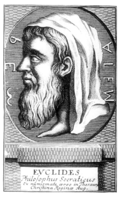
Euklid i njegovi ELEMENTI

EUKLID



Euklid

Euklid je živio od oko 330.-275. pr.K. za vrijeme vladavine Ptolomeja Sotera u Aleksandriji, kulturnom i znanstvenom središtu tadašnjeg svijeta. Jedan je od tri najveća grčka matematičara (Euklid, Arhimed i Apolonije (3. st.pr.K.)) čija su djela većim dijelom i sačuvana. Bio je pristaša Platonove filozofije. Smatra se da je matematičko obrazovanje dobio u Ateni kod Platonovih učenika. Svoju je nastavnu i znanstvenu djelatnost razvio kao osnivač i središnja ličnost matematičke škole *Museion* u Aleksandriji.

Euklidovi *Elementi*[1] objavljeni su oko 300. g.pr.K. Njihovo je značenje u tome što je to bio toliko uspješan pokušaj izlaganja elementarne geometrije na aksiomatskoj osnovi, da su oni stoljećima bili nenadmašan uzor stroge dedukcije.Sve do 18. st., a dijelom i u 19. st., oni su i osnovni udžbenik geometrije. Nije se sačuvao izvorni tekst, niti tekstovi iz Euklidovih vremena koji bi ukazivali na njih, već samo prijepisi iz kasnijih stoljeća u kojima su sastavljači unosili svoje primjedbe i poboljšanja. Na temelju postojećih nezavisnih tekstova su koncem 19. stoljeća J.L. Heiberg[2] i H. Menge[3] restaurirali originalni Euklidov tekst i danas se njihovo izdanje *Elemenata* smatra najsličnijim originalu. To izdanje je osnova i za hrvatski prijevod prvih šet knjiga koji je objavljen 1999. godine (Euklid, *Elementi I-VI.* Kruzak, Zagreb, 1999., prevela Maja Hudoletnjak Grgić, pogovor Vladimir Volenec) . Heilbergovo izdanje u

[1] Pored *Elemenata* sačuvana su *Data* (zbirka od 94 teorema iz *Elemenata*) i *O dijeljenju* (zadatci o dijeljenju likova), a izgubljena su *Pseudaria* (o pogrešnom zaključivanju u matematici), *Porizmi*, *Čunjosječnice*, *O plohama*, *Phaenomena* (o astronomiji), *Optika i katoptrika* (o perspektivi) i *Sectio canonis* (20 teorema o glazbenim intervalima).

[2] Johan Ludvig Heiberg, 1854.-1928., njemački matematičar.

[3] H. Menge, njemački lingvist.

egleskom prijevodu i s komentarima engleskog matematičara T.L. Heatha[4] se najčešće koristi kada se govori o Euklidovim *Elementima.*
U današnje vrijeme, poznavanje *Elemenata* nužno je kako bi se razumjela daljnja povijest matematike.
Elementi sastoje se od 13 knjiga:

- knjige 1 - 6 bave se planimetrijom,
- knjige 7 - 10 aritmetikom i teorijom brojeva u geometrijskoj formi (točnije 7 - 9 geometrijska teorija cijelih brojeva, a 10 iracionalnih brojeva),
- knjige 11 - 13 bave se stereometrijom.

Euklidovi *Elementi* u Europu su došli preko prijevoda s arapskog početkom 12. stoljeća u kojima su prevoditelji dodavali svoje komentare. Prijevod na latinski je napravio među prvima Herman Dalmatinac koji je najvjerojatniji prvi prijevod koji je načinio Adelard iz Batha popravio.

SADRŽAJ PRVE KNJIGE ELEMENATA

Za pitanja geometrijske aksiometike najvažnija je prva knjiga, jer su u njoj skupljeni svi aksiomi na kojima se zasnivaju *Elementi.* Euklid započinje svaku knjigu definicijama onih pojmova, kojima u toj knjizi mora operirati. Ukupno u svim knjigama ima 118 definicija, a u prvoj knjizi ima ih 23. Poslije definicija Euklid uvodi postulate (5) i aksiome (9). To su tvrdnje koje se usvajaju bez dokaza, a onda se iz njih dokazuju propozicije (48).Nevodimo definicije, postulate i aksiome prema hrvatskom prijevodu.

DEFINICIJE

(D-1) **Točka** *je ono što nema djelova.*

(D-2) **Crta** *je duljina bez širine.*

(D-3) *Krajevi crte su točke.*

(D-4) **Dužina** *je ona crta koja jednako leži prema točkama na njoj..*

(D-5) **Ploha** *je ono što ima samo duljinu i širinu.*

(D-6) *Krajevi plohe su crte.*

[4] 1. Euklidovi Elementi mogu se naći na: `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`.
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html`
2. T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements with Introduction and Commentata,* Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1956.

(D-7) **Ravnina** *je ploha koja jednako leži prema dužinama na njoj.*

(D-8) **Kut u ravnini** *je nagib u ravnini jedne prema drugoj dviju crta koje se međusobno dotiču i koje ne leže u dužini.*

(D-9) *Kada su crte koje obuhvaćaju kut ravne, kut se naziva* **ravnocrtnim**[5]**.**

(D-10) *Kada dužina uspravljena na dužinu čini međusobno jednake susjedne kutove, tada je svaki od jednakih kutova* **pravi**, *a dužina koja stoji naziva se* ***okomitom*** *na onu kojoj stoji.*

(D-11) **Tupi kut** *je onaj koji je veći od pravog.*

(D-12) **Oštar**[6] **kut** *je onaj koji je manji od pravog.*

(D-13) **Granica** *je ono što je nečemu kraj.*

(D-14) **Lik** *je ono što je obuhvaćeno s jednom ili više granica.*

(D-15) **Krug** *je lik u ravnini koji je obuhvaćen jednom crtom takvom da su sve dužine koje padaju na nju iz jedne točke od onih koje leže unutar lika međusobno jednake.*

(D-16) *Ta se točka naziva* **središtem kruga**.

(D-17) **Promjer** *kruga je bilo koja dužina povučena kroz središte i ograničena s obje strane kružnicom kruga, a koja također siječe krug u dva jednaka dijela.*

(D-18) **Polukrug** *je lik obuhvaćen promjerom i njime odrezanom kružnicom. A središte polukruga isto je ono koje je i središte kruga.*

(D-19) **Ravnocrtni** su **likovi** *oni koji su omeđeni dužinama, oni obhvaćeni s tri su* **trostranični**, *oni obuhvaćeni s četiri* ***četverostranični,*** *a oni obuhvaćeni s više od četiri dužine jesu* **mnogostranični** *likovi.*

(D-20) *Od trostraničnih likova* **jednakostraničnan trokut** *jest onaj koji ima tri iste stranice,* **jednakokračan** *onaj koji ima samo dvije jednake stranice, a* **raznostraničnan** *onaj koji ima tri nejednake stranice.*

(D-21) *Od trostraničnih likova još je* **pravokutnan trokut** *onaj koji ima pravi kut,* **tupokutan** *onaj koji ima tupi kut, a* **oštrokutan** *onaj koji ima tri oštra kuta.*

[5] Umjesto *ravnocrtni* rabit ćemo *pravolinijski* .

[6] Umjesto *oštar* rabiti ćemo *šiljast.*

(D-22) *Od četverostraničnih likova* **kvadrat** *je onaj koji je jednakostraničan i pravokutan,* **pravokutnik** *onaj koji je pravokutan, a nije jednakostraničan,* **romb** *onaj koji je jednakostraničan, a nije pravokutan, a* **romboid** *je onaj kojemu su nasuprotne stranice i kutovi međusobno jednaki, a koji nije ni jednakostraničan ni pravokutan. A četverostranični likovi pored tih neka se nazovu* **trapezima**.

(D-23) *Paralelne su one dužine koje se u istoj ravnini i koji se, neograničeno produžene u oba smjera, međusobno ne sastaju ni u jednom smjeru.*

POSTULATI

(P-1) *Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.*

(P-2) *I da se ograničena dužina neprekinuto produžuje u dužini.*

(P-3) *I da se sa svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.*

(P-4) *I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.*

(P-5) *I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.*

AKSIOMI

(A-1) *Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.*

(A-2) *Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.*

(A-3) *Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostatci su jednaki.*

(A-4) *Stvari koje se jedna s drugom poklapaju međusobno su jednake.*

(A-5) *Cjelina je veća od dijela.*

Nakon definicija, postulata i aksioma Euklid izlaže propozicije raspoređujući ih u red po logičkoj zavisnosti, tako da se svaka tvrdnja može dokazati na osnovu prethodnih tvrdnji, postulata i aksioma.

Euklidova propozicija (uobičajilo se navoditi i Heatov komentar, to je treći stupac) podijeljena je na šest etapa:

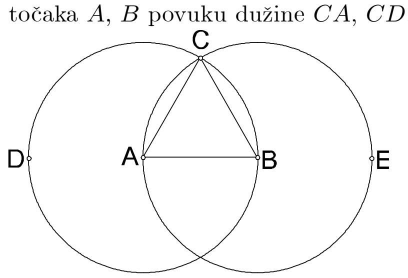
1. izricanje zadanoga (proteza);
2. isticanje zadanog - pretpostavke (eksteza);
3. isticanje tvrdnje ili onog što se traži (diorizma);
4. konstrukcija - u konstruktivnim zadatcima to je naprosto rješenje (kateskeva);

5. dokaz (apodeiskis);
6. zaključak (simperazna) - ponovi se što je trebalo dokazati i kako se to napravi.

U prijevodima na latinski umjesto *"A to je ono što je trebalo učiniti (dokazati)."* stavlja se u propozicijama u kojima treba načiniti konstrukciju Q.E.F. od latinske fraze *quod erat faciendum*, a u ostalim propozicijama Q.E.D. od latinske fraze *quod erat demonstrandum.* Danas je uobičajeno staviti znak □ ili ■.
Promotrimo je prvu propoziciju (iz hrvatskog izdanja prvih šest knjiga Euklidovih *Elemenata*).

Propozicija 1.

1.	*Na danoj dužini konstruiraj jednakostraničan trokut.*	
2.	Neka je AB dana dužina.	
3.	Na dužini AB treba dakle konstruirati jednakostraničan trokut.	
4.	Opišimo kružnicu BCD sa središtem u A i radijusa AB i	(P-3)
	neka se, isto tako, sa središtem B i radijusom BA opiše kružnica ACE	(P-3)
	i od točke C u kojoj se kružnice međusobno sijeku neka se do točaka A, B povuku dužine CA, CD.	(P-1)
5.	A budući da je točka A središte kružnice CDB, AC je jednaka AB.	(D-15)
	Isto tako, budući da je točka B središte kružnice CAE, BC je jednaka BA.	(D-15)
	A dokazano je također da je CA jednaka AB. Stoga je svaka od CA, CB jednaka AB.	
	A ono što je jednako istom jednako je i međusobno.	(A-1)
	Stoga je i CA jednaka CB. Prema tome, tri dužine CA, AB, BC muđusobno su jednake.	
6.	Dakle, trokut ABC je jednakostraničan trokut i konstruiran je na dužini AB. A to je ono što je trebalo učiniti.	



