OSNOVE GEOMETRIJE

Branko Červar, Goran Erceg, Ivan Lekić

2014./2015.

Sadržaj

PREDGOVOR

Ovaj materijal namijenjen je studentima preddiplomskog studija matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Splitu. Njegova je svrha pomoći studentima da što lakše i uspješnije usvoje propisani sadržaj kolegija **Osnove geometrije** koji se sluša u 4. semestru studija. Radi se o temeljnom matematičkom kolegiju u kojemu se studenti susreću s cjelovitim aksiomatskim zasnivanjem neke matematičke teorije - u ovom slučaju geometrije, točnije planimetrije.

Prvo poglavlje daje povijesni pregled zasnivanja geometrije na aksiomatskim temeljima. Centralno je pitanje je li Peti Euklidov postulat zavisan o ostalim postulatima i aksiomima? Dani su pokušaji od starogrčkih matematičara, preko arapskih pokušaja, do istaknutih radova predotkrivača neeuklidske geometrije. Završava s otkrivačima neeuklidske geometrije. Tu je važna i **Prva knjiga Euklidovih Elemenata** pa je ona dana u **Dodatku A**.

U Drugom poglavlju dan je sistem aksioma na kojima Hilbert zasniva geometriju. Detaljno su izložene posljedice svake grupe aksioma u obimu potrebnom za daljnji rad. Sadržaj ovoga poglavlja čini **Apsolutnu geometriju** i odatle njegov naziv. Dan je i odjeljak Aksiom o paralelama u kojem je pokazano da je Peti euklidov postulat zaista pravi aksiom. Na koncu poglavlja dani su zadaci za vježbu čijim će rješavanjem studenti bolje usvojiti taj sadžaj.

Euklidskom geometrijom se posebno ne bavimo smatrajući da su geometrijska znanja usvojena u prethodnom školovanju dovoljana.

Treće poglavlje posvećeno je **Hiperboličkoj geometriji**. To je geometrijski sadržaj s kojim se studenti nisu u dosadašnjem školovanju susreli. Na koncu je izložen i Poincareov model hiperboličke geometrije. I ovo poglavlje sadrži odjeljak s odabranim zadacima za vježbu.

U Splitu, siječnja 2014. godine — Branko Červar, Goran Erceg, Ivan Lekić

OZNAKE

$A \ni\!\!\!\in a$ - točka A leži na pravcu a, pravac a prolazi točkom A,

$A \ni\!\!\!\in \alpha$ - točka A leži u ravnini α,

$p \ni\!\!\!\in a$ - pravac p leži u ravnini α,

$T = a \times b$ - točka T je sjecište pravaca a i b,

$\overline{AB}$ - dužina određena točkama A i B,

$\triangle ABC$ - trokut s vrhvima A, B i C,

$\left|\overline{AB}\right|$, $|AB|$ - duljina dužine,

$\overline{AB} = \overline{CD}$ - jednake dužine

$p(A, B)$, $\overleftrightarrow{AB}$ - pravac određen točkama A i B,

$hO\overline{h}$ - pravac kojemu su h i $\overline{h}$ polupravci s početnom točkom O.

$\overrightarrow{AB}$ - polupravac s početnom točkom A,

$\alpha(A, B, C)$ - ravnina određena točkama A, B i C,

$\alpha(A, p)$ - ravnina određena točkom A i pravcem p,

$\alpha(a, b)$ - ravnina određena pravcima a i b,

$(A\text{-}B\text{-}C)$ - točka B leži izmrđu točaka A i C,

$(a\text{-}b\text{-}c)$ - polipravac b leži između polupravaca a i c,

$\angle AOB$ - kut s vrhom u točki A i krakovima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$,

$\angle AOB = \angle A'O'B'$ - jednaki kutovi,

$\angle hOk$ - kut s vrhom O i krakovima h i k,

$\angle A$ - kut u vrhu A,

$\alpha + \beta + \gamma$ - zbroj kutova trokuta,

$s(\triangle ABC)$ - zbroj kutova trokuta $\triangle ABC$,

R - pravi kut,

$a \perp b$ - okomiti pravci,

$a \parallel b$ - paralelni pravci,

$a\,)(\,b$ - razilazi pravci,

$q \overset{T}{\underset{AB}{\parallel}} p$ - paralela q točkom T s pravcem p u smjeru od A ka B,

$q \overset{T}{\underset{K}{\parallel}} p$ - paralela q točkom T s pravcem p prema kraju K,

$q \underset{K}{\|} p$ - paralelni pravci q i p prema kraju K,

$\equiv$ - kongruencija,

$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ - kongruentni trokuti,

$\cong$ - sukladnost,

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ - sukladni trokuti,

$\sim$ - sličnost,

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ - slični trokuti,

$\pi(l)$ - kut paralelnosti dužine l,

π - funkcija Lobačevskog,

$\triangle$ - inverzna funkcija Lobačevskog,

$\triangle(\alpha)$ - distanca paralelnosti kuta α,

$k(O, \overline{AB})$ - kružnica sa središtem O polumjera $\overline{AB}$,

PQK - jednokrajnik,

PKL - dvokrajnik,

LMN - trokrajnik,

$ABCD$ - četverokut

Poglavlje 1

POVIJESNI PREGLED

1.1 EUKLID I NJEGOVI *ELEMENTI*

Geometrijske (općenito matematičke) ideje ponikle su u veoma davna vremena. Njihovo početno oformljenje obično se dovodi u vezu sa prastarim kulturama Egipta i Babilona 20. st. pr. Kr. U egipatskim papirusima nalazi se mnoštvo matematičkih činjenica, ali ni u jednom slučaju nisu dana nikakva obrazloženja (ili neki dokaz u današnjem smislu). Iz sačuvanih dokumenata geometrija je bila čisto praktičnog oblika i to na zavidnom nivou. Poznavali su formule za površinu trokuta, pravokutnika i trapeza, površinu kruga su izračunavali s dosta velikom točnošću pomoću površine kvadrata stranice $\frac{8}{9}$ promjera kruga (broj π je aproksimiran sa 3.16), znali su i formulu za izračun volumena krnje piramide. Slično Egipćanima, i Babilonci su imali razvijenu geometriju.

Grci su geometriju, u relativno kratkom vremenu, izgradili kao pravu znanost. Prva matematička znanja preuzeli su od Egipćana. Naime, poznato je da je **Tales** iz Mileta (7. st. pr. Kr.), jedan od sedam grčkih mudraca, duže vrijeme živio u Egiptu i da je prenio geometriju u Grčku. Kažu da je on dao i prvi dokaz u povijesti matematike. Dokazao je da promjer dijeli krug na dva jednaka dijela. Jednostavna i čini se očita tvrdnja, ali genijalnost ideje dokazivanja i jest u tome da je dokaz i takvih, jednostavnih tvrdnji, i moguć i potreban.
U razdoblju od Talesa do Euklida (3. st. pr. Kr.) grčki su matematičari sakupili dotadašnja znanja, pronašli nova i izoštrili svoje istraživačke metode. Npr., **Pitagora** i pripadnici njegove škole (6. st. pr. Kr.) našli su tvrdnju o zbroju kutova trokuta, otkrili pravilne poliedre, otkrili vezu među stranicama pravokutnog trokuta (čuveni Pitagorin poučak), otkrili nesumjerljive veličine. **Platon** (5. st. pr. Kr.) u geometriju unosi deduktivnost i strogu logičnost.

Aristotel (4. st. pr. Kr.), koji je osnivač formalne logike, dao je teorijske osnove na kojima se mogla zasnovati stroga deduktivnost geometrije.

Što su znali iz formalne logike?

Znali su što su to sudovi i algebru sudova, tj. osnovne logičke operacije (logička pravila): negaciju (znak $\neg$), konjunkciju ($\wedge$), disjunkciju ($\vee$), ekskluzivnu disjunkciju ($\veebar$), implikaciju ($\Rightarrow$), ekvivalenciju ($\Leftrightarrow$), kvantifikatore (za svaki $\forall$, postoji $\exists$).

Što je to matematička tvrdnja[1]? Svi matematički teoremi su oblika:

Ako [pretpostavka (ili hipoteza)], ***onda*** [zaključak (ili konkluzija)].

Izraženo simbolima, to je tvrdnja oblika

$P \Rightarrow Q$

gdje je P pretpostavka, a Q zaključak.

U nekim slučajevima teorem se sastoji samo od zaključka. Na primjer, takav je teorem:

Dijagonale romba su okomite.

Isticanjem pretpostavke i zaključka lako te teoreme pretvaramo u oblik $P \Rightarrow Q$. Tako je u prethodnoj tvrdnji pretpostavka $P = \{$*četverokut je romb*$\}$, a zaključak $Q = \{$*dijagonale romba su okomite*$\}$ pa ju možemo izreći na način:

Ako je dani četverokut romb, tada su njihove dijagonale okomite.

Kada je tvrdnja $P \Rightarrow Q$ istinita?

P	Q	$P \Rightarrow Q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Sjetimo se: ako su P i Q sudovi, onda $P \Rightarrow Q$ (čitamo: p povlači q) označava sud koji je lažan točno onda kada je sud P istinit, a sud Q lažan.

Što čini dokaz te tvrdnje? Razlikujemo dvije vrste dokaza: **indirektni** i **direktni**. Indirektni dokaz teorema $P \Rightarrow Q$ sastoji se u tome da se dokaže da je tvrdnja $\neg Q$ lažna. Među indirektnim dokazima se vrlo često primjenjuju

- **dokaz po kontrapoziciji** i
- **dokaz svođenjem na kontradikciju**.

