

3.3 Zamjena varijabla u višestrukome integralu

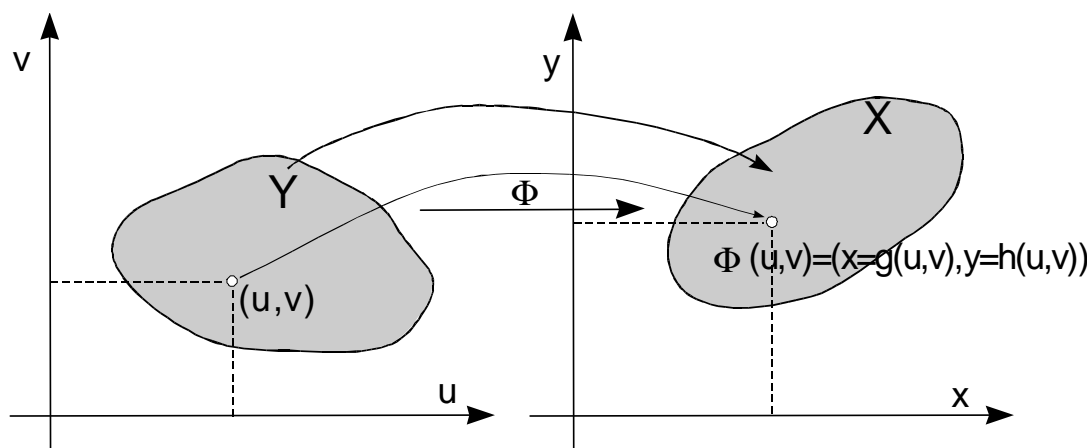
Neka su $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ ravninska područja i neka je bi-jektivno preslikavanje

$$\Phi : Y \rightarrow X$$

određeno sa

$$(u, v) \mapsto \Phi(u, v) = (x = g(u, v), y = h(u, v)),$$

gdje su $g, h : Y \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije koje imaju neprekidne prve parcijalne derivacije (Slika 8.).



Slika 8.

Označimo sa

$$\Phi^{-1} : X \rightarrow Y, \Phi^{-1}(x, y) = (u = G(x, y), v = H(x, y))$$

inverzno preslikavanje. Za preslikavanje Φ s ovim svojstvima kažemo da je C^1 **transformacija** koja Y preslikava u X .

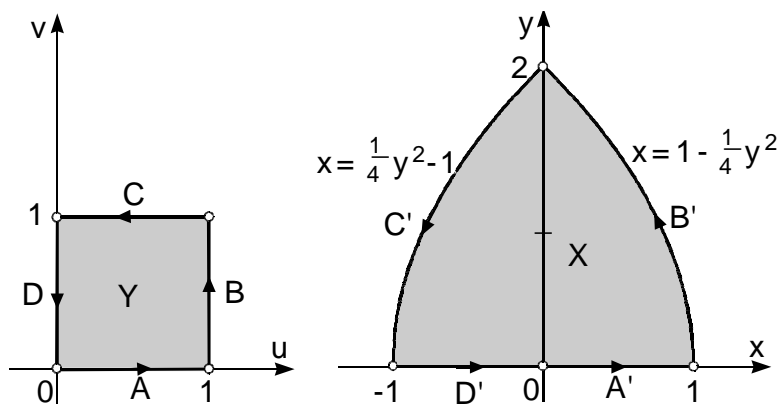
Primjer 1 Na primjer područje

$$Y = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$$

preslikava se transformacijom Φ određenom funkcijama $g, h : Y \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$x = g(u, v) = u^2 - v^2, \quad y = h(u, v) = 2uv$$

u područje X u xy -ravnini omeđeno parabolama $x = 1 - \frac{1}{4}y^2$, $x = \frac{1}{4}y^2 - 1$ i segmentom $[-1, 1]$ na x -osi.



Slika 9.

Zaista, za dužinu

$$A = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, v = 0\}$$

imamo $x = u^2$, $y = 0$, pa se ona transformacijom Φ

preslikava u dužinu

$$A' = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0\}.$$

Za dužinu

$$B = \{(u, v) \mid u = 1, 0 \leq v \leq 1\}$$

imamo $x = 1 - v^2$, $y = 2v$ ($0 \leq v \leq 1$), i eliminacijom v , dobivamo

$$B' = \{(x, y) \mid x = 1 - \frac{1}{4}y^2, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Dakle, slika B' je dio grafa parabole od točke 1 na x -osi do točke 2 na y -osi. Analogno određujemo slike C' i D' dužina C i D (Slika 9.).

Neka je transformacija $\Phi(u, v)$ dana sa

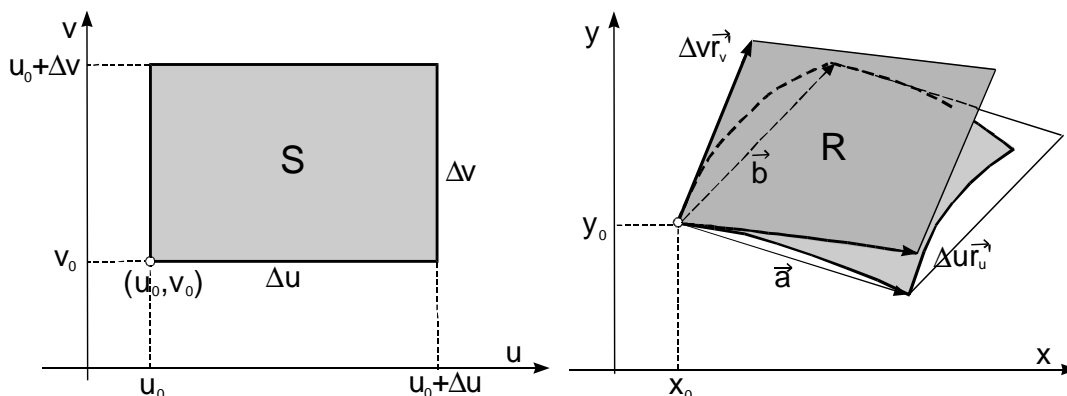
$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v).$$

Označimo sa

$$\vec{r}(u, v) = g(u, v) \vec{i} + h(u, v) \vec{j}$$

vektor položaja točke $\Phi(u, v) = (g(u, v), h(u, v))$ (u xy -ravnini). Promotrimo sliku R , pravokutnika $S = [u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v]$, koji se bijektivno

preslikava na područje R .



Slika 10..

Označimo sa

$$\vec{a} = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0),$$

$$\vec{b} = \vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0).$$

Površinu $P(R)$ područja R možemo aproksimirati s površinom paralelograma $|\vec{a} \times \vec{b}|$ kojega određuju vektori \vec{a} i \vec{b} .

Budući je (definicija kasnije)

$$\vec{r}'_u(u_0, v_0) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0)}{\Delta u},$$

$$\vec{r}'_v(u_0, v_0) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0)}{\Delta v},$$

za dovoljno male Δu i Δv , vrijedi

$$\vec{a} = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u \vec{r}'_u(u_0, v_0),$$

$$\vec{b} = \vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v \vec{r}'_v(u_0, v_0),$$

gdje je

$$\begin{aligned} \vec{r}'_u(u_0, v_0) &= g'_u(u_0, v_0) \vec{i} + h'_u(u_0, v_0) \vec{j} = \\ &= \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u} \vec{j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'_v(u_0, v_0) &= g'_v(u_0, v_0) \vec{i} + h'_v(u_0, v_0) \vec{j} = \\ &= \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} \vec{i} + \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v} \vec{j}. \end{aligned}$$

Sada površinu $P(R)$ područja R možemo aproksimirati sa

$$P(R) \approx \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \approx |(\Delta u \vec{r}'_u(u_0, v_0)) \times (\Delta v \vec{r}'_v(u_0, v_0))| =$$

$$\Delta u \Delta v \left| \vec{r}'_u(u_0, v_0) \times \vec{r}'_v(u_0, v_0) \right|.$$

