

2. VEKTORSKA ANALIZA

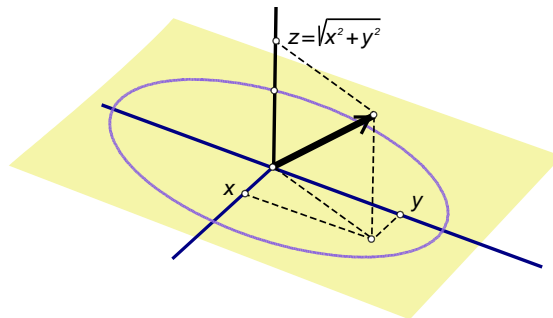
4.1 Vektorske funkcije

- Promatrali smo najprije funkcije $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, potom funkcije $f : X \rightarrow Y$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}$, a ovdje ćemo promatrati funkcije gdje su i domena i kodomena "podebljane", tj. funkcije oblika

$$f : X \rightarrow Y, \quad X \subseteq \mathbb{R}^m, \quad Y \subseteq \mathbb{R}^n \quad (n \geq 2).$$

- Budući da prostor \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, ne dopušta prirodni uređaj, otpada pitanje o ekstremnim vrijednostima ovih funkcija.
- Najvažniji slučaj, jer se u njemu opisuje naš fizički (tvarni) svijet, bit će $n = 3$ koordinatiziran desnim ortonormiranim Kartezijevim sustavom $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. I općenito ($n \geq 4$) ćemo pretpostavljati da je u \mathbb{R}^n zadan desni ortonormirani Kartezijev sustav $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Primjer 1 Funkcija koja svakoj točki iz jediničnog kruga $D \subseteq \mathbb{R}^2$ pridružuje točku na način opisan slikom



možemo interpretirati na način: ukoliko je na kodomeni \mathbb{R}^3 zadan desni ortonormirani Kartezijev koordinatni sustav $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tada tu funkciju možemo opisati sa:

$$f(x, y) = x \vec{i} + \vec{j} y + \sqrt{x^2 + y^2} \vec{k} = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Dakle, u ovom bi primjeru funkcija f bila zadana sa tri skalarne funkcije $w_1, w_2, w_3 : D \rightarrow \mathbb{R}$,

$$w_1(x, y) = x, \quad w_2(x, y) = y, \quad w_3(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

i svakoj točki $T \equiv (x, y) \in D$ ovom funkcijom bi pridružili vektor

$$f(T) \equiv (w_1(T), w_2(T), w_3(T)).$$

Uobičajeno je umjesto f pisati \vec{w} .

Definicija 4.1 Funkciju

$$\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (n \geq 2)$$

gdje je $D \subseteq \mathbb{R}^m$ nazivamo **vektorskom funkcijom**.

Budući da je, za svaki $T = (x_1, \dots, x_m) \in X$, vrijednost $\vec{w}(T) \equiv (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, to vektorska funkcija \vec{w} definira n skalarnih funkcija $w_1, \dots, w_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ pravilom $w_j(T) = y_j$ za svaki $j = 1, \dots, n$. Vrijedi i obratno, svaka uređenu n -torku (w_1, \dots, w_n) skalarnih funkcija

$$w_j : D \rightarrow \mathbb{R},$$

$j = 1, \dots, n$, određuje jedinstvenu vektorsku funkciju

$$\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

pravilom

$$\vec{w}(T) = ((w_1(T), \dots, w_n(T))).$$

Stoga je prirodno poistovjetiti $\vec{w} \equiv (w_1, \dots, w_n)$. Pritom govorimo da su w_j , $j = 1, \dots, n$, **koordinatne funkcije** od \vec{w} .

Za vektorske funkcije kojima je kodomena \mathbb{R}^3 , dakle funkcije oblika

$$\vec{w}(T) = (w_1(T), w_2(T), w_3(T)),$$

ukoliko je na kodomeni \mathbb{R}^3 zadan desni ortonormirani Kartezijev koordinatni sustav $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, koristimo i standardni vektorski zapis

$$\vec{w}(T) = w_1(T) \vec{i} + w_2(T) \vec{j} + w_3(T) \vec{k}.$$

Nama će od posebnog interesa biti vektorske funkcije kojima je domena $D \subseteq \mathbb{R}$ a kodomena \mathbb{R}^3 , dakle funkcije oblika

$$\begin{aligned} \vec{w}(x) &= (w_1(x), w_2(x), w_3(x)) \\ &= w_1(x) \vec{i} + w_2(x) \vec{j} + w_3(x) \vec{k} \end{aligned}$$

Ukoliko je zadano samo pravilo za vektorsku funkciju prirodno se postavlja pitanje domene te funkcije. Dakako, (prirodna) domena vektorske funkcije je maksimalan podskup D za koji funkcija ima smisla, a to znači da na njemu sve koordinatne funkcije postoje.