Dokaz po kontrapoziciji zasniva se na ekvivalenciji sudova

$P \Rightarrow Q \quad$ i $\quad \neg Q \Rightarrow \neg P.$

[1] Koristit ćemo naziv **teorem**, a koristi se još i **propozicija**, **stavak**, **poučak**, kao i **korolar** za tvrdnju koja je neposredna posljedica teorema, te **lema** za pomoćni teorem.

Dakle, u dokazu po kontrapoziciji, pretpostavljamo da vrijedi tvrdnja $\neg Q$, te nizom logičkih koraka treba dokazati da je istinita tvrdnja $\neg P$.
Ilustrirajmo takvu vrstu dokaza primjerima.

Primjer. *Ako je a^2 paran broj, onda je i broj a paran.*
Dokaz. Pretpostavka P tvrdnje glasi: $\{$*broj a^2 je paran*$\}$. Zaključak Q tvrdnje glasi: $\{$*broj a je paran*$\}$.
Prepostavimo da vrijedi $\neg Q = \{$*broj a nije paran*$\}$. Treba dokazati da vrijedi $\neg P = \{$*broj a^2 nije paran*$\}$. Ako a nije paran, tada je on oblika $a = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $a^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$, tj. a^2 je neparan, što je i trebalo dokazati.

Primjer. *Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ injekcija.*
Dokaz. Treba pokazati da za svaka dva različita realna broja x_1 i x_2 vrijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ovdje pretpostavka P glasi: $\{$*realni brojevi x_1 i x_2 su različit*$\}$. Zaključak Q glasi: $\{f(x_1) \neq f(x_2)\}$. Pretpostavimo da je $f(x_1) = f(x_2)$. Tada je $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$, $2x_1 = 2x_2$, $x_1 = x_2$. Dakle, iz $\neg Q$ dobili smo $\neg P$, čime je početna tvrdnja dokazana po kontrapoziciji.

Napomenimo da ukoliko je prepostavka tvrdnje oblika konjunkcije $P = P_1 \wedge P_2$, tada je kontrapozicija oblika $(P_1 \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P_2$ ili $(P_2 \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P_1$. Uvjerimo se da je $[(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [(P_1 \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P_2]$:

P_1	P_2	Q	$\neg Q$	$P_1 \wedge P_2$	$(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q$	$P_1 \wedge \neg Q$	$\neg P_2$	$(P_1 \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P_2$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$

Primjer. *Neka se pravci a i b sijeku u točki T. Ako pravac c siječe i pravac a i pravac b, a nije komplanaran s njima, onda on prolazi točkom T.*
Dokaz. Ovdje su pretpostavke:

$P_1 = \{$*pravac c siječe i pravac a i pravac b*$\}$,

$P_2 = \{$*pravac c nije komplanaran s pravcima a i b*$\}$,

a zaključak:

$Q = \{$*pravac c prolazi točkom T*$\}$.

Pretpostavimo P_1 i $\neg Q = \{$*pravac c ne prolazi točkom T*$\}$. Označimo s M i N presjek pravca c s pravcima a i b redom. Točke M, N i T su različite. Pravac c ne prolazi točkom T, pa se ni M niti N ne mogu podudarati s točkom T. Također i točke M i N su međusobno različite točke jer kad bi bile jednake to bi značilo da je to točka presjeka sva tri pravca, posebice, to bi bio presjek pravaca a i b, tj. radilo bi se o točki T, a upravo smo u prethodnoj rečenici obrazložili da se ni M niti N ne mogu podudarati s točkom T. Uz to, te su točke i nekolinearne jer je $c = \overleftrightarrow{MN}$ a točka T ne leži na pravcu c. Dakle, te tri različite nekolinearne točke određuju jednu ravninu π kojoj pripadaju pravci a, b i c. Dakle, c je komplanaran s pravcima a i b. Time smo dobili $\neg P_2 = \{$*pravac c nije komplanaran s pravcima a i b*$\}$. Dakle, po proširenoj kontrapoziciji, vrijedi tvrdnja dana u primjeru.

Dokaz svođenjem na kontradikciju (ili **dokaz kontradikcijom**) (lat. *reductio ad absurdum*) zasniva se na ekvivalencijama sudova

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \neg Q) \Rightarrow (A \wedge \neg A) \quad \text{ili} \quad P \Rightarrow Q \wedge (P \wedge \neg Q) \Rightarrow F$$

gdje je s F označen neistinit (engl. *false*) sud. Dakle, u dokazu kontradikcijom, pretpostavljamo da vrijedi tvrdnja $(P \wedge \neg Q)$, te nizom logičih koraka dolazimo do neke tvrdnje koja je lažna ili do absurda, tj. situacije da istovremeno vrijede i tvrdnja A i njezina negacija $\neg A$.
Provjerimo prethodno spomenute ekvivalencije. Budući da je $A \wedge \neg A$ lažan sud, dovoljno je provjeriti da je

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \wedge \neg Q) \Rightarrow F]$$

tautologija.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	F	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$(P \wedge \neg Q) \Rightarrow F$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow F)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$

Ilustirajmo dokaz kontradikcijom primjerima.

Primjer. *Ako je $a = p_1 p_2 \cdots p_k$ umnožak različitih prostih brojeva, tada je $\sqrt{a}$ iracionalan.*

Dokaz. Ovdje je $P = \{a = p_1 p_2 \cdots p_k$ *je umnožak različitih prostih brojeva"*$\}$ a $Q = \{\sqrt{a}$ *je iracionalan"*$\}$. Pretpstavimo da je $a = p_1 p_2 \ldots p_k$ umnožak različitih prostih brojeva te da je $\sqrt{a}$ racionalan broj (to je sud $P \wedge \neg Q$). Tada postoje prirodni brojevi m i n takvi da je

$$\sqrt{a} = \frac{m}{n}$$

i da je $M(m,n) = 1$. (Ulogu tvrdnje A iz gore opisane ekvivalencije imat će upravo tvrdnja da je $M(m,n) = 1$.)
Tada je $m^2 = an^2$, tj. $n^2p_1p_2\cdots p_k = m^2$. Prost broj p_1 dijeli lijevu stranu jednakosti pa dijeli i desnu, tj. p_1 dijeli m^2, dakle i m. Slijedi da je m oblika $m = p_1t$. Sada je $n^2p_1p_2\cdots p_k = p_1^2t^2$, što nakon dijeljenja s p_1 poprima oblik $n^2p_2\cdots p_k = p_1t^2$. Sada zaključujemo da p_1 dijeli desnu stranu jednakosti pa dijeli i lijevu, a budući su p_i različiti prosti brojevi slijedi da p_1 dijeli n^2, dakle i n. Dakle, mjera brojeva m i n je barem $p_1 > 1$, tj. dobili smo da istovremeno vrijedi i negacija tvrdnje $M(m,n) = 1$. Drugim riječima imamo absurd. Dakle, suprotna tvrdnja $\neg Q$ nije istinita pa je istinita tvrdnja Q.

Primjer. *Dokažimo da se broj* 101010 *ne može predstaviti u obliku razlike kvadrata dva prirodna broja.*
Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\neg Q$, tj. da postoje dva prirodna broja a i b takva da je $a^2 - b^2 = 101010$. Tada je $101010 = (a-b)(a+b)$. Budući 2 dijeli 101010, slijedi da 2 dijeli umnožak $(a-b)(a+b)$. Budući da je 2 prost broj, on dijeli ili broj $a-b$ ili broj $a+b$. Brojevi $a-b$ i $a+b$ su iste parnosti (ili oba parna ili oba neparna) i u ovom slučaju oba su parni brojevi. No to znači da je umnožak $(a-b)(a+b)$ djeljiv s 4. Sada imamo da je broj 101010 djeljiv s 4, a to je neistinita tvrdnja. Dakle, pokazali smo da iz $P \wedge \neg Q$ slijedi $F = \{$"*broj* 4 *dijeli* 101010"$\}$, tj. došli smo do kontradikcije.

Vratimo se **direktnom dokazu**.
Kod direktnog dokaza neke tvrdnje Q polazimo od prepostavke P i nizom pravilnog zaključivanja dolazimo do tvrdnje Q.
Razmotrimo direktni dokaz teorema:

Dijagonale romba su okomite.

Pretpostavka ovog teorema je da je promatrani četverokut romb. Definicija romba glasi: romb je paralelogram jednakih stranica. Budući da je romb paralelogram i za njega vrijedi svojstvo da mu se dijagonale raspolavljaju. Neka je dan romb $ABCD$ i točku presjeka dijagonala označimo sa S. Promotrimo trokute $\triangle ABS$ i $\triangle BCS$. Imaju zajedničku stranicu $\overline{SB}$, a za ostale stranice vrijedi: $|AB| \equiv |BC|$ (romb ima jednake stranice), $|AS| \equiv |SC|$ (dijagonale mu se raspolavljaju). Dakle, prema poučku *S-S-S* o sukladnosti trokuta, trokuti $\triangle ABS$ i $\triangle BCS$ su sukladni, pa su i kutovi $\angle ASB$ i $\angle BSC$ jednaki. Budući su to susjedni (suplementarni) kutovi, slijedi da se radi o pravim kutovima. Dakle, $AC \perp BD$, što je i trebalo dokazati.
Da li je dokaz korektan? Jest ako su nam poznate definicije romba, paralelograma i pravog kuta, te ako znademo da su istinite tvrdnje:

- *dijagonale paralelograma se raspolavljaju,*

- S-S-S *poučak o sukladnosti trokuta.*

Dakle, ukoliko sve to znademo dokaz je valjan. Tu se javlja problem. Želimo li se uvjeriti da je neka tvrdnja (T_1) istinita mi možemo pokazati da ona logički slijedi iz neke tvrdnje (T_2) koja je već dokazana. Ukoliko nije, ili nemamo dokaz te tvrdnje poslužit ćemo se tvrdnjom (T_3) i pokazati da tvrdnja (T_2) logički slijedi iz tvrdnje (T_3). Opet ostaje utvrditi istinitost tvrdnje (T_3). Nastavljanjem ovog postupka negdje moramo stati i konačno neku tvrdnju uzeti kao istinitu - tu ključnu ulogu igraju aksiomi (ili postulati) - praistine. Ne može se reći koju tvrdnju treba prihvatiti kao aksiom no potreba za njima je nesumljiva. Treba prihvatiti dva zahtjeva kako bi dokaz bio korektan:

- prihvaćanje određenih tvrdnji, koje nazivamo **aksiomima** ili **postulatima**, koje ne provjeravamo i uzimamo da su istinite;
- prihvaćanje određenih logičkih pravila.