Kako je

$$\vec{r}'_u(u_0, v_0) \times \vec{r}'_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} & \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} & \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} & \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u} \\ \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} & \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} & \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u} & \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{k},$$

onda je

$$|\vec{r}'_u(u_0, v_0) \times \vec{r}'_v(u_0, v_0)| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} & \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u} & \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v} \end{vmatrix} \right|$$

Determinanta $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ naziva se **Jacobijeva determinanta** ili **Jacobijan transformacije** Φ i označava sa

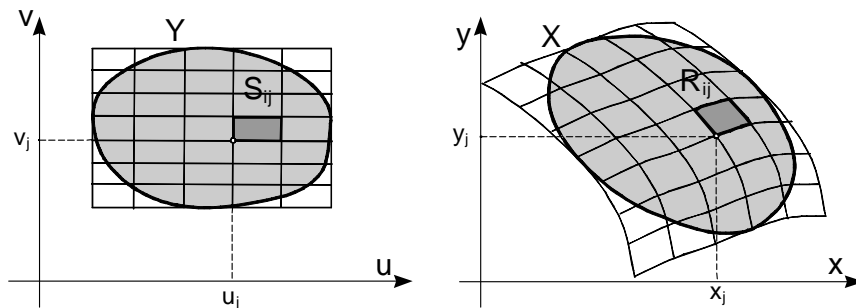
$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Konačno, površinu područja R možemo aproksimirati sa

$$P(R) \approx |J(u_0, v_0)| \Delta u \Delta v.$$

gdje Jacobijan J treba uzeti u točki (u_0, v_0) .

Neka je sada zadano područje $Y \subset \mathbb{R}^2$ u uv -ravnini i transformacija $\Phi(u, v)$, $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, koja područje Y u uv -ravnini preslikava na područje $X \subset \mathbb{R}^2$ u xy -ravnini, te neka je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Podijelimo područje Y na pravokutnike S_{ij} i njihove slike u xy -ravnini označimo s R_{ij} (Slika 11.).



Slika 11.

Dvostruki integral funkcije f nad X možemo aproksimirati sa

$$\iint_X f(x, y) dP \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) P(R_{ij}) \approx$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u_i \Delta v_j$$

gdje je Jacobijan uzet u točki (u_i, v_j) . Posljednja suma je integralna suma za integral

$$\iint_Y f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$$

što nas upućuje na supstituciju u dvostrukom integralu.

Teorem 3.7 Neka je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija na području $X \subset \mathbb{R}^2$, a $\Phi = (g, h) : Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}^2$ neka je bijektivna C^1 transformacija čiji Jacobijan ne iščezava. Tada je

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \iint_Y f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv.$$

Primjer 2 Izračunati integral

$$I = \iint_X y dx dy$$

gdje je područje X određeno parabolama $y^2 = 4 - 4x$, $y^2 = 4 + 4x$ i x -osi (Slika 8.).

Račun ćemo provesti tako da uvedemo supstituciju

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = 2uv. \end{cases}$$

Pokazali smo u Primjeru 1 da je područje integracije $X = \Phi(Y)$ slika područja

$$Y = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\},$$

gdje je $\Phi : X \rightarrow Y$ transformacija određena supstitucijom, tj.

$$\Phi(u, v) = (x = u^2 - v^2, y = 2uv).$$

Budući je

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0,$$

po Teoremu 3.7 imamo

$$\begin{aligned} I &= \iint_X y dx dy = \iint_Y 2uv \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2uv \cdot 4(u^2 + v^2) du dv = 8 \int_0^1 \left(\int_0^1 (u^3 v + v^3 u) du \right) dv = \\ &= 8 \int_0^1 \left[\left(\frac{u^4}{4} v + v^3 \frac{u^2}{2} \right) \Big|_{u=0}^{u=1} \right] dv = \\ &= \int_0^1 (2v + 4v^3) dv = \left(v^2 + v^4 \right) \Big|_{v=0}^{v=1} = 2. \end{aligned}$$