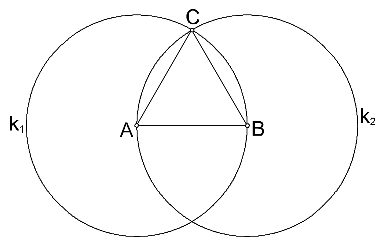
Kako bi se lakše pratio prikaz Euklidove prve knjige *Elemenata* pisati ćemo na danas uobičajeni način koristeći se standardnim oznakama.

PROPOZICIJE

Propozicija 1 *Na danoj dužini konstruiraj jednakostraničan trokut.*

Dokaz. Neka je $\overline{AB}$ dana dužina. Treba konstruirati jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ sa stranicom $\overline{AB}$.

Konstruirajmo kružnice $k_1 = k(A, \overline{AB})$ oko točke A radijusa $\overline{AB}$, te analogno $k_2 = k(B, \overline{AB})$ [primjenom Postulata (P-3)]. Neka je C presječna točka tih kružnica. Spojimo C s A i C s B [(P-1))].

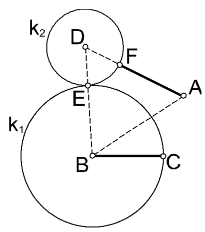


Propozicija 1.

Time je nastao $\triangle ABC$ za kojeg tvrdimo da je jednakostraničan.
Zaista, jer je $\overline{AC} = \overline{AB}$, $\overline{BC} = \overline{AB}$ [po Definiciji (D-15)] imamo $\overline{AC} = \overline{BC}$ [po Aksiomu (A-1)].
Ovim je dokazano $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$, tj. $\triangle ABC$ je jednakostraničan. ■

Propozicija 2 *Iz dane točke nanijeti dužinu jednaku danoj dužini.*

Dokaz. Neka su dani točka A i dužina $\overline{BC}$.



Propozicija 2.

Treba odrediti točku F tako da je $\overline{AF} = \overline{BC}$. Spojimo točke A i B [(P-1)]. Nad $\overline{AB}$ konstruirajmo jednakostraničan trokut $\triangle ABD$ (primjenom Propozicije 1). Konstruirajmo kružnicu $k_1 = k(B, \overline{BC})$ [(P-3)]. Neka su $\overleftrightarrow{AD}$ i $\overleftrightarrow{BD}$ pravci [(P-2)] i neka je E točka u kojoj ta kružnica siječe pravac $\overleftrightarrow{BD}$. Opišimo kružnicu $k_2 = k(D, \overline{DE})$ [(P-3)] i neka je F točka u kojoj ta kružnica siječe pravac $\overleftrightarrow{AD}$. Tvrdimo da je F tražena točka, tj. $\overline{AF}$ je tražena dužina. Vrijedi [po (D-15) i konstrukciji]:

$$\overline{BE} = \overline{BC},\ \overline{DE} = \overline{DF},\ \overline{DA} = \overline{DB}.$$

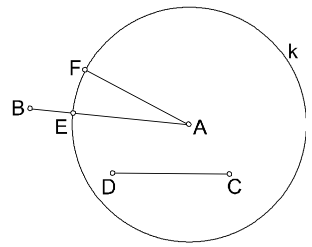
Primjenom aksioma (A-3) imamo

$$\overline{AF} = \overline{DA} - \overline{DF} = \overline{DB} - \overline{DE} = \overline{BE}.$$

Dobili smo je $\overline{AF} = \overline{BC}$ i $\overline{BE} = \overline{BC}$, i po (A-1) $\overline{AF} = \overline{BC}$, tj. $\overline{AF}$ je tražena dužina. ■

Propozicija 3 *Ako su dane dvije nejednake dužine, na veću prenijeti manju.*

Dokaz. Neka su dane nejednake dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\overline{AB} > \overline{CD}$. Treba odrediti točku E dužine $\overline{AB}$ tako da je $\overline{AE} = \overline{CD}$.



Propozicija 3.

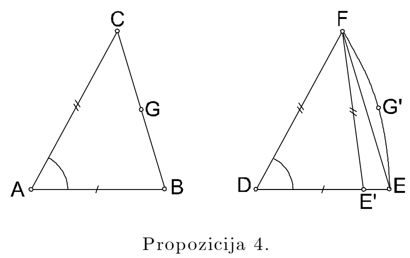
Primjenom Propozicije 2 na točku A i dužinu $\overline{CD}$, dobivamo točku F tako da je $\overline{AF} = \overline{CD}$. Ako je F točka dužine $\overline{AB}$, stavimo $E = F$. Ako F nije točka dužine $\overline{AB}$, opišimo kružnicu $k(A, \overline{AF})$ [(P-3)] i neka je E točka u kojoj ta kružnica siječe $\overline{AB}$. E je tražena točka. Zaista, jer je $\overline{AC} = \overline{AF}$ i $\overline{AF} = \overline{CD}$, po Aksiomu (A-1), slijedi da je $\overline{AF} = \overline{CD}$. ■

Propozicija 4 *Ako su kod dva trokuta dvije stranice jednog jednake dvjema odgovarajućim stranicama drugog, a kutovi između tih stranica jednaki, tada su i trokuti jednaki (tj. jednake su i preostale stranice i preostali kutovi).*

Dokaz. Neka su dani trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ tako da vrijedi:

$$\overline{AB} = \overline{DE},\ \overline{AC} = \overline{DF},\ \angle A = \angle D.$$

Treba dokazati da su $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ jednaki. Kako je $\angle A = \angle D$ položimo $\angle A$ na $\angle D$ tako da se točka A poklopi s točkom D, krak AB s krakom DE, a krak AC s krakom DF. Tvrdimo da se pri tom polaganju točka B mora poklopiti s točkom E, a točka C s točkom F.



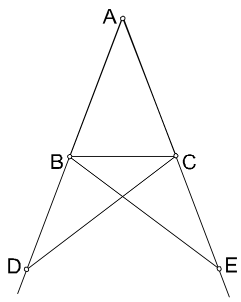
Propozicija 4.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je pri postupku polaganja točka B pala u točku E' na $\overline{DE}$ i $E \neq E'$. Dakle vrijedi $\overline{DE'} < \overline{DE}$ ili $\overline{DE} < \overline{DE'}$. No kako je $\overline{AB} = \overline{DE'}$ i $\overline{AB} = \overline{DE}$, po Aksiomu (A-1), slijedi $\overline{DE} = \overline{DE'}$. Dakle, $E = E'$, a to je u protuslovlju s našom pretpostavkom. Analogno se pokazuje da se točka C mora poklopiti s točkom F.

Dokažimo sad da je svaka točka dužine $\overline{BC}$ pala u točku dužine $\overline{EF}$. Pretpostavimo suptrotno, tj. da točka G dužine $\overline{BC}$ pri polaganju nije pala u točku dužine $\overline{EF}$. Neka je to točka G'. Dobili smo da dvije dužine $\overline{EF}$ i $\overline{E(G')F}$ omeđuju područje a to je nemoguće. Time je $\overline{BC} = \overline{EF}$ [(A-4)], a onda i $\angle B = \angle E$ i $\angle C = \angle F$. ■

Propozicija 5 *Kod jednakokračnih trokuta su kutovi uz osnovicu jednaki, a ako se produže jednake stranice i kutovi pod osnovicom su jednaki.*

Dokaz. Neka je dan jednakokračni trokut $\triangle ABC$ s osnovicom $\overline{BC}$. Produžimo $\overline{AB}$ preko B i na tom produžetku odaberemo proizvoljnu točku D [Postulat (P-2)]. Produžimo $\overline{AC}$ preko C i na tom produžetku odredimo točku E tako da je $\overline{BD} = \overline{CE}$ (primjena Propozicije 3). Treba dokazati da je $\angle ABC = \angle ACB$ i $\angle DBC = \angle BCE$.



Propozicija 5

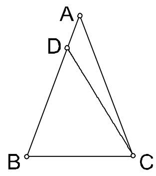
Spojimo D i C, te B i E [(P-1)] i promotrimo trokute $\triangle DCA$ i $\triangle BEA$. Vrijedi $\overline{AD} = \overline{AE}$ (po konstrukciji), $\angle A = \angle A$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ (po pretpostavci), pa je po prethodnoj Propoziciji 4, $\triangle DCA \cong \triangle BEA$. Posebno je i

$$\overline{BE} = \overline{DC}, \ \angle ADC = \angle AEB, \ \angle ACD = \angle ABE.$$

Uočimo trokute $\triangle BDC$ i $\triangle BEC$. Primjenom Propozicije 4 dobivamo da je $\triangle BDC \cong \triangle BEC$, pa je $\angle DBC = \angle BCE$ (to je druga tvrdnja koju treba dokazati) i $\angle BCD = \angle CBE$. Sada je $\angle ABE - \angle CBE = \angle ACD - \angle BCD$ (primjena Aksioma (A-3)) i zaista je $\angle ABC = \angle ACB$. ■

Propozicija 6 *Ako su u trokutu dva kuta jednaka, onda su jednake i stranice koje leže nasuprot jednakih kutova.*

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ trokut kojemu je $\angle B = \angle C$. Treba pokazati da je $\overline{AB} = \overline{AC}$.

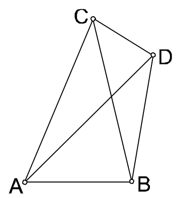


Propozicija 6

Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\overline{AB}$ veća od $\overline{AC}$. Na većoj odredimo točku D tako da je $\overline{DB} = \overline{AC}$ (Propozicija 3). Spojimo D sa C [(P-1)]. Promotrimo trokute $\triangle ABC$, $\triangle DBC$. Vrijedi $\overline{AC} = \overline{DB}$, $\overline{BC} = \overline{CB}$ i $\angle BDC = \angle CDB$ pa je $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ (Propozicija 4). Time smo došli do protuslovlja s Aksiomom (A-6): cjelina (trokut $\triangle ABC$) bila bi jednaka svom dijelu (trokutu $\triangle DBC$). Dakle, mora biti $\overline{AB} = \overline{AC}$. ∎

Propozicija 7 *Nije moguće iz dvije različite točke koje se nalaze s iste strane dužine povuči na krajnjim točkama dvije dužine tako da dužine s istim krajevima budu međusobno jednake.*

Dokaz. Neka je dana dužina $\overline{AD}$ i različite točke C i D s iste strane dužine. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\overline{AC} = \overline{AD}$ i $\overline{BC} = \overline{BD}$. Po Propoziciji 5 je trokut $\triangle ACD$ jednakokračan pa je $\angle ACD = \angle ADC$ i pogotovo $\angle BCD < \angle DCB$.

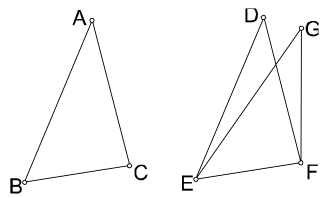


Propozicija 7

Isto tako, trokut $\triangle CBD$ je jednakokračan pa je i $\angle BCD = \angle DCB$. No to je nemoguće jer smo dokazali da je $\angle BCD < \angle DCB$. ∎

Propozicija 8 *Ako dva trokuta imaju dvije stranice jednake odgovarajućim dvjema stranicama i osnovice su im jednake, onda će imati i jednake kutove koje čine jednake stranice.*

Dokaz. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ trokuti kojima je $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$, te neka su im i osnovice jednake $\overline{BC} = \overline{EF}$. Trvdimo da je $\angle BAC = \angle EDF$.

