5. Teoremi diferencijalnog računa

Teorem 1 (Fermat) Neka funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ poprima u točki $x_0 \in (a,b) \subseteq A$ svoju najveću ili najmanju vrijednost na intervalu (a,b). Ako derivacija u točki x_0 postoji onda je $f'(x_0) = 0$.

Dokaz:

Teorem 2 (Rolle) Neka je funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a,b] \subseteq A$, derivabilna na otvorenom intervalu (a,b), te neka je $f(a) = f(b)$. Tada postoji točka $x_0 \in (a,b)$ takva da je $f'(x_0) = 0$.

Dokaz:

Teorem 3 (Lagrangeov teorem srednje vrijednosti) Neka je funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b] \subseteq A$ i derivabilna na otvorenom intervalu (a, b). Tada postoji točka $x_0 \in (a, b)$ takva da je

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (LF)$$

Napomena: Formulu (LF) nazivamo **Lagrangeova formula.**

<u>Dokaz</u>:

Kod računanja limesa može se pojaviti jedan od **sedam neodređenih oblika**

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$$

Neodređeni oblici $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ rješavaju se pomoću tzv. L'Hospitalovog pravila, a ostali oblici se, određenim transformacijama, svode na jedan od ova dva oblika.

Teorem 4 (L'Hospitalovo pravilo) Neka za funkcije $f\ , g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

za $x_0 \in (a,b) \subseteq A$. Neka su funkcije f i g neprekidne na intervalu $[a,b]$ i neprekidno derivabilne na (a,b) osim možda u x_0, pri čemu je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in (a,x_0) \cup (x_0,b)$, onda je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

<u>Dokaz</u>:

Napomena: L'Hospitalovo pravilo vrijedi i za neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$ i kada $x \to +\infty$ ili $x \to -\infty$, te za limese i derivacije slijeva i zdesna.

Monotonost i derivacija

Teorem 5 Neka je funkcija f derivabilna na intervalu (a, b). Tada vrijedi:

i) funkcija je rastuća na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$,

ii) funkcija je padajuća na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a, b)$,

iii) ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo rastuća na intervalu (a, b),

iv) ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo padajuća na intervalu (a, b).

Dokaz:

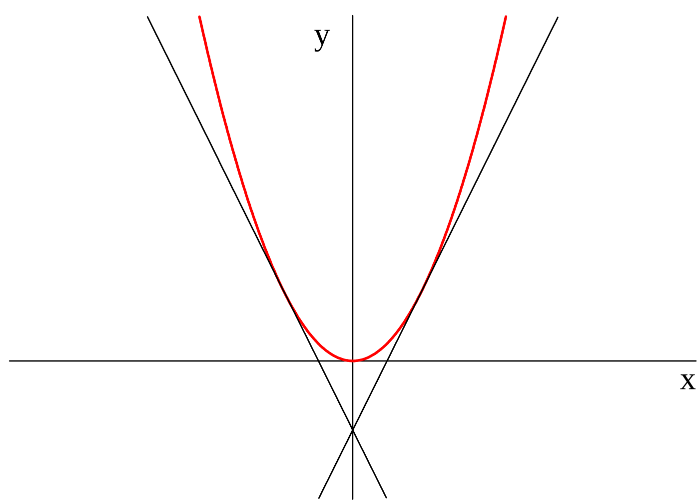
Geometrijska interpretacija:

- Ako je $f : A \to \mathbb{R}$ rastuća na intervalu $(a, b) \subseteq A$, onda tangenta na njen graf, u svakoj točki $x \in (a, b)$, zatvara šiljasti kut α_t s pozitivnim smjerom osi x, tj.

$$k_t = tg\alpha_t = f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

- Ako je $f : A \to \mathbb{R}$ padajuća na intervalu $(a, b) \subseteq A$, onda tangenta na njen graf, u svakoj točki $x \in (a, b)$, zatvara tupi kut α_t s pozitivnim smjerom $x-$osi, tj.

$$k_t = tg\alpha_t = f'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$



Ekstremi

Definicija 1

i) Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima lokalni minimum $f(x_0)$ u točki $x_0 \in A$ ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da vrijedi $f(x) > f(x_0)$ za svaki $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$.

ii) Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima lokalni maksimum $f(x_0)$ u točki $x_0 \in A$ ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da vrijedi $f(x) < f(x_0)$ za svaki $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$.