U praksi se, često javlja potreba da se pravokutne Kartezijeve koordinate (varijable) x, y zamijene polarnim koordinatama $u \equiv \rho, v \equiv \varphi$. Supstitucijom

$$\begin{cases} x = g(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi \\ y = h(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

za Jacobijan dobivamo

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

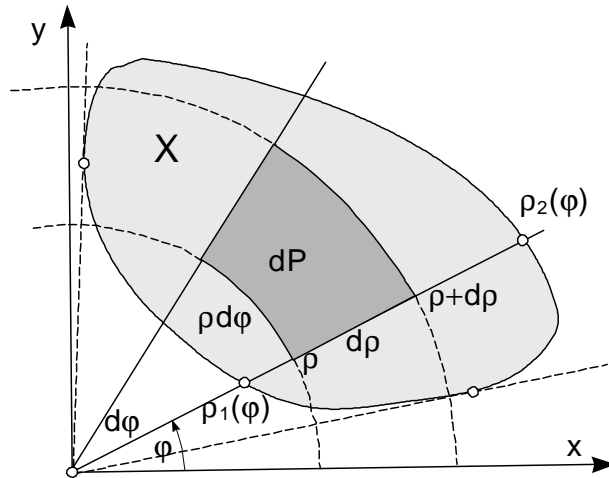
Prema tomu,

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \iint_Y f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi.$$

Ovu supstituciju možemo interpretirati na način: neka je područje integracije u integralu

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \iint_X f(x, y) dP$$

kao na Slici 12.,



Slika 12.

tj. može se opisati na način

$$X = \{(\varphi, \rho) \mid \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)\}.$$

Naznačeni element površine dP je kružni isječak, pa je

$$dP = \left(\frac{1}{2}(\rho + d\rho)^2 \cdot d\varphi \right) - \left(\frac{1}{2}\rho^2 \cdot d\varphi \right) = \rho d\rho d\varphi - \frac{1}{2}(d\rho)^2 d\varphi.$$

Drugi član možemo zanemariti i uzeti za $dP = \rho d\varphi d\rho$.

Sada je

$$\begin{aligned} \iint_X f(x, y) dx dy &= \iint_X f(x, y) dP = \\ &= \iint_X f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho, \end{aligned}$$

a to daje i naš teorem o supstituciji.

Napomenimo još da se u polarnim koordinatama integrira u poretku $\rho\varphi$ tj.

$$\begin{aligned} \iint_X f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho &= \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Primjer 3 Izračunajmo integral

$$I = \iint_X \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy,$$

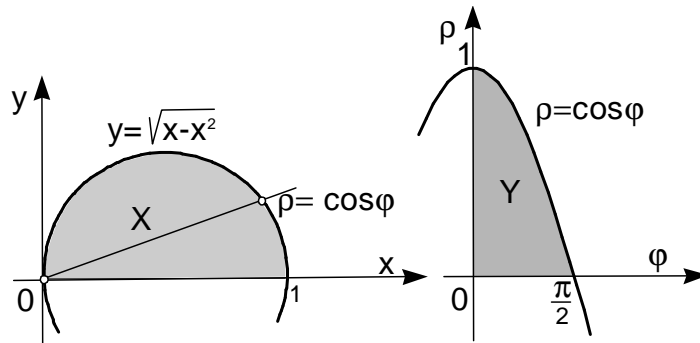
gdje je X polukrug u I. kvadrantu određen kružnicom $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

Zamjenom Kartezijevih koordinata polarnima, integracijsko područje

$$X = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x - x^2} \right\}$$

postaje integracijskim područjem

$$Y = \left\{ (\varphi, \rho) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \cos \varphi \right\}.$$



Slika 13..

a podintegralna funkcija $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ postaje $\sqrt{1 - \rho^2}$. Slijedi,

$$\begin{aligned} \iint_X \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{1}{3} (\rho^2 - 1) \sqrt{1 - \rho^2} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=\cos \varphi} \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{1}{3} (\cos^2 \varphi - 1) \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \right) - \left(-\frac{1}{3} \right) \right] d\varphi = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Katkada je račun pogodnije provesti u :

- **pomaknutom polarnom koordinatnom sustavu** kojemu je pol u točki $O = (p, q)$:

$$\begin{cases} x - p = \rho \cos \varphi, \\ y - q = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Za Jacobijan dobivamo $J = \rho$, i ukoliko je slika područja integracije X oblika

$$Y = \{(\varphi, \rho) \mid \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)\}$$

vrijedi

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \iint_Y f(p + \rho \cos \varphi, q + \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho =$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(p + \rho \cos \varphi, q + \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Kružnice koje u Kartezijevom koordinatnom sustavu imaju prikaz $(x - p)^2 + (y - q)^2 = R^2$, ovdje imaju jednostavni prikaz $\rho = R$. Točka $T = (x, y)$ u ovom koordinatnom sustavu ima koordinate (φ, ρ) gdje je

$$\rho = \sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y - q}{x - p},$$

i pri određivanju kuta φ iz $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y-q}{x-p}$ treba voditi računa o predznacima od $x - p$ i $y - q$.

- **poopćenim polarnim koordinatama** φ, ρ :

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \varphi \\ y = b\rho \sin \varphi \end{cases}$$

Za Jacobijan dobivamo

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a\rho \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b\rho \cos \varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Prema tomu,

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \iint_Y f(a\rho \cos \varphi, b\rho \sin \varphi) \cdot ab\rho d\rho d\varphi.$$

Napomenimo da se u ovome koordinarnom sustavu elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ opisuje jednadžbom $\rho = 1$, pa stoga poopćene polarne koordinate φ, ρ nazivamo i **eliptičkim koordinatama**.

- **pomaknutom eliptičnom koordinatnom sustavu** kojemu je pol u točki $O = (p, q)$:

$$\begin{cases} x - p = \rho a \cos \varphi, \\ y - q = \rho b \sin \varphi. \end{cases}$$

Opet je Jacobijan $J = ab\rho$, i ukoliko je slika integracijskog područja X oblika

$$Y = \{(\varphi, \rho) \mid \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)\}$$

vrijedi

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \iint_Y f(p + a\rho \cos \varphi, q + \rho b \sin \varphi) ab\rho d\varphi d\rho.$$

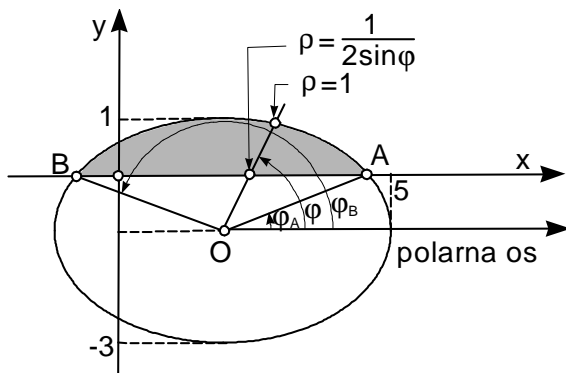
Napomenimo da elipsa koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima jednadžbu $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$, ovdje ima jednostavni prikaz $\rho = 1$.

Primjer 4 Izračunati

$$I = \iint_X dx dy,$$

gdje je

$$X = \{(x, y) \mid 4(x - 2)^2 + 9(y + 1)^2 \leq 36, y \geq 0\}.$$



Slika 14.

Istaknuti dio X unutrašnjosti elipse $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1$ (Slika 14.) koji možemo opisati sa

$$X = \begin{cases} x_B = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} = x_A \\ 0 \leq y \leq -1 + \frac{1}{3} \sqrt{36 - 4(x-2)^2} \end{cases}$$

Zamjenom Kartezijevih koordinata pomaknutim poopćenim (eliptičkim) polarnim koordinatama

$$\begin{cases} x - 2 = 3\rho \cos \varphi \\ y + 1 = 2\rho \sin \varphi \end{cases}$$

elipsa poprima jednostavan zapis $\rho = 1$, dok je jednadžba pravca $y = 0$ u ovom sustavu

$$\rho = \frac{1}{2 \sin \varphi}.$$

Odredimo φ -koordinatu točke $A = (2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, -1)$:

$$\operatorname{tg} \varphi_A = \frac{a(y_A - q)}{b(x_A - p)} = \frac{3(0 + 1)}{2 \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 \right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi_A = \frac{\pi}{6}.$$

Dakako, zbog simetrije je $\varphi_B = \frac{5\pi}{6}$. Navedenom supstitucijom integracijsko područje X postaje integracijsko područje

$$Y = \left\{ (\varphi, \rho) \mid \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2\sin \varphi} \leq \rho \leq 1 \right\}.$$

Imamo

$$\begin{aligned} I &= \iint_X dx dy = \iint_Y 6\rho d\varphi d\rho = 6 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \int_{\frac{1}{2\sin \varphi}}^1 \rho d\rho = \\ &6 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[\left(\frac{1}{2} \rho^2 \right) \Big|_{\rho=\frac{1}{2\sin \varphi}}^{\rho=1} \right] d\varphi = 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(1 - \frac{1}{4\sin^2 \varphi} \right) d\varphi = \\ &= \dots = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Neka je $Y \subset \mathbb{R}^3$ područje (u uvw -koordinatnom sustavu) koje se bijektivnom C^1 transformacijom Φ određenom sa

$$x = g(u, v, w), \quad y = h(u, v, w), \quad z = k(u, v, w)$$

preslikava u područje $X \subset \mathbb{R}^3$ (u xyz -koordinatnom sustavu). Jacobijan transformacije Φ je determinanta

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Teorem 3.8 Neka je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija na području $X \subset \mathbb{R}^3$, a $\Phi = (g, h, k) : Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}^3$ neka je bijektivna C^1 transformacija čiji Jacobijan ne iščezava. Tada je

$$\iint_X f(x, y, z) dx dy dz = \iint_Y f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

U slučaju trostrukog integrala se često javlja potreba da se pravokutne Kartezijeve koordinate zamijene cilindričnima ili sfernima. Budući da je veza Kartezijevih i cilindričnih koordinata

$$\begin{cases} x = g(\rho, \varphi, w) = \rho \cos \varphi, \\ y = h(\rho, \varphi, w) = \rho \sin \varphi, \\ z = k(\rho, \varphi, w) = w \end{cases}$$

to je pripadni Jacobijan

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(\rho \cos \varphi)}{\partial \rho} & \frac{\partial(\rho \cos \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial(\rho \cos \varphi)}{\partial w} \\ \frac{\partial(\rho \sin \varphi)}{\partial \rho} & \frac{\partial(\rho \sin \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial(\rho \sin \varphi)}{\partial w} \\ \frac{\partial w}{\partial \rho} & \frac{\partial w}{\partial \varphi} & \frac{\partial w}{\partial w} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Tako dobivamo formulu

$$\iiint_X f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_Y f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, w) \rho d\rho d\varphi dw$$

Primjer Izračunati

$$\iiint_X 2z dx dy dz,$$

gdje je $X \subset \mathbb{R}^3$ omeđen grafovima preslikavanja $g_1(x, y) = x^2 + y^2$ i $g_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Račun koji treba provesti u integralu

$$\iiint_X 2z dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} 2z dz$$

je poprilično kompliciran. Prijede li se, međutim, na cilindrične koordinate, integracijsko područje X postaje integracijskim područjem Y

$$Y = \{(\varphi, \rho, w) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq w \leq \rho\}.$$

Tako dobivamo

$$\begin{aligned} \iiint_X 2z dx dy dz &= \iiint_Y 2w \rho d\rho d\varphi dw = \\ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} 2w dw &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left[(w^2) \Big|_{w=\rho^2}^{w=\rho} \right] \rho d\rho = \\ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^4) \rho d\rho &= \dots = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

U slučaju sfernog koordinatnog sustava zamjenske varijable uvodimo na način

$$\begin{cases} x = g(r, \vartheta, \varphi) = r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y = h(r, \vartheta, \varphi) = r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z = k(r, \vartheta, \varphi) = r \cos \vartheta, \end{cases}$$

i pripadni Jacobijan je

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(r \sin \vartheta \cos \varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(r \sin \vartheta \cos \varphi)}{\partial \vartheta} & \frac{\partial(r \sin \vartheta \cos \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(r \sin \vartheta \sin \varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(r \sin \vartheta \sin \varphi)}{\partial \vartheta} & \frac{\partial(r \sin \vartheta \sin \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(r \cos \vartheta)}{\partial r} & \frac{\partial(r \cos \vartheta)}{\partial \vartheta} & \frac{\partial(r \cos \vartheta)}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \vartheta.$$

Time smo dobili formulu

$$\iiint_X f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$\iiint_Y f(r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta) \cdot r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Primjer Izračunati

$$\iiint_X z \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

gdje je $X = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Podintegralna funkcija $z \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ u sfernome koordinatnom sustavu ima zapis $r \cos \vartheta \sqrt{1 + r^2}$. Područje integracije X je jedinična središnja kugla i ona prelazi u područje integracije Y

$$Y = \{(r, \vartheta, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq r \leq 1\},$$

pa je

$$\iiint_X z \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz =$$

$$\iiint_Y r \cos \vartheta \sqrt{1 + r^2} \cdot r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta d\vartheta \int_0^1 r^3 \sqrt{1+r^2} dr = \\
& \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta d\vartheta \right) \left(\int_0^1 r^3 \sqrt{1+r^2} dr \right) = \\
& = \frac{2\pi (\sqrt{2} + 1)}{15}.
\end{aligned}$$

Teorem 3.9 Neka je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija na području $X \subset \mathbb{R}^m$, a $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) : Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}^3$ neka je bijektivna C^1 transformacija čiji Jacobijan ne iščezava. Tada je

$$\begin{aligned}
& \int \cdots \int_X f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_m = \\
& \int \cdots \int_Y f(\phi_1(y_1, \dots, y_m), \dots, \phi_m(y_1, \dots, y_m)) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right| dy_1 \cdot \dots \cdot dy_m
\end{aligned}$$

3.4 Nekoliko primjena višestrukog integrala

Pokazali smo da ako je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, neprekidna i nenegativna, onda pripadni dvostruki integral mjeri volumen geometrijskoga tijela Ω određenoga osnovicom D i plohom G_f , tj.

$$V(\Omega) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Primijetimo da u slučaju konstantne funkcije $f(x, y) = 1$ promatrani integral mjeri površinu ravninskoga skupa D , tj.

$$P(D) = \iint_D dx dy.$$

U slučaju trostrukog integrala, ako funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, predstavlja gustoću tvarnoga tijela Ω što zaprema geometrijsko tijelo D , $\Omega \equiv D$, pripadni integral mjeri masu, tj.

$$m(\Omega) = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz.$$

Uočimo da za konstantnu funkciju $f(x, y, z) = 1$ (homogenost) pripadni integral mjeri volumen tvarnoga tijela Ω što zaprema geometrijsko tijelo D , $\Omega \equiv D$

$$V(\Omega) = \iiint_D dx dy dz.$$

Primjer Izračunati volumen tijela

$$X = \left\{ (x, y, z) \mid 4x^2 + (z - 1)^2 \leq y, y + z \leq 3, z \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Rješenje: $V = \frac{81}{128}\pi.$

Uputa:

$$V(X) = \iiint_X dx dy dz$$