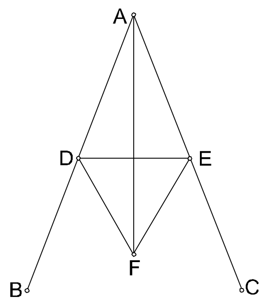


Propozicija 8

Položimo trokut $\triangle ABC$ u trokut $\triangle DEF$ tako da točka B padne u E i dužina $\overline{BC}$ u dužinu $\overline{EF}$. Tvrdimo da će i točka A pasti u točku D. U suprotnom, ako točka A padne u točku G različitu od D imali bi dvije točke i dužinu $\overline{EF}$ i vrijedilo bi $\overline{ED} = \overline{EG}$, $\overline{FD} = \overline{FG}$ - a to je nemoguće po Propoziciji 7. ■

Propozicija 9 *Raspoloviti dani pravolinijski kut.*

Dokaz. Neka je $\angle BAC$ dani pravolinijski kut. Treba da podijeliti na dva jednaka dijela. Odaberimo proizvoljnu točku D na $\overline{AB}$ i neka je D točka na $\overline{AC}$ takva je je $\overline{AE} = \overline{AD}$ (Propozicija 3). Konstruiramo dužinu $\overline{DE}$ [(P-1)] i nad njom jednakostraničan trokut $\triangle DEF$ (Propozicija 1) i potom $\overline{AF}$ [(P-1)]. Tvrdimo da je kut $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sa $\overrightarrow{AF}$ podijeljen na dva jednaka dijela. Promotrimo trokute $\triangle ADF$ i $\triangle AEF$.

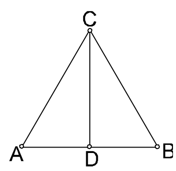


Propozicija 9

Po konstrukciji je $\overline{DF} = \overline{EF}$, $\overline{AD} = \overline{AE}$ a $\overline{AF}$ je zajednička stranica, pa su oni sukladni (Propozicija 8). Prema tome je $\angle DAF = \angle EAF$. ■

Propozicija 10 *Raspoloviti danu dužinu.*

Dokaz. Neka je $\overline{AB}$ dana dužina. Nad njom konstruiramo jednakostraničan trokut (Propozicija 1) i kut $\angle ACB$ raspolovimo sa $\overrightarrow{AD}$ (Propozicija 9). Tvrdimo da točka D raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

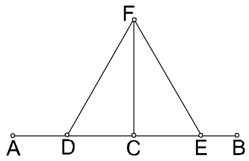


Propozicija 10

Promotrimo trokute $\triangle ADC$ i $\triangle BDC$. Po konstrukciji je $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\angle ACD = \angle BCD$ a $\overline{CD}$ je zajednička stranica i po Propoziciji 4 slijedi da su trokuti $\triangle ADC$ i $\triangle BDC$. Dobivamo, posebno, da je i $\overline{AD} = \overline{DB}$. ■

Propozicija 11 *Iz dane točke na danom pravcu povući pravac pod pravim kutom prema danom pravcu.*

Dokaz. Neka je $\overleftrightarrow{AB}$ dani pravac i C dana točka na njemu.
Treba konstruirati okomicu na pravac $\overleftrightarrow{AB}$ u točki C.
Neka je D bilo koja točka $\overline{AC}$ i na $\overline{CD}$ odredimo točku E tako da je $\overline{CD} = \overline{CE}$ (Propozicija 3) i nad $\overline{DE}$ konstruirajmo jednakostraničan trokut $\triangle DEF$ (1). Spojimo F sa C [(P-1)]. Tvrdimo da je $\overleftrightarrow{FC}$ [(P-2)] tražena okomica.

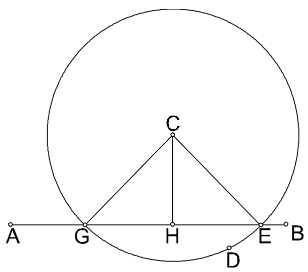


Propozicija 11

Promotrimo trokute $\triangle DCF$ i $\triangle ECF$. Po konstrukciji je $\overline{DC} = \overline{CE}$ i $\overline{FD} = \overline{FE}$ a $\overline{FC}$ je zajednička stranica pa su, po Propoziciji 8, ta dva trokuta sukladna. Dakle i $\angle DCF = \angle ECF$. Susjedni kutovi, sukuti, koji su međusobno jednaki su pravi kutovi [(D-10)] i zaista je $\overleftrightarrow{FC}$ tražena okomica. ■

Propozicija 12 *Povući okomicu na dani pravac iz dane točke koja ne leži na danom pravcu.*

Dokaz. Neka su dani pravac $\overleftrightarrow{AB}$ i točka C koja ne leži na njemu.
Treba konstruirati okomicu na $\overleftrightarrow{AB}$ koja prolazi točkom C.
Odaberimo točku D s druge strane pravca $\overleftrightarrow{AB}$ i konstruirajmo kružnicu $k = k(C, \overline{CD})$ [(P-3)] i sjecišta te kružnice sa $\overleftrightarrow{AB}$ označimo sa G i E. Raspolovimo točkom H dužinu $\overline{GE}$ (Propozicija 10) i povucimo $\overline{CG}$, $\overline{CH}$ i $\overline{CE}$ [(P-1)]. Tvrdimo da je $\overleftrightarrow{CH}$ tražena okomica, tj. $\overleftrightarrow{CH} \perp \overleftrightarrow{AB}$.



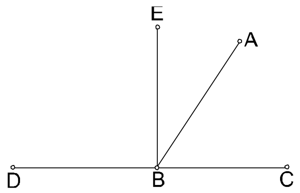
Propozicija 12

Promotrimo trokute $\triangle GHC$ i $\triangle ECH$. Po konstrukciji je $\overline{CG} = \overline{CE}$, $\overline{GH} = \overline{HE}$, a $\overline{CH}$ je zajednička stranica, pa su po Propoziciji 8 promatrani trokuti sukladni. Slijedi $\angle CHG = \angle CHE$ i po Definiciji (D-10) to su pravi kutovi. ■

Propozicija 13 *Ako pravac povučen nad pravcem čini kutove moraju ti kutovi biti ili oba prava ili sačinjavaju zajedno dva prava kuta.*

Dokaz. Neka se pravci $\overleftrightarrow{AB}$ i neka $\overleftrightarrow{CD}$ sijeku u točki B i neka su kutovi $\angle DBA$ i $\angle ABC$ susjedni kutovi.

Tvrdimo da su kutovi $\angle DBA$ i $\angle ABC$ ili pravi ili sačinjavaju zajedno dva prava kuta.



Propozicija 13

Ukoliko su oni jednaki onda su po (D-10) i pravi. Ukoliko oni nisu jednaki tada u točki B povucimo okomicu $\overleftrightarrow{EB}$ na pravac $\overleftrightarrow{DC}$ (Propozicija 11). Sada su kutovi $\angle DBE$ i $\angle EBC$ pravi. Tada je $\angle CBE = \angle CBA + \angle ABE$ i dodavanjem kuta $\angle EBD$ dobivamo [(A-2)]

$$\angle CBE + \angle EBD = \angle CBA + \angle ABE + \angle EBD.$$

Analogno je $\angle DBA = \angle DBE + \angle EBA$ i dodavanjem kuta $\angle ABC$ dobivamo [(A-2)]

$$\angle DBA + \angle ABC = \angle DBE + \angle EBA + \angle ABC.$$

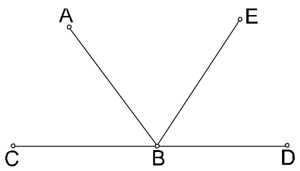
U dobivenim jednakostima desne strane su jednake pa je [(A-1)]

$$\angle CBE + \angle EBD = \angle DBA + \angle ABC,$$

i kutovi $\angle DBA$, $\angle ABC$ sačinjavaju zajedno dva prava kuta. ∎

Propozicija 14 *Ako ma sa kojim pravcem u istoj točki na njemu dva polupravca s različitih strana ovog pravca grade susjedne kutove koji zajedno čine dva prava kuta ta dva polupravca moraju se nalaziti na istom pravcu.*

Dokaz. Neka je dan pravac $\overleftrightarrow{AB}$ i neka su $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BD}$ polupravci s različitih strana pravca $\overleftrightarrow{AB}$ takvi da je zbroj $\angle ABC + \angle ABD$ jednak dvama pravim kutovima. Tvrdimo da $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BD}$ leže na istom pravcu, tj. $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{BD}$.

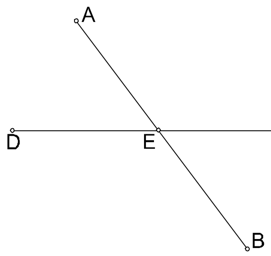


Propozicija 14

U suprotnom, neka je $\overrightarrow{BE}$ onaj polupravac koji sa $\overrightarrow{BC}$ leži na istom pravcu. Po Propoziciji 13 je zbroj kutova $\angle ABC + \angle ABE$ jednak dvama pravim kutovima. Po pretpostavci je i $\angle ABC + \angle ABD$ jednak dvama pravim kutovima. Dakle, mora biti $\angle ABC + \angle ABE = \angle ABC + \angle ABD$ i oduzimanjem kuta $\angle ABC$ dobivamo $\angle ABE = \angle ABD$ [(A-3)]. To znači da je dio, kut $\angle ABE$, jednak cjelini, kutu $\angle ABD$, a to je u protuslovlju s Aksiomom (A-5). Dakle, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BD}$ leže na istom pravcu. ∎

Propozicija 15 *Ako se dva pravca sijeku, onda čine međusobno jednake vršne kutove.*

Dokaz. Neka se pravci AB i CD sijeku u točki E.
Treba dokazati da je $\angle CEA = \angle DEB$ i $\angle AED = \angle CEB$.

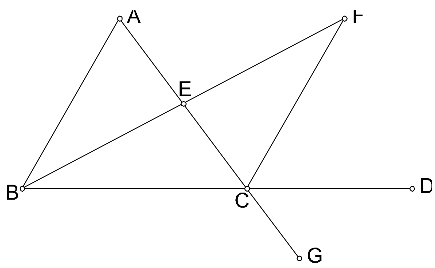


Propozicija 15

Primjenom Propoziciji 13 na $\overrightarrow{EA}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ dobivamo da je zbroj $\angle DEA + \angle CEA$ jednak dvama pravim kutovima. Isto tako, primjenimo li istu propoziciju na $\overrightarrow{ED}$ i $\overleftrightarrow{AB}$ dobivamo da je zbroj $\angle DEA + \angle DEB$ jednak dvama pravim kutovima. Slijedi $\angle DEA + \angle CEA = \angle DEA + \angle DEB$ [(A-1)]. Oduzimanjem kuta $\angle DEA$ [(A-3)] dobivamo $\angle CEA = \angle DEB$.
Analogno se pokazuje i druga tvrdnja. ■

Propozicija 16 *U svakom trokutu je vanjski kut dobiven produživanjem jedne stranice veći od svakog od dva nesusjedna unutarnjeg kuta.*

Dokaz. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i produljimo jednu njegovu stranicu $\overline{BC}$ do $\overline{BD}$.
Treba dokazati da je $\angle DCA$ veći od $\angle BAC$ i od $\angle ABC$.