Ako funkcija u točki $x_0 \in A$ ima lokalni minimum ili lokalni maksimum kažemo da u toj točki ima lokalni ekstrem.

Definicija 2 Neka je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $x_0 \in A$.

i) Za točku x_0 kažemo da je stacionarna točka ako je $f'(x_0) = 0$,

ii) Za točku x_0 kažemo da je kritična točka ako je x_0 stacionarna točka ili ako f nije derivabilna u x_0.

Teorem 6 (Nužan uvjet za ekstrem) Neka je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $x_0 \in A$. Ako funkcija f u točki $x_0 \in A$ ima lokalni ekstrem, onda je x_0 kritična točka od f.

Dokaz:

Obrat ovog teorema općenito ne vrijedi.

Teorem 6:

f ima ekstrem u x_0 $\Rightarrow$ x_0 je krit. točka $\quad (P \Rightarrow Q)$,

ili ekvivalentno

x_0 nije krit. točka $\Rightarrow$ f nema ekstrem u x_0 $\quad (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Obrat Teorema 6 ne vrijedi (općenito):

x_0 je krit. točka $\not\Rightarrow$ f ima ekstrem u x_0 $\quad (Q \not\Rightarrow P)$,

ili ekvivalentno

f nema ekstrem u x_0 $\not\Rightarrow$ x_0 nije krit. točka $\quad (\neg P \not\Rightarrow \neg Q)$

Dakle, postoje funkcije koje u kritičnoj točki nemaju lokalni ekstem, ali su kritične točke jedini "kandidati" za ekstrem.

Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da mijenja predznak točki $x_0 \in A$ ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da su vrijednosti funkcije $f(x)$ za $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0)$ stalnog i suprotnog predznaka od vrijednosti funkcije $f(x)$ za $x \in (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$.

Teorem 7 (Dovoljan uvjet za ekstrem) Neka je dana funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in A$ kritična točka od f. Ako derivacija f' mijenja predznak u točki x_0 iz $-$ u $+$ onda je x_0 točka lokalnog minimuma, a ako derivacija f' mijenja predznak u točki x_0 iz $+$ u $-$ onda je x_0 točka lokalnog maksimuma.

Dokaz:

Teorem 8 (Dovoljan uvjet za ekstrem) Neka je dana funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in A$ stacionarna točka od f, tako da je f dvaput derivabilna u x_0. Ako je $f''(x_0) \neq 0$, tada funkcija f u točki x_0 ima lokalni ekstrem i to: ako je $f''(x_0) > 0$, tada je x_0 točka lokalnog minimuma, a ako je $f''(x_0) < 0$, tada je x_0 točka lokalnog maksimuma.

<u>Dokaz</u>:

Napomena: Može se dogoditi da za $f : A \to \mathbb{R}$ i neku točku $x_0 \in A$ vrijedi: $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 0$.
U ovom slučaju se koriste više derivacije za ispitivanje je li u točki x_0 ekstrem.

Primjer

1.

$$f(x) = x^2, \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

<u>Nužan uvjet:</u>

Sada je

$$f'(x) = 2x, \qquad f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

pa f nema točaka u kojima derivacija ne postoji. Odredimo stacionarne točke

$$f'(x) = 2x = 0 \implies x_0 = 0 \text{ (mogući ekstem).}$$

<u>Dovoljan uvjet:</u>

- <u>I. način</u>

$$x < 0 \implies f'(x) = 2x < 0$$

$$x > 0 \implies f'(x) = 2x > 0.$$

Derivacija mijenja predznak iz $-$ u $+$, pa po Teoremu 7, f ima u $x_0 = 0$ lokalni minimum.

