Kriteriji konvergencije

Definicija 10 Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je red s pozitivnim članovima ako je $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 11 Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dva reda s pozitivnim članovima. Kažemo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ majoranta reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ minoranta reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_0$ povlači $a_n \leq b_n$.

Primjer Promatrajmo redove (s pozitivnim članovima)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Budući je za svaki $n \geq 1$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

onda je npr. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ minoranta reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, a npr. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ majoranta reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Teorem 11 (Kriteriji konvergencije) Neka su $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dva reda s pozitivnim članovima. Tada vrijedi:

i) Poredbeni kriterij I Red je konvergentan ako ima konvergentnu majorantu, a divergentan ako ima divergentnu minorantu.

ii) Poredbeni kriterij II Neka je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = r.$$

Tada vrijedi:

a) ako je $0 < r < +\infty$, tada oba reda ili konvergiraju ili divergiraju;

b) ako je $r = 0$ i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, tada i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira;

c) ako je $r = 0$ i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, tada i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira;

d) ako je $r = +\infty$ i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira;

e) ako je $r = +\infty$ i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira, tada i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

iii) D'Alambertov kriterij Neka je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Ako je $q < 1$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a ako je $q > 1$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

iv) Cauchyjev kriterij Neka je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Ako je $q < 1$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a ako je $q > 1$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

v) Raabeov kriterij Neka je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=q.$$

Ako je $q<1$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a ako je $q>1$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Primjer 1 Ispitajmo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ koristeći činjenicu da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergira.

Poredbeni kriterij I: Budući je $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$ za svaki $n\geq 1$, to je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergentana minoranta reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, pa red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira.

Poredbeni kriterij II: Neka je $a_n=\frac{1}{n}$ i $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Sada je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$$

pa budući da $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergira, onda i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira (po b)).

Slično se pokaže da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, za $0 < p < 1$ divergira, jer je za svaki $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}.$$

Može se pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, za $p > 1$ konvergira (teže).

Primjer 2 Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ koristeći činjenicu da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

Poredbeni kriterij II: Neka je $a_n = \frac{1}{n}$ i $b_n = \frac{1}{2n-1}$. Sada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = 2,$$

pa budući da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, onda i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira (po a)).

Primjer 3 Ispitajmo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

D'Alambertov kriterij: Imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1,$$

pa red konvergira.

Primjer 4 Ispitajmo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Cauchyjev kriterij: Imamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

pa red konvergira.

Apsolutna konvergencija

Definicija 12 Za red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da <u>apsolutno konvergira</u> ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Teorem 12 Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, tada i konvergira.

Obrat ovog teorema općenito ne vrijedi, tj. ima konvergentnih redova koji nisu apsolutno konvergentni.

Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira onda smijemo "grupirati i komutirati sumande", tj. "redosljed zbrajanja" ne utječe na sumu reda.

Primjer 1 Ispitajmo apsolutnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

Budući je

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \right| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

onda je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

(konvergentni) geometrijski red ($q = \frac{1}{2}$). Dakle, red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ apsolutno konvergira, pa po Teoremu 12, i konvergira**.**

Nađimo sumu tog reda. Budući da red konvergira, možemo grupirati i komutirati članove reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^7} + \ \ldots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \ \ldots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ \ldots\right) =$$

$$= S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}S,$$

gdje je

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

pa je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{1}{2}S = \frac{2}{3}.$$

Primjer 2 Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

pa je konvergira (kasnije ćemo pokazati), ali apsolutno divergira jer je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

pa jedivergentni red.

Alternirani redovi

Za red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je <u>alternirani red</u> ako je $\operatorname{sgn} a_n = -\operatorname{sgn} a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Teorem 13 (Lebnitz) Alternirani red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako vrijedi:

i) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ takav da $n \geq n_0$ povlači $|a_{n+1}| \leq |a_n|$,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Primjer Ispitajmo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots .$$

Ovo je alternirani red. Imamo:

i) za $n \geq 1$ vrijedi

$$|a_{n+1}| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = |a_n| \, ,$$

ii)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0,$$

pa, po Lebnitzovom kriteriju, red konvergira.

Niz funkcija

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$. Označimo s $\mathbb{R}^D$ skup svih funkcija iz D u $\mathbb{R}$, tj.

$$\mathbb{R}^D = \{f \mid f : D \to \mathbb{R}\}$$

Definicija 13 Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$. Niz funkcija je svaka funkcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^D$, pri čemu je

$$f(n) = f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Funkciju f_n nazivamo $n-$ti član niza.

Niz funkcija označavamo s $\{f_n\}$ ili ponekad sa

$$f_1, f_2, f_3, ..., f_n, ... \quad .$$

Definicija 14 Niz funkcija $\{f_n\}$ konvergira u točki x prema funkciji f_0 ako niz realnih brojeva $\{f_n(x)\}$ konvergira prema $f_0(x)$.

Niz funkcija $\{f_n\}$ <u>konvergira po točkama ili obično</u> prema funkciji f_0 na skupu $A \subseteq D$ ako niz realnih brojeva $\{f_n(x)\}$ konvergira prema $f_0(x)$ za svaki $x \in A$. Simbolički zapisujemo

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon.$$

Napomena: n_0 iz definicije ovisi općenito o x i ε.

Definicija 15 Niz funkcija $\{f_n\}$ <u>konvergira jednoliko (ili uniformno)</u> prema funkciji f_0 na skupu $A \subseteq D$ ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon.$$

Napomena: n_0 iz ove definicije ovisi općenito samo o ε.

Napomena: Niz funkcija koji konvergira uniformno konvergira i po točkama na nekom skupu.

Primjer Neka je zadan niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, tj.

$$x, x^2, ..., x^n, ...$$

Budući je

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \\ div. & x > 1 \text{ i } x \leq -1 \end{cases},$$

onda niz funkcija $\{f_n\}$ konvergira po točkama funkciji

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

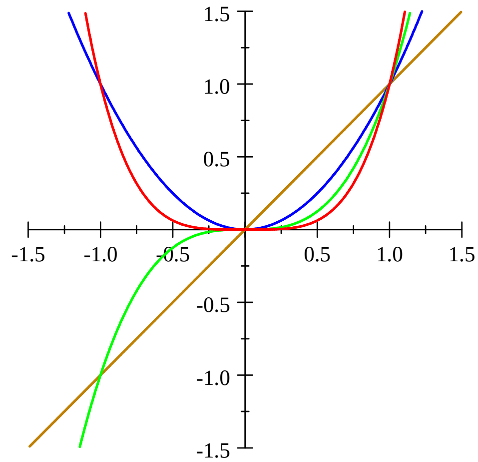
na skupu $A = (-1, 1]$.

Naime, npr. za $0 < x < 1$ vrijedi

$$|x^n - 0| < \varepsilon \Longleftrightarrow n \ln x < \ln \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \Longrightarrow$$

$$n_0 = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right] + 1.$$

Grafički:



Ako niz neprekidnih funkcija $\{f_n\}$ konvergira uniformno prema funkciji f_0, tada je i f_0 neprekidna funkcija.
Ako konvergencija nije uniformna, tada funkcija f ne mora biti neprekidna funkcija (slučaj u predhodnom primjeru).

Primjer Niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = 1 - \frac{\sin nx}{n},$$

uniformno konvergira prema funkciji $f_0(x) = 1.$
(Vidjeti sliku 5 u dodatku)

Red funkcija

Definicija 16 Red funkcija je uređeni par $(\{f_n\}, \{s_k\})$ nizova funkcija $\{f_n\}$ i $\{s_k\}$, pri čemu je $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$s_k = f_1 + f_2 + ... + f_k = \sum_{n=1}^{k} f_n.$$

Funkciju f_n nazivamo $n-$ti član reda, a funkciju $s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$ $k-$ta parcijalna suma.

Red $(\{f_n\}, \{s_k\})$ kraće zapisujemo kao

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + ... + f_k + ... \ .$$

Definicija 17 Red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$

- konvergira u točki x prema funkciji s ako red realnih brojeva $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira prema $s(x)$, odnosno ako niz realnih brojeva $\{s_k(x)\}$ konvergira prema $s(x)$.

- konvergira po točkama ili obično prema funkciji s na skupu $A \subseteq D$ ako red realnih brojeva $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira prema $s(x)$ za svaki $x \in A$.

- konvergira apsolutno na skupu $A \subseteq D$ ako red realnih brojeva $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konvergira za svaki $x \in A$.

- konvergira uniformno prema funkciji s na skupu $A \subseteq D$ ako niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira uniformno prema funkciji s na skupu A.

Teorem 15 (Weierstrass) Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergira uniformno na skupu $A \subseteq D$ ako ima konvergentnu majorantu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, tj. ako

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \;\; (\forall x \in A) \;\; |f_n(x)| \leq a_n \text{ čim je } n \geq n_0.$$

Primjer 1 Ispitajmo za koje $x-$eve red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1-x)^n}$$

apsolutno konvergira. Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^{n-1}}{(1-x)^n} \right|$$

je red s pozitivnim članovim, pa na njega možemo primijeniti Cauchyjev kriterij. Imamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^{n-1}}{(1-x)^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{\frac{n-1}{n}}}{|1-x|} = \frac{|x|}{|1-x|}.$$

Red će apsolutno konvergirati za

$$\frac{|x|}{|1-x|} < 1 \implies x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right).$$

Treba još provjeriti što se događa za $x = \frac{1}{2}$. Za $x = \frac{1}{2}$ polazni red je oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2.$$

Ovaj red divergira jer je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2 \neq 0$. Dakle, polazni red apsolutno konvergia za $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

Primjer 2 Promatrajmo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Za svaki $n \geq 1$ vrijedi

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \leq 1.$$

Budući da je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentan. Dakle, polazni red uniformno konvergira na intervalu $x \in [-1, 1]$.