

Matematika 1

- 1. Osnove matematike**
- 2. Realne funkcije realne varijable**
- 3. Derivacije i primjene**
- 4. Nizovi i redovi**

Literatura:

- Slapničar, I.: *Matematika I*, Sveučilište u Splitu, Split, 2002.
- Pilot projekt “*Matematika 1*”, <http://www.fesb.hr/mat1>, FESB, Split, 1998.-2002.
- Slapničar, I.; Krešić-Jurić, S.; Barić, J.; Matic, M.: *Matematika 1 – vježbe*, FESB, Split, 2002.
- Javor, P.: *Matematička analiza 1*, Element, Zagreb, 1999.
- Krnić, L. ; Šikić, Z.: *Račun diferencijalni i integralni*, I. Dio, Školska knjiga, Zagreb, 1993.
- Pavasović S.; Radelja, T.; Banić, S.; Milišić, P.: *Matematika – riješeni zadaci*, Građevinski fakultet, Split, 1999.
- Demidovič, B. P.: *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1980.

Obveze:

- predavanja ($\geq 70\%$)
- vježbe ($\geq 70\%$)

Provjere znanja:

- dva kolokvija (parcijalna ispita):
 - sva dva pozitivna
 - zadaci ($\geq 50\%$) i teoretska pitanja ($\geq 50\%$)
- završni ispit:
 - zadaci ($\geq 50\%$) i teorija ($\geq 50\%$)

1. SKUPOVI BROJEVA

1.1. Prirodni brojevi

- prvi pojam broja (izražavanje količine elemenata nekog skupa)

Skup prirodnih brojeva uzimamo kao osnovni skup, a označavamo ga sa

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Operacije zbrajanja i množenja u skupu \mathbb{N} su uvijek izvedive, tj.

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) \quad m + n \in \mathbb{N}$$

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) \quad m \cdot n \in \mathbb{N}$$

Za svaki $m, n, r \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeća svojstva:

i) *komutativnost*

$$m + n = n + m \quad m \cdot n = n \cdot m$$

ii) *asocijativnost*

$$(m + n) + r = m + (n + r) \quad (m \cdot n) \cdot r = m \cdot (n \cdot r)$$

iii) *distributivnost*

$$(m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r \quad r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$$

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$.

Kažemo da je m manji od n i pišemo $m < n$ ako i samo ako postoji $p \in \mathbb{N}$ tako da je

$$m + p = n.$$

Kažemo da je m manji ili jednak n i pišemo $m \leq n$ ako i samo ako je

$$m < n \vee m = n.$$

Neka svojstva:

- (\mathbb{N}, \leq) je (potpuno) uređen skup.
- (\mathbb{N}, \leq) je diskretno uređen skup, tj. za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\{p \in \mathbb{N} \mid n < p < n + 1\} = \emptyset.$$

- Za skup X kažemo da je prebrojiv ili prebrojivo beskonačan ako je ekvipotentan¹ sa \mathbb{N} .
Pišemo $\text{card}X = \aleph_0$ (alef nula).

Za skup X kažemo da ima n elemenata ako je ekvipotentan sa skupom $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Pišemo $\text{card}X = n$.

¹ **Definicija** Kažemo da je skup A ekvipotentan (jednakobrojan) sa skupom B ako postoji bijekcija $f : A \rightarrow B$. Oznaka $A \sim B$.

Napomena: Skup \mathbb{N} je na jedinstven način definiran tzv. Peanovim aksiomima P1. - P4.

Aksiom P4., kojeg još nazivamo princip matematičke indukcije, glasi:

Ako je $M \subseteq \mathbb{N}$ i ako vrijedi:

i) $1 \in M$,

ii) $n \in M \implies n + 1 \in M$

tada je $M = \mathbb{N}$.

Aksiom P4. koristimo za dokazivanje raznih tvrdnji.

Primjer: Treba pokazati da formula

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2} \quad (F)$$

vrijedi za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz:

Neka je $M \subseteq \mathbb{N}$ skup svih prirodnih brojeva za koje formula (F) vrijedi. Treba (pomoću P4.) dokazati da je $M = \mathbb{N}$.