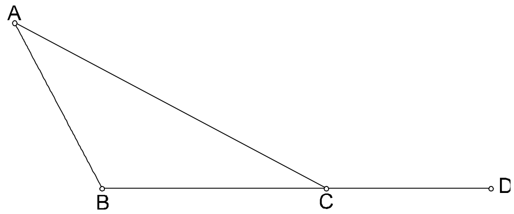
Propozicija 16

Konstruiramo polovište E dužine $\overline{AC}$ (Propozicija 10) i spojimo E i B [(P-1)]. Produžimo spojnicu $\overline{BE}$ [(P-2)] do točke F tako da je $\overline{BE} = \overline{EF}$ (Propozicija 3) i spojimo F sa C [(P-1)]. Tvrdimo da je $\angle DCA > \angle ABC$ i $\angle DCA > \angle BAC$. Promotrimo trokute $\triangle BEA$ i $\triangle ECF$. Po konstrukciji je $\overline{BE} = \overline{EF}$, $\overline{AE} = \overline{EC}$, a po Propoziciji 15 je $\angle BEA = \angle CEF$. Primjenom S-K-S poučka o sukladnosti trokuta (Propozicija 4) slijedi da su $\triangle BEA$ i $\triangle ECF$ sukladni. Dakle mora

biti i $\angle BAE = \angle ECF$. Kako je $\angle ECD > \angle ECF$ [(A-5)], zaista je $\angle ECD = \angle DCA > \angle BAE = \angle BAC$.
Analogno se dokazuje tvrdnja $\angle DCA > \angle ABC$. ■

Propozicija 17 *U svakom trokutu je zbroj bilo koja dva kuta manji od dva prava kuta.*

Dokaz. Neka je dan trokut $\triangle ABC$.
Tvrdimo da je zbroj bilo koja dva kuta manji od dva prava kuta.

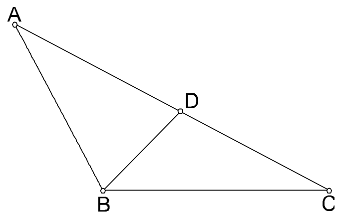


Propozicija 17

Izmimo bilo koja dva kuta, recimo $\angle ABC$ i $\angle ACB$, i dokažimo da je $\angle ABC + \angle ACB$. Produljimo $\overline{BC}$ do $\overline{BD}$ [(P-2)]. Po Propoziciji 16 je $\angle ACD > \angle ABC$. Odavde, dodavanjem kuta $\angle ACB$ dobivamo da je $\angle ACD + \angle ACB > \angle ABC + \angle ACB$. Budući je $\angle ACD + \angle ACB$ jednako dvama pravim kutovima (Propozicija 13) imamo da je zbroj $\angle ABC + \angle ACB$ manji od dva prava kuta. ■

Propozicija 18 *U svakom trokutu nasuprot veće stranice leži veći kut.*

Dokaz. Neka je u trokutu $\triangle ABC$ stranica $\overline{AC}$ veća od $\overline{AB}$.
Treba dokazati da je $\angle ABC > \angle BCA$.

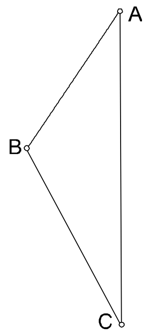


Propozicija 18

Konstruirajmo točku D na stranici $\overline{AC}$ tako da je $\overline{AD} = \overline{AB}$ (Propozicija 3) i spojimo D sa B [(P-1)]. Po Propoziciji 6 je vanjski kut $\angle ADB$ trokuta $\triangle BCD$ veći od nesusjednog kuta $\angle DCB$. Kako je $\triangle ABD$ jednakokračan trokut vrijedi $\angle ABD = \angle ADB$ (Propozicija 5). Dobili smo $\angle ABC > \angle ABD = \angle ADB > \angle DCB = \angle ACB$, a to se i tvrdilo. ■

Propozicija 19 *U svakom trokutu nasuprot većem kutu leži veća stranica.*

Dokaz. Neka je u trokutu $\triangle ABC$ kut $\angle ABC$ veći od $\angle BCA$.
Treba dokazati da je $\overline{AC} > \overline{AB}$.

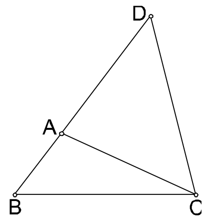


Propozicija 19

Prepostavimo suprotno. Tada je ili $\overline{AC} = \overline{AB}$ ili $\overline{AC} < \overline{AB}$. Sigurno je $\overline{AC} \neq \overline{AB}$ jer bi u suprotnom, po Propoziciji 5, bilo $\angle ABC = \angle BCA$ što je u protuslovlji s našom pretpostavkom. Sigurno nije ni $\overline{AC} < \overline{AB}$ jer bi tada, po Propoziciji 18, bilo $\angle ABC < \angle BCA$ što je u protuslovlju s našom polaznom pretpostavkom. ■

Propozicija 20 *U svakom trokutu zbroj bilo koje dvije stranice veći je od treće stranice.*

Dokaz. Neka je dan trokut $\triangle ABC$.
Treba dokazati $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$, $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$ i $\overline{BC} + \overline{CA} > \overline{AB}$.



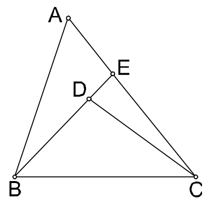
Propozicija 20

Produljimo stranicu $\overline{BA}$ do točke D tako da je $\overline{AD} = \overline{AC}$. Po Propoziciji 5 je $\angle ADC = \angle ACD$. Dakle, vrijedi $\angle BCD > \angle ADC$ [(A-4)]. Budući je $\triangle DCB$ trokut kojemu je $\angle BCD > \angle ADC$, po Propoziciji 19 mora biti $\overline{DB} > \overline{BC}$, odnosno $\overline{BA} + \overline{AC} > \overline{BC}$.

Analogno se dokazuju i ostale tvrdnje. ■

Propozicija 21 *Ako se u unutrašnjosti trokuta iz krajnjih točaka jedne njegove stranice trokuta povuku dva pravca koji se sijeku, suma povučenih dužina bit će manja od dužina preostalih stranica trokuta, a kut kojeg one tvore bit će veći.*

Dokaz. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i pravci $\overleftrightarrow{BD}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ gdje je D unutarnja točka trokuta.
Treba dokazati da je $\overline{BD} + \overline{DC} < \overline{AB} + \overline{AC}$ i $\angle BDC > \angle BAC$.



Propozicija 21

Neka je E sjecište pravaca $\overleftrightarrow{BD}$ i $\overleftrightarrow{AC}$. U trokutu $\triangle BAE$ je $\overline{AB} + \overline{AE} > \overline{BE}$ (Propozicija 20). Dadavanjem $\overline{EC}$ dobivamo $\overline{AB} + \overline{AE} + \overline{EC} > \overline{BE} + \overline{EC}$ [(A-4)]. Kako je $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}$ slijedi da je i

$$\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BE} + \overline{EC}.$$

Isto tako, u trokutu $\triangle CED$ je $\overline{CE} + \overline{ED} > \overline{CD}$ (Propozicija 20), i dadavanjem $\overline{BD}$ dobivamo $\overline{CE} + \overline{ED} + \overline{BD} > \overline{CD} + \overline{BD}$ [(A-4)]. Po konstrukciji je $\overline{ED} + \overline{DB} = \overline{EB}$ pa iz prethodne nejednakosti imamo

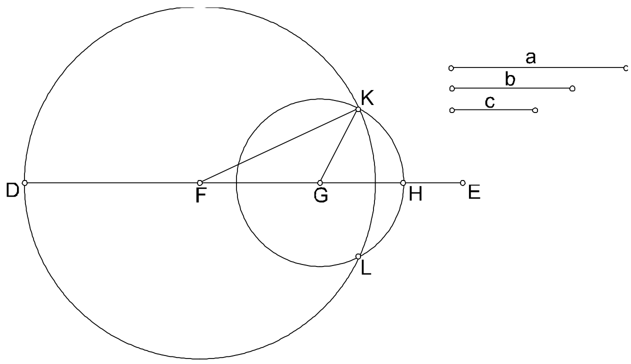
$$\overline{CE} + \overline{ED} > \overline{CD} + \overline{BD}.$$

Imamo $\overline{BA} + \overline{AC} > \overline{BE} + \overline{EC} > \overline{CE} + \overline{ED} > \overline{CD} + \overline{BD}$ a to je i trebalo dokazati.

Dokažimo i drugu tvrdnju $\angle BDC > BAC$. Promotrimo trokut $\triangle DEC$. Vanjski kut trokuta $\angle BDC$ je veći od $\angle DEC$ (Propozicija 16). Isto tako za trokut $\triangle ABE$ je $\angle BEC > \angle EAB$. Slijedi da je $\angle BDC > \angle DEC = \angle BEC > \angle EAB = \angle CAB$ i tvrdnja je dokazana. ∎

Propozicija 22 *Od tri dužine koje su jednake danim trima dužinama načiniti trokut, pri tom zbroj bilo kojih dviju dužina mora biti veći od treće.*

Dokaz. Neka su zadane tri dužine a, b, c i neka je zbroj bilo kojih dviju dužina veći od treće.
Treba konstruirati trokut kojemu su stranice jednake zadanim dužinama.

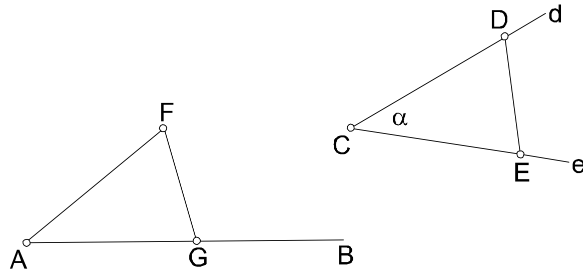


Propozicija 22

Uzmimo bilo koji polupravac $\overrightarrow{DE}$ i na njemu odredimo točke F, G i H tako da je $\overline{DF} = a$, $\overline{FG} = b$ i $\overline{GH} = c$ [(P-3)]. Opišimo potom kružnice $k_1 = k(F, a)$ i $k_2 = k(G, c)$. Sjecište tih kružnica označimo sa K i spojimo ga sa F i G. Kako je $\overline{DF} = \overline{FK} = a$ [(D-15)], $\overline{FG} = b$ (po konstrukciji), $\overline{GK} = \overline{GH} = c$ [(D-15)], zaista je $\triangle FGK$ traženi trokut. ∎

Propozicija 23 *Na danom pravcu u danoj točki na njemu konstruirati kut jednak danom kutu.*

Dokaz. Neka je dan pravac $\overleftrightarrow{AB}$ i neka je A dana točka na njemu. Neka je $\alpha = \angle(d, e)$ dani kut. Uzmimo na polupravcu e točku E a na d točku D i spojimo ih.