Primjer 3 Sa

$$\vec{w}(T) = \vec{w}(x, y) = x^2y \vec{i} + \sqrt{y-1} \vec{j} + (xy^2 - 1) \vec{k}$$

definirana je vektorska funkcija $\vec{w} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i njezine su koordinatne funkcije $w_1, w_2, w_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$w_1(x, y) = x^2y, \quad w_2(x, y) = \sqrt{y-1}, \quad w_3(x, y) = xy^2 - 1.$$

Budući w_3 definirana za $y \geq 1$ to je područje definicije

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\}.$$

Pojmovi limes i neprekidnost prirodno se poopćuju i na vektorske funkcije.

Definicija 4.2 Reći ćemo da je vektor $L_0 \in \mathbb{R}^n$ **granična vrijednost (limes) funkcije** $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, u točki $T_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^m$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall T \in D \setminus \{T_0\}) \\ d(T, T_0) < \delta \Rightarrow d(\vec{w}(T), L_0) < \varepsilon. \quad (1)$$

Ovo ćemo, kao i do sada, kraće zapisivati:

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \vec{w} = L \quad \text{ili} \quad \lim_{T \rightarrow T_0} \vec{w}(T) = L_0$$

Kao i za skalarne funkcije, granična vrijednost ima puni smisao samo u gomilištima i neizoliranim točkama skupa D . Osim toga, budući da je ovdje udaljenost definirana vektorskom normom, to se (1), ako je, $T = (x_1, \dots, x_m)$, $T_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$, $\vec{w}(T) = (w_1(T), \dots, w_n(T))$ i $L_0 = (l_1, \dots, l_n)$, smije zapisati i ovako

$$d(T, T_0) = \|T - T_0\| = \left(\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \delta \Rightarrow$$

$$d(\vec{w}(T), L_0) = \|\vec{w}(T) - L_0\| = \left(\sum_{j=1}^n (w_j(T) - l_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Pomoću toga se lako dokazuje ova činjenica

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \vec{w}(T) = L_0 \iff \lim_{T \rightarrow T_0} w_j(T) = l_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Napokon, po uzoru na skalarne funkcije, mogu se definirati granične vrijednosti vektorske funkcije kad barem jedna koordinata $x_i \rightarrow +\infty$ ($-\infty$).

Primjer 4 Funkcija

$$\vec{w}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, 0, t \right), \quad t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

ima u $t = 0$ graničnu vrijednost $(1, 0, 0)$ jer je

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{w}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}, \lim_{t \rightarrow 0} 0, \lim_{t \rightarrow 0} t \right) = (1, 0, 0).$$

Definicija 4.3 Reći ćemo da je vektorska funkcija $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, **neprekidna u točki** $T_0 \in D$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall T \in D)$$

$$d(T, T_0) < \delta \Rightarrow d(\vec{w}(T), \vec{w}(T_0)) < \varepsilon.$$

Ako je vektorska funkcija \vec{w} neprekidna u svakoj točki $T \in A \subseteq D$, onda kažemo da je \vec{w} **neprekidna na skupu** A . U slučaju $A = D$ govorimo o **neprekidnoj** vektorskoj funkciji \vec{w} .

U praksi je vrlo korisno da se neprekidnost vektorske funkcije svodi na neprekidnost njezinih koordinatnih funkcija. O tomu govori sljedeći teorem:

Teorem 4.4 Vektorska funkcija $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, je neprekidna (u točki T_0) onda i samo onda, ako su sve njezine koordinatne funkcije $w_1, \dots, w_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidne (u točki T_0).