Baza indukcije. (Dokazujemo da je $1 \in M$)

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2}$$

Pretpostavka indukcije. (Pretpostavimo da je $n \in M$)

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Korak indukcije. (Pokazujemo da je $n + 1 \in M$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) \stackrel{P.I.}{=} \\ &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} = \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)}{2} \end{aligned}$$

Binomni poučak

Poopćenje:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Tražimo:

$$(x + y)^n =? \text{ za bilo koji } n \in \mathbb{N}$$

Neke oznake:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n! \stackrel{def}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad (n \text{ faktorijela})$$
$$0! \stackrel{def}{=} 1$$

Primjer:

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Vrijedi:

$$(n + 1)! = n! \cdot (n + 1)$$

Primjer:

$$6! = 5! \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720$$

Neka su $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leq n$, definiramo binomni koeficijent:

$$\binom{n}{k} \stackrel{def}{=} \frac{n!}{k! (n-k)!} \quad (n \text{ povrh } k).$$

Napomena: binomni koeficijent je uvijek prirodan broj, tj

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Primjer:

$$\begin{aligned} \binom{4}{0} &= \frac{4!}{0! (4-0)!} = \frac{4!}{4!} = 1 \\ \binom{4}{1} &= \frac{4!}{1! (4-1)!} = \frac{4!}{3!} = \frac{3! \cdot 4}{3!} = 4 \\ \binom{4}{2} &= \frac{4!}{2! (4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4}{2! \cdot 2} = 6 \\ \binom{4}{3} &= \frac{4!}{3! (4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{3! \cdot 4}{3!} = 4 \\ \binom{4}{4} &= \frac{4!}{4! (4-4)!} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1 \end{aligned}$$

Svojstva:

$$1. \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$2. \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$3. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$4. \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Pascalov trokut

$$\begin{array}{cccccccc} n = 0 & \left\| \begin{array}{c} (0) \\ (0) \end{array} \right. & & & & & & & \left\| \begin{array}{c} 1 \end{array} \right. \\ n = 1 & \left\| \begin{array}{c} (1) \\ (0) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (1) \\ (1) \end{array} \right. & & & & & & \left\| \begin{array}{c} 1 \quad 1 \end{array} \right. \\ n = 2 & \left\| \begin{array}{c} (2) \\ (0) \\ (1) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (2) \\ (1) \\ (2) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (2) \\ (2) \end{array} \right. & & & & & \left\| \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right. \\ n = 3 & \left\| \begin{array}{c} (3) \\ (0) \\ (1) \\ (3) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (3) \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (3) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (3) \\ (3) \end{array} \right. & & & & \left\| \begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \end{array} \right. \\ n = 4 & \left\| \begin{array}{c} (4) \\ (0) \\ (1) \\ (3) \\ (6) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (4) \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (6) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (4) \\ (2) \\ (3) \\ (6) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (4) \\ (3) \\ (6) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (4) \\ (4) \end{array} \right. & & & \left\| \begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array} \right. \\ n = 5 & \left\| \begin{array}{c} (5) \\ (0) \\ (1) \\ (4) \\ (10) \\ (10) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (5) \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (6) \\ (10) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (5) \\ (2) \\ (3) \\ (6) \\ (10) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (5) \\ (3) \\ (6) \\ (10) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (5) \\ (4) \\ (10) \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} (5) \\ (5) \end{array} \right. & & \left\| \begin{array}{c} 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array} \right. \\ \vdots & \left\| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. & \left\| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. & & \left\| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \end{array}$$

Iz svojstva 4. slijedi npr.

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

Teorem 1.2 (Binomni poučak)

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Dokaz. Matematičkom indukcijom.

Raspis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k &= \binom{n}{0} x^{n-0} y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \dots + \\ &+ \binom{n}{n-1} x^{n-(n-1)} y^{n-1} + \binom{n}{n} x^{n-n} y^n = \\ &= x^n + nx^{n-1}y + \dots + nxy^{n-1} + y^n \end{aligned}$$

Primjer:

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Domaći rad:

• $(x + y)^6 = ?$

• $(x - y)^6 = ?$

• $(x - y)^n \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = x^n - nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 - \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \dots + (-1)^n y^n$

Cijeli brojevi

Motivacija: Svaka jednađba oblika

$$m + x = n,$$

gdje su $m, n \in \mathbb{N}$, nema rješenje u skupu \mathbb{N} .

Primjer: Jednađba

$$7 + x = 3$$

nema rješenje u skupu \mathbb{N} .

Proširujemo skup \mathbb{N} skupom

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

kojeg nazivamo skup cijelih brojeva.

Operacije zbrajanja i množenja proširujemo na skup \mathbb{Z} . U skupu \mathbb{Z} te operacije su uvijek izvedive, tj.

$$(\forall m, n \in \mathbb{Z}) \quad m + n \in \mathbb{Z}$$

$$(\forall m, n \in \mathbb{Z}) \quad m \cdot n \in \mathbb{Z}$$

i za njih vrijede svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti.

Sada jednađba $m + x = n$ ima rješenje za svaki $m, n \in \mathbb{Z}$, tj.

$$x = n + (-m) \stackrel{def}{=} n - m.$$

Na ovaj naćin je definirano oduzimanje u skupu \mathbb{Z} .

Neka svojstva:

- (\mathbb{Z}, \leq) je (potpuno) uređen skup.
- (\mathbb{Z}, \leq) je diskretno uređen skup, tj. za svaki $m \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\{p \in \mathbb{Z} \mid m < p < m + 1\} = \emptyset.$$

- Za skup \mathbb{Z} je prebrojiv, tj. ekvipotentan je sa \mathbb{N} .
Pišemo $card\mathbb{Z} = \aleph_0$ (alef nula).

Napomena: postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, dana sa
 $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = -1, f(4) = 2, f(5) = -2, \dots$

Racionalni brojevi

Motivacija: Svaka jednađba oblika

$$m \cdot x = n,$$

gdje su $m, n \in \mathbb{Z}$, nema rješenje u skupu \mathbb{Z} .

Primjer: Jednađba

$$7 \cdot x = -3$$

nema rješenje u skupu \mathbb{Z} .

Proširujemo skup \mathbb{Z} skupom

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

kojeg nazivamo skup racionalnih brojeva.

Napomena: Podrazumijevamo da je

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$$

Dakle,

$$\frac{16}{12} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Isto tako vrijedi dogovor da je, npr.

$$\frac{-3}{5} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}.$$

Operacije zbrajanja i množenja proširujemo na skup \mathbb{Q} . U skupu \mathbb{Q} te operacije su uvijek izvedive, tj.

$$\left(\forall \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q} \right) \quad \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2} \in \mathbb{Q}$$

$$\left(\forall \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q} \right) \quad \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} \in \mathbb{Q}$$

Na skupu $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ se definira i dijeljenje

$$\left(\forall \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q} \wedge m_2 \neq 0 \right) \quad \frac{m_1}{n_1} : \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot m_2} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{m_1}{n_1} \leq \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 \cdot n_2 \leq m_2 \cdot n_1.$$

Neka svojstva:

- (\mathbb{Q}, \leq) je (potpuno) uređen skup.
- (\mathbb{Q}, \leq) je svuda gust, tj. između svaka dva racionalna broja postoji barem jedan racionalan broj (a to znači i beskonačno njih).
- Za skup \mathbb{Q} je prebrojiv, tj. ekvipotentan je sa \mathbb{N} . Pišemo $\text{card}\mathbb{Q} = \aleph_0$ (alef nula).

Napomena: postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ (zadana beskonačnom shemom).

Realni brojevi

Motivacija: Neke jednađbe, kao što su

$$x^2 = 2, \quad x^3 = 5, \dots$$

nemaju rješenje u skupu \mathbb{Q} .

Kad racionalne brojeve nanosimo na brojevni pravac, oni ne popune čitav pravac, iako je \mathbb{Q} gust. Te "rupice" na pravcu popunjavamo tzv. iracionalnim brojevima.

Skup svih iracionalnih brojeva označavamo sa \mathbb{I} , a skup

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

nazivamo skup realnih brojeva.

- Svaki racionalan broj može se prikazati kao konačan decimalan broj ili kao beskonačan periodičan decimalan broj.
- Svaki iracionalan broj može se prikazati kao beskonačan neperiodičan decimalan broj.

Primjer:

$$\frac{1}{4} = 0.25 \quad \frac{1}{3} = 0.\dot{3} = 0.3333\dots$$

$$\sqrt{2} = 1.4121356237\dots$$

$$e = 2.7183\dots$$

$$\pi = 3.1416\dots$$

Neka svojstva:

- Na skupu \mathbb{R} su uvijek izvedive operacije ” + ”, ” · ”.
Na skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je uvijek izvediva operacija ” : ”.
- (\mathbb{R}, \leq) je (potpuno) uređen skup.
- \mathbb{R} je svuda gust, tj. između svaka dva realna broja postoji barem jedan realan broj.
- \mathbb{Q} je gust u \mathbb{R} , tj. između svaka dva realna broja postoji barem jedan racionalan broj.
- Skup \mathbb{I} je neprebrojiv ili neprebrojivo beskonačan.
- Skup \mathbb{R} je neprebrojiv ili neprebrojivo beskonačan.

Kompleksni brojevi

Motivacija: neke jednačbe kao što je

$$x^2 = -1$$

nemaju rješenje u skupu \mathbb{R} .

Uvodimo novi objekt, kojeg označavamo sa i , tako da je

$$i^2 = -1.$$

Formalno, definiramo

$$i \stackrel{def}{=} \sqrt{-1}.$$

Definicija 1.14 Skup kompleksnih brojeva je skup

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$, realni broj

$$x = \operatorname{Re} z$$

nazivamo realni dio od z , a realni broj

$$y = \operatorname{Im} z$$

nazivamo imaginarni dio od z .

Napomena: Vrijedi

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$
$$i\mathbb{R} = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

Skup $i\mathbb{R}$ se naziva skup imaginarnih brojeva.

Za $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ kažemo da su jednaki ako i samo ako su im jednaki realni i imaginarni djelovi, tj.

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2.$$

Za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definiramo pripadni konjugirano kompleksni broj

$$\bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}.$$

Za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definiramo modul ili apsolutnu vrijednost kompleksnog broja z kao nenegativni realni broj

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Primjer

$$z_1 = 2 - i = 2 + (-1) \cdot i \implies \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = 2, & \operatorname{Im} z_1 = -1, \\ \bar{z}_1 = 2 - (-1) \cdot i = 2 + i, \\ |z_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$z_2 = -2 = -2 + 0 \cdot i \implies \begin{cases} \operatorname{Re} z_2 = -2, & \operatorname{Im} z_2 = 0, \\ \bar{z}_2 = -2 - 0 \cdot i = -2, \\ |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

$$z_3 = 3i = 0 + 3i \implies \begin{cases} \operatorname{Re} z_3 = 0, & \operatorname{Im} z_3 = 3, \\ \bar{z}_3 = 0 - 3 \cdot i = -3i, \\ |z_3| = \sqrt{(0)^2 + (3)^2} = \sqrt{9} = 3 \end{cases}$$

Računske operacije s kompleksnim brojevima

Neka su $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$, definiramo:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2),$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \stackrel{i^2=-1}{=} \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \\ &= \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2i^2}{x_2^2 - y_2^2i^2} \stackrel{i^2=-1}{=} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \cdot i \quad \text{za } z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Svojstva: Za sve $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vrijedi:

$$1. \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2},$$

$$2. \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$3. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad \text{za } z_2 \neq 0.$$

$$4. \overline{\overline{z}} = z,$$

$$5. z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R},$$

$$6. \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2},$$

$$7. \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

$$8. z \cdot \overline{z} = \overline{z} \cdot z = |z|^2,$$

$$9. |z| = 0 \iff z = 0$$

$$10. |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{nejednakost trokuta})$$

Geometrijski prikaz kompleksnog broja

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ jednoznačno je pridružen uređeni par $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, odnosno točka $T = (x, y)$ u koordinatnoj ravnini i obratno.

Ravninu u kojoj kompleksne brojeve predočujemo kao točke (na gore opisan način) nazivamo kompleksna ili Gaussova ravnina.

Svaki kompleksni broj $z = x + iy$ u Gaussovoj ravnini jednoznačno je određen udaljenošću $r \in [0, \infty)$ od ishodišta $0 = (0, 0)$ točke $T = (x, y)$, te kutem $\varphi \in [0, 2\pi)$ kojeg dužina \overline{OT} zatvara s pozitivnim smijerom x -osi. Kut

$$\varphi = \arg z$$

nazivamo argument kompleksnog broja z .

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Budući je

$$x = \operatorname{Re} z = r \cos \varphi$$

$$y = \operatorname{Im} z = r \sin \varphi,$$

onda je

$$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

trigonometrijski oblik kompleksnog broja, gdje je

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\arg z) = \frac{y}{x} \text{ (oprez !).}$$

Primjer Prikažite kompleksni broj $z = -1 - i$ u trigonometrijskom obliku.

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{-1} = 1 \implies \varphi = \frac{5\pi}{4},$$

pa je

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right).$$

Primjer Prikažite kompleksni broj $z = -i$ u trigonometrijskom obliku.

$$r = |z| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = 1,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{0} \implies \varphi = \frac{3\pi}{2},$$

pa je

$$z = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$$

Računske operacije s kompleksnim brojevima zadanim u trigonometrijskom obliku

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja omogućuje jednostavno izvođenje nekih računskih operacija.

Neka su $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ i $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ dva kompleksna broja. Tada je

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \\ &\quad + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &\quad + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] \\ &\stackrel{a.t.}{=} r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Slično, za $z_2 \neq 0$, vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

Matematičkom indukcijom može se pokazati

$$\prod_{k=1}^n z_k = \left(\prod_{k=1}^n r_k \right) \left(\cos \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \right) + i \sin \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \right) \right).$$

Specijalno, za $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, dobivamo tzv. Moivreovu formulu za potenciranje s prirodnim brojem n

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja posebno je pogodan za potenciranje s racionalnom eksponentom $q = \frac{m}{n}$. Dakle, treba izračunati potenciju $z^{\frac{1}{n}}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$, koju označavamo $\sqrt[n]{z}$ i nazivamo n -ti korijen iz kompleksnog broja z .

Vrijedi, $w = \sqrt[n]{z}$ točno onda kada je $w^n = z$. Ako je $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, onda n -ti korijen iz kompleksnog broja z ima n međusobno različitih vrijednosti $w = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ koje su dane sa

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Svi ovi brojevi leže na centralnoj kružnici radijusa $\sqrt[n]{r}$ i dijele tu kružnicu na n jednakih djelova.

Primjer Neka su $z_1 = -1 - i$ i $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Tada je

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \implies \varphi_2 = \frac{2\pi}{3},$$

pa je

$$z_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Sada je:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2} \cdot 1 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{23}{12}\pi + i \sin \frac{23}{12}\pi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}}{1} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{12}\pi + i \sin \frac{7}{12}\pi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1^5 &= \left(\sqrt{2} \right)^5 \left(\cos \frac{5 \cdot 5\pi}{4} + i \sin \frac{5 \cdot 5\pi}{4} \right) = \\ &= 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{25\pi}{4} + i \sin \frac{25\pi}{4} \right) = \\ &= 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{(24+1)\pi}{4} + i \sin \frac{(24+1)\pi}{4} \right) = \\ &= 4\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + 3 \cdot 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + 3 \cdot 2\pi \right) \right) = \\ &= 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 4\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 + 4i \end{aligned}$$

Primjer Riješite jednađbu $z^6 = 1$.

Trigonometrijski oblik:

$$1 = 1 + 0i \implies \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{0}{1} \implies \varphi = 0 \end{cases} \implies$$

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0),$$

Rješenja jednađbe su dana sa $z = \sqrt[6]{1} = z_k$, gdje je

$$z_k = \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{6} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

Specijalno

$$z_0 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 1$$

$$z_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = -1$$

$$z_4 = 1 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_5 = 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Eksponencijalni ili Eulerov oblik kompleksnog broja

Može se pokazati da je

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Sada iz trigonometrijskog oblika kompleksnog broja $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ slijedi

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Ovaj oblik nazivamo eksponencijalni ili Eulerov oblik kompleksnog broja z .

Računske operacije:

Ako su $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $z = r e^{i\varphi}$ kompleksni brojevi, onda je

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad \text{za } z_2 \neq 0$$

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$