \text{ili}$$

$$\iint_K f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

Zamjena $x \longleftrightarrow y$ daje

$$\iint_K f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

Uobičajeni zapis je

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy,$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

i pritom kažemo da smo proveli integraciju u redoslijedu yx, odnosno xy.

Primjer Izračunajmo $I = \iint_K xy^2 dxdy$, $K = [1,2] \times [0,1]$.

$$I = \iint_K xy^2 dxdy = \int_1^2 dx \int_0^1 xy^2 dy =$$

$$\int_1^2 \left(x \left(\frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} \right) dx = \int_1^2 x \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) dx =$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Dakako, isti se rezultat dobiva i u obrnutom redoslijedu integriranja.

Napomena Za integral iz prethodnog primjera kažemo da je integral sa separiranim varijablama i on se može jednostavnije izračunati kao umnožak dvaju jednostrukih integrala:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right) \cdot \left(\int_c^d g(y)dy\right).$$

U prethodnom primjeru je

$$\iint_K xy^2 dxdy = \left(\int_1^2 xdx\right) \cdot \left(\int_0^1 y^2 dy\right) =$$

$$\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}\right) \cdot \left(\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

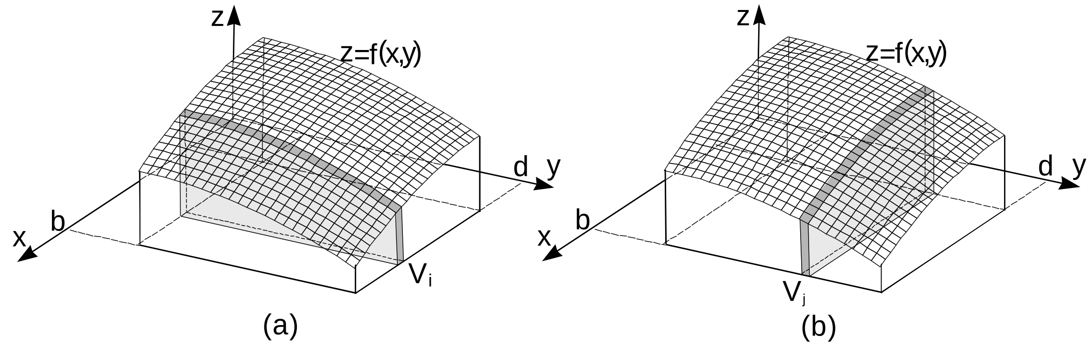
Napomena Dokaz Fubinijevog teorema je složen, ali se u slučaju pozitivne funkcije može intuitivno razumijeti tvrdnja teorema. Naime, u slučaju pozitivne funkcije dvostruki integral $\iint_K f(x,y)dxdy$ je broj koji je jednak volumenu V odgovarajućeg pseudokvadra. Do izračuna toga volumena možemo doći i na sljedeća dva načina. U prvom slučaju istaknuti dio (Slika 4.(a)) ima volumen

$$V_i \simeq \left[\int_c^d f(\xi_i^*, y)dy\right] \triangle x_i.$$

slučaju je

$$V = \lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left[\int_c^d f(\xi_i^*, y)dy\right]}_{F(\xi_i^*)} \triangle x_i =$$

$$= \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx.$$



(a) (b)

Slika 4.

U drugom slučaju istaknuti dio (Slika 4.(b)) ima volumen

$$V_j \simeq \left[\int_a^b f(x, \varsigma_j^*) dx \right] \triangle y_j.$$

Zbroj tih volumena

$$\sum_{j=1}^n V_j = \sum_{j=1}^n \left[\int_a^b f(x, \varsigma_j^*) dx \right] \triangle y_j$$

aproksimira volumen V i u graničnom slučaju je

$$V = \lim_{\max\{\Delta y_j\} \to 0} \sum_{j=1}^n \left[\int_a^b f(x, \varsigma_j^*) dx \right] \triangle y_j =$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Ovim računanjem volimena V na dva načina dobivamo da je zaista

$$\iint\limits_K f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

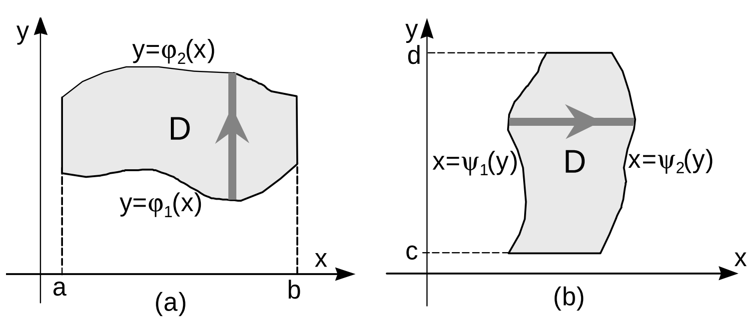
Posebno, kad je definicijsko područje $D \subset \mathbb{R}^2$ omeđeno grafovima dviju neprekidnih funkcija lako dobivamo, iz formule (1), ovaj teorem:

Teorem 3.4 Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija, pri čemu je $D \subset \mathbb{R}^2$ omeđen grafovima neprekidnih funkcija $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi_1 \leq \varphi_2$ (Slika 4.6.(a)). Tada je

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx. \quad (2)$$

Posve slično, kad je $D \subset \mathbb{R}^2$ omeđen grafovima neprekidnih funkcija $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$, $\psi_1 \leq \psi_2$ (Slika 4.6.(b)), vrijedi

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy. \quad (3)$$



Slika 5.

