2. VEKTORSKA ANALIZA

4.1 Vektorske funkcije

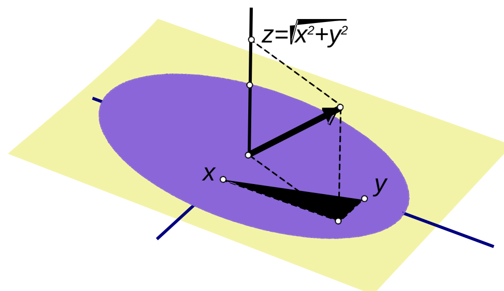
- Promatrali smo najprije funkcije $f : X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, potom funkcije $f : X \to Y$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}$, a ovdje ćemo promatrati funkcije gdje su i domena i kodomena "podebljane", tj. funkcije oblika

$$f : X \to Y, \quad X \subseteq \mathbb{R}^m, \quad Y \subseteq \mathbb{R}^n \quad (n \geq 2).$$

- Budući da prostor $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ne dopušta prirodni uređaj, otpada pitanje o ekstremnim vrijednostima ovih funkcija.

- Najvažniji slučaj, jer se u njemu opisuje naš fizički (tvarni) svijet, bit će $n = 3$ koordinatiziran desnim ortonormiranim Kartezijevim sustavom $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. I općenito ($n \geq 4$) ćemo pretpostavljati da je u $\mathbb{R}^n$ zadan desni ortonormirani Kartezijev sustav $(O; \overrightarrow{e}_1, \cdots, \overrightarrow{e}_n)$.

Primjer 1 Funkcija koja svakoj točci iz jediničnog kruga $D \subseteq \mathbb{R}^2$ pridružuje točku na način opisan slikom



možemo interpretirati na način: ukoliko je na kodomeni $\mathbb{R}^3$ zadan desni ortonormirani Kartezijev koordinatni sustav $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, tada tu funkciju možemo opisati sa:

$$f(x, y) = x\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}y + \sqrt{x^2 + y^2}\,\overrightarrow{k} = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Dakle, u ovom bi primjeru funkcija f bila zadana sa tri skalarne funkcije $w_1, w_2, w_3 : D \to \mathbb{R}$,

$$w_1(x, y) = x,\ w_2(x, y) = y,\ w_3(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

i svakoj točci $T \equiv (x, y) \in D$ ovom funkcijom bi pridružili vektor

$$f(T) \equiv (w_1(T),\ w_2(T),\ w_3(T)).$$

Uobičajeno je umjesto f pisati $\overrightarrow{w}$.

Definicija 4.1 Funkciju

$$\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^n \quad (n \geq 2)$$

gdje je $D \subseteq \mathbb{R}^m$ nazivamo **vektorskom funkcijom**.

Budući da je, za svaki $T = (x_1, \cdots, x_m) \in X$, vrijednost $\overrightarrow{w}(T) \equiv (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, to vektorska funkcija $\overrightarrow{w}$ definira n skalarnih funkcija $w_1, \cdots, w_n : D \to \mathbb{R}$ pravilom $w_j(T) = y_j$ za svaki $j = 1, \cdots, n$. Vrijedi i obratno, svaka uređenu n-torku $(w_1, \cdots, w_n)$ skalarnih funkcija

$$w_j : D \to \mathbb{R},$$

$j = 1, \cdots, n$, određuje jedinstvenu vektorsku funkciju

$$\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^n$$

pravilom

$$\overrightarrow{w}(T) = ((w_1(T), \cdots, w_n(T)) .$$

Stoga je prirodno poistovjetiti $\overrightarrow{w} \equiv (w_1, \cdots, w_n)$. Pritom govorimo da su w_j, $j = 1, \cdots, n$, **koordinatne funkcije** od $\overrightarrow{w}$.