Slično tome, pojmove u nekoj teoriji uvodimo definicijom preko drugih pojmova čije nam je značenje poznato. No i njih je potrebno odrediti preko jednostavnijih pojmova. Dakako i ovdje negdje moramo stati i neke pojmove moramo jednostavno prihvatiti bez svođenja na neke jednostavnije. Dakle,

- u svakoj teoriji moramo krenuti od **osnovnih** (nedefiniranih) **pojmova** i preko njih definirati sve ostale **izvedene pojmove**.

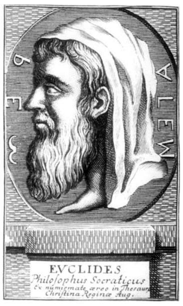
Sumirajmo što znači **aksiomatsko zasnivanje** neke matematičke teorije. Treba utvrditi osnovne pojmove, koji su "očigledno jasni" i ne trebaju se definirati, potom odabrati osnovne tvrdnje (aksiomi, postulati), tj. tvrdnje koje se dogovorno uzimaju za istinite i ne dokazuju se, a zatim se iz aksioma izvode i dokazuju tvrdnje (teoremi, propozicije, stavci, poučci, leme, korolari).

Aksiomatska metoda je način ispitivanja kojim se utvrđuje valjanost dobivenih rezultata. Kako matematičari dolaze do njih misteriozno je, ne zaboravimo da su neki važni rezultati u matematici dani bez valjanog dokaza, ili s nepotpunim dokazom - nije važno, korektni dokazi su dani kasnije (katkada i puno kasnije). Kako se dolazi do matematičkih otkrića ne znamo, no znademo što je dokaz: to je niz tvrdnji (iskaza, koraka) zajedno s potvrdom istinitosti za svaku, takvih da na koncu dobijemo traženi zaključak. Šest je tipova iskaza u dokazu:

- Po pretpostavci ...
- Po aksiomu ...
- Po teoremu ... (prethodno dokazanom)

- Po definiciji ...
- Po (prethodnom) koraku ... (koji je dokazan)
- Po logičkom pravilu...

Ne možemo odgovoriti na pitanje kako otkriti teorem, no možemo naučiti kako načiniti dokaz. Glavna je tehnika učenje i praksa stečena analizom dokaza drugih autora. Nema univerzalne metode za nalaženje dokaza matematičke tvrdnje. Ipak, nekoliko sugestija može pomoći u nalaženju dokaza: prvo, treba utvrditi razumiju li se jasno svi pojmovi u iskazu teorema, ako je potrebno zapisati te definicije; drugo, treba jasno razumijeti što su pretpostavke i što se treba dokazati; treće, možda će pomoći prethodno dokazani teoremi; četvrto, ukoliko je nađen teorem koji se može primijeniti, provjeriti pažljivo može li se on zaista primijeniti; peto, nacrtati sliku, možda ona pomogne (bar će se vizualizirati problem).



Euklid

Bilo je pokušaja da se sistematizira i aksiomatizira golemo matematičko znanje i prije Euklida, ali tek je njemu to uspjelo, za tadašnje uvjete gotovo savršeno, i stoljećima je njegovo čuveno djelo *Elementi* ostalo nepromijenjeno. **Euklid** je živio od oko 330. - 275. pr. Kr. u Aleksandriji, kulturnom i znanstvenom središtu tadašnjeg svijeta. Uz **Arhimeda** i **Apolonija** jedan je od tri najveća grčka matematičara. Bio je pristaša Platonove filozofije. Smatra se da je matematičko obrazovanje dobio u Ateni kod Platonovih učenika. Svoju je nastavnu i znanstvenu djelatnost razvio kao osnivač i središnja ličnost matematičke škole *Museion* u Aleksandriji.

Euklidovi *Elementi*[2] su bili toliko uspješni u izlaganju elementarne geometrije na aksiomatskoj osnovi, da su stoljećima bili nenadmašan uzor stroge dedukcije. Sve do 18. stoljeća, a dijelom i u 19. stoljeću, oni su i osnovni udžbenik geometrije. Nije se sačuvao izvorni tekst, niti tekstovi iz Euklidovih vremena koji bi ukazivali na njih, već samo prijepisi iz kasnijih stoljeća u kojima su sastavljači unosili svoja poboljšanja i primjedbe. Euklidovi *Elementi* u Europu su došli preko prijevoda s arapskog početkom 12. stoljeća. Smatra se da je prvi prijevod načinio **Adelard iz Batha**[3], a među prvima je i prijevod **Hermana Dalmatinca**[4] (koji je popravio upravo Adelardov prijevod).

[2] Ostali Euklidovi radovi su *Data* (zbirka od 94 teorema iz *Elemenata*), *O dijeljenju* (zadaci o dijeljenju likova), *Pseudaria* (o pogrešnom zaključivanju u matematici), *Porizmi*, *Čunjosječnice*, *O plohama*, *Phaenomena* (o astronomiji), *Optika i katoptrika* (o perspektivi) i *Sectio canonis* (20 teorema o glazbenim intervalima).

[3] **Adelard iz Batha** (lat. Adelardus Bathensis, 1080. - 1152.), engleski matematičar.

[4] **Herman Dalmatinac** (1100. - 1160.), hrvatski matematičar.

Koncem 19. stoljeća **J.L. Heiberg**[5] i **H. Menge**[6] na temelju postojećih nezavisnih tekstova restauriraju originalni Euklidov tekst i danas se njihovo izdanje *Elemenata* smatra najsličnijim originalu. To izdanje je osnova i za hrvatski prijevod prvih šet knjiga koji je objavljen 1999. godine (Euklid, *Elementi I-VI.* Kruzak, Zagreb, 1999. g.; prevela M. Hudoletnjak Grgić, pogovor V. Volenec). Engleski prijevod Heilbergovog izdanja s komentarima engleskog matematičara **T.L. Heatha**[7] (T.L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements with Introduction and Commentata,* Dover Publications, New York, 1956.) najčešće se koristi kada se govori o Euklidovim *Elementima.*
U današnje vrijeme, poznavanje *Elemenata* nužno je kako bi se razumjela povijest matematike.
Elementi se sastoje od 13 knjiga: knjige 1 - 6 bave se planimetrijom; knjige 7 - 10 aritmetikom i teorijom brojeva u geometrijskoj formi (točnije u knjigama 7 - 9 dana je geometrijska teorija cijelih brojeva, a knjiga 10 posvećena je iracionalnm brojevima); knjige 11 - 13 bave se stereometrijom.

1.2 SADRŽAJ PRVE KNJIGE ELEMENATA

Za pitanja aksiomatskog zasnivanja geometrije najvažnija je prva knjiga, jer su u njoj skupljeni svi aksiomi na kojima se zasnivaju *Elementi.* Euklid započinje svaku knjigu definicijama onih pojmova kojima se služi u toj knjizi. Ukupno u svim knjigama ima 118 definicija, a u prvoj knjizi ima ih 23. Poslije definicija Euklid navodi postulate (5) i aksiome (5), a onda se iz njih dokazuju propozicije (48).
Navedimo neke definicije (od njih 23) iz hrvatskog prijevoda:

(D-1) **Točka** *je ono što nema djelova.*
(D-2) **Crta** *je duljina bez širine.*
(D-3) *Krajevi crte su* ***točke.***
(D-4) **Dužina** *je ona crta koja jednako leži prema točkama na njoj.*
(D-5) **Ploha** *je ono što ima samo duljinu i širinu.*
(D-6) *Krajevi plohe su* ***crte.***
(D-7) **Ravnina** *je ploha koja jednako leži prema dužinama na njoj.*

Promotrimo s današnjeg stajališta ulogu definicija. Rekli smo: svi pojmovi neke aksiomatske teorije moraju se strogo podijeliti na **osnovne pojmove**, koji se ne definiraju, a čija su svojstva implicitno dana aksiomima, i na **izvedene pojmove** koji se definiraju na temelju osnovnih pojmova.

[5]**Johan Ludvig Heiberg** (1854. - 1928.), danski povjesničar matematike.
[6]**H. Menge**, njemački lingvist.
[7]Sir **Thomas Little Heath** (1861. - 1940.), engleski matematičar.

Euklidove definicije su u tom smislu jedno od najslabijih mjesta. On želi definirati sve geometrijske pojmove, pa nema istaknutih osnovnih pojmova.
Nadalje, u definicijama (D-1), (D-2) i (D-5) pojmovi točke, crte i plohe (ravnine) definiraju se pomoću pojmova dio, duljina, širina, za čiju bi definiciju bili potrebni novi pojmovi, a to je logički nedopustivo. U definicijama (D-1) i (D-3) pojam točke definira se na dva različita načina a nigdje nije dokazana ekvivalentnost tih definicija. Definicije (D-4) i (D-7) su nejasne. Euklidove definicije točke, pravca (dužine) i ravnine ne omogućavaju logičko izvođenje svih svojstava tih pojmova. Izgleda da je i sam Euklid bio svjestan logičke nedopustivosti prvih sedam definicija - on ih i ne rabi. Prema tomu, taj logički nedostatak Euklidove aksiomatike lako je uklonjiv: treba te definicije ispustiti, a da se pojmovi

- točka,
- pravac i
- ravnina

uzmu za osnovne pojmove. Ostale definicije su ispravne ili preodređene.

Potom Euklid navodi **postulate** i **aksiome**:

(P-1) *Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.*

(P-2) *I da se ograničena dužina neprekinuto produžuje u dužini.*

(P-3) *I da se sa svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.*

(P-4) *I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.*

(P-5) *I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.*

(A-1) *Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.*

(A-2) *Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.*

(A-3) *Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostatci su jednaki.*

(A-4) *Stvari koje se jedna s drugom poklapaju međusobno su jednake.*

(A-5) *Cjelina je veća od dijela.*

Nije jasno kakva je razlika između postulata i aksioma osim u činjenici da su postulati geometrijske tvrdnje, a aksiomi opće tvrdnje. Danas su to sinonimi i mi ćemo rabiti aksiom. Bitni nedostatak Euklidove aksiomatike jest **nepotpunost** tog sustava, koja se ogleda u činjenici da se u dokazima Euklid koristi i odnosima na slikama - koristi se tvrdnjama osnovanim na zornosti, a koje se ne mogu dokazati na temelju njegove aksiomatike. Na primjer Euklid često rabi izraze:

"točke A, B, C leže na istom pravcu",

"točkom A povuci pravac",

"točka C leži između točaka A i B", i intuitivno je jasno o čemu se radi. Da bi se razumijeli ti pojmovi potrebno je opisati (aksiomima) pojmove **incidencija** i **poredak**. Isto tako intuitivno je jasno što bi značili izrazi

"dužina $\overline{AB}$ jednaka dužini $\overline{CD}$",

"položimo kut $\angle BAC$ na kut $\angle EFG$",

"položimo trokut $\triangle ABC$ na trokut $\triangle EFG$".

Na neki su način i razumljivi ako Aksiom (A-4) shvatimo kao definiciju "kongruentnosti (sukladnosti) preko gibanja". Nešto je potrebno uzeti za osnovni pojam: bilo gibanje - pa definirati kongruentnost, bilo kongruentnost - pa definirati gibanje. Nadalje, vidjet ćemo da se već u prvoj propoziciji pretpostavlja da se kružnice sijeku - što je nedokazivo iz njegove aksiomatike. U dokazu te tvrdnje leži svojstvo neprekidnosti kružnice, a **neprekidnost** (kao i poredak) je aksiomatizirana tek krajem 19. stoljeća. Dug je put do konačnog aksiomatskog zasnivanja geometrije - to je učinio **D. Hilbert**[8] 1999. godine u djelu *Grundlagen der Geometrie.* Hilbertovom aksiomatikom ćemo se posebno baviti i naglasimo da on za osnovne pojmove, pored točke, pravca (i ravnine) uzima za osnovne pojmove relacije

- incidencije
- poretka i
- kongruencije.

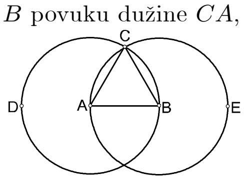
Nakon definicija, postulata i aksioma Euklid izlaže propozicije raspoređujući ih u red po logičkoj zavisnosti, tako da se svaka tvrdnja može dokazati na osnovu prethodnih tvrdnji, postulata i aksioma.

Euklidova propozicija podijeljena je na šest etapa: **izricanje zadanoga** (*proteza*), **isticanje zadanog** - pretpostavke (*eksteza*), **isticanje tvrdnje** ili onog što se traži (*diorizma*), **konstrukcija** - u konstruktivnim zadatcima to je naprosto rješenje (*kateskeva*), **dokaz** (*apodeiskis*), **zaključak** (*simperazma*) - ponovi se što je trebalo dokazati i kako se to napravi.

U prijevodima na latinski umjesto *"A to je ono što je trebalo učiniti (dokazati)."* stavlja se u propozicijama u kojima treba načiniti konstrukciju Q.E.F. (od latinske fraze *quod erat faciendum*), a u ostalim propozicijama Q.E.D. (od latinske fraze *quod erat demonstrandum*). Danas je uobičajeno staviti znak $\square$ ili $\blacksquare$.

Promotrimo prvu propoziciju (iz hrvatskog izdanja prvih šest knjiga Euklidovih *Elemenata*). Dan je prikaz koji prikazuje podjelu na šest dijelova, i osim toga, uobičajilo se navoditi i Heatov komentar (to je treći stupac).

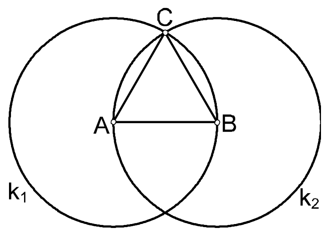
[8]**David Hilbert** (1862. - 1943.), njemački matematičar.

Propozicija 1.		
1.	*Na danoj dužini konstruiraj jednakostraničan trokut.*	
2.	Neka je AB dana dužina.	
3.	Na dužini AB treba dakle konstruirati jednakostraničan t rokut.	
4.	Opišimo kružnicu BCD sa središtem u A i radijusa AB i neka se, isto tako, sa središtem B i radijusom BA opiše kružnica ACE i od točke C u kojoj se kružnice međusobno sijeku neka se do točaka A, B povuku dužine CA, CD. 	(P-3) (P-3) (P-1)
5.	A budući da je točka A središte kružnice CDB, AC je jednaka AB. Isto tako, budući da je točka B središte kružnice CAE, BC je jednaka BA. A dokazano je također da je CA jednaka AB. Stoga je svaka od CA, CB jednaka AB. A ono što je jednako istom jednako je i međusobno. Stoga je i CA jednaka CB. Prema tome, tri dužine CA, AB, BC muđusobno su jednake.	 (D-15) (D-15) (A-1)
6.	Dakle, trokut ABC je jednakostraničan trokut i konstruiran je na dužini AB. A to je ono što je trebalo učiniti.	

Euklidova prva knjiga *Elemenata* dana je u prilogu i napisana je na danas uobičajeni način koristeći se standardnim oznakama. Tamo je ta propozicija:

Propozicija 1. *Na danoj dužini konstruiraj jednakostraničan trokut.*

Dokaz. Neka je $\overline{AB}$ dana dužina. Treba konstruirati jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ sa stranicom $\overline{AB}$.



Propozicija 1.

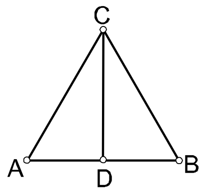
Konstruirajmo kružnicu $k_1 = k(A, \overline{AB})$ oko točke A radijusa $\overline{AB}$ te analogno $k_2 = k(B, \overline{AB})$ [primjenom Postulata (P-3)]. Neka je C presječna točka tih kružnica. Spojimo C sa A i C sa B [(P-1))]. Time je nastao trokut $\triangle ABC$ za kojeg tvrdimo da je jednakostraničan.
Zaista, jer je $\overline{AC} = \overline{AB}$, $\overline{BC} = \overline{AB}$ [po Definiciji (D-15)] vrijedi $\overline{AC} = \overline{BC}$ [po Aksiomu (A-1)].

Ovim je dokazano da vrijedi $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$, tj. trokut $\triangle ABC$ je jednakostraničan. ■

U dokazu koristi samo definicije, postulate i aksiome. Redosljed narednih propozicija pomno je izabran tako da se dokazu svake propozicije provodi preko definicija, postulata, aksioma i prethodno dokazanih propozicija. Ilustrirajmo to.

Propozicija 10. *Raspoloviti danu dužinu.*

Dokaz. Neka je $\overline{AB}$ dana dužina. Nad njom konstruiramo jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ (Propozicija 1.) i kut $\angle ACB$ raspolovimo sa $\overrightarrow{CD}$ (Propozicija 9.). Tvrdimo da točka D raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.



Propozicija 10.

Promotrimo trokute $\triangle ADC$ i $\triangle BDC$. Po konstrukciji je $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\angle ACD = \angle BCD$, a $\overline{CD}$ je zajednička stranica i, po Propoziciji 4., slijedi da su trokuti $\triangle ADC$ i $\triangle BDC$ jednaki. Dobivamo, posebno, da je i $\overline{AD} = \overline{DB}$. ■

Vidimo da Euklid koristi slike. Geometrija jest disciplina u kojoj se objekti mogu vizualizirati i korektne slike pomažu da se razumije dokaz. Ne samo to, pomažu i u otkrivanju novih rezultata. Euklidova Propozicija 47 je čuveni Pitagorin poučak.

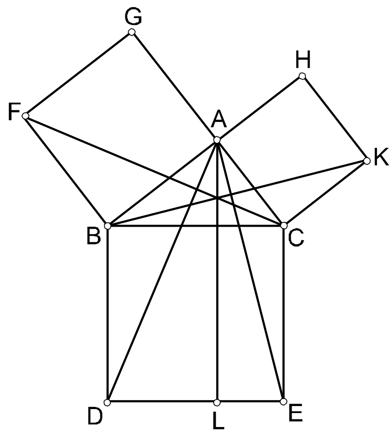
Propozicija 47. *U svakom pravokutnom trokutu kvadrat nad stranicom nasuprot pravog kuta jednak je zbroju kvadrata nad stranicama uz pravi kut.*

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ pravokutni trokut s pravim kutom $\angle BAC$. Konstruiramo nad stranicama danog trokuta kvadrate $BDEC$, $ACKH$ i $AGFB$ (Propozicija 46.).

Iz A povucimo paralelu s pravcem $\overleftrightarrow{BD}$ i njeno sjecište s pravcem $\overleftrightarrow{DE}$ označimo sa L. Spojimo A sa D, L, E, te F sa C i B sa K. Budući su kutovi $\angle BAC$ i $\angle BAG$ pravi, točke A, C i G leže na istom pravcu (Propozicija 14.). Iz istog razloga i točke B, A i H leže na istom pravcu. Budući je $\angle DBC = \angle FBA$ dodavanjem kuta $\angle ABC$ dobivamo da je $\angle DBA = \angle FBC$ [(A-2)].

Promotrimo trokute $\triangle ABD$ i $\triangle FBC$. Oni imaju po dvije jednake stranice jednaki kut među njima pa su sukladni (Propozicija 4.). Osim toga paralelogram kojemu je $\overline{BL}$ dijagonala dvostruko je veći od trokuta $\triangle ABD$, jer imaju istu

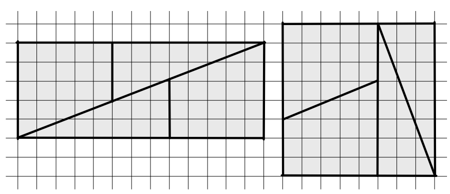
osnovicu i leže između istih paralela (Propozicija 41). Isto tako i kvadrat s dijagonalom $\overline{GB}$ dvostruko je veći od trokuta $\triangle FBC$ (Propozicija 41.).
Dakle, paralelogram s dijagonalom $\overline{BL}$ jednak je kvadratu s dijagonalom $\overline{GB}$.



Propozicija 47.

Slično se dokazuje da ako spojimo A sa E i B sa K, da je tada paralelogram s dijagonalom $\overline{CL}$ jednak kvadratu s dijagonalom $\overline{HC}$. Slijedi da je zaista kvadrat nad stranicom nasuprot pravog kuta trokuta jednak zbroju kvadrata nad stranicama uz pravi kut. ■

Slika koja ilustrira Pitagorin poučak kod Euklida je komplicirana. Pomoćne crte pomažu da se lakše razumije njegov dokaz. Povlačenjem drugačijih crta dokaz se može provesti i puno jednostavnije. Koje crte povući umijeće je onoga koji smišlja dokaz. Mnogo je različitih dokaza Pitagorinog poučka. Neki su jednostavni i slikom vrlo sugestivni. Napomenimo, bez obzira na "očite odnose koje slika daje", dokaz treba pažljivo provesti.



65 = 64?

Na primjer, Slika 65 = 64? je jako sugestivna, ali vodi pogrešnom zaključku. Naime, izrežemo li dijelove pravokutnika i "presložimo li ih na kvadrat" dobivamo da je 65 = 64. Očita pogreška, naše oko nije u stanju vidjeti da se preslagivanjem izgubio jedan mjerni kvadrat.

1.3 PETI EUKLIDOV POSTULAT

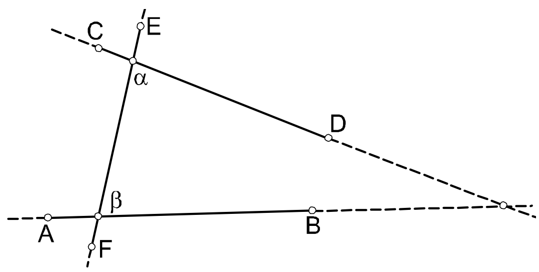
Rečeno je da za aksiome i postulate treba uzeti one tvrdnje koje bez problema možemo prihvatiti da su istinite. Euklidovi aksiomi se lako usvajaju. Kod postulata najviše je pozornosti izazvao je Peti postulat (P-5). Naime, prva četiri postulata lako se prihvaćaju jer su apstrahiranja empirijskih činjenica. Prva dva opisuju postupke koje omogućava ravnalo. Možemo ih izreći na način:

(P-1) *Za svake dvije različite točke postoji jedinstven pravac koji njima prolazi* (*ili, s dvije različite točke jednoznačno je određen pravac*);

(P-2) *Za svaka dva segmenta jedan od njih se može produžiti u segment kongruentan drugome.*

Treći postulat (P-3) opisuje šestar, tj. za svaku točku O (središte kružnice) i svaku točku A različitu od O postoji kružnica $k(O, \overline{OA})$ sa središtem u točki O i radijusa $\overline{OA}$. Četvrti postulat (P-4) je apstrahiranje empirijske činjenice da možemo mjeriti pravi kut (kut koji je kongruentan svom suplementu je pravi kut, suma mjera suplementarnih kutova je 180^0, svaki pravi kut ima mjeru 90^0). Da je kut $\angle A$ pravi označavat ćemo sa $\angle A = R$.

Peti postulat (P-5) je drugačiji jer ne možemo empirijski ustanoviti kada se dva pravca sijeku: imamo samo dužine, a ne i pravce. Možemo produžiti dužinu i opet imamo dužinu, ali ne i pravac. Možemo li indirektno utvrditi da se pravci sijeku? Euklidova je sugestija da se povuče transverzala (pravac $\overleftrightarrow{EF}$) i ako je suma kutova α i β manja od $2R$, tada će se produžene dužine s iste strane transverzale gdje leže kutovi α i β siječi.



Peti postulat.

Primjetimo da kad bismo znali da se pravci sijeku, možemo dokazati da se sijeku s one strane gdje je zbroj promatranih kutovi manji od $2R$. Naime, kad bismo pretpotstavili da se sijeku s druge strane, mogli bismo promatrati suplementarne kutove α' i β'. Kako je $\alpha + \alpha' = 2R$, $\beta + \beta' = 2R$ imamo $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' = 4R$. Po pretpostavci je $\alpha + \beta < 2R$, pa mora biti $\alpha' + \beta' > 2R$ a to je u kontradikciji s Propozicijom 17 (zbroj bilo koja dva kuta trokuta je manji od $2R$)[9].

[9] Vidi dodatak *ELEMENTI*.

Poziv na propozicije odnosi se na Euklidove propozicije.

Moguće je da je i sam Euklid pokušavao dokazati Peti postulat (tj. da je on zavisan s drugim tvrdnjama). Izgleda da je Euklid nastojao primjenu tog postulata odgoditi sve dok se njegova primjena ne pokaže neophodnom - u prvih 28 propozicija on ga ne koristi. Danas se umjesto Euklidovog petog postulata uzima njemu ekvivalentna tvrdnja koja je poznata i kao *Playfairov postulat*[10]:

(PP) *Neka je a proizvoljni pravac, A točka van njega, tada u ravnini određenoj njima, kroz točku A možemo povući točno jedan pravac koji ne siječe dani pravac.*

Pokažimo da su (P-5) i (PP) ekvivalentne tvrdnje. Napomenimo što su to ekvivalentne tvrdnje. Neka su M i N dvije tvrdnje u teoriji koja je određena aksiomima $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Kažemo da su tvrdnje M i N ekvivalentne tvrdnje obzirom na navedeni sustav ako i samo ako vrijedi

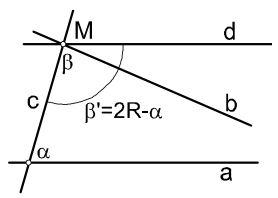
$$\{A_1, A_2, \ldots, A_n, M\} \Rightarrow N \quad \text{i} \quad \{A_1, A_2, \ldots, A_n, N\} \Rightarrow M.$$

Nazovimo teoriju dobivenu iz svih Euklidovih postulata izuzev Petog Euklidovog postulata (P-5) **neutralnom geometrijom**. To znači da smijemo koristiti sve Euklidove postulate osim postulata (P-5), kao i prvih 28 propozicija iz Prve knjige *Elemenata* (u njima Euklid ne koristi postulat (P-5)). Da su (P-5) i (PP) ekvivalentne tvrdnje obzirom na neutralnu geometriju treba dokazati:

(a) $\{$neutralna geometrija$\} \wedge$ (PP) $\Rightarrow$ (P-5) i

(b) $\{$neutralna geometrija$\} \wedge$ (P-5) $\Rightarrow$ (PP).

(a) Neka su dani pravac a i točka M van njega. Neka pravac b prolazi točkom M i neka je $\alpha + \beta < 2R$. Konstruirajmo pravac d koji prolazi točkom M tako da s pravcem c zatvara kut $\beta' = 2R - \alpha$.
Po Propoziciji 27. i Propoziciji 28 pravci a i d se ne sijeku.

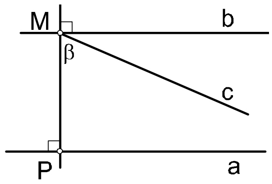


Pokažimo da su b i d različiti pravci. Zaista, jer je $\beta < 2R - \alpha$ i $\beta' = 2R - \alpha$ imamo da je $\beta < \beta'$, pa su zaista d i b različiti pravci. Budući d ne siječe a, a po postulatu (PP) on je i jedini takav pravac, slijedi da pravac b mora sječi pravac a, dakle vrijedi postulat (P-5).

(b) Neka je M točka van pravca a i neka je $\overleftrightarrow{MP}$ okomica iz M na a.U točki M dignimo okomicu b na $\overleftrightarrow{MP}$ (Propozicija 11). Pravci a i b se ne sijeku. Naime,

[10]**John Plaifaire** (1748.-1819.), škotski matematičar).

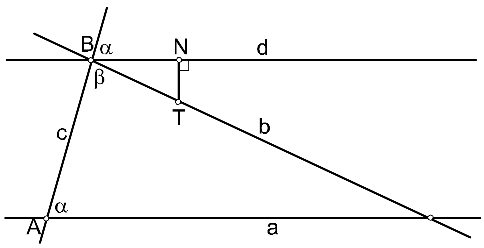
ukoliko bi se sjekli, recimo u točki Q, dobili bi trokut $\triangle MPQ$ u kojemu bi zbroj dvaju kutova bio $2R$. To je u protuslovlju s Propozicijom 17 (koja kaže da je u svakom trokutu zbroj bilo koja dva kuta manji od dva prava kuta).