Umjesto (2) i (3) uobičajilo se pisati

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx,$$

i pritom smo u prvome slučaju integraciju proveli u redoslijedu yx, a u drugome u redoslijedu xy.

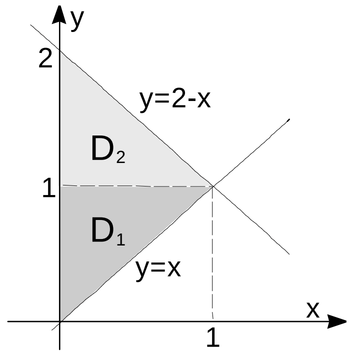
Primjer Promijeniti poredak integracije u integralu

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} \frac{x}{y} dy$$

i izračunajti njegovu vrijednost.
Područje integracije

$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2-x \end{cases}$$

možemo zapisati i na ovaj način $D = D_1 \cup D_2$ (Slika 4.8.),



Slika 6.

gdje je

$$D_1 \cdots \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y \end{cases} , \; D_2 \cdots \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 2-y \end{cases} .$$

Imamo

$$I = \iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} =$$

$$\int_0^1 dy \int_0^y \frac{x}{y} dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} \frac{x}{y} dx =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{y} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=y} \right) dy + \int_1^2 \left(\frac{1}{y} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=2-y} \right) dy =$$

Iskažimo sada analogone prethodnih teorema u slučaju trostrukog integrala.

Teorem 3.5 Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ funkcija, pri čemu je $K = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] \subset \mathbb{R}^3$ kvadar. Tada vrijedi:

- $(\forall x \in [a, b])$ funkcija $(y, z) \to f(x, y, z)$ je R-integrabilna na $[c, d] \times [r, s]$;

- funkcija $x \to F(x) = \int_c^d \left(\int_r^s f(x, y, z) dz \right) dy$ je R-integrabilna na $[a, b]$;

-
$$\int\limits_K f = \int\limits_{[a,b]} F \qquad \text{ili}$$
$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz =$$
$$= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

  "Izmijenjujući mjesta" varijablama dobivamo analogne integracijske formule.

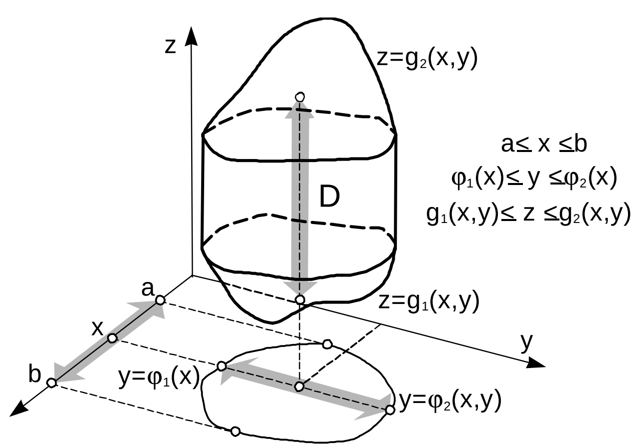
Teorem 3.6 Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, funkcija, pri čemu je

$$D = \left\{ \begin{array}{c} (x, y, z) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \\ g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y) \end{array} \right\},$$

gdje su φ_1, φ_2 i g_1, g_2 neprekidne funkcije (Slika 4.9.). Tada je

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx. \quad (4)$$



Slika 7.

Posve slično, ako je

$$D = \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \end{array} \right\},$$

gdje su ψ_1, ψ_2 i g_1, g_2 neprekidne funkcije (Slika 4.10.). Tada je

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dx \right) dy. \qquad (5)$$

Kao i kod dvostrukog integrala uobičajilo se umjesto zapisa (4) i (5) koristiti

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz, \qquad \text{(4a)}$$

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz, \qquad \text{(5a)}$$

i pritom govorimo da smo integraciju proveli u redoslijedu zyx, odnosno redoslijedu zxy.

Primjer Izračunajmo

$$\iiint_D 2z dx dy dz$$

gdje je $D \subset \mathbb{R}^3$ omeđen grafovima funkcija $g_1(x,y) = x^2 + y^2$ i $g_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Uočimo da promatrane plohe prolaze ishodištem i da se sijeku uzduž jedinične kružnice $x^2 + y^2 = 1$ u ravnini $z = 1$. Budući da između ravnina $z = 0$ i $z = 1$ vrijedi $x^2 + y^2 < \sqrt{x^2+y^2}$, to je promatrano tijelo D određeno nejednadžbama:

$$\begin{aligned} -1 \ &\leq \ x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} \ &\leq \ y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ x^2+y^2 \ &\leq \ z \leq \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Imamo:

$$\iiint_D 2z dx dy dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} 2z dz =$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\left(z^2\right)\Big|_{z=x^2+y^2}^{z=\sqrt{x^2+y^2}} \right] dy =$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\left(x^2+y^2\right) - \left(\left(x^2+y^2\right)^2\right)\right] dy =$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(y^2+x^2-x^4-2x^2y^2-y^4\right) dy =$$

$$\int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{1}{3}y^3+x^2y-x^4y-\frac{2}{3}x^2y^3-\frac{1}{5}y^5\right)\Bigg|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}\right] dx =$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 + 2\left(x^2-x^4\right)\sqrt{1-x^2}\right.$$

$$\left. -\frac{4}{3}x^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 - \frac{2}{5}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5\right] dx = \frac{\pi}{6}$$