Za vektorske funkcije kojima je kodomena $\mathbb{R}^3$, dakle funkcije oblika

$$\overrightarrow{w}(T) = (w_1(T),\ w_2(T),\ w_3(T)),$$

ukoliko je na kodomeni $\mathbb{R}^3$ zadan desni ortonormirani Kartezijev koordinatni sustav $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, koristimo i standardni vektorski zapis

$$\overrightarrow{w}(T) = w_1(T)\,\overrightarrow{i} + w_2(T)\,\overrightarrow{j} + w_3(T)\,\overrightarrow{k}.$$

Nama će od posebnog interesa biti vektorske funkcije kojima je domena $D \subseteq \mathbb{R}$ a kodomena $\mathbb{R}^3$, dakle funkcije oblika

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w}(x) &= (w_1(x),\ w_2(x),\ w_3(x)) \\ &= w_1(x)\,\overrightarrow{i} + w_2(x)\,\overrightarrow{j} + w_3(x)\,\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

Ukoliko je zadano samo pravilo za vektorsku funkciju pridodno se postavlja pitanje domene te funkcije. Dakako, (prirodna) domena vektorske funkcije je maksimalan podskup D za koji funkcija ima smisla, a to znači da na njemu sve koordinatne funkcije postoje.

Primjer 3 Sa

$$\overrightarrow{w}(T) = \overrightarrow{w}(x,y) = x^2y\,\overrightarrow{i} + \sqrt{y-1}\,\overrightarrow{j} + (xy^2-1)\,\overrightarrow{k}$$

definirana je vektorska funkcija $\overrightarrow{w} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i njezine su koordinatne funkcije $w_1, w_2, w_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$w_1(x,y) = x^2y, \;\; w_2(x,y) = \sqrt{y-1}, \;\; w_3(x,y) = xy^2 - 1.$$

Budući w_3 definirana za $y \geq 1$ to je područje definicije

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\right\}.$$

Pojmovi limes i neprekidnost prirodno se poopćuju i na vektorske funkcije.

Definicija 4.2 Reći ćemo da je vektor $L_0 \in \mathbb{R}^n$ **granična vrijednost** (limes) **funkcije** $\overrightarrow{w}: D \to \mathbb{R}^n$, u točki $T_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^m$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall T \in D \setminus \{T_0\})$$

$$d\,(T, T_0) < \delta \;\Rightarrow\; d\,(\overrightarrow{w}(T), L_0) < \varepsilon. \tag{1}$$

Ovo ćemo, kao i do sada, kraće zapisivati:

$$\lim_{T_0} \overrightarrow{w} = L \quad \text{ili} \quad \lim_{T \to T_0} \overrightarrow{w}(T) = L_0$$

Kao i za skalarne funkcije, granična vrijednost ima puni smisao samo u gomilištima i neizoliranim točkama skupa D. Osim toga, budući da je ovdje udaljenost definirana vektorskom normom, to se (1), ako je, $T = (x_1, ..., x_m)$, $T_0 = \left(x_1^0, ..., x_m^0\right)$, $\overrightarrow{w}(T) = (w_1(T), ..., w_n(T))$ i $L_0 = (l_1, ..., l_n)$, smije zapisati i ovako

$$d\,(T, T_0) = \|T - T_0\| = \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \delta \quad \Rightarrow$$

$$d\,(\overrightarrow{w}(T), L_0) = \|\overrightarrow{w}(T) - L_0\| = \left(\sum_{j=1}^{n} (w_j(T) - l_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Pomoću toga se lako dokazuje ova činjenica

$$\lim_{T \to T_0} \overrightarrow{w}(T) = L_0 \iff \lim_{T \to T_0} w_j(T) = l_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Napokon, po uzoru na skalarne funkcije, mogu se definirati granične vrijednosti vektorske funkcije kad barem jedna koordinata $x_i \to +\infty$ ($-\infty$).

Primjer 4 Funkcija

$$\overrightarrow{w}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \ 0, \ t \right), \ t \in \langle 0, \infty \rangle \,,$$

ima u $t = 0$ graničnu vrijednost $(1, 0, 0)$ jer je

$$\lim_{t \to 0} \overrightarrow{w}(t) = \left(\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \,, \lim_{t \to 0} 0, \ \lim_{t \to 0} t \right) = (1, 0, 0) \,.$$

Definicija 4.3 Reći ćemo da je vektorska funkcija $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, **neprekidna u točki** $T_0 \in D$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)(\forall T \in D)$$

$$d\,(T, T_0) < \delta \;\Rightarrow\; d\,(\overrightarrow{w}(T), \overrightarrow{w}(T_0)) < \varepsilon.$$

Ako je vektorska funkcija $\overrightarrow{w}$ neprekidna u svakoj točki $T \in A \subseteq D$, onda kažemo da je $\overrightarrow{w}$ **neprekidna na skupu** A. U slučaju $A = D$ govorimo o **neprekidnoj** vektorskoj funkciji $\overrightarrow{w}$.

U praksi je vrlo korisno da se neprekidnost vektorske funkcije svodi na neprekidnost njezinih koordinatnih funkcija. O tomu govori sljedeći teorem:

Teorem 4.4 Vektorska funkcija $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, je neprekidna (u točki T_0) onda i samo onda, ako su sve njezine koordinatne funkcije w_1, ..., $w_n : D \to \mathbb{R}$ neprekidne (u točki T_0).

Primjer 5 Istražimo (ne)prekidnost vektorske funkcije

$$\overrightarrow{w}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,$$

$$\overrightarrow{w}(t)=\begin{cases}(t-1)\overrightarrow{i}+t^2\overrightarrow{k}, & t<1\\ (\ln t)\overrightarrow{j}+\left(1-t^2\right)\overrightarrow{k}, & t\geq 1\end{cases}.$$

Primjetimo da su pripadne koordinatne funkcije

$$w_1(t)=\begin{cases}t-1, & t<1\\ 0, & t\geq 1\end{cases}, w_2(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ \ln t, & t\geq 1\end{cases},$$

$$w_3(x)=\begin{cases}t^2, & t<1\\ 1-t^2, & t\geq 1\end{cases},$$

neprekidne u svakoj točki $t\neq 1$. Po prethodnom teoremu je i funkcija $\overrightarrow{w}$ neprekidna u svakoj točki $t\neq 1$.

Nadalje,

$$(w_1(1),\ w_2(1),\ w_3(1))=(0,\ 0,\ 0)=\overrightarrow{w}(1).$$

Budući da je

$$\lim_{t\to 1-0}w_1(t)=0=\lim_{t\to 1+0}w_1(t)=w_1(1),$$

$$\textit{tj.}\quad \lim_{t\to 1}w_1(t)=w_1(1),$$

to je funkcija w_1 neprekidna u točki $t = 1$. Slično se pokazuje da je $\lim\limits_{t\to 1} w_2(t) = w_2(1)$ pa je i koordinatna funkcija w_2 neprekidna u točki $t = 1$. Međutim,

$$\lim_{t\to 1-0} w_3(t) = 1 \neq 0 = \lim_{t\to 1+0} w_3(t) = w_3(1),$$

pa funkcija w_3 nema granične vrijednosti u točki $t = 1$. Budući da se radi o neizoliranoj točki ($\mathbb{R}$ nema izoliranih točaka), to je koordinatna funkcija w_3 prekidna u toj točki. Po prethodnom teoremu je i vektorska funkcija $\overrightarrow{w}$ prekidna (samo) u točki $t = 1$.

4.2 Diferencijabilnost vektorske funkcije

Definicija 4.5 Kažemo da je vektorska funkcija $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ **diferencijabilna u točki** $T_0 \in D$, ako postoji linearan operator A takav da je

$$\overrightarrow{w}(T) - \overrightarrow{w}(T_0) = A\left(T - T_0\right) + r\left(T - T_0\right) \qquad (2)$$

pri čemu funkcija $T - T_0 \xrightarrow{r} r\left(T - T_0\right) \in \mathbb{R}^n$ ima svojstvo

$$\lim_{T \to T_0} \frac{r\left(T - T_0\right)}{\|T - T_0\|} = 0 \quad \text{(u } \mathbb{R}^n\text{).}$$

Kažemo da je funkcija $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ **diferencijabilna na skupu** $B \subseteq D$, ako je diferencijabilna u svakoj točki $T \in B$.

U slučaju $B = D$ govorimo o **diferencijabilnoj vektorskoj funkciji.**

Može se pokazati da je linearan operator A u Definiciji 4.5, ako postoji, jedinstven.

Tada A označujemo s $d\overrightarrow{w}\left(T_0\right)$ i nazivamo **diferencijalom funkcije** $\overrightarrow{w}$ **u točki** T_0.