- <u>II. način</u>

$$f''(x) = 2, \quad f'' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \implies \quad f''(0) = 2 > 0,$$

pa po Teoremu 8, funkcija u $x_0 = 0$ lokalni minimum.

2.

$$f(x) = x^3, \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

<u>Nužan uvjet:</u>

Sada je

$$f'(x) = 3x^2, \qquad f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

pa f nema točaka u kojima derivacija ne postoji. Odredimo stacionarne točke

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \implies x_0 = 0. \text{ (mogući ekstem)}$$

<u>Dovoljan uvjet:</u>

- <u>I. način</u>

$$x < 0 \implies f'(x) = 3x^2 > 0$$

$$x > 0 \implies f'(x) = 3x^2 > 0.$$

Derivacija ne mijenja predznak u točki $x_0 = 0$, pa po Teoremu 7, f u $x_0 = 0$ nema lokalni ekstrem.

- <u>II. način</u>

$$f''(x) = 6x, \quad f'' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \implies \quad f''(0) = 0,$$

pa po Teoremu 8 ne možemo ništa zaključiti.

3.

$$f\left(x\right)=\sqrt[3]{x^{2}},\qquad f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

<u>Nužan uvjet:</u>

Sada je

$$f'\left(x\right)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},\qquad f':\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}\longrightarrow\mathbb{R},$$

pa postoji točka $x_0 = 0 \in D_f$ u kojoj derivacija ne postoji. Dakle, $x_0 = 0$ je kritična točka (mogući ekstem). Odredimo sada stacionarne točke

$$f'\left(x\right)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=0 \implies \text{ nema rješenja, tj. neme stac. točaka.}$$

<u>Dovoljan uvjet:</u>

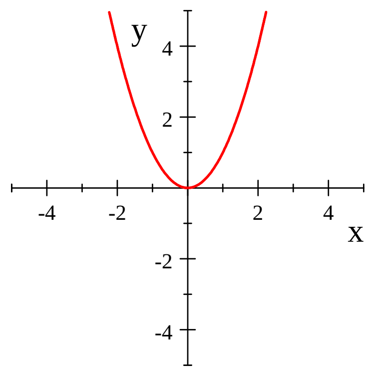
- <u>I. način</u>

$$x<0 \implies f'\left(x\right)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}<0$$

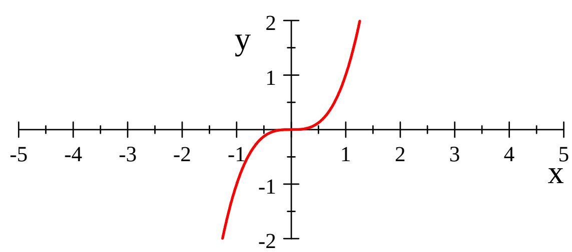
$$x>0 \implies f'\left(x\right)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}>0.$$

Derivacija mijenja predznak iz $-$ u $+$, pa po Teoremu 7, f ima u $x_0 = 0$ lokalni minimum.

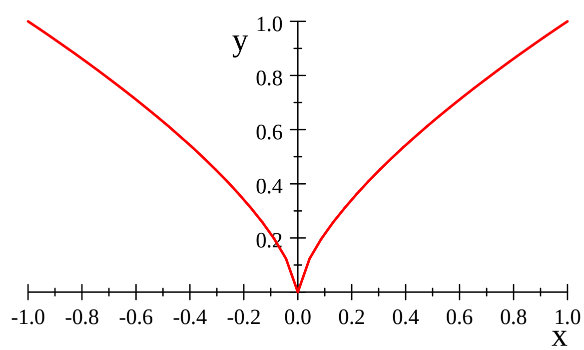
- <u>II. način</u> Teorem 8 ne možemo koristiti.