Primjer 5 Ispitajmo (ne)prekidnost vektorske funkcije

$$\vec{w} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\vec{w}(t) = \begin{cases} (t-1)\vec{i} + t^2\vec{k}, & t < 1 \\ (\ln t)\vec{j} + (1-t^2)\vec{k}, & t \geq 1 \end{cases}.$$

Primjetimo da su pripadne koordinatne funkcije

$$w_1(t) = \begin{cases} t-1, & t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}, w_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \ln t, & t \geq 1 \end{cases},$$

$$w_3(x) = \begin{cases} t^2, & t < 1 \\ 1-t^2, & t \geq 1 \end{cases},$$

neprekidne u svakoj točki $t \neq 1$. Po prethodnom teoremu je i funkcija \vec{w} neprekidna u svakoj točki $t \neq 1$.

Nadalje,

$$(w_1(1), w_2(1), w_3(1)) = (0, 0, 0) = \vec{w}(1).$$

Budući da je

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} w_1(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow 1+0} w_1(t) = w_1(1),$$

$$tj. \quad \lim_{t \rightarrow 1} w_1(t) = w_1(1),$$

to je funkcija w_1 neprekidna u točki $t = 1$. Slično se pokazuje da je $\lim_{t \rightarrow 1} w_2(t) = w_2(1)$ pa je i koordinatna funkcija w_2 neprekidna u točki $t = 1$. Međutim,

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} w_3(t) = 1 \neq 0 = \lim_{t \rightarrow 1+0} w_3(t) = w_3(1),$$

pa funkcija w_3 nema granične vrijednosti u točki $t = 1$. Budući da se radi o neizoliranoj točki (\mathbb{R} nema izoliranih točaka), to je koordinatna funkcija w_3 prekidna u toj točki. Po prethodnom teoremu je i vektorska funkcija \vec{w} prekidna (samo) u točki $t = 1$.

4.2 Diferencijabilnost vektorske funkcije

Definicija 4.5 Kažemo da je vektorska funkcija $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ **diferencijabilna u točki** $T_0 \in D$, ako postoji linearan operator A takav da je

$$\vec{w}(T) - \vec{w}(T_0) = A(T - T_0) + r(T - T_0) \quad (2)$$

pri čemu funkcija $T - T_0 \xrightarrow{r} r(T - T_0) \in \mathbb{R}^n$ ima svojstvo

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \frac{r(T - T_0)}{\|T - T_0\|} = 0 \quad (\text{u } \mathbb{R}^n).$$

Kažemo da je funkcija $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ **diferencijabilna na skupu** $B \subseteq D$, ako je diferencijabilna u svakoj točki $T \in B$.

U slučaju $B = D$ govorimo o **diferencijabilnoj vektorskoj funkciji**.

Može se pokazati da je linearan operator A u Definiciji 4.5, ako postoji, jedinstven.

Tada A označujemo s $d\vec{w}(T_0)$ i nazivamo **diferencijalom funkcije** \vec{w} u točki T_0 .

Diferencijabilnost od \vec{w} u točki T_0 znači

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \frac{\vec{w}(T) - \vec{w}(T_0) - A(T - T_0)}{\|T - T_0\|} = 0 \quad (\text{u } \mathbb{R}^n) \quad (3)$$

i

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \frac{r(T - T_0)}{\|T - T_0\|} = 0 \quad (\text{u } \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow T_0} \frac{\|r(T - T_0)\|}{\|T - T_0\|} = 0 \quad (\text{u } \mathbb{R}).$$

Budući je vektorska funkcija \vec{w} definirana sa n koordinatnih funkcija

$$w_j : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$j = 1, \dots, n$, tj. pravilom

$$\vec{w}(T) = (w_1(T), \dots, w_n(T)).$$

onda je diferencijabilnost vektorske funkcije $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ u točki T_0 ekvivalentna diferencijabilnosti svih koordinatnih funkcija u T_0 , tj.

$$w_j(T) - w_j(T_0) = dw_j(T_0)(T) + r_j(T - T_0) \quad (4)$$

i

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \frac{r_j(T - T_0)}{\|T - T_0\|} = 0 \quad (\text{u } \mathbb{R}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Prisjetimo se diferencijala (diferencijabilne) skalarne funkcije u točki T_0

$$df(T_0)(T) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) dx_i.$$

Dakle, diferencijal funkcije f u točki T_0 (linearni funkcional) je jedinstveno određen parcijalnim derivacijama funkcije f u točki T_0 , tj. s parcijalnim derivacijama $\frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0)$, $i = 1, 2, \dots, m$, dakle možemo ga identificirati s vektorom

$$df(T_0) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(T_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(T_0) \right) \quad (\in \mathbb{R}^m).$$

(vektor iz \mathbb{R}^m u kojem imamo desni ortonormirani Kartezijev sustav $(O; \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m)$).

Dakle,

$$dw_j(T_0) \equiv \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_1}(T_0), \dots, \frac{\partial w_j}{\partial x_m}(T_0) \right), \quad j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Odredimo zapis (matricu) $[a_{ij}]$ linearnog operatora $A \equiv d\vec{w}(T_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (u paru baza danih sa $(O; \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m)$ i $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ gdje su desni ortonormirani Kartezijevi sustavi u \mathbb{R}^m i \mathbb{R}^n , redom).

Budući da u traženom zapisu j -ti redak od $[a_{ij}]$ mora odgovarati zapisu linearnog funkcionala $dw_j(T_0)$ danog s (5), to je

$$\begin{aligned} d\vec{w}(T_0) &\equiv [a_{ij}] = \left[\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(T_0) \right] = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(T_0) & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial x_m}(T_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_n}{\partial x_1}(T_0) & \cdots & \frac{\partial w_n}{\partial x_m}(T_0) \end{bmatrix} = \frac{\partial (w_1, \dots, w_n)}{\partial (x_1, \dots, x_m)}(T_0) \end{aligned}$$

što je tzv. **Jacobijeva matrica** vektorske funkcije \vec{w} u točki T_0 .

Sada je, uz oznake

- $T = (x_1, \dots, x_m)$, $T_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$,
- $\Delta T = dT = T - T_0 = (x_1 - x_1^0, \dots, x_m - x_m^0) = (dx_1, \dots, dx_m)$,

$$\begin{aligned} A(T - T_0) &= A(\Delta T) \equiv d\vec{w}(T_0)(T) \equiv \\ &\equiv \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial w_1}{\partial x_i}(T_0) dx_i, \dots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial w_n}{\partial x_i}(T_0) dx_i \right) \quad (\in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Za vektorsku funkciju $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, kažemo da je **derivabilna u točki** $T_0 \in D$ ako postoje sve parcijalne derivacije $\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(T_0)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Ako je vektorska funkcija \vec{w} derivabilna u svakoj točki $T \in A \subseteq D$, onda kažemo da je \vec{w} **derivabilna na skupu** A . U slučaju $A = D$ govorimo o **derivabilnoj vektorskoj funkciji** \vec{w} .

Jasno je da derivabilnost povlači diferencijabilnost, ali ne i obratno.

Za diferenciranje vrijede analogna pravila kao za skalarne funkcije.

Primjer:

- $d(\vec{w} + \vec{u})(T_0) = d\vec{w}(T_0) + d\vec{u}(T_0)$
(diferenciranje zbroja);
- $d(\vec{w} \cdot \vec{u})(T_0) = \vec{u}(T_0) \cdot d\vec{w}(T_0) + \vec{w}(T_0) \cdot d\vec{u}(T_0)$
(diferenciranje skalarnog produkta);
- $d(\vec{u} \circ \vec{w})(T_0) = d\vec{u}(\vec{w}(T_0)) \circ d\vec{w}(T_0)$
(diferenciranje kompozicije).

Zadržimo se na najjednostavnijem slučaju vektorske funkcije - onomu kad joj je varijabla skalar (broj) $x \in D \subseteq \mathbb{R}$, tj. slučaju $m = 1$ i $n \geq 2$.

Pokazat će se da se ovdje nasljeđuju sve važne činjenice što smo ih dokazali za realne funkcije jedne varijable. Primjerice, diferencijabilnost je ekvivalentna derivabilnosti, koju se može "redefinirati" kako slijedi:

Posljedica 4.6 Vektorska funkcija $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je derivabilna u točki $x_0 \in D$ ako vektorska funkcija

$$\vec{w} : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{w}(x) = \frac{\vec{w}(x) - \vec{w}(x_0)}{x - x_0},$$

ima graničnu vrijednost $\lim_{x \rightarrow x_0} \vec{w}$ u točki x_0 . Pripadni vektor označujemo s $\vec{w}'(x_0)$, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\vec{w}(x) - \vec{w}(x_0)}{x - x_0} \equiv \vec{w}'(x_0),$$

i nazivamo **derivacijom** vektorske funkcije \vec{w} u točki x_0 .

Koristeći koordinatni zapis $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$, pri čemu je sada svaki $w_j : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, funkcija jedne varijable, očito je da je funkcija \vec{w} derivabilna u točki x_0 onda i samo onda, ako su u x_0 derivabilne sve njezine koordinatne funkcije w_1, \dots, w_n . Pritom je

$$\vec{w}'(x_0) = (w'_1(x_0), \dots, w'_n(x_0))$$

Pokažimo to za $n = 3$. Neka je na kodomeni \mathbb{R}^3 zadan desni ortonormirani Kartezijev koordinatni sustav $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tada tu funkciju $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}$ možemo opisati sa:

$$\begin{aligned}\vec{w}(x) &= w_1(x) \vec{i} + w_2(x) \vec{j} + w_3(x) \vec{k} \\ &= (w_1(x), w_2(x), w_3(x)).\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\vec{w}(x) - \vec{w}(x_0)}{x - x_0} &= \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{w_1(x) - w_1(x_0)}{x - x_0} \vec{i} + \frac{w_2(x) - w_2(x_0)}{x - x_0} \vec{j} + \frac{w_3(x) - w_3(x_0)}{x - x_0} \vec{k} \right) &= \\ \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w_1(x) - w_1(x_0)}{x - x_0} \right) \vec{i} + \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w_2(x) - w_2(x_0)}{x - x_0} \right) \vec{j} &+ \\ + \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w_3(x) - w_3(x_0)}{x - x_0} \right) \vec{k} &= \\ = w'_1(x_0) \vec{i} + w'_2(x_0) \vec{j} + w'_3(x_0) \vec{k} &= \\ = (w'_1(x_0), w'_2(x_0), w'_3(x_0)) \equiv \vec{w}'(x_0), &\end{aligned}$$

Za ovakve vektorske funkcije je

$$d\vec{w}(x) = \vec{w}'(x)dx \implies \vec{w}'(x) = \frac{d\vec{w}(x)}{dx}$$

Za $n = 3$ i u ako je u \mathbb{R}^3 zadan desni ortonormirani Kartezijev koordinatni sustav $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ imamo

$$\begin{aligned} d\vec{w}(x) &= \left(w'_1(x_0)\vec{i} + w'_2(x_0)\vec{j} + w'_3(x_0)\vec{k} \right) dx = \\ &w'_1(x_0)dx\vec{i} + w'_2(x_0)dx\vec{j} + w'_3(x_0)dx\vec{k} = \\ &= dw_1(x)\vec{i} + dw_2(x)\vec{j} + dw_3(x)\vec{k} = \\ &(dw_1(x), dw_2(x), dw_3(x)) \end{aligned}$$

Ako je vektorska funkcija $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u svakoj točki $x \in D$, onda je dobro definirana funkcija (derivacija od \vec{w}) $\vec{w}' : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \vec{w}'(x)$.

Jasno je i kako treba definirati **derivacije viših redova i više diferencijale**. Naime

$$\vec{w}''' \stackrel{\text{def.}}{=} (\vec{w}'')', \dots, \vec{w}'^{(n+1)} \stackrel{\text{def.}}{=} (\vec{w}'^{(n)})', \text{te}$$

$$d^2\vec{w}(x) = \vec{w}''(x)dx^2, \dots, d^r\vec{w}(x) = \vec{w}^{(r)}(x)dx^r.$$

Primjer 6 Gibanje materijalne točke opisuje jednadžba

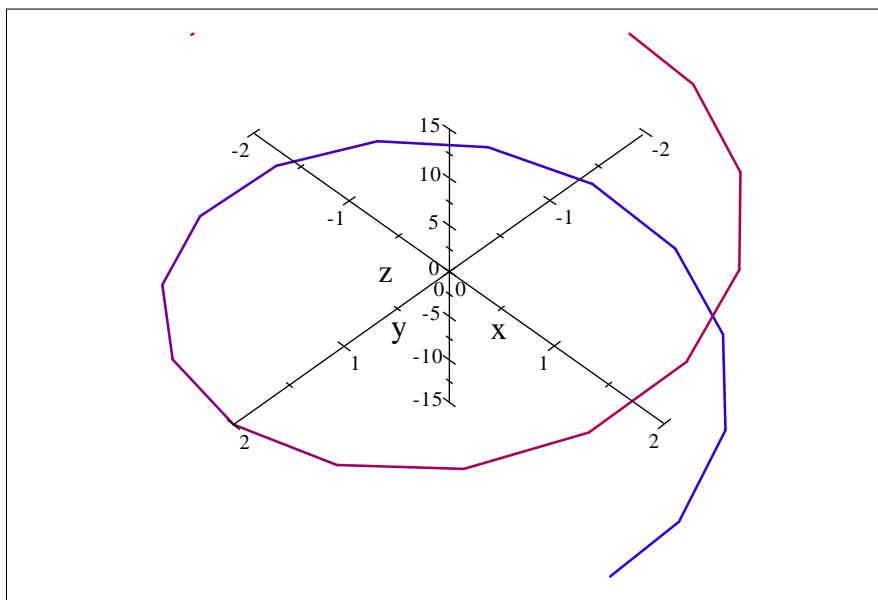
$$\vec{s}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} + 3t \vec{k},$$