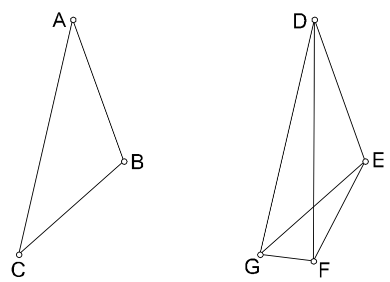


Propozicija 23

Konstruiramo potom trokut $\triangle AGF$ kojemu $\overline{AG} = \overline{CE}$, $\overline{AF} = \overline{CD}$, $\overline{GF} = \overline{ED}$ (Propozicija 22). Trokuti $\triangle DCE$ i $\triangle FAG$ su sukladni (Propozicija 8) pa je $\angle FAG = \angle DCE = \alpha$. ∎

Propozicija 24 *Ako su kod dva trokuta dvije stranice jednog jednake dvjema stranicama drugog, a kutovi među njima nisu jednaki, tada je u onom trokutu gdje je taj kut veći nasuprotna stranica veća.*

Dokaz. Neka su dani trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ tako da je $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ i $\angle CAB > \angle FDE$.
Treba dokazati da je $\overline{BC} > \overline{EF}$

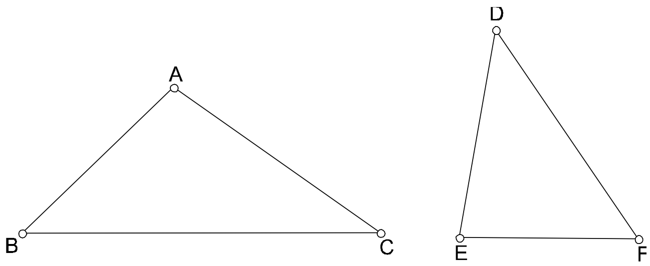


Propozicija 24

Budući je $\angle CAB > \angle FDE$ konstruirajmo $\angle EDG$ nad $\overrightarrow{DE}$ jednak kutu $\angle BAC$ (Propozicija 23) i na $\overrightarrow{DG}$ neka je G točka takva da je $\overline{DG} = \overline{AC}$. Spojimo G sa D i E. Promotrimo trokute $\triangle ABC$ i $\triangle DEG$. Po S-K-S poučku o sukladnosti (Propozicija 4) oni sukladni pa je $\overline{BC} = \overline{EG}$. Budući je trokut $\triangle DGF$ jednakokračan imamo da je $\angle DGF = \angle DFG$ (Propozicija 5). Dakle, $\angle DFG = \angle DGF > \angle EGF$, pa je pogotovu $\angle EFG > \angle EGF$. Dakle, u trokutu $\triangle EFG$ je $\angle EFG > \angle EGF$, pa je $\overline{EG} > \overline{EF}$ (Propozicija 19). Kako je $\overline{EG} = \overline{BC}$ to je i $\overline{BC} > \overline{EF}$. ■

Propozicija 25 *Ako su kod dva trokuta dvije stranice jednake, a treće stranice nejednake, onda je u onom trokutu kojem je stranica veća nasuprotni kut veći.*

Dokaz. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ takvi da je $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ i $\overline{BC} > \overline{EF}$.
Treba dokazati da je $\angle BAC > \angle EDF$.



Propozicija 25

Pretpostavimo suprotno. Moguća su dva slučaja:

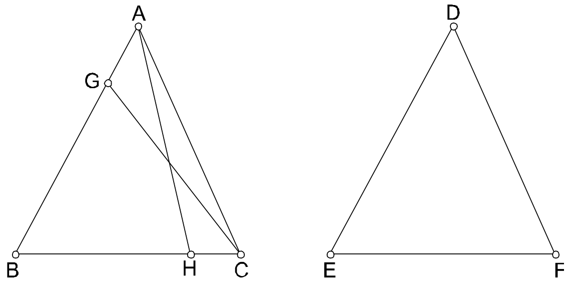
(1) $\angle BAC = \angle EDF$, i tada je (po Propoziciji 16) $\overline{BC} = \overline{EF}$, a to je u protuslovlju s našom pretpostavkom da je $\overline{BC} > \overline{EF}$;

(2) $\angle BAC < \angle EDF$, i tada je (po Propoziciji 24) $\overline{BC} < \overline{EF}$, a to je u protuslovlju s pretpostavkom da je $\overline{BC} > \overline{EF}$.

Dakle, mora biti $\angle BAC > \angle EDF$. ■

Propozicija 26 *Ako su kod dva trokuta po dva odgovarajuća kuta jednaka i jednake odgovarajuće stranice i to ili one uz ta dva kuta ili one nasuprot jednom od odgovarajućih kutova tada su i preostale odgovarajuće stranice i preostali kutovi jednaki.*

Dokaz. Neka su dani trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ tako da je $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\angle ABC = \angle DEF$ i $\angle BCA = \angle EFD$.
Treba dokazati da se i preostali elementi trokuta jednaki, tj. $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ i $\angle BAC = \angle EDF$.



Propozicija 26

Pretpostavimo da je $\overline{AB} \neq \overline{DE}$. Tada je jedna od njih veća, uzmimo da je $\overline{AB} > \overline{DE}$. Prenesimo dužinu $\overline{DE}$ na $\overline{AB}$ od točke B i neka je G točka na $\overline{AB}$ takva da je $\overline{DE} = \overline{BG}$. Tada je $\triangle GBC \cong \triangle DEF$ (Propozicija 4), dakle i $\angle GCB = \angle DFE$. No, po pretpostavci je $\angle DFE = \angle BCA$ pa bi bilo da je i $\angle BCG = \angle BCA$. Dobili smo da je manji kut jednak većemu kutu, što je nemoguće [(A-6)]. Dakle, mora biti $\overline{AB} = \overline{DE}$. Vrijedi $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (po pretpostavci je $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\angle ABC = \angle DEF$, a dokazali smo $\overline{AB} = \overline{DE}$, pa možemo primijeniti Propoziciju 4), i odatle $\overline{BC} = \overline{EF}$.

Dokažimo drugi slučaj.

Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ takvi da je $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle EFD$ i $\overline{AB} = \overline{ED}$.

Treba dokazati da su i preostali elementi trokuta jednaki, tj. da je $\overline{AC} = \overline{DF}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ i $\angle BAC = \angle EDF$.

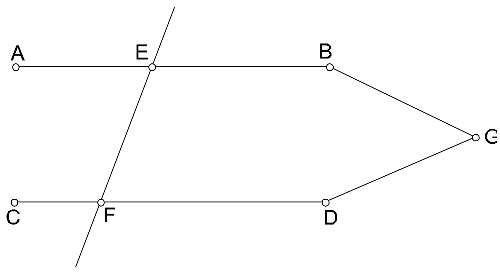
Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\overline{BC} \neq \overline{EF}$ i neka je $\overline{BC} > \overline{EF}$. Prenesimo $\overline{EF}$ na $\overline{BC}$ od točke B i neka je H točka na $\overline{BC}$ takva da je $\overline{BH} = \overline{EF}$. Tada je $\triangle ABH \cong \triangle DEF$ ($\overline{AB} = \overline{DE}$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\overline{BH} = \overline{EF}$, primijenimo Propoziciju 4) odakle slijedi $\angle BHA = \angle EFD$. No, po pretpostavci je i $\angle EFD = \angle BCA$. Dobili smo da je u trokutu $\triangle AHC$ vanjski kut $\angle BHA$ jednak unutarnjem nesusjednom kutu $\angle BCA$ što je u kontradikciji s Propozicijom 16. Dakle, mora biti $\overline{BC} = \overline{EF}$. Sada imamo $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\overline{AB} = \overline{ED}$ i $\angle BAC = \angle EDF$ pa je $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (Propozicija 4) pa je i $\angle BAC = \angle EDF$. ■

Tvrdnja propozicije je poznati K-S-K poučak o sukladnosti.

Propozicija 27 *Ako pravac siječe druga dva pravca i tvori s njima jednake unutarnje, izmjenične kutove onda su ta dva pravca paralelna.*

Dokaz. Neka pravac $\overleftrightarrow{EF}$ siječe pravce $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ u točkama E i F i neka su izmenični kutovi jednaki, tj. $\angle AEF = \angle EFD$ (ili $\angle BEF = \angle CFE$).

Treba dokazati da su $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ paralelni pravci.



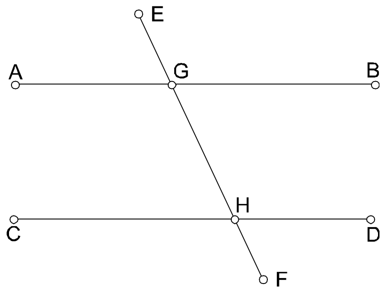
Propozicija 27

Pretpostavimo suprotno, tj. da se polupravac $\overrightarrow{EB}$ siječe sa $\overrightarrow{FD}$ u točki G. Promotrimo $\triangle EFG$. Kako je $\angle AEF$ je vanjski kut za taj trokut to je $\angle AEF > \angle EFG$ (Propozicija 16), što je u protuslovlju s pretpostavkom.
Slično se dokazuje da $\overrightarrow{EA}$ ne siječe $\overrightarrow{FC}$. Dakle, $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ paralele [(D-23)]. ■

> Za paralelne pravce $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ rabit ćemo oznaku $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, a da je kut $\angle ABC$ pravi oznaku $\angle ABC = R$.

Propozicija 28 *Ako pravac koji siječe dva pravca tvori s njima s iste svoje strane vanjski kut jednak unutarnjem kutu ili dva unutarnja kuta jednaka dvama pravim kutovima onda su ti pravci paralelni.*

Dokaz. Neka pravac $\overleftrightarrow{EF}$ siječe pravce $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ u točkama G i H, te neka je ili $\angle EGB = \angle GHD$ ili $\angle BGH + \angle GHD = 2R$.
Treba dokazati da je $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.
Promotrimo prvi slučaj $\angle EGB = \angle GHD$.
Tada je $\angle EGB = \angle AGH$ (Propozicija 15). Dakle, izmjenični kutovi $\angle EGB$ i $\angle GHD$ su jednaki pa je $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (Propozicija 27).

