3. Diferencijal

Diferencijal je linearna aproksimacija prirasta funkcije $\Delta f(x)$ funkcije koja je derivabilna u točki x_0.

Definicija 3.1 Neka je $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u točki $x_0 \in A$. Diferencijal od f u točki x_0 se definira kao

$$df(x_0)(x - x_0) \equiv f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

ili kraće, uz oznaku $\Delta x = x - x_0$,

$$df(x_0)(\Delta x) \equiv dy \equiv df(x) \equiv f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

Uočimo: Diferencijal od f u točki x_0 je (linearna) funkcija prirasta $\Delta x = x - x_0$.

Geometrijsko značenje: $df(x)$ je "prirast do tangente t", dok je $\Delta f(x)$ "prirast do grafa Γ_f".

Neka je $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u točki $x_0 \in A$. Tada je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x) - f'(x_0) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right)$$

$$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0,$$

pa zaključujemo da $\Delta y - dy$ "brže" teži u 0 nego Δx. Dakle, za dovoljno male Δx je

$$\Delta y \approx dy.$$

Ovo (geometrijski) znači da za dovoljno male $\Delta x = x - x_0$, točku $(x, f(x))$ na grafu Γ_f dovoljno dobro možemo aproksimirati točkom (x, y) na tangenti $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Primjer Odredimo $d\sin(x)$ u točki $x_0 \in \mathbb{R}$. Imamo

$$d\sin(x) \equiv \cos x_0 \cdot \Delta x, \qquad \text{(} (\sin x)' = \cos x \text{)} \qquad (1)$$

Slično, dx u točki $x_0 \in \mathbb{R}$. Imamo

$$dx \equiv 1 \cdot \Delta x = \Delta x \quad \text{(} (x)' = 1 \text{).}$$

Budući je $dx = \Delta x$, onda (1) možemo pisati

$$d\sin(x) = \cos x_0 \cdot dx.$$

Općenito, diferencijal $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, derivabilne funkcije u nekoj točki $x_0 \in A$ možemo pisati kao

$$df(x) = f'(x_0) \cdot dx$$

Dakle, ako je funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna na skupu $B \subseteq A$, onda u svakoj točki $x \in B$ imamo

$$df = f'(x) \cdot dx,$$

što povlači

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Teorem 3.2 (Svojstva diferencijala) Neka su funkcje $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabilne na skupu $B \subseteq A$. Tada za svaki $x \in B$ vrijedi

i) $d(f+g)(x) = df(x) + dg(x)$;

ii) $d(f-g)(x) = df(x) - dg(x)$;

iii) $d(f \cdot g)(x) = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)$;

iv) $d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot dg(x)}{g^2(x)}, \;\; g(x) \neq 0.$

Primjena diferencijala

Deriviranje parametarski zadane funkcije

Promatrajmo funkcije $\Phi, \Psi : T \longrightarrow \mathbb{R}$ i definirajmo za svaki $t \in T$

$$x = \Phi(t), \quad y = \Psi(t). \tag{2}$$

Ako je jednadžbama (1) je parametarski zadana funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, tražimo $f'(x)$. Imamo

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d\Psi(t)}{d\Phi(t)} = \frac{\Psi'(t) \cdot dt}{\Phi'(t) \cdot dt} = \frac{\Psi'(t)}{\Phi'(t)} \equiv \frac{\dot{\Psi}(t)}{\dot{\Phi}(t)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Primjer:

$$\Phi(t) = 2\cos t, \qquad \Phi : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$$

$$\Psi(t) = \sin t, \qquad \Psi : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$$

Neka je $x = 2\cos t$ i $y = \sin t$.

Eliminacija parametra t:

$$\frac{x^2}{2^2} + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1 \quad \text{(elipsa)}$$

Nadalje,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\cos t}{-2\sin t}.$$

Tražimo tangentu u točki $(x, y) = (1, y_0 > 0)$. Imamo

$$x_0 = 2\cos t_0 = 1 \Longrightarrow t_0 = \frac{\pi}{3} \quad \text{ili} \quad t_0 = \frac{5\pi}{3}.$$

Sada je

$$y_0^{(1)} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \quad \text{ili} \quad y_0^{(2)} = \sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$$

Dakle, $T\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i $t_0 = \frac{\pi}{3}$, pa je

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{-2\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6}\sqrt{3}.$$

Jednadžba tangente u $T\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ je

$$t \,\ldots..\, y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{6}\sqrt{3}\,(x-1)$$

$$\Longrightarrow\; t \,\ldots..\, y = -\frac{1}{6}x\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Približno računanje

Činjenica da je $\Delta y \approx dy$ za dovoljno male Δx koristi se za približno računanje vrijednosti funkcije u nekoj točki.

Primjer: Odredimo približnu vrijednost $\sqrt[4]{84}$ koristeći činjenicu da je $\sqrt[4]{81} = 3$.