$t \in [0, \infty)$ (vrijeme).

Nacrtajmo njezinu putanju ("hodograf") i odredimo joj brzinu i ubrzanje u svakom trenutku. Posebice, izračunajmo joj brzinu i ubrzanje (pripadne vektore) kad je $t = 0$ i $t = \frac{\pi}{2}$.

Putanja te materijalne točke jest valjčana uzvojnica (cilindrična spirala)

$$\vec{s}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 3t), \quad t \in [0, \infty),$$



što se obavijajući valjak $x^2 + y^2 = 4$ "penje brzinom" $z = 3t$.

Budući da je brzina derivacija puta po vremenu, to je

$$\vec{v}(t) = \vec{s}'(t) = -2 \sin t \vec{i} + 2 \cos t \vec{j} + 3 \vec{k}, \quad t \in [0, \infty).$$

Nadalje, derivirajući brzinu dobivamo ubrzanje, tj.

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = -2 \cos t \vec{i} - 2 \sin t \vec{j}, \quad t \in [0, \infty).$$

Napokon, ako je $t = 0$ onda je $\vec{v}(0) = 2 \vec{j} + 3 \vec{k}$ i $\vec{a}(0) = -2 \vec{i}$, a ako je $t = \frac{\pi}{2}$ onda je $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \vec{i} + 3 \vec{k}$ i $\vec{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \vec{j}$.

Naredni teorem donosi derivacijska pravila za osnovne operacije nad vektorskim funkcijama skalarne varijable.

Teorem 4.7 Neka su $\vec{w}, \vec{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}$, derivabilne vektorske funkcije, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna (skalarna) funkcija i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijede ova pravila:

$$1. (\lambda \vec{w} + \mu \vec{u})' = \lambda \vec{w}' + \mu \vec{u}';$$

$$2. (f \vec{w})' = f' \vec{w} + f \vec{w}', \text{ pri čemu je } (f \vec{w})(x) = f(x) \vec{w}(x);$$

$$3. \left(\frac{\vec{w}}{f} \right)' = \frac{f \vec{w}' - f' \vec{w}}{f^2}, \text{ pri čemu je } \left(\frac{\vec{w}}{f} \right)(x) = \frac{\vec{w}(x)}{f(x)} \text{ i } f(x) \neq 0;$$

$$4. \text{ Derivacija skalarnog umnoška } (\vec{w} \cdot \vec{u})(x) = \sum_{j=1}^n w_j(x) u_j(x) \text{ je}$$

$$(\vec{w} \cdot \vec{u})' = \vec{w}' \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}';$$

5. Derivacija vektorskog umnoška

$$(\vec{w} \times \vec{u})(x) = \vec{w}(x) \times \vec{u}(x) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) \\ u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \end{vmatrix},$$

je

$$(\vec{w} \times \vec{u})' = \vec{w}' \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u}'.$$

Sva navedena pravila proizlaze izravno iz pripadnih definicija, a dokazuju se posve slično onima za deriviranje realnih funkcija jedne varijable. Dokažimo npr. pravilo 5.

$$\begin{aligned}
(\vec{w} \times \vec{u})'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\vec{w} \times \vec{u})(x + \Delta x) - (\vec{w} \times \vec{u})(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{w}(x + \Delta x) - \vec{w}(x)}{\Delta x} \times \vec{u}(x + \Delta x) \right. \\
&\quad \left. + \vec{w}(x) \times \frac{\vec{u}(x + \Delta x) - \vec{u}(x)}{\Delta x} \right) =
\end{aligned}$$

$$\vec{w}'(x) \times \vec{u}(x) + \vec{w}(x) \times \vec{u}'(x) = (\vec{w}' \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u}')(x),$$

pri čemu smo iskoristili distributivnost, homogenost i neprekidnost vektorskoga množenja.

Zadatak Odredite derivaciju vektorske funkcije

$\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}$, ako je $\vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$, pri čemu su $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ derivabilne vektorske funkcije. Dobiveni ishod provjerimo na funkcijama

$$\vec{u}(x) = 2x \vec{i} - 3x^2 \vec{k} = (2x, 0, -3x^2),$$

$$\vec{v}(x) = x^3 \vec{i} + (2 + x) \vec{k} = (x^3, 0, 2 + x),$$

$$\vec{w}(x) = x \vec{j} + x^2 \vec{k} = (0, x, x^2).$$

Razmotrimo sada derivaciju funkcijske kompozicije skalarne i vektorske funkcije. Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna (skalarna) funkcija, a $\vec{w} : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ i $f[D] \subseteq Y$, derivabilna vektorska funkcija. Tada je dobro definirana kompozicija $\vec{w} \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Jednostavno je dokazati da pritom vrijedi analogon standardnoga teorema o derivaciji funkcijske kompozicije, tj.

$$(\vec{w} \circ f)'(x) = \vec{w}'(f(x)) \cdot f'(x), \quad x \in D.$$

Primjer 7 Odredimo $(\vec{w} \circ f)'(x)$ ako je $\vec{w} = (\sin^2 x, \cos x, x)$ i $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} (\vec{w} \circ f)'(x) &= \vec{w}'(f(x)) \cdot f'(x) = \\ &= (\sin^2 x, \cos x, x)' \Big|_{f(x)=x^2} \cdot (x^2)' = \\ &= (\underbrace{2 \sin x \cos}_{\sin 2x}, -\sin x, 1) \Big|_{f(x)=x^2} \cdot 2x = (\sin 2x^2, -\sin x^2, 1) \cdot 2x = \\ &= (\sin 2x^2, -\sin x^2, 1) \cdot 2x = (2x \sin 2x^2, -2x \sin x^2, 2x) \end{aligned}$$

Primjer 8 Za vektorsku funkciju

$$\vec{w}(x) = w_1(t) \vec{i} + w_2(t) \vec{j} + w_3(t) \vec{k}$$

uvedimo oznaku

$$w(t) = \|\vec{w}(t)\| = \sqrt{(w_1(t))^2 + (w_2(t))^2 + (w_3(t))^2}.$$

Ako je $\vec{w}(t)$ derivabilna pokažite da vrijede sljedeća svojstva:

- i) $\vec{w}(t) \frac{d\vec{w}(t)}{dt} = w(t) \frac{dw(t)}{dt}, \vec{w}(t) \neq \vec{0};$
- ii) $\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{w}(t)}{w(t)} \right) = \frac{1}{w^3(t)} \left[\left(\vec{w}(t) \times \frac{d\vec{w}(t)}{dt} \right) \times \vec{w}(t) \right];$
- iii) $\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{w}(t)}{w(t)} \right) \cdot \frac{\vec{w}(t)}{w(t)} = 0.$

4.2 Integral vektorske funkcije jedne varijable

Integral vektorske funkcije (jedne) realne varijable možemo definirati na standardni način, odnosno, pomoću pripadne primitivne funkcije i Newton-Leibnizove formule.

Definicija 4.8 Vektorsku funkciju $\vec{W} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}$, nazivamo **primitivnom funkcijom** vektorske $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, ako je

$$\vec{W}'(x) = \vec{w}(x)$$

za svaki $x \in D$ osim, možda, u prebrojivo mnogo točaka od D .

Po koordinatnim funkcijama zapisano to znači

$$W'_j(x) = w_j(x), j = 1, \dots, n.$$

Pritom govorimo da je vektorska funkcija (skalarne varijable) \vec{w} **integrabilna**. U slučaju segmenta (ili intervala) $D = [a, b]$, (određeni) **integral vektorske funkcije** \vec{w} definiramo kao vektor

$$\int_{[a,b]} \vec{w} \equiv \int_a^b \vec{w}(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \vec{W}(b) - \vec{W}(a).$$

Po koordinatnim funkcijama $(w_1, \dots, w_n) = \vec{w}$ je, dakle,

$$\int_a^b \vec{w}(x) dx = \left(\int_a^b w_1(x) dx, \dots, \int_a^b w_n(x) dx \right).$$

Za $n = 3$ i u ako je u \mathbb{R}^3 zadan desni ortonormirani Kartezijev koordinatni sustav $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ imamo za $\vec{w}(x) = w_1(x) \vec{i} + w_2(x) \vec{j} + w_3(x) \vec{k}$

$$\int_a^b \vec{w}(x) dx = \left(\int_a^b w_1(x) dx \right) \vec{i} + \left(\int_a^b w_2(x) dx \right) \vec{j} + \left(\int_a^b w_3(x) dx \right) \vec{k}$$

Odatle neposredno slijede dobra svojstva integrala vektorske funkcije što ih donosi ovaj teorem:

Teorem 4.9 Neka su $\vec{w}, \vec{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, integrabilne vektorske funkcije, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna (skalarna) funkcija, \vec{c} konstantan vektor i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

$$1. \int_a^b (\lambda \vec{w}(x) + \mu \vec{u}(x)) dx = \lambda \int_a^b \vec{w}(x) dx + \mu \int_a^b \vec{u}(x) dx$$

(linearnost);

$$2. \int_a^b (\vec{c} \cdot \vec{w})(x) dx = \vec{c} \cdot \left(\int_a^b \vec{w}(x) dx \right) \quad (\text{linearnost za skalarni umno\u017ek});$$

$$3. \int_a^b (\vec{w}(x) \cdot \vec{u}'(x)) dx = \vec{w}(b) \cdot \vec{u}(b) - \vec{w}(a) \cdot \vec{u}(a) - \int_a^b (\vec{w}'(x) \cdot \vec{u}(x)) dx;$$

$$4. \int_a^b (f(x) \vec{w}'(x)) dx = f(b) \vec{w}(b) - f(a) \vec{w}(a) - \int_a^b (f'(x) \vec{w}(x)) dx.$$

((3) i (4) su formule za parcijalno integriranje redom

skalarnoga umnoška vektorskih funkcija i umnoška realne i vektorske funkcije.)

Primjer 7 Ubrzanje materijalne točke (u \mathbb{R}^3) opisuje jednačina

$$\vec{a}(x) = 6x \vec{c}_1 + 2 \vec{c}_2, x \in [0, \infty) \text{ (vrijeme),}$$

pri čemu su \vec{c}_1 i \vec{c}_2 konstantni vektori. Otkrijmo zakon $x \mapsto \vec{s}(x)$ po kojemu se giba ta točka, ako su početni uvjeti $\vec{s}(0) = \vec{0}$ i $\vec{v}(0) = \vec{0}$ (početna brzina).

Budući da je $\vec{v}'(x) = \vec{a}(x)$ i $\vec{s}'(x) = \vec{v}(x)$, to je

$$\vec{v}(x) = \int_0^x \vec{a}(t) dt + \vec{v}(0) =$$

$$\int_0^x (6t \vec{c}_1 + 2 \vec{c}_2) dt + \vec{0} = 3x^2 \vec{c}_1 + 2x \vec{c}_2 \quad \text{i}$$

$$\vec{s}(x) = \int_0^x \vec{v}(t) dt + \vec{s}(0) =$$

$$\int_0^x (3t^2 \vec{c}_1 + 2t \vec{c}_2) dt + \vec{0} = x^3 \vec{c}_1 + x^2 \vec{c}_2.$$

Primjer 8 Izračunajmo integral vektorske funkcije $\vec{w} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{w}(x) = (3e^{-x}, \cos x, x)$, na segmentu $[0, \pi]$.

$$\int_0^\pi \vec{w}(x) dx = \left(\int_0^\pi 3e^{-x} dx, \int_0^\pi \cos x dx, \int_0^\pi x dx \right) =$$

$$\left(\left[-3e^{-x} \right] \Big|_0^\pi, \left[\sin \right] \Big|_0^\pi, \left[\frac{1}{2}x^2 \right] \Big|_0^\pi \right) =$$

$$\left(3(1 - e^{-\pi}), 0, \frac{1}{2}\pi^2 \right) = 3(1 - e^{-\pi}) \vec{i} + \frac{1}{2}\pi^2 \vec{k}.$$