Diferencijabilnost od $\overrightarrow{w}$ u točki T_0 znači

$$\lim_{T\to T_0} \frac{\overrightarrow{w}(T) - \overrightarrow{w}(T_0) - A(T - T_0)}{\|T - T_0\|} = 0 \quad \text{(u } \mathbb{R}^n\text{)} \qquad (3)$$

i

$$\lim_{T\to T_0} \frac{r(T - T_0)}{\|T - T_0\|} = 0 \quad \text{(u } \mathbb{R}^n\text{)} \;\Leftrightarrow\; \lim_{T\to T_0} \frac{\|r(T - T_0)\|}{\|T - T_0\|} = 0 \quad \text{(u } \mathbb{R}\text{)}.$$

Budući je vektorska funkcija $\overrightarrow{w}$ definira sa n koordinatnih funkcija funkcija

$$w_j : D \to \mathbb{R},\ j = 1, \cdots, n,$$

$j = 1, \cdots, n$, tj. pravilom

$$\overrightarrow{w}(T) = (w_1(T), \cdots, w_n(T)).$$

onda je diferencijabilnost vektorske funkcije $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ u točki T_0 ekvivalentna diferencijabilnosti svih koordinatnih funkcija u T_0, tj.

$$w_j(T) - w_j(T_0) = dw_j(T_0)(T) + r_j(T - T_0) \qquad (4)$$

i

$$\lim_{T \to T_0} \frac{r_j(T - T_0)}{\|T - T_0\|} = 0 \quad \text{(u } \mathbb{R}\text{)}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Prisjetimo se diferencijala (diferencijabilne) skalarne funkcije u točki T_0

$$df(T_0)(T) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) \triangle x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0)\, dx_i.$$

Dakle, diferencijal funkcije f u točki T_0 (linearni funkcional) je jedinstveno određen parcijalnim derivacijama funkcije f u točki T_0**,** tj. s parcijalnim derivacijama $\frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0)$, $i = 1, 2, ..., m$, dakle možemo ga identificirati s vektorom

$$df(T_0) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(T_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_m}(T_0) \right) \text{ (} \in \mathbb{R}^m\text{).}$$

(vektor iz $\mathbb{R}^m$ u kojem imamo desni ortonormirani Kartezijev sustav $\left(O; \overrightarrow{f}_1, \cdots, \overrightarrow{f}_m\right)$).

Dakle,

$$dw_j\left(T_0\right)\equiv\left(\frac{\partial w_j}{\partial x_1}\left(T_0\right),...,\frac{\partial w_j}{\partial x_m}\left(T_0\right)\right),\ \ j=1,\cdots,n. \tag{5}$$

Odredimo zapis (matricu) $[a_{ij}]$ linearnog operatora $A\equiv d\overrightarrow{w}\left(T_0\right):\mathbb{R}^m\rightarrow\mathbb{R}^n$ (u paru baza danih sa $\left(O;\overrightarrow{f}_1,\cdots,\overrightarrow{f}_m\right)$ i $(O;\overrightarrow{e}_1,\cdots,\overrightarrow{e}_n)$ gdje su desni ortonormirani Kartezijevi sustavi u $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$, redom).

Budući da u traženom zapisu $j-$ti redak od $[a_{ij}]$ mora odgovarati zapisu linearnog funkcionala $dw_j\left(T_0\right)$ danog s (5), to je

$$d\overrightarrow{w}\left(T_0\right)\equiv[a_{ij}]=\left[\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\left(T_0\right)\right]=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\left(T_0\right) & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial x_m}\left(T_0\right)\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ \frac{\partial w_n}{\partial x_1}\left(T_0\right) & \cdots & \frac{\partial w_n}{\partial x_m}\left(T_0\right)\end{bmatrix}=\frac{\partial\left(w_1,...,w_n\right)}{\partial\left(x_1,...,x_m\right)}\left(T_0\right)$$

što je tzv. **Jacobijeva matrica** vektorske funkcije $\overrightarrow{w}$ u točki T_0.

Sada je, uz oznake

- $T = (x_1, ..., x_m)$, $T_0 = \left(x_1^0, ..., x_m^0\right)$,

- $\Delta T = dT = T - T_0 = \left(x_1 - x_1^0, ..., x_m - x_m^0\right) = (dx_1, ..., dx_m)$,

$$d\overrightarrow{w}(T_0)(T) \equiv d\overrightarrow{w}(T_0)(dT)$$

$$\equiv \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial w_1}{\partial x_i}(T_0)\, dx_i, ..., \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial w_n}{\partial x_i}(T_0)\, dx_i\right) \quad (\in \mathbb{R}^n).$$

Za vektorsku funkciju $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, kažemo da je **derivabilna u točki** $T_0 \in D$ ako postoje sve parcijalne derivacije $\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(T_0)$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$.

Ako je vektorska funkcija $\overrightarrow{w}$ derivabilna u svakoj točki $T \in A \subseteq D$, onda kažemo da je $\overrightarrow{w}$ **derivabilna na skupu** A. U slučaju $A = D$ govorimo o **derivabilnoj** vektorskoj funkciji $\overrightarrow{w}$.

Jasno je da derivabilnost povlači diferencijabilnost, ali ne i obratno.

Za diferenciranje vrijede analogna pravila kao za skalarne funkcije.

Primjer:

- $d\left(\overrightarrow{w}+\vec{u}\right)(T_0)=d\left(\overrightarrow{w}\right)(T_0)+d\left(\vec{u}\right)(T_0)$
  (diferenciranje zbroja);
- $d\left(\overrightarrow{w}\cdot\vec{u}\right)(T_0)=\vec{u}\,(T_0)\cdot d\overrightarrow{w}\,(T_0)+\overrightarrow{w}\,(T_0)\cdot d\vec{u}\,(T_0)$
  (diferenciranje skalarnog produkta);
- $d\left(\overrightarrow{u}\circ\vec{w}\right)(T_0)=d\vec{u}\left(\overrightarrow{w}\,(T_0)\right)\circ d\vec{u}\,(T_0)$
  (diferenciranje kompozicije).

Zadržimo se na najjednostavnijem slučaju vektorske funkcije - onomu kad joj je varijabla skalar (broj) $x\in D\subseteq\mathbb{R}$, tj. slučaju $m=1$ i $n\geq 2$.

Pokazat će se da se ovdje nasljeđuju sve važne činjenice što smo ih dokazali za realne funkcije jedne varijable. Primjerice, diferencijabilnost je ekvivalentna derivabilnosti, koju se može ”redefinirati” kako slijedi:

Posljedica 4.6 Vektorska funkcija $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}$, je derivabilna u točki $x_0 \in D$ ako vektorska funkcija

$$\overrightarrow{\tilde{w}} : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n, \quad \overrightarrow{\tilde{w}}(x) = \frac{\overrightarrow{w}(x) - \overrightarrow{w}(x_0)}{x - x_0},$$

ima graničnu vrijednost $\lim\limits_{x_0} \overrightarrow{\tilde{w}}$ u točki x_0. Pripadni vektor označujemo s $\overrightarrow{w}'(x_0)$, tj.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\overrightarrow{w}(x) - \overrightarrow{w}(x_0)}{x - x_0} \equiv \overrightarrow{w}'(x_0),$$

i nazivamo **derivacijom** vektorske funkcije $\overrightarrow{w}$ **u točki** x_0.

Rabeći koordinatni zapis $\overrightarrow{w} = (w_1, ..., w_n)$, pri čemu je sada svaki $w_j : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, funkcija jedne varijable, očito je da je funkcija $\overrightarrow{w}$ derivabilna u točki x_0 onda i samo onda, ako su u x_0 derivabilne sve njezine koordinatne funkcije $w_1, ..., w_n$. Pritom je

$$\overrightarrow{w}'(x_0) = (w_1'(x_0), ..., w_n'(x_0))$$

Za $n=3$ koristimo i zapis

$$\overrightarrow{w}'(x_0) = w_1'(x_0)\overrightarrow{i} + w_2'(x_0)\overrightarrow{j} + w_3'(x_0)\overrightarrow{k}.$$

Za ovakve vektorske funkcije je

$$d\overrightarrow{w}(x) = \overrightarrow{w}'(x_0)dx.$$

Ako je vektorska funkcija $\overrightarrow{w} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u svakoj točki $x \in D$, onda je dobro definirana funkcija (derivacija od $\overrightarrow{w}$) $\overrightarrow{w}' : D \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \overrightarrow{w}'(x)$.

Jasno je i kako treba definirati **derivacije viših redova** i **više diferencijale**. Naime

$$\overrightarrow{w}''' \overset{\text{def.}}{=} (\overrightarrow{w}'')', ..., \overrightarrow{w}'^{(n+1)} \overset{\text{def.}}{=} (\overrightarrow{w}'^{(n)})' \text{ ,te}$$

$$d^2\overrightarrow{w}(x) = \overrightarrow{w}''(x)dx^2, ..., d^r\overrightarrow{w}(x) = \overrightarrow{w}^{(r)}(x)dx^r.$$

Primjer 6 Gibanje materijalne točke opisuje jednadžba

$$\overrightarrow{s}(t) = 2\cos t\,\overrightarrow{i} + 2\sin t\,\overrightarrow{j} + 3t\,\overrightarrow{k},$$

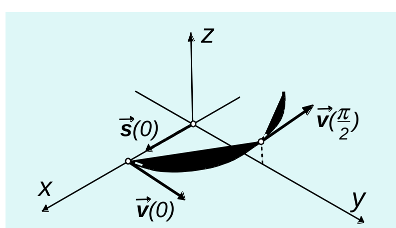
$t \in [0, \infty\rangle$ (vrijeme).

Nacrtajmo njezinu putanju ("hodograf") i odredimo joj brzinu i ubrzanje u svakom trenutku. Posebice, izračunajmo joj brzinu i ubrzanje (pripadne vektore) kad je $t = 0$ i $t = \frac{\pi}{2}$.

Putanja te materijalne točke jest valjčana uzvojnica (cilindrična spirala)

$$\overrightarrow{s}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3t),\ t \in [0, \cdot\rangle\,,$$

što se obavijajući valjak $x^2 + y^2 = 4$ "penje brzinom" $z = 3t$.



Budući da je brzina derivacija puta po vremenu, to je

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{s}'(t) = -2\sin t\,\overrightarrow{i} + 2\cos t\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k},\ t \in [0, \infty\rangle\,.$$

Nadalje, derivirajući brzinu dobivamo ubrzanje, tj.

$$\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{v}'(t) = -2\cos t\,\overrightarrow{i} - 2\sin t\,\overrightarrow{j},\ t \in [0, \infty\rangle\,.$$

Napokon, ako je $t = 0$ onda je $\overrightarrow{v}(0) = 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{a}(0) = -2\overrightarrow{i}$, a ako je $t = \frac{\pi}{2}$ onda je $\overrightarrow{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\overrightarrow{j}$.

Naredni teorem donosi derivacijska pravila za osnovne operacije nad vektorskim funkcijama skalarne varijable.

Teorem 4.7 Neka su $\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} : D \to \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilne vektorske funkcije, $f : D \to \mathbb{R}$ derivabilna (skalarna) funkcija i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijede ova pravila:

1. $(\lambda\overrightarrow{w} + \mu\,\overrightarrow{u})' = \lambda\overrightarrow{w}' + \mu\,\overrightarrow{u}'$;

2. $(f\,\overrightarrow{w})' = f'\overrightarrow{w} + f\,\overrightarrow{w}'$, pri čemu je $(f\,\overrightarrow{w})(x) = f(x)\overrightarrow{w}(x)$;

3. $\left(\frac{\overrightarrow{w}}{f}\right)' = \frac{f\,\overrightarrow{w}' - f'\overrightarrow{w}}{f^2}$, pri čemu je $\left(\frac{\overrightarrow{w}}{f}\right)(x) =$

$\dfrac{\overrightarrow{w}(x)}{f(x)}$ i $f(x) \neq 0$;

4. Derivacija skalarnog umnoška $(\overrightarrow{w} \circ \overrightarrow{u})(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j(x) u_j(x)$ je

$$(\overrightarrow{w} \circ \overrightarrow{u})' = \overrightarrow{w}' \circ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \circ \overrightarrow{u}';$$

5. Derivacija vektorskog umnoška

$$(\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u})(x) = \overrightarrow{w}(x) \times \overrightarrow{u}(x) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) \\ u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \end{vmatrix},$$

je

$$(\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u})' = \overrightarrow{w}' \times \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}'.$$

Sva navedena pravila proizlaze izravno iz pripadnih definicija, a dokazuju se posve slično onima za deriviranje realnih funkcija jedne varijable. Dokažimo npr. pravilo 5.

$$(\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u})'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{(\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u})(x + dx) - (\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u})(x)}{dx} =$$

$$\lim_{dx\to 0}\Big(\frac{\overrightarrow{w}(x+dx)-\overrightarrow{w}(x)}{dx}\times\overrightarrow{u}(x+dx)$$

$$+\overrightarrow{w}(x)\times\frac{\overrightarrow{u}(x+dx)-\overrightarrow{u}(x)}{dx}\Big)=$$

$$\overrightarrow{w}'(x)\times\overrightarrow{u}(x)+\overrightarrow{w}(x)\times\overrightarrow{u}'(x)=\left(\overrightarrow{w}'\times\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u}'\right)(x),$$

pri čemu smo iskoristili distributivnost, homogenost i neprekidnost vektorskoga množenja.

Zadatak Odredite derivaciju vektorske funkcije $\overrightarrow{\omega}: D\to\mathbb{R}^3$, $D\subseteq\mathbb{R}$, ako je $\overrightarrow{\omega}=(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w}$, pri čemu su $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}: D\to\mathbb{R}^3$ derivabilne vektorske funkcije. Dobiveni ishod provjerimo na funkcijama

$$\overrightarrow{u}(x)=2x\overrightarrow{i}-3x^2\overrightarrow{k}=(2x,0,-3x^2),$$

$$\overrightarrow{v}(x)=x^3\overrightarrow{i}+(2+x)\overrightarrow{k}=(x^3,0,2+x),$$

$$\overrightarrow{w}(x)=x\overrightarrow{j}+x^2\overrightarrow{k}=(0,x,x^2).$$

Razmotrimo sada derivaciju funkcijske kompozicije skalarne i vektorske funkcije. Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna (skalarna) funkcija, a $\overrightarrow{w} : Y \to \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ i $f[D] \subseteq Y$, derivabilna vektorska funkcija. Tada je dobro definirana kompozicija $\overrightarrow{w} \circ f : D \to \mathbb{R}^n$. Jednostavno je dokazati da pritom vrijedi analogon standardnoga teorema o derivaciji funkcijske kompozicije, tj.

$$(\overrightarrow{w} \circ f)'(x) = \overrightarrow{w}'(f(x)) \cdot f'(x), \quad x \in X.$$

Primjer 7 Odredimo $(\overrightarrow{w} \circ f)'(x)$ ako je $\overrightarrow{w} = \left(\sin^2 x, \cos x, x\right)$ i $f(x) = x^2$.

$$(\overrightarrow{w} \circ f)'(x) = \overrightarrow{w}'(f(x)) \cdot f'(x) =$$

$$= \left(\sin^2 x, \cos x, x\right)' |_{f(x)=x^2} \cdot \left(x^2\right)' =$$

$$= (\underbrace{2 \sin x \cos}_{\sin 2x}, -\sin x, 1) |_{f(x)=x^2} \cdot 2x = \left(\sin 2x^2, -\sin x^2, 1\right) \cdot 2x =$$

$$= \left(\sin 2x^2, -\sin x^2, 1\right) \cdot 2x = \left(2x \sin 2x^2, -2x \sin x^2, 2x\right)$$

4.2 Integral vektorske funkcije jedne varijable

Integral vektorske funkcije (jedne) realne varijable možemo definirati na standardni način, odnosno, pomoću pripadne primitivne funkcije i Newton-Leibnizove formule.

Definicija 4.8 Vektorsku funkciju $\overrightarrow{W}: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}$, nazivamo **primitivnom funkcijom** vektorske $\overrightarrow{w}: D \to \mathbb{R}^n$, ako je

$$\overrightarrow{W}'(x) = \overrightarrow{w}(x)$$

za svaki $x \in D$ osim, možda, u prebrojivo mnogo točaka od D.

Po koordinatnim funkcijama zapisano to znači

$$W_j'(x) = w_j(x), j = 1, \cdots, n.$$

Pritom govorimo da je vektorska funkcija (skalarne varijable) $\overrightarrow{w}$ **integrabilna**. U slučaju segmenta (ili intervala) $D = [a, b]$, (određeni) **integral vektorske funkcije** $\overrightarrow{w}$ definiramo kao vektor

$$\int\limits_{[a,b]} \overrightarrow{w} \equiv \int_a^b \overrightarrow{w}(x)dx \overset{\text{def.}}{=} \overrightarrow{W}(b) - \overrightarrow{W}(a).$$