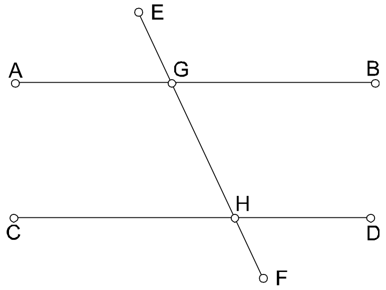


Propozicija 28

Drugi slučaj: $\angle BGH + \angle GHD = 2R$.
Budući je $\angle AGH + \angle BGH = 2R$ (Propozicija 13) imamo $\angle BGH + \angle GHD = \angle AGH + \angle BGH$. Oduzimanjem kuta $\angle BGH$ dobivamo $\angle GHD = \angle AGH$. Dakle, izmjenični kutovi $\angle GHD$ i $\angle AGH$ su jednaki pa je $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (Propozicija 27). ■

Propozicija 29 *Ako pravac siječe dva paralelna pravca onda on s njima tvori jednake izmjenične kutove, vanjski kut odgovara unuhtrašnjem s iste strane i dva unutrašnja kuta s iste strane su jednaka dvama pravim kutovima.*

Dokaz. Neka pravac $\overleftrightarrow{EF}$ siječe paralelne pravce $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ u točkama G i H.
Treba dokazati da je $\angle AGH = \angle GHD$, $\angle EGB = \angle GHD$ i $\angle BGH + \angle GHD = 2R$.
Dokažimo prvu tvrdnju $\angle AGH = \angle GHD$.
Pretpostavimo suprotno, i neka je $\angle AGH > \angle GHD$. Dodavanjem kuta $\angle BGH$ dobivamo $\angle AGH + \angle BGH > \angle GHD + \angle BGH$.

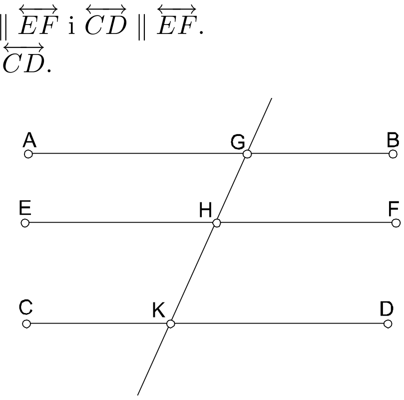


Propozicija 29

Kako je $\angle AGH + \angle BGH = 2R$ (Propozicija 13) dobili smo da je $\angle GHD + \angle BGH < 2R$. To znači da se pravci $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ sijeku [(P-5)], a to je u kontradikciji s pretpostavkom $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Dakle, mora biti $\angle AGH = \angle GHD$.
Odavde slijedi i druga tvrdnja $\angle EGB = \angle GHD$.
Dokažimo treću tvrdnju $\angle BGH + \angle GHD = 2R$.
Kako je $\angle AGH = \angle EGB$ (Propozicija 15), a po prvoj dokazanoj tvrdnji je $\angle AGH = \angle GHD$, dobivamo da je $\angle EGB = \angle GHD$ [(A-1)]. Dodavanjem kuta $\angle BGH$ dobivamo $\angle EGB + \angle BGH = \angle GHD + \angle BGH$. Budući je $\angle EGB + \angle BGH = 2R$ (Propozicija 13) dobili smo $\angle GHD + \angle BGH = 2R$. ■

Propozicija 30 *Pravci koji su paralelni istom pravcu paralelni su i međusobno.*

Dokaz. Neka je $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ i $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$.
Treba dokazati $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

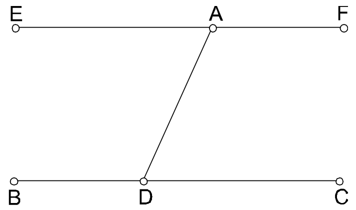


Propozicija 30

Presjecimo dane pravce nekim pravcem i neka ih on siječe u točkama G, H i K. Iz $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ slijedi $\angle AGK = \angle GHF$, a iz $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ slijedi $\angle GHF = \angle GKD$ (Propozicija 29). Dobili smo da je $\angle AGK = \angle GKD$ [(A-1)] i dalje $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (Propozicija 27) ∎

Propozicija 31 *Kroz danu točku povući pravac paralelan danom pravcu.*

Dokaz. Neka je dana točka A van danog pravca $\overleftrightarrow{BC}$.

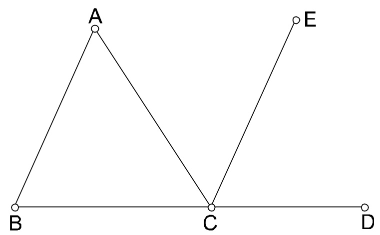


Propozicija 31

Odaberimo na $\overleftrightarrow{BC}$ proizvoljnu točku D i spojimo $\overline{AD}$. Uočimo kut $\angle ADC$. Prenesimo $\angle ADC$ uz $\overline{AD}$ s druge strane iz vrha A. Neka je tako dobiven $\angle EAD$ (Propozicija 23). Dobili smo da je $\overleftrightarrow{EA}$ tražena paralela (Propozicija 27). ∎

Propozicija 32 *U svakom trokutu vanjski kut je jednak zbroju dvaju nesusjednih unutarnjih kutova, a zbroj sva tri unutrašnja kuta jednak je dvama pravim kutovima.*

Dokaz. Neka je dan $\triangle ABC$. Odaberimo na $\overrightarrow{BC}$ točku D. $\angle ACD$ je vanjski kut $\triangle ABC$.
Dokažimo $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$.

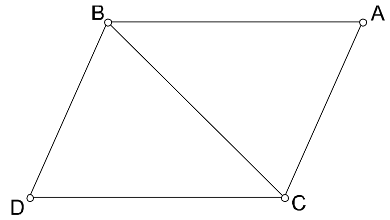


Propozicija 32

Povucimo kroz C paralelu $\overleftrightarrow{CE}$ sa $\overleftrightarrow{AB}$ (Propozicija 31). Iz $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$ i jer $\overleftrightarrow{AC}$ siječe te pravce, slijedi $\angle BAC = \angle ACE$ (Propozicija 29). Isto tako iz $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$ i jer $\overleftrightarrow{BD}$ siječe te pravce, slijedi $\angle ECD = \angle ABC$ (Propozicija 29). Sada je $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD$ [(A-1)], tj. $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$. Time je dokazano da je vanjski kut trokuta jednak zbroju dva nesusjedna kuta trokuta: $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$.
Dodavanjem ovoj jednakosti kuta $\angle BCA$ dobivamo da je $\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = \angle ACD + \angle BCA$. Budući je $\angle ACD + \angle BCA = 2R$ (Propozicija 13), zaista je zbroj sva tri unutrašnja kuta trokuta jednak $2R$ [(A-1)]. ∎

Propozicija 33 *Dužine koje spajaju s iste strane krajeve jednakih i paralelnih dužina i same su jednake i paralelne.*

Dokaz. Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paralelne dužine i $\overline{AB} = \overline{CD}$.
Treba dokazati da je $\overline{AC} = \overline{BD}$ i $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$.



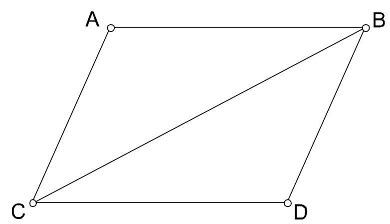
Propozicija 33

Spojimo $\overline{BC}$. Budući je $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ i $\overleftrightarrow{BC}$ siječe paralelne pravce izmjenični kutovi su jednaki: $\angle ABC = \angle BCD$ (Propozicija 29). Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle BCD$ su sukladni ($\overline{AC} = \overline{BD}$, $\angle ABC = \angle BCD$, $\overline{BC}$ zajednička stranica, Propozicija 26). Iz sukladnosti trokuta slijedi prva tvrdnja $\overline{BD} = \overline{AC}$.

Dokažimo i drugu tvrdnju $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{AC}$.
Iz sukladnosti trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle BCD$ slijedi i $\angle ABC = \angle DCB$. Budući $\overleftrightarrow{BC}$ siječe pravce $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ i čini međusobno jednake izmjenične kutove zaista je $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ (Propozicija 27). ■

Propozicija 34 *Kod paralelograma su nasuprotne stranice jednake, nasuprotni kutovi su jednaki i dijagonala ga raspolavlja.*

Dokaz. Neka je $ACDB$ pralelogram, a $\overline{BC}$ njegova dijagonala.

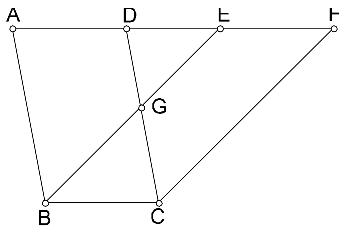


Propozicija 34

Budući je $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ i pravac $\overleftrightarrow{CD}$ ih presjeca imamo $\angle ABC = \angle CBD$ (Propozicija 29). Isto tako, $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ ih presjeca pa je $\angle ACB = \angle CBD$. Slijedi da su trokuti $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$ sukladni (zajednička stranica i jednaki kutovi na njoj, Propozicija 26), tj. dijagonala raspolavlja paralelogram. Dakle, i ostali elementi trokuta su jednaki: nasuprotni kutovi $\angle CAB = \angle CDB$, i nasuprotne stranice $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$.
Budući je $\angle ABC = \angle CBD$ i $\angle CAB = \angle CDB$ dobivamo $\angle ABC + \angle CAB = \angle CBD + \angle CDB$ [(A-2)], odnosno preostali nasuprotni kutovi su jednaki $\angle BAC = \angle CDB$. ■

Propozicija 35 *Paralelogrami s istom osnovicom između istih paralela su jednaki (po površini).*

Dokaz. Neka su $ABCD$, $EBCF$ paralelogrami na istoj osnovici i istim paralelama $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AF}$.
Treba dokazati da je paralelogram $ABCD$ jednak paralelogramu $EBCF$.

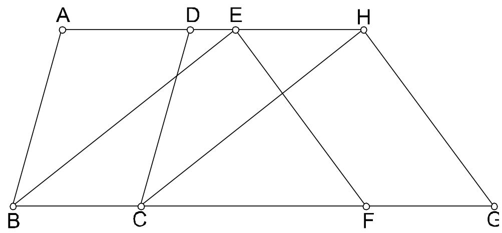


Propozicija 35

Budući su $ABCD$ i $EBCF$ paralelogrami imamo $\overline{AD} = \overline{BC}$ i $\overline{EF} = \overline{BC}$ (Propozicija 34), pa je onda i $\overline{AD} = \overline{EF}$ [(A-1)]. Dodavanjem dužine $\overline{DE}$ dobivamo $\overline{AD}+\overline{DE} = \overline{EF}+\overline{DE}$ [(A-2)], tj. $\overline{AE} = \overline{DF}$. Vrijedi i $\overline{AB} = \overline{DC}$ ($ABCD$ je paralelogram, Propozicija 34). Promotrimo trokute $\triangle EAB$ i $\triangle FDC$. Oni su sukladni jer je $\overline{AD} = \overline{EF}$, $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\angle FDC = \angle EAB$ (Propozicija 29). Kada se od sukladnih trokuta $\triangle EAB$ i $\triangle FDC$ oduzme zajednički dio trokut $\triangle GBC$ dobit ćemo jednake trapeze $ABGD$ i $EGCF$ [(A-3)]. Dodajmo tim trapezima trokut $\triangle GBC$, pa je paralelogram $ABCD$ jednak paralelogramu $EBCF$ [(A-3)].
■

Propozicija 36 *Paralelogrami s jednakim osnovicama između istih paralela su jednaki.*

Dokaz. Neka su $ABCD$, $EFGH$ paralelogrami s jednakim osnovicama $\overline{BC}$, $\overline{FG}$ i istim paralelama $\overleftrightarrow{AH}$, $\overleftrightarrow{BG}$.
Tvrdimo da je paralelogram $ABCD$ jednak paralelogramu $EFGH$.