Imamo

$$\sqrt[4]{84} = \sqrt[4]{81+3} = 3\sqrt[4]{1+\frac{1}{27}}.$$

Definirajmo funkciju

$$f(x) = 3\sqrt[4]{1+x}.$$

Sada je

$$f\left(0\right)=3\sqrt[4]{1+0}=3,$$

$$f\left(0+\frac{1}{27}\right)=f\left(\frac{1}{27}\right)=3\sqrt[4]{1+\frac{1}{27}}=\sqrt[4]{84}.$$

Uvedimo oznake

$$x_0=0 \quad \text{i} \quad \Delta x=\frac{1}{27}.$$

Budući je

$$\Delta y=\Delta f\left(x\right)=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right),$$

onda je

$$f\left(x_0+\Delta x\right)=f\left(x_0\right)+\Delta y$$

Budući je $\Delta x=\frac{1}{27}$ dovoljno malo onda je $\Delta y\approx dy$, pa imamo

$$f\left(x_0+\Delta x\right)=f\left(x_0\right)+\Delta y\approx f\left(x_0\right)+dy=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x.$$

Kako je

$$f'\left(x\right)=\frac{3}{4}\left(1+x\right)^{-\frac{3}{4}} \quad\Longrightarrow\quad f'\left(0\right)=\frac{3}{4},$$

onda je

$$\sqrt[4]{84}\approx 3+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{27}\approx 3.0278$$

4. Više derivacije i diferencijali

Neka je funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilna na skupu $B \subseteq A$. Ako derivacija $f' : B \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcije f ima derivaciju u u točki $x_0 \in B \subseteq A$, onda kažemo da je f dvaput derivabilna u točki x_0. Pišemo

$$\left(f'\right)'(x_0) \equiv f''(x_0) .$$

Ako je $f''(x_0)$ postoji za svaki $x_0 \in C \subseteq B \subseteq A$, onda definiramo funkciju

$$f'' : C \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow f''(x) ,$$

koju nazivamo druga derivacija funkcije f na skupu C.

Ako je $C = B = A$ onda govorimo o drugoj derivaciji $f'' : A \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Induktivno deriniramo: treću, četvrtu,..., $n-$tu derivaciju od f sa:

$$\left(f^{(n-1)}\right)'(x) \equiv f^{(n)}(x) .$$

Primjer 1: Odredimo $n-$tu derivaciju funkcije $f\left(x\right)=e^{-2x}$. Imamo:

$$f'\left(x\right)=-2e^{-2x},$$

$$f''\left(x\right)=-2\cdot\left(-2e^{-2x}\right)=2^2e^{-2x},$$

$$f'''\left(x\right)=-2\cdot\left(2^2e^{-2x}\right)=-2^3e^{-2x},$$

$$f^{iv}\left(x\right)=-2\cdot\left(-2^3e^{-2x}\right)=2^4e^{-2x},$$

$$\vdots$$

Zaključujemo:

$$f^{(n)}\left(x\right)=\left(-1\right)^n2^ne^{-2x}.$$

Dokaz: matematičkom indukcijom.

Primjer 2: Odredimo $n-$tu derivaciju funkcije $f\left(x\right)=-4x^2+2x-5$. Imamo:

$$f'\left(x\right)=-8x+2,$$

$$f''\left(x\right)=-8,$$

$$f'''\left(x\right)=0$$

Zaključujemo: $f^{(n)}\left(x\right)=0,\quad n\geq 3.$

Analogno definiramo i diferencijale višeg reda.

Neka je $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dvaput derivabilna u točki $x_0 \in A$. Diferencijal drugog reda (ili drugi diferencijal) od f u točki x_0 definiramo kao diferencijal diferencijala u točki x_0, tj.

$$d^2 f\,(x) \equiv d\,(df\,(x)) = (f''\,(x_0)\,dx) \cdot dx = f''\,(x_0)\,dx^2,$$

ili kraće, uz oznaku $\Delta x = x - x_0$,

$$df\,(x_0)\,(\Delta x) \equiv df\,(x) \equiv f'\,(x_0) \cdot \Delta x,$$

Dakle, ako je funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, dvaput derivabilna na skupu $B \subseteq A$, onda u svakoj točki $x \in B$ imamo

$$d^2 y = d^2 f = f''\,(x) \cdot dx,$$

što povlači

$$f''\,(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Induktivno deriniramo: treći, četvrti,..., $n-$ti diferencijal od f sa:

$$d^n y = d^n f = d\left(d^{(n-1)} f\right) = f^{(n)}\,(x) \cdot dx.$$

Primjer: Promatrajmo funkcije $\Phi, \Psi : T \longrightarrow \mathbb{R}$ i definirajmo za svaki $t \in T$

$$x = \Phi(t), \quad y = \Psi(t). \tag{2}$$

Ako je jednadžbama (1) je parametarski zadana funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, tražimo $y'' = f''(x)$. Imamo

$$f''(x) = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{dx} = \frac{\frac{\ddot{y}\cdot\dot{x}-\ddot{x}\cdot\dot{y}}{\dot{x}^2}\cdot dt}{\dot{x}\cdot dt} = \frac{\ddot{y}\cdot\dot{x}-\ddot{x}\cdot\dot{y}}{\dot{x}^3}.$$

5. Teoremi diferencijalnog računa

Teorem 1 (Fermat) Neka funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ poprima u točki $x_0 \in (a, b) \subseteq A$ svoju najveću ili najmanju vrijednost na intervalu (a, b). Ako derivacija u točki x_0 postoji onda je $f'(x_0) = 0$.

<u>Dokaz</u>:

Teorem 2 (Rolle) Neka je funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b] \subseteq X$, derivabilna na otvorenom intervalu (a, b), te neka je $f(a) = f(b)$. Tada postoji točka $x_0 \in (a, b)$ takva da je $f'(x_0) = 0$.

<u>Dokaz</u>: