Prvi kolokvij iz

METRIČKIH PROSTORA

22.12.2011.

*Ime i prezime*____________________________

ZADACI

1. Neka je $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ funkcija dana sa
$$f(n)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & n\neq 1\\ 0, & n=1\end{cases}$$
te $d:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ definirana s $d(m,n)=|f(m)-f(n)|$. Dokažite da je $(\mathbb{N},d)$ omeđen metrički prostor te mu odredite dijametar.

2. Neka je na $\mathbb{R}^2$ dana euklidska norma $\|\cdot\|_2$ i neka je funkcija d definirana na sljedeći način:
$$d(x,y)=\begin{cases}\|x\|+\|y\|, & \text{kad je } \|x\|\neq\|y\|\\ d_2(x,y), & \text{kad je } \|x\|=\|y\|\end{cases},$$
gdje je d_2 euklidska metrika. Dokažite da je d metrika i ispitajte što su kugle u $(\mathbb{R}^2,d)$. Vrijedi li $Cl\,(B[x_0,r])=B\,(x_0,r)$?

3. Ispitajte potpunu omeđenost metričkog prostora iz prvog zadatka.

4. Neka je (X,d) metrički prostor, $A\subseteq X$. Označimo s $B\,(A,r)=\bigcup\limits_{a\in A}B\,(a,r)$. Dokažite da je:
   (a) $B\,(A,r)=\{x\in X: d\,(x,A)<r\}$;
   (b) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}B\left(A,\frac{1}{n}\right)=ClA.$

5. Neka su $(X_1,d_1),\ldots,(X_n,d_n)$ metrički prostori i neka je na skupu $X=X_1\times\cdots\times X_n$ dana euklidska metrika d_2. Ako su metrički prostori $(X_1,d_1),\ldots,(X_n,d_n)$:
   (a) omeđeni, onda je i (X,d_2) omeđen.
   (b) potpuno omeđeni, onda je i (X,d_2) potpuno omeđen.

Rezultati kolokvija bit će objavljeni na WEB stranici.

Goran Erceg

Drugi kolokvij iz

METRIČKIH PROSTORA

26.01.2012.

*Ime i prezime*__________________________________

ZADACI

1. Neka je (T, d') metrički prostor i (x_n), $x_n : T \to (X, d)$ niz funkcija koje uniformno konvergiraju prema $x_0 : T \to (X, d)$. Dokažite da je x_0 uniformno neprekidna ako je x_n uniformno neprekidna za svaki $n \in \mathbb{N}$.

2. Pokažite da je funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to (0, 1)$ definirana sa

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

homeomorfizam te uniformno neprekidna na $\mathbb{R}^+$.

3. Konvergira li uniformno niz funkcija (x_n), $x_n(t) = \frac{t}{1+nt}$ na $[0, \infty)$?

4. Neka je (x_n) niz u metričkom prostoru (X, d). Neka su u X definirani skupovi A_n na sljedeći način: $A_1 = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $A_2 = \{x_2, x_3, \ldots\}, \ldots,$ $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}, \ldots$. Dokažite da je (x_n) C-niz ako i samo ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam} A_n = 0$.

5. Neka je (X, d) metrički prostor, $A \subseteq X$ neprazan podskup od X. Ako je A kompaktan, onda postoje točke $a, a' \in A$ takve da je $\mathrm{diam} A = d(a, a')$.

Rezultati kolokvija bit će objavljeni na WEB stranici.

Goran Erceg

Pismeni ispit iz

METRIČKIH PROSTORA

13.02.2012.

*Ime i prezime*______________________

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
20	20	20	20	20	100

ZADACI

1. Neka je na $\mathbb{R}^2$ dana euklidska norma $\|\cdot\|_2$ i neka je funkcija d definirana na sljedeći način:

$$d(x,y)=\begin{cases} \|x\|+\|y\|, & \text{kad je } \|x\|\neq\|y\| \\ d_2(x,y), & \text{kad je } \|x\|=\|y\| \end{cases},$$

gdje je d_2 euklidska metrika. Dokažite da je d metrika i ispitajte što su kugle u $(\mathbb{R}^2,d)$.

2. Ispitajte je li funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-3$ uniformno neprekidna.

3. Ispitajte konvergira li niz (f_n) funkcija $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiran s $f_n(x)=\frac{n+1}{n}x$ prema funkciji $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=x$ i kako?

4. Neka je (x_n) C-niz u metričkom prostoru (X,d) i neka je (y_n) niz u X takav da je $d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$, za svaki $n\in\mathbb{N}$. Dokažite da je (y_n) također C-niz. Ako (x_n) konvergira prema x_0, dokažite da i (y_n) konvergira prema x_0.

5. Neka su (X,d) i (Y,d') metrički prostori. Neka je u X dan niz (x_n) takav da je $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ te funkcija $f:X\to Y$. Dokažite:

   a) Skup $\{x_0\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ je kompaktan podskup od X;

   b) Ako je f neprekidna na svakom kompaktnom podskupu $A\subseteq X$, onda je f neprekidna.

Rezultati ispita bit će objavljeni na WEB stranici.

Goran Erceg