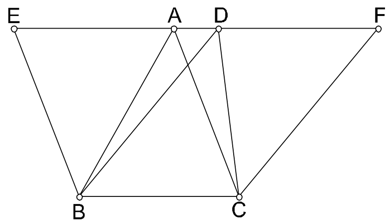


Propozicija 36

Spojimo A sa H i B sa E. Budući je $\overline{BC} = \overline{FG}$ i $\overline{FG} = \overline{EH}$ imamo $\overline{BC} = \overline{EH}$ [(A-1)]. Jednake stranice $\overline{BC}$, $\overline{EH}$ su i paralelne i spajaju ih $\overline{EB}$ i $\overline{HC}$ pa su i one jednake i paralelne (Propozicija 33). Dakle, $EBCH$ paralelogram. Taj je paralelogram jednak paralelogramu $ABCD$ (Propozicija 35). Iz istog razloga je paralelogram $EFGH$ jednak paralelogramu $EBCH$ (Propozicija 35). Dakle, i paralelogram $ABCD$ jednak je paralelogramu $EFGH$ [(A-1)]. ■

Propozicija 37 *Trokuti s istom osnovicom između istih paralela su jednaki.*

Dokaz. Neka su $\triangle ABC$, $\triangle DBC$ trokuti s istom osnovicom $\overline{BC}$ i između paralela $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AD}$.
Tvrdimo da je trokut $\triangle ABC$ jednak trokutu $\triangle DBC$.

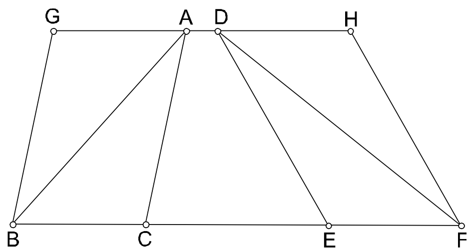


Propozicija 37

Konstruiramo paralelu kroz B sa $\overleftrightarrow{CA}$, a kroz C paralelu sa $\overleftrightarrow{BD}$ (Propozicija 31). Sjecišta tih paralela sa $\overleftrightarrow{AD}$ označimo sa E i F. Dobili smo dva jednaka paralelograma $EBCA$, $DBCF$ (Propozicija 35). Trokut $\triangle ABC$ je polovica paralelograma, a trokut $\triangle DBC$ je polovica paralelograma $DBCF$ (Propozicija 36). Dakle, trokut $\triangle ABC$ je jednak trokutu $\triangle DBC$. ■

Propozicija 38 *Trokuti s jednakim osnovicama između istih paralela su jednaki.*

Dokaz. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ trokuti dakvi da je $\overline{BC} = \overline{EF}$ i $\overline{BF} \parallel \overline{AD}$.
Trvdimo da su ti trokuti jednaki (po površini).

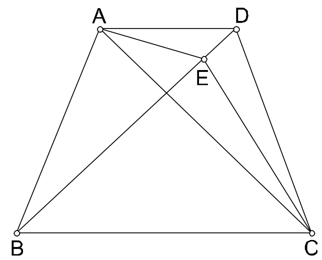


Propozicija 38

Konstruiramao paralelu kroz B sa $\overleftrightarrow{AC}$ i paralelu kroz F sa $\overleftrightarrow{DE}$ (Propozicija 31) i sjecišta dobivenih paralela sa $\overleftrightarrow{AD}$ označimo sa G i H. Dobili smo dva jednaka paralelograma $GBCA$, $DEFH$ (Propozicija 36). Trokut $\triangle ABC$ je polovica paralelograma $GBCA$, a trokut $\triangle EFD$ polovica paralelograma $DEFH$ (Propozicija 34). Prema tome trokut $\triangle ABC$ je jednak trokutu $\triangle DEF$.
■

Propozicija 39 *Jednaki trokuti s istom osnovicom i iste njezine strane leže između istih paralela.*

Dokaz. Neka su dani jednaki trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DBC$ s istom osnovicom $\overline{BC}$ i s iste strane osnovice.
Tvrdimo $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$.

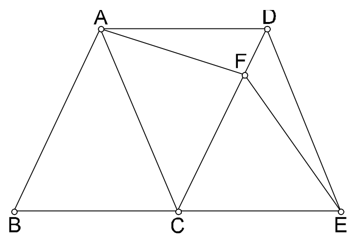


Propozicija 39

Pretpostavimo suprotno, tj. da pravci $\overleftrightarrow{BC}$ i $\overleftrightarrow{AD}$ nisu paralelni. Povucimo točkom A paralelu sa $\overleftrightarrow{BC}$ (Propozicija 31) i njeno sjecište sa $\overleftrightarrow{BD}$ označimo E. Spojimo E sa C. Trokut $\triangle ABC$ jednak je trokutu $\triangle EBC$ (Propozicija 37). No $\triangle ABC$ jednak je i trokutu $\triangle DBC$ pa imamo da je trokut $\triangle BCE$ jednak trokutu $\triangle BCD$ [(A-1)]. Dobili smo da je veći trokut jednak manjemu, što je nemoguće [(A-5)]. ■

Propozicija 40 *Jednaki trokuti s jednakim osnovicama s iste strane od njih leže između istih paralela.*

Dokaz. Neka su $\triangle ABC$, $\triangle CDE$ jednaki trokuti s jednakim osnovicama $\overline{BC} = \overline{CE}$ i s iste strane.
Tvrdimo de je $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overline{AD}$.

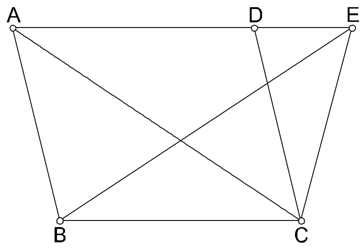


Propozicija 40

U suprotnom, povucimo kroz A paralelu sa $\overleftrightarrow{BC}$ (Propozicija 31) i njeno sjecište sa $\overleftrightarrow{CD}$ označimo sa F. Spojimo F sa E. Trokut $\triangle ABC$ jednak je trokutu $\triangle FCE$ (Propozicija 38). Kako su i trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DCE$ jednaki, dobivamo da je trokut $\triangle DCE$ jednak trokutu $\triangle FCE$, a to je nemoguće [(A-5)]. ■

Propozicija 41 *Ako paralelogram ima istu osnovicu s nekim trokutom i ako leže između istih paralela, onda je paralelogram dva puta veći od trokuta.*

Dokaz. Neka paralelogram $ABCD$ i trokut $\triangle EBC$ imaju istu osnovicu i neka leže između istih paralela. Trvdimo da je paralelogram $ABCD$ dvostruko veći od trokuta $\triangle EBC$.

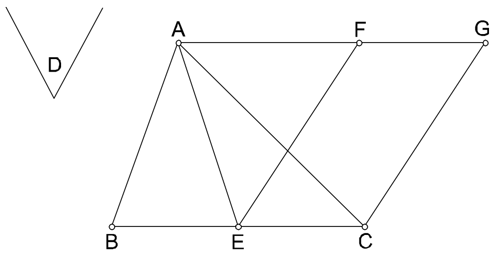


Propozicija 41

Spojimo A sa C. Trokuti $\triangle ABC$, $\triangle EDC$ su jednaki (Propozicija 37) i kako je paralelogram $ABCD$ dvostruko veći od trokuta $\triangle ABC$ (Propozicija 34) zaista je paralelogram $ABCD$ dvostruko veći od trokuta $\triangle EBC$. ∎

Propozicija 42 *U danom pravocrtnom kutu konstruirati paralelogram jednak danom trokutu.*

Dokaz. Neka su dani trokut $\triangle ABC$ i kut $\angle D$.

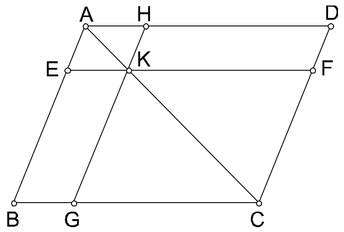


Propozicija 42

Raspolovimo $\overline{BC}$ i neka je E polovište, tj. $\overline{BE} = \overline{EC}$. Nanesimo kut $\angle D$ iz E tako da je $\angle FEC = \angle D$ (Propozicija 23). Točkom A povucimo paralelu s $\overleftrightarrow{BC}$ (Propozicija 31) i neka je F točka u kojoj ta paralela siječe $\overleftrightarrow{EF}$. Točkom C povucimo paralelu s $\overleftrightarrow{EF}$ (Propoziija 23) i neka je G točka u kojoj ta paralela siječe $\overleftrightarrow{AF}$. Time smo dobili paralelogram $FECG$.
Tvrdimo da je to traženi paralelogram. Budući je $\overline{BE} = \overline{EC}$ trokuti $\triangle ABE$, $\triangle AEC$ su jednaki jer leže između istih paralela (Propozicija 38). Dakle, trokut $\triangle ABC$ je dvostruko veći od trokuta $\triangle AEC$. No, i paralelogram $FECG$ je dvostruko veći od trokuta $\triangle AEC$ (Propozicija 41), pa je on jednak i danom trokutu $\triangle ABC$.
Dakle, jer je $\angle FEC = \angle D$, paralelogram $FECG$ je upisnan u dani kut i jednak je danom trokutu $\triangle ABC$, što se i tvrdilo. ∎

Propozicija 43 *U svakom paralelogramu dopune paralelogramima na dijagonali su jednake.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ dani paralelogram i $\overline{AC}$ njegova dijagonala.

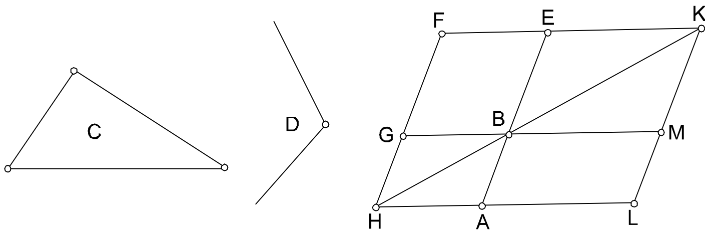


Propozicija 43

Odaberimo na dijagonali točku K i povucimo njome paralele s $\overleftrightarrow{AD}$ i $\overleftrightarrow{AB}$. Presječne točke tih paralela sa stranicama paralelograma označimo sa E, F, H, G.
Paralelogrami $EBGK$, $HKFD$ su dopune na dijagonali i treba dokazati da su one jednake.
Budući je $\overline{AC}$ dijagonala paralelograma $ABCD$ trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ su jednaki (Propozicija 34). Isto tako su trokuti $\triangle AEK$, $\triangle AKH$ jednaki, te $\triangle KGC$, $\triangle KCF$ jednaki trokuti (Propozicija 34). Sada je zbroj trokuta $\triangle AEK$ i $\triangle KGC$ jednak zbroju trokuta $\triangle AHK$ i $\triangle KCF$ [(A-2)]. Budući je trokut $\triangle ABC$ jednak trokutu $\triangle ADC$ preostala dopuna $EBGH$ jednaka je preostaloj dopuni $HKFD$ [(A-3)]. ∎

Propozicija 44 *Na danoj dužini u danom pravocrtnom kutu konstruirati paralelogram jednak danom trokutu.*

Dokaz. Neka je $\overline{AB}$ dana dužina, C dani trokut, a $\angle D$ je dan pravocrtni kut. Treba uz danu dužinu $\overline{AB}$ u kutu jednakom D konstruirati paralelogram jednak danom trokutu C.



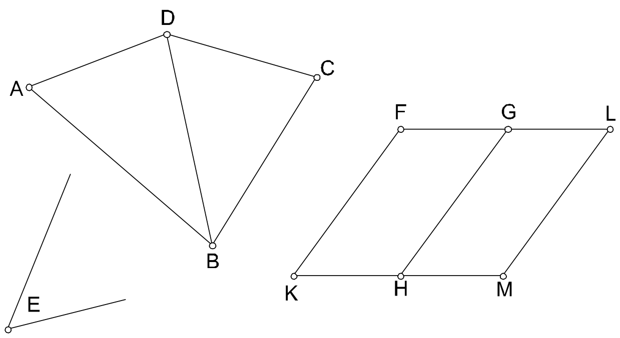
Propozicija 44

Odaberimo proizvoljni pravac i na njemu nanesimo danu dužinu $\overline{AB}$. Produžimo $\overline{AB}$ i u vrhu B nanesimo kut $\angle D$ i u njemu paralelogram $BEFG$ jednak danom trokutu $\triangle C$ (Propozicija 42). Povucimo točkom A paralelu s $\overleftrightarrow{BG}$ (Propozicija 31) i presjek te paralele sa $\overleftrightarrow{FG}$ označimo sa H. Pravac $\overleftrightarrow{FH}$ je tansverzala paralelnih pravaca $\overleftrightarrow{FE}$ i $\overleftrightarrow{HA}$ pa je $\angle AHF + \angle HFE = 2R$ (Propozicija 29). Slijedi $\angle BHG + GFE < 2R$, a to znači da se pravci $\overleftrightarrow{HB}$ i $\overleftrightarrow{FE}$ sijeku [(P-5)].

Sjecište označimo sa K i njime povučimo paralelu sa $\overleftrightarrow{EA}$ (Propozicija 31) i sjecište te paralele sa $\overleftrightarrow{HA}$ označimo sa L. Dobili smo paralelogram $HLKF$ kojemu je dijagonala $\overline{HK}$ a paralelogrami $LMBA$, $BEGB$ su dopune oko dijagonale $\overline{HK}$. Dopune su jednake (Propozicija 43) i kako je dopuna $BEFG$ jednaka trokutu $\triangle C$, to je i dopuna $LMBA$ jednaka trokutu $\triangle C$ [(A-1)]. Budući je $\angle GBE = \angle ABM$ (Propozicija 15), a $\angle GBE = \angle D$, onda je i $\angle ABM = \angle D$. Dakle, $ALMB$ je traženi paralelogram. ■

Propozicija 45 *U danom pravocrtnom kutu konstruirati paralelogram jednak danom pravocrtnom liku.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ pravocrtni lik i $\angle E$ dani pravocrtni kut.

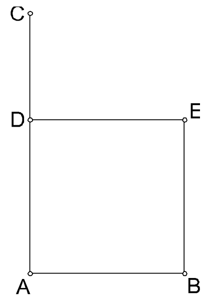


Propozicija 45

Spojimo točke B i D i pogledajmo trokut ΔABD. Konstruiramo u danom kutu $\angle E$ paralelogram $KHGF$ jednak trokutu $\triangle ABD$ (P.1.42.). U kutu $\angle GHM = \angle E$ nad $\overline{GH}$ konstruiramo paralelogram $GHML$ jednak trokutu $\triangle BDC$ (Propozicija 44). Kutovi $\angle HKH$, $\angle GHM$ su jednaki kutu $\angle E$ pa su i međusobno jednaki [(A-1)]. Dodamo im kut $\angle KHG$ pa dobivamo $\angle HKF + \angle KHG = \angle GHM + \angle KHG$. Kako je $\angle HKF + \angle KHG = 2R$ (Propozicija 29) to je i $\angle GHM + \angle KHG = 2R$. Slijedi da točke K, H, M leže na jednom pravcu (Propozicija 14). Budući da $\overleftrightarrow{GH}$ siječe paralelne pravce $\overleftrightarrow{KM}$ i $\overleftrightarrow{FG}$ to su i izmjenični kutovi $\angle MHG, \angle HGF$ jednaki. Dodavanjem kuta $\angle HGL$ dobivamo $\angle MHG + \angle HGL = \angle HGF + \angle HGL$. Budući je $\angle MHG + \angle HGL = 2R$ (Propozicija 29) to je i $\angle HGF + \angle HGL = 2R$ [(A-1)]. Prema tome točke F, G, L leže na istom pravcu (Propozicija 14). Budući su $\overline{FK}, \overline{HG}$ jednake i paralelne (Propozicija 34) te dužine $\overline{HG}$, $\overline{ML}$ jednake i paralelne, onda su i dužine $\overline{KF}$, $\overline{ML}$ jednake i paralelne [po (A-1) i Propoziciji 30].
Dakle $KFLM$ je paralelogram jednak danom pravocrtnom liku $ABCD$. ■

Propozicija 46 *Na danoj dužini konstruirati kvadrat.*

Dokaz. Neka je $\overline{AB}$ dana dužina.

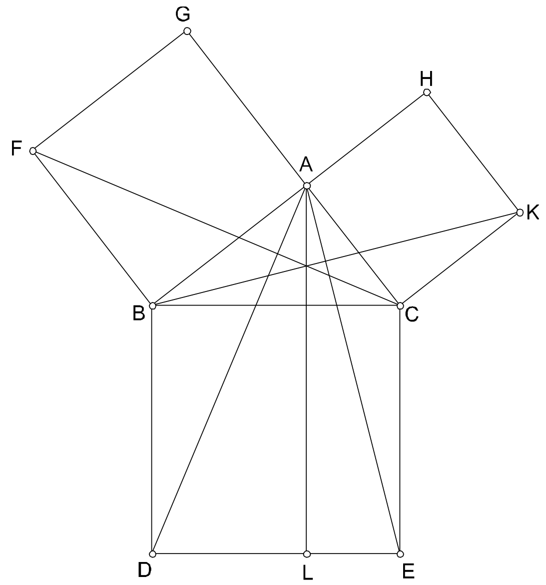


Propozicija 46

U točki A dignimo okomicu $\overleftrightarrow{AC}$ (Propozicija 11) i na njoj odredimo točku D tako da je $\overline{AB} = \overline{AD}$. Točkom D povucimo paralelu sa $\overleftrightarrow{AB}$, a točkom B paralelu sa $\overleftrightarrow{AD}$ (Propozicija 31). Sjecište tih pravaca označimo sa E. Dobili smo paralelogram $ADEB$, pa je $\overline{AB} = \overline{DE}$ i $\overline{AD} = \overline{BE}$ (Propozicija 34). Kako je i $\overline{AB} = \overline{AD}$, paralelogram $ADEB$ je jednakostraničan. Dokažimo da je on i pravokutan. Budući je $\overleftrightarrow{AD}$ transverzala paralelnih pravaca $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DE}$ vrijedi $\angle BAD + \angle ADE = 2R$. Jer je $\angle BAD = R$, to je i $\angle ADE = R$. Budući su suprotni kutovi paralelograma jednaki, to su i $\angle ABE$, $\angle BED$ pravi. Dakle, $ADEB$ je pravokutan i jednakostraničan, dakle i kvadrat. ■

Propozicija 47 *U svakom pravokutnom trokutu kvadrat nad stranicom nasuprot pravog kuta jednak je zbroju kvadrata nad stranicama uz pravi kut.*

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ pravokutni trokut s pravim kutom $\angle BAC$. Konstrirajmo nad stranicama danog trokuta kvadrate $BDEF$, $ACKH$, $AGFB$ (Propozicija 46). Iz A povucimo paralelu s $\overleftrightarrow{BD}$ i njeno sjecište s $\overleftrightarrow{DE}$ označimo sa L. Spojimo A sa D, L, E, te F sa C i B sa K. Budući su kutovi $\angle BAC$ i $\angle BAG$ pravi, točke A, C, G leže na istom pravcu (Propozicija 14). Iz istog rrazloga i točke B, A, H leže na istom pravcu. Budući je $\angle DBC = \angle FBA$ dodavanjem kuta $\angle ABC$ dobivamo da je $\angle DBA = \angle FBC$ [(A-2)].

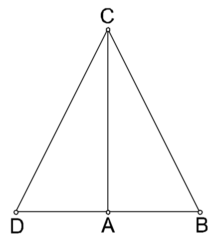


Propozicija 47

Promotrimo trokute $\triangle ABD$, $\triangle FBC$. Oni imaju po dvije stranice jednake i jednaki kut među njima pa su sukladni (Propozicija 4). Osim toga paralelogram kojemu je $\overline{BL}$ dijagonala dvostruko je veći od trokuta $\triangle ABD$, jer imaju istu osnovicu i leže između istih paralela (Propozicija 41). Isto tako i kvadrat s dijagonalom $\overline{GB}$ dvostruko je veći od trokuta $\triangle FBC$ (Propozicija 41). Dakle, paralelogram s dijagonalom $\overline{BL}$ jednak je kvadratu s dijagonalom $\overline{GB}$. Slično se dokazuje da ako spojimo E sa E i B sa K, da je tada paralelogram s dijagonalom $\overline{CL}$ jednak kvadratu s dijagonalom $\overline{HC}$. Slijedi da je zaista kvadrat nad stranicom nasuprot pravog kuta trokuta jednak zbroju kvadrata nad stranicama uz pravi kut. ■

Propozicija 48 *Ako je kod trokuta kvadrat nad jednom stranicom jednak zbroju kvadrata nad drugim dvjema stranicama onda je kut između tih dviju stranica pravi.*

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ takav da zadovoljava uvjet, tj. neka je kvadrat nad stranicom $\overline{BC}$ jednak zbroju kvadrata nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Tvrdimo da je $\angle BAC$ pravi.



Propozicija 48

U točki A dignimo okomicu na $\overleftrightarrow{AC}$ i na toj okomici odaberimo točku D tako da je $\overline{DA} = \overline{AB}$. Sada su kvadrati nad $\overline{DA}$ i $\overline{AB}$ jednaki. Dodajmo im kvadrat nad $\overline{AC}$. Zbroj kvadrata nad stranicam $\overline{DA}$, $\overline{AC}$ jednak je zbroju kvadrata nad $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. Prvi zbroj je jednak kvadratu nad $\overline{CD}$ (Propozicija 47), a drugi zbroj je po pretpostavci jednak zbroju kvadrata nad stranicama $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. Dakle kvadrati nad $\overline{AD}$ i $\overline{CB}$ su jednaki pa je $\overline{AD} = \overline{CB}$. Dobili smo da se trokuti $\triangle ACD$ i $\triangle ACB$ podudaraju u sve tri stranice, dakle sukladni su (Propozicija 8). Slijedi $\angle CAB = \angle CAD = R$, a to se i tvrdilo. $\blacksquare$