Ostaje pokazati da je b i jedini takav pravac. Pretpostavimo suprotno, da postoji još jedan pravac c koji prolazi točkom M i ne siječe pravac a. Sada je $\beta < R$ i po postulatu (P-5) pravci a i c se sijeku, što je u protuslovlju s našom pretpostavkom. Dakle, b jest jedini pravac koji prolazi točkom M van pravca a i ne siječe pravac a, tj. dokazali smo da vrijedi postulat (PP).

Navedimo neke od pokušaja da se dokaže zavisnost.
Jedan od najznačajnijih komentatora Euklidovih *Elemenata* je **Proklo**[11]. Njegovi komentari su glavni izvor informacija o starogrčkoj geometriji. Prisjetimo se da je Euklid paralelnim pravcima smatrao one koji se ne sijeku, tj. one koji nemaju zajedničkih točaka. Već su antički matematičari pokušavajući dokazati Peti postulat predlagali nove definicije paralelnih pravaca. Tako u Proklovim komentarima nalazimo da je **Posidon**[12] predlagao *da se paralelni pravci definiraju kao oni koji imaju konstantan razmak*. Dakako, ovdje bi tek trebalo dokazati da je skup svih točaka s iste strane i jednako udaljenih od danog pravca također pravac - a to je tvrdnja ekvivalentna Petom postulatu.

Proklo je dao sljedeći "dokaz" Petog postulata.



Proklov "dokaz".

Neka su a, b, c dani pravci kao na slici, dakle $\alpha + \beta < 2R$. Nanesimo na pravcu c u točki B kut α i neka je tako dobiveni pravac d. Tada je $b \neq d$ (u protivnom bi bilo $\alpha + \beta = 2R$, po Propoziciji 13). Po Propoziciji 28 su a i d paralelni

[11] **Proklo** (410. - 485.), jedan od posljednjih učitelja u atenskoj školi.
[12] **Posidon iz Rhodosa** (135. pr. Kr. - 51. pr. Kr.), grčki filozof, astronom i matematičar. Osnovao školu u Rhodosu.

pravci. Kako je $\beta < 2R - \alpha$ to je b unutar kuta $\angle(d, c)$. Uočimo na pravcu b točku T i sa N označimo nožište okomice iz T na d. Neka točka T putuje po pravcu b udaljavajući se od točke B. Tada udaljenost od T do pravca d, duljina dužine $\overline{TN}$, raste do $+\infty$ i poprima svaku pozitivnu vrijednost. U nekom času točka T je udaljena od pravca d točno onoliko koliko je razmak između pravaca a i d. Dakle, T leži na pravcu a, tj. a i d se ne sijeku. Greška u "dokazu" je pretpotstavka da pravci a i d imaju ograničeni razmak, a za dokaz te činjenice potreban je Peti postulat.

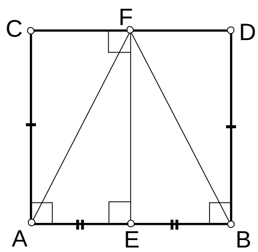
Kako Prokla, tako i Euklida potom preuzimaju Arapi[13] (i samo oni) koji ga u 8. i 9. stoljeću prevode i komentiraju. Dakako, i u tim "dokazima" previd je u korištenju neke tvrdnje koja je ekvivalentna Petom postulatu. Tako je npr. **Nasir al-Din Tusi**[14] pokušao dokazati Peti postulat pretpostavljajući egzistenciju pravokutnika. Tek koncem 15. i početkom 16. stoljeća europski matematičari usvojili su sva arapska matematička znanja i započeli s novim otkričima. Tako je Tusijeve rezultate objelodanio je **John Wallis**[15], koji i sam pokušava "dokazati" Peti postulat. On se koristi aksiomom (*Wallisov postulat*):

- *Postoje slični trokuti.*

Dakako, to je još jedan ekvivalent Petom postulatu.

Direktni dokazi su bili neuspješni pa se krenulo na indirektni dokaz. Posebno su zanimljivi pokušaji **Saccherija**[16] i **Lamberta**[17] jer su oni otvorili sasvim nove vidike u geometriji.

Saccheri je promatrao $ABCD$ u kojemu je $\angle A = \angle B = R$ i $\overline{AC} = \overline{BD}$.



Saccherijev červerokut.

[13] Arapska matematika nastala je na području koje su osvojili Arapi u razdoblju od 8. do 13. stoljeća. U njenom razvoju sudjeluju i ostali narodi arapske države (Iranci, Tadžici, Egipćani, Uzbeci, Mauri, Židovi...)

[14] Pravo ime **Aub-Jafar Muhamed ben Hasan at-Thusi** (1201. - 1274.), perzijski erudit, bavio se geometrijom, astronomijom, geografijom, filozofijom. Dao tumačenje prvih 12 knjiga Euklidovih *Elemenata*.

[15] **John Wallis** (1616. - 1703.), engleski matematičar.

[16] **Giovanni Gerolamo Saccheri** (1667. - 1733.), talijanski matematičar.

[17] **Johann Heinrich Lambert** (1728. - 1777.), švicarski matematičar, fizičar i astronom.

U četverokutu $ABCD$ (tzv. *Saccherijev četverokut*) stranica uz koju su pravi kutovi je **donja baza**, nasuprotna stranica je **gornja baza**, a dvije jednake stranice uz pravi kut su **krakovi**.

Neka je E polovište donje baze i u njoj konstruirajmo okomicu na $\overline{AB}$. Neka ona siječe $\overline{CD}$ u točki F (u protivnom, imali bi protuslovlje s Propozicijom 17). Trokuti ΔAEF i ΔEBF su jednaki (po Propoziciji 4) pa je $\overline{AF} = \overline{BF}$ i $\angle FAE = \angle FBE$. No, onda su (opet primjenom Propozicije 4) trokuti ΔAFC i ΔBDF jednaki, pa je $\angle C = \angle D$ i $\overline{DF} = \overline{FC}$, tj. F je polovište gornje baze i $\overline{CD}$. Jer je $\angle EFC = \angle AFE + \angle AFC = \angle EFB + \angle BFD = \angle AFD$, imamo da je $\overline{EF}$ okomica na $\overline{CD}$. Ovim je dokazao i još jednu važnu tvrdnju: *simetrala donje baze Saccherijevog četverokuta ujedno i simetrala gornje baze, te da su kutovi uz gornju bazu jednaki.*

Potom pokazuje da u Saccherijevom četverokutu vrijedi:

ako je $\angle C = \angle D = R$, onda je $\overline{CD} = \overline{AB}$;

ako je $\angle C = \angle D < R$, onda je $\overline{CD} > \overline{AB}$;

ako je $\angle C = \angle D > R$, onda je $\overline{CD} < \overline{AB}$.

U prvom slučaju je $ABCD$ pravokutnik, a to se ne može dokazati bez petog postulata. Ako Peti postulat nije posljedica drugih Euklidovih pretpostavki, onda može postojati Saccherijev četverokut u kojemu su kutovi $\angle C = \angle D$ tupi ili šiljasti. Sada Saccheri razmatra tri slučaja:

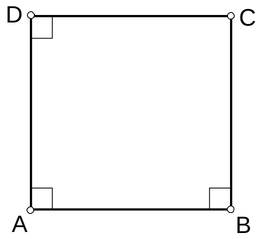
$$\angle C = \angle D = R, \quad \angle C = \angle D > R, \quad \angle C = \angle D < R,$$

koje nazivamo redom hipoteza pravog kuta, hipoteza tupog kuta i hipoteza šiljastog kuta. Uvjeren u hipotezu pravog kuta, da je Euklidov postulat istinit, ispituje posljedice hipoteza tupog i šiljastog kuta nastojeći doći do protuslovlja.

Navedimo neke njegove rezultate: ako je jedna od ovih hipoteza istinita za jedan Saccherijev četverokut onda je ona istinita za svaki Saccherijev četverokut; postavljene hipoteze ekvivalentne su sa sumom kutova u trokutu, prva sa $\angle A + \angle B + \angle C = 2R$, druga sa $\angle A + \angle B + \angle C > 2R$, treća sa $\angle A + \angle B + \angle C < 2R$; okomica na jedan krak šiljastog kuta neko vrijeme siječe drugi krak, a potom više ne siječe; točkom van pravca prolazi beskonačno mnogo pravaca koji dani pravac sijeku i beskonačno mnogo koji ga ne sijeku i postoje dva granična pravca koja odvajaju ove dvije klase pravaca; skup točaka jednako udaljenih od danog pravca nije pravac; pravci koji se ne sijeku imaju zajedničku okomicu.

Vjera da je hipoteza pravog kuta ona prava, zavela ga je na pogrešne zaključke, pa je tako on "oborio" hipotezu tupog kuta (nju lakše) i hipotezu šiljastog kuta (nju daleko teže). Rezultati do kojih je došao Saccheri doista su bili neobični i on ih nije mogao prihvatiti.

Lambert, slično Saccheriju, promatra četverokut koji ima tri prava kuta (tzv. *Lambertov četverokut* - polovica Saccherijevog četverokuta), a za četvrti uzima da može biti pravi, tupi ili šiljasti.



Lambertov černerokut.

Tako i on postavlja tri hipoteze:

$\angle C = R, \quad \angle C > R, \quad \angle C < R,$

koje opet nazivamo hipoteza pravog kuta, hipoteza tupog kuta i hipoteza šiljastog kuta. Slično Saccheriju dokazuje da ako je jedna od ovih hipoteza istinita za jedan Lambertov četverokut tada je ona istinita za svaki Lambertov četverokut, te da je hipoteza pravog kuta ekvivalentna Petom postulatu. U želji da obori hipoteze tupog i šiljastog kuta, razmatra posljedice kako bi došao do protuslovlja. U slučaju hipoteze tupog kuta, ne lako, dolazi do kontradikcije. No, dokazujući hipotezu šiljastog kuta, slično kao i Saccheri, dolazi do za njega čudnih posljedica.