$$y = x^2$$



$$y = x^3$$



$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

Globalni ekstrem

Definicija

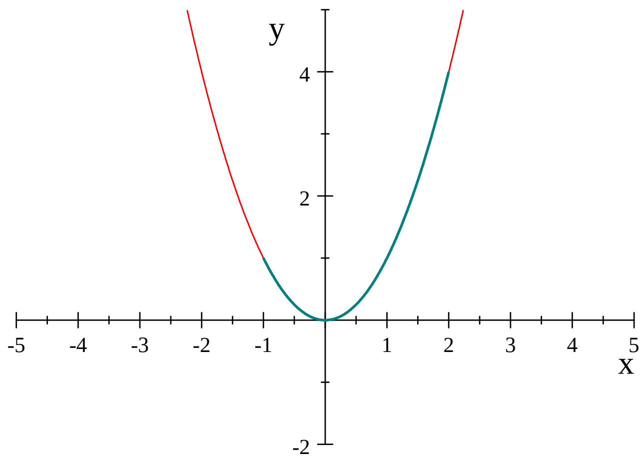
Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima globalni minimum $f(x_0)$ u točki $x_0 \in A$ ako je $f(x_0) \leq f(x)$ za svaki $x \in A$.

Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima globalni maksimum $f(x_0)$ u točki $x_0 \in A$ ako je $f(x_0) \geq f(x)$ za svaki $x \in A$.

Ako funkcija u točki $x_0 \in A$ ima globalni minimum ili globalni maksimum kažemo da u toj točki ima globalni ekstrem.

Neprekidna funkcija f na segmentu $[a, b]$ ima globalni ekstrem ili u točki lokalnog ekstrema ili na rubu intervala.

Primjer Treba naći globalni ekstrem funkcije $f(x) = x^2$ na segmentu $[-1, 2]$.



Sa slike je vidljivo da će globalni minimum biti u točki $x_1 = 0$ (lokalni ekstrem), a globalni maksimum u točki $x_2 = 2$ (rub intervala). Pokažimo to.

Budući je funkcija $f(x) = x^2$ neprekidna na segmentu $[-1, 2]$, kandidati za globalni ekstrem su točke lokalnih ekstrema i rubovi intervala.

Odredimo najprije lokalne ekstreme. Imamo

$$f(x) = x^2, \qquad f : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$f'(x) = 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 0 \in [-1, 2]$$ (mogući ekstem)

Kako je

$$f''(x) = 2 \implies f''(0) = 2 > 0,$$

onda f ima u $x_0 = 0$ lokalni minimum.

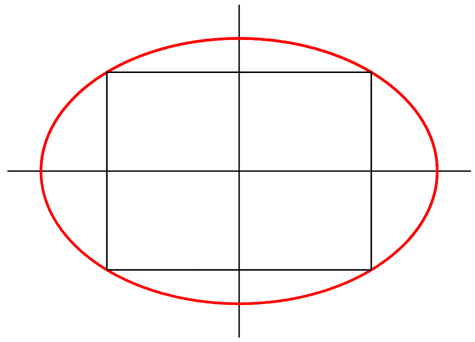
Sada imamo tri kandidata za globalni ekstrem.

x	$f(x)$	
0	0	globalni minimum
-1	1	
2	4	globalni maksimum

.

Primjena: Geometrijski ekstrem (kod rješavanja nekih geometrijskih ili fizikalnih problema).

Primjer U elipsu s poluosima a i b upišite pravokutnik maksimalne površine.



Prema slici je

$$P = 4xy \quad \text{i} \quad 0 \leq x \leq a.$$

Budući $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ povlači $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, onda je

$$P = P\left(x\right) = 4\frac{b}{a} \cdot x\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad x \in \left[0, a\right].$$

Za $x = 0$ i $x = a$ je $P_{\min} = 0$, tj. dobivamo minimalnu površinu. Budući je

$$P'\left(x\right) = 4\frac{b}{a} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{a\sqrt{\left(-x^2 + a^2\right)}},$$

onda je $P'\left(x\right) = 0$ za $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ i $P''\left(x_0\right) < 0$.
Tada je $y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}b$, pa je

$$P_{\max} = 4\frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}b = 2ab.$$