Po koordinatnim funkcijama $(w_1, \cdots, w_n) = \overrightarrow{w}$ je, dakle,

$$\int_a^b \overrightarrow{w}(x)dx = \left(\int_a^b w_1(x)dx, \cdots, \int_a^b w_n(x)dx \right).$$

Odatle neposredno slijede dobra svojstva integrala vektorske funkcije što ih donosi ovaj teorem:

Teorem 4.9 Neka su $\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} : D \to \mathbb{R}^n$, $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, integrabilne vektorske funkcije, $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilna *(*skalarna*)* funkcija, $\overrightarrow{c}$ konstantan vektor i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

1. $\displaystyle\int_a^b (\lambda \overrightarrow{w}(x) + \mu \overrightarrow{u}(x))dx = \lambda \int_a^b \overrightarrow{w}(x)dx + \mu \int_a^b \overrightarrow{u}(x)dx$ (linea

2. $\displaystyle\int_a^b (\overrightarrow{c} \circ \overrightarrow{w})(x)dx = \overrightarrow{c} \circ \left(\int_a^b \overrightarrow{w}(x)dx \right)$ (linearnost za skalarni umnožak);

3. $\displaystyle\int_a^b (\overrightarrow{w}(x) \circ \overrightarrow{u}'(x))\,dx = \overrightarrow{w}(b) \circ \overrightarrow{u}(b) -$

$\displaystyle\overrightarrow{w}(a) \circ \overrightarrow{u}(a) - \int_a^b (\overrightarrow{w}'(x) \circ \overrightarrow{u}(x))\,dx;$

4. $\displaystyle\int_a^b \big(f(x)\overrightarrow{\boldsymbol{w}}'(x)\big)\,dx = f(b)\overrightarrow{w}(b) - f(a)\overrightarrow{w}(a)) -$
$\displaystyle\int_a^b (f'(x)\overrightarrow{w}(x))\,dx.$

((3) i (4) su formule za parcijalno integriranje redom skalarnoga umnoška vektorskih funkcija i umnoška realne i vektorske funkcije.)

Primjer 7 Ubrzanje materijalne točke (u $\mathbb{R}^3$) opisuje jednadžba

$$\overrightarrow{a}(x) = 6x\overrightarrow{c}_1 + 2\overrightarrow{c}_2, x \in [0, \infty\rangle \ \text{(vrijeme)},$$

pri čemu su $\overrightarrow{c}_1$ i $\overrightarrow{c}_2$ konstantni vektori. Otkrijmo zakon $x \mapsto \overrightarrow{s}(x)$ po kojemu se giba ta točka, ako su početni uvjeti $\overrightarrow{s}(0) = \overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0}$ (početna brzina).

Budući da je $\overrightarrow{v}'(x) = \overrightarrow{a}(x)$ i $\overrightarrow{s}'(x) = \overrightarrow{v}(x)$, to je

$$\overrightarrow{v}(x) = \int_0^x \overrightarrow{a}(t)dt + \overrightarrow{v}(0) =$$

$$\int_0^x (6t\overrightarrow{c}_1 + 2\overrightarrow{c}_2)dt + \overrightarrow{0} = 3x^2\overrightarrow{c}_1 + 2x\overrightarrow{c}_2 \quad \text{i}$$

Primjer 7

$$\overrightarrow{s}(x) = \int_0^x \overrightarrow{v}(t)dt + \overrightarrow{s}(0) =$$

$$\int_0^x (3t_1^2\overrightarrow{c} + 2t\overrightarrow{c}_2)dt + \overrightarrow{0} = x^3\overrightarrow{c}_1 + x^2\overrightarrow{c}_2.$$

Primjer 8 Izračunajmo integral vektorske funkcije $\overrightarrow{w} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{w}(x) = (3e^{-x}, \cos x, x)$, na segmentu $[0, \pi]$.

$$\int_0^\pi \overrightarrow{w}(x)dx = \left(\int_0^\pi 3e^{-x}dx, \int_0^\pi \cos x dx, \int_0^\pi x dx\right) =$$

$$\left(\left[-3e^{-x}\right] \Big|_0^\pi, [\sin] \Big|_0^\pi, \left[\frac{1}{2}x^2\right] \Big|_0^\pi\right) =$$

$$\left(3(1 - e^{-\pi}), 0, \frac{1}{2}\pi^2\right) = 3\left(1 - e^{-\pi}\right)\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\pi^2\overrightarrow{k}.$$