Navedimo neke njegove rezultate: ne postoje slični trokuti; u svakom je trokutu zbroj kutova $(\alpha + \beta + \gamma)$ manji od $2R$; površina trokuta proporcionalna je njegovom defektu $\delta = 2R - (\alpha + \beta + \gamma)$; postoji apsolutna jedinica mjere.

Lambert je svjestan da svoju teoriju o paralelama nije završio - da nije došao do toliko traženog protuslovlja[18].

Važan doprinos dao je i **Legendre**[19]. On je 1794. godine objavio knjigu *"Osnove geometrije"* - udžbenik koji je trebao nadomjestiti Euklidove *Elemente*. U tome je bio veoma uspješan, taj je udžbenik krasila jasnoća, elegancija i kratkoća dokaza. Dakako da je centralno mjesto opet bio Peti postulat. On dokazuje: ako je suma kutova u trokutu $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ tada vrijedi Peti postulat; suma kutova u trokutu je $\alpha + \beta + \gamma \leq 2R$; ako je suma kutova u jednom trokutu $\alpha + \beta + \gamma \leq 2R$, tada je suma kutova u svakom trokutu $\alpha + \beta + \gamma \leq 2R$.

Sada mu je cilj naći trokut u kojem je $\alpha + \beta + \gamma = 2R$. U narednim izdanjima udžbenika (12 izdanja) daje nekorektne dokaze, ali njegova je zasluga da je nakon kraćeg gubljenja interesa, opet aktualiziran problem Petog postulata.

[18] Za njegova života nije ni objavljena *Teorija o paralelama*, već ju je nakon njegove smrti publicirao švicarski matematičar **Johan (III) Bernoulli** (1744. - 1807.).

[19] **Adrien-Marie Legendre** (1752. - 1833.), francuski matematičar.

Svo troje, Saccheri, Lambert, Legandre bili su uvjereni da se Peti postulat može dokazati. Početkom 19. stoljeća pojavljuju se prva razmišljanja da je Peti postulat nezavisan.
Među prvima i najznačajni je svakako **Gauss**[20].
Gauss se vrlo rano zainteresirao za problem Petog postulata. Godine 1815. dolazi na ideju da se Peti postulat ne da dokazati, tj. da nije zavisan o ostalim aksiomima. Godine 1816. dolazi do zaključka da je neeuklidska geometrija neproturječna. Ne želeći proturječiti dotadašnjim rezultatima, svoje radove ne objavljuje - o njima znademo iz njegova dnevnika koji je je počeo voditi u svojoj 19. godini.
Evo njegove definicije paralelnih pravaca: *Kažemo da je pravac* $\overleftrightarrow{AM}$ *paralelan s pravcem* $\overleftrightarrow{BN}$ *ako oba pravca leže u istoj ravnini i ne sijeku se ali svaki pravac povučen točkom* A *između pravaca* $\overleftrightarrow{AM}$ *i* $\overleftrightarrow{AB}$ *siječe pravac* $\overleftrightarrow{BN}$.
Navedimo neke njegove rezultate. Dokazao je: definicija paralelnih pravaca ne ovisi o izboru točaka A i B; da je relacija "biti paralelan" simetrična i tranzitivna; svakom točkom izvan danog pravca prolaze dvije paralele s tim pravcem, jedna prema jednom kraju, a druga prema drugom kraju; limes kružnica kojima $r \to \infty$ (tj. središte $\to \infty$), a koje uvijek prolaze kroz istu odabranu točku nije pravac nego krivulja - *paracikl*; geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od danog pravca s iste strane nije pravac nego krivulja - *hipercikl*; postoji apsolutna jedinica duljine (tj. geometrijskim načinom možemo definirati dužinu kojom mjerimo ostale); u euklidskoj geometriji mjerenje kutova je apsolutno dok mjerenje dužina nije; uvodi konstantu k koju može geometrijski definirati; ako $k \to \infty$, onda na limesu dobivamo euklidsku geometriju; pokazuje da je za danu kružnicu radijusa r njezin opseg $O = 2\pi k \operatorname{sh} \frac{r}{k}$, trokut s kutovima α, β i γ ima je površinu $P = k^2 \left[\pi - (\alpha + \beta + \gamma)\right] = k^2 \delta$.

Napokon je početkom 19. stoljeća problem paralela riješen gotovo istovremeno. Izgrađena je nova geometrija, jednakovrijedna kao euklidska geometrija. Zasluga je to dvojice: **J. Bolyaija**[21] i **N.I. Lobačevskog**[22].

János je sin također poznatog matematičara Farkasa, koji je boravio u Göttingenu i prijateljevao i dopisivao se s Gaussom. I Farkas se bavio problemom Petog postulata i smatra se jednim od preteća osnivača neeuklidske geometrije. Janos je dobio prve poduke iz matematke od oca, i već zarana pokazala se njegova izuzetna nadarenost (a bio je i dobar glazbenik i vješt mačevalac). S petnaest godina otac ga namjerava poslati na studij kod Gaussa u Göttingen, a kada

[20]**Johann Carl Friedrich Gauss** (1777. - 1855.), veliki njemački matematičar.
[21]**János Bolyai** (1802. - 1860.), mađarski matematičar.
[22]**Nikolaj Ivanovič Lobačevski** (1792. - 1856.), ruski matematičar.

to nije uspjelo odlazi na studij u Beč. Već kao student javlja ocu da je uspio dokazati Peti postulat - otac ga je odvraćao od tog rada jer je sam potrošio dvadesetak godina svog života na tom problemu. Uvidio je brzo pogrešku u svom radu i počinje naslučivati da je aksiom o paralelama nezavisan. 1823. godine javlja ocu da je našao relaciju između kuta paralelnosti i dužine koja mu odgovara - otkrivena je neeuklidska geometrija. Bilo mu je tada tek 21 godina i pitanjem paralela bavio se tek 3-4 godine. Dakako, pomoglo je i kritičko promišljanje njegova oca. Godine 1829. predočio je ocu potpuni nacrt svoje teorije koji ovaj nije razumio i kada je uvidio da oca nije pridobio za svoje ideje predlaže da rad pošalju na prosudbu Gaussu - znao je da će otac uvažiti njegovo mišljenje. Zbog toga, 1831. godine, piše rad kao dodatak očevom radu *Tantamen*[23]. Taj rad je imao 26 strana - glasoviti *Appendix* - i otac ga šalje Gaussu na prosudbu. Gaussov odgovor, u kojem je pohvalio rad i da se izložene ideje u potpunosti podudaraju s njegovim rezultatima starim već tridesetak godina, jako je obradovao oca, ali ne i Jánosa. On nije mogao niti htio vjerovati da je Gauss samostalno i prije njega došao do neeuklidske geometrije - ukratko mislio je da je pokraden. Poslije se uvjerio da nije tome tako - ali ostalo je ogorčenje što Gauss nije javno istaknuo važnost njegova rada. I s radom Lobačevskog bio je upoznat. Na jedan rad Lobačevskog upozorio je Gauss njegova oca, a ovaj njega. Isprva se divi tom radu i kako se on podudara s njegovim *Appendixom*, potom opet sumnja da je pokraden. Daje i neke oštroumne primjedbe - od nekih bi i odustao da je poznavao ostale radove Lobačevskog.

Lobačevski je bio višegodišnji profesor i rektor univerziteta u Kazanu. U početku je i sam pokušavao dokazati Peti postulat. 1823. godine završio je rukopis udžbenika za geometriju koji nije nikada tiskan. Iz pronađenog rukopisa vidljivo je da znade da su svi dotadašnji pokušaji dokazivanja Petog postulata bili neuspješni. U periodu 1823. - 1825. izradio je potpuno rješenje problema i 1826. godine Lobačevski izlaže nacrt svoje nove geometrije. Taj je rukopis izgubljen i nije nikad pronađen ali je objavljen u časopisu *"Kazanski vjesnik"* (za godište 1829.-1830.) pod naslovom *"O osnovama geometrije"*. Ovom publikacijom pretekao je Jánosa Bolayija - njegov je *Appendix* objavljen 1931. godine. Od 1835. do 1838. radi na novom udžbeniku geometrije. Lobačevski je talentiran nastavnik: udžbenik je pisan jasno i precizno. Želeći svoj rad učiniti pristupačnim i matematičarima izvan Rusije objavljuje 1840. godine u Berlinu rad *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.*

[23]Skačeno od *Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducenti.*

Navedimo neke rezultate Bolayija i Lobačevskog: definicija paralelnosti; kut paralelnosti $\Pi(x)$; konstrukcija kuta paralelnosti; granična kružnica i granična sfera; pridruženi trokuti; neeuklidska trigonometrija; izračunavanje funkcije $\Pi(x)$; uvođenje hiperbolnih funkcija; opseg kruga; zbroj kutova u trokutu, defekt trokuta; veza površine trokuta i defekta; površina pruge među paralelama.

Nažalost, niti rad Bolayija niti rad Lobačevskog nije izazvao gotovo nikakva odziva u znanstvenim krugovima. Na razvoj geometrije gotovo da oni ne utječu. Od zaborava ih je spasio Gauss. Kako on u javnosti nije raspravljao o paralelama to nije spominjao njihove radove kojima se divio i uvažavao. Objavom njegovih pisama i njegovog dnevnika iz kojih se vidjelo da je ne samo cijenio njihov rad već se i sam bavio neeuklidskom geometrijom, znanstvena javnost je pridobivena. Njihova istraživanja su prevedena i na druge jezike, dovedena su u vezu s drugim geometrijskim teorijama.

U drugoj polovici 19. stoljeća počelo je življe zanimanje za ova pitanja. Tako je **Rieman**[24] 1851. godine objavio rad *"O osnovnim pretpostavkama geometrije"*. On polazi od elementa luka $ds = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2}}{1+\frac{\alpha}{4}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}$, gdje je α zakrivljenost prostora, i za $\alpha < 0$ imamo hiperboličku geometriju (geometriju Lobačevskog), a za $\alpha > 0$ imamo eliptičku geometriju (Riemenovu geometriju). **Beltrami**[25] objavljuje 1868. godine rad u kojem dokazuje neprotuslovnost hiperboličke geometrije. **Klein**[26] je 1869. godine dao model neeuklidske geometrije, a u radu *"O takozvanoj neeuklidskoj geometriji"* dokazuje neprotuslovnost hiperboličke geometrije. Poznat je i **Poincareov**[27] model hiperboličke geometrije.

Izgradnjom geometrije Lobačevskog i Bolyaija utvrđena je nezavisnost Petog postulata od drugih postulata i aksioma - taj postulat u Euklidovom sistemu je zaista pravi aksiom. Analogno se raspravlja i o ostalim aksiomima euklidske geometrije: treba utvrditi njihovu nezavisnost, koju zadaću imaju u sistemu i prema tomu odrediti im pravo mjesto. Potrebno je postaviti aksiome koji su nužni i dovoljni za izgradnju euklidske geometrije. U tom smislu se poseban su doprinos dali **M. Pasch**[28], **G. Peano**[29], **M. Pieri**[30], **G. Veronese**[31].
Neki su matematičari koristili različite izbore osnovnih pojmova - odabir osnovnih pojmova je proizvoljan. Tako je Pieri rabio samo dva osnovna pojma i dakako da je dobivena veoma komplicirana aksiomatika. Odabir osnovnih poj-

[24] **Georg Friedrich Bernhard Rieman** (1826. - 1866.), njemački matematičar.
[25] **Eugenio Beltrami** (1835. - 1900.), talijanski matematičar.
[26] **Felix Klein** (1849. - 1925.), njemački matematičar.
[27] **Henri Poincaré** (1854. - 1912.), francuski matematičar.
[28] **Moritz Pasch** (1843. - 1930.), njemački matematičar.
[29] **Giusepe Peano** (1858. - 1932.), talijanski matematičar.
[30] **Mario Pieri** (1860. - 1913.), talijanski matematičar.
[31] **Giuseppe Veronese** (1854. - 1917.), talijanski matematičar.

mova koji je načinio **D. Hilbert**[32] je najpopularniji, jer se njime elegantno gradi geometrija na sličan način na koji je to učinio Euklid. Hilbert je taj je posao dovršio kada je 1899. godine objavio čuvenu knjigu *Grundlagen der Geometrie.* Time je problem aksiomatizacije geometrije konačno riješen i možemo reći da od tada započinje pravi aksiomatski pristup matematičkim teorijama.

1.4 NAČELA AKSIOMATIKE

Najteže je bilo riješiti se zornosti u geometriji koja često pomaže, ali je u aksiomatiziranju geometrije bila smetnja. Zor je svoju ulogu odigrao kod izdvajanja osnovnih pojmova, kod uočavanja tvrdnji koje treba dokazati, ali kod samog dokazivanja se mora potpuno eliminirati. Kod Hilbertove aksiomatike zor je potpuno eliminiran, slike nisu potrebne. Hilbert radi potpuno apstraktno.
Aksiomatsko zasnivanje bilo koje matematičke teorije u početku traži da se odrede **osnovni pojmovi** i osnovne tvrdnje - **aksiomi**. Osnovnim pojmovim i aksiomima odredili smo **aksiomatiku** te matematičke teorije. Pomoću osnovnih pojmova definiraju se svi ostali izvedeni pojmovi te teorije, a sve tvrdnje se izvode iz aksioma. Za sistem aksioma, koji se može proizvoljno odabrati, moraju vrijediti sljedeća načela: načelo neprotuslovnosti, načelo potpunosti i načelo nezavisnosti.

1.4.1 Načelo neprotuslovnosti

Načelo neprotuslovnosti treba shvatiti u sljedećem smislu: za sistem aksioma $\{A_1, ..., A_n\}$ teorije $\mathcal{A}$ kažemo da je neprotuslovan ako se iz tih aksioma ne mogu dokazati međusobno suprotne tvrdnje T i $\neg T$, tj. istinita je točno jedna od tvrdnji

$$\{A_1, ..., A_n\} \Rightarrow T, \quad \{A_1, ..., A_n\} \Rightarrow \neg T.$$

30-ih godina 20. st. **K. Gödel** (1906. - 1978., austrijski matematičar) je dokazao da unutar matematičkih teorija postoje tvrdnje koje se ne mogu ni dokazati niti opovrgnuti koristeći se sredstvima koja dopušta ta teorija, pa se neprotuslovnost neke aksiomatike unutar same te teorije ne može dokazati. Dakle, jedna teorija se mora uzeti kao istinita i pomoću nje se dokazuje neprotuslovnost druge teorije. Postupak je sljedeći: želimo li ustanoviti neprotuslovnost teorije $\mathcal{A}$ pomoću teorije $\mathcal{B}$ treba u teoriji $\mathcal{B}$ konstruirati **model teorije** $\mathcal{A}$, tj. osnovne pojmove teorije $\mathcal{A}$ interpretirati pomoću nekih pojmova iz $\mathcal{B}$, a aksiome teorije $\mathcal{A}$ interpretirati kao teoreme u teoriji $\mathcal{B}$. Tim modelom je ostvareno da je teorija

[32] **David Hilbert**, 1862. - 1943., njemački matematičar.

$\mathcal{A}$ barem toliko neprotuslovna koliko je neprotuslovna teorija $\mathcal{B}$.
Najčešće se za istinitu teoriju uzima teorija aritmetike prirodnih brojeva ili teorija skupova.

1.4.2 Načelo potpunosti

Postoje dva shvaćanja **načela potpunosti**.
Po **starijem shvaćanju** se smatra da je aksiomatika potpuna ako se za neki teorem te teorije, koji se da formulirati može pokazati da je istinit ili neistinit. Ovo shvaćanje nije loše, ali je prestrogo. Naime, pitanje je da li se svi teoremi mogu formulirati, a ako se i mogu formulirati ponekad se ne može dokazati jesu li istiniti ili neistiniti.
Po **novom shvaćanju** ovog načela, koji se ponekad zove i **načelo kategoričnosti**, smatra se da je aksiomatika potpuna ako su svaka dva modela te teorije izomorfna. Dakle, problem se svodi na to da se odgovori na pitanje da li postoji jedan jedini model te teorije. Ako postoje dva neizomorfna modela smatra se da sistem aksioma nije potpun (npr. teorija grupa).

1.4.3 Načelo nezavisnosti

Načelo nezavisnosti znači da se svaki aksiom ne da izreći pomoću ostalih, tj. svaki aksiom mora biti neizvediv od ostalih. Dakle, $\{A_1, ..., A_n\}$ je nezavisan ako vrijedi

$$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n \not\Rightarrow A_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Nezavisnost aksioma A_i u sistemu aksioma $\{A_1, ..., A_n\}$ obično se provjerava tako da se nađe neki model takav da u njemu vrijede svi aksiomi osim njega tj. sistem aksioma $\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n\}$.
Primjetimo da ovaj princip nije neophodan jer se zavisnim sistemom aksioma deduktivna snaga teorije ne mijenja obzirom na teoriju zasnovanu samo nezavisnim aksiomima: zavisni aksiom je teorem te teorije.

Poglavlje 2

APSOLUTNA GEOMETRIJA

U Hilbertovoj aksiomatici euklidske geometrije **osnovni objekti** su:

- **točke**,
- **pravci**,
- **ravnine**.

Točke označavamo velikim tiskanim slovima $A, B, C, ...$, a skup svih točaka sa $\mathcal{T}$, pravce označavamo malim tiskanim slovima $a, b, c, ...$, a skup svih pravaca sa $\mathcal{P}$, ravnine označavamo grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, ...$, a skup svih ravnina sa $\mathcal{R}$.

Nadalje, **osnovne relacije** su:

- **relacija incidencije**,
- **relacija poretka**,
- **relacija kongruencije**.

Dakle, možemo reći da u Hilbertovoj aksiomatici Euklidske geometrije koristimo 6 osnovnih pojmova: tri osnovna objekta (točka, pravac, ravnina) i tri osnovne relacije (incidencija, poredak, kongruencija). Ovi osnovni pojmovi se ne definiraju, ali su opisani aksiomima. Kod Hilberta postoji 20 aksioma razvrstanih u 5 grupa:

- (I) prva grupa - aksiomi incidencije I_{1-8};
- (II) - aksiomi poretka II_{1-4};
- (III) - aksiomi kongruencije III_{1-5};
- (IV) - aksiomi neprekidnosti IV_{1-2};
- (V) - aksiom paralelnosti V_E

Naša razmatranja ograničit ćemo na planimetriju i kada govorimo o geometriji uvijek ćemo razmišljati o geometriji ravnine. Tako ćemo i u navođenju aksioma naglasiti koji su to ravninski, a koji prostorni aksiomi.

U prvom odjeljku ovog poglavlja navodimo aksiome incidencije i dokazujemo one tvrdnje koje su nam neophodne u daljnoj izgradnji geometrije. U drugom odjeljku navodimo aksiome poredka i dokazujemo neke tvrdnje koje su nam potrebne. Te tvrdnje posljedica su prvih dviju grupa aksioma. Isto tako, treći odjeljak govori o aksiomima kongruencije i tamo dokazane tvrdnje posljedica su prethodnih grupa aksioma i aksioma kongruencije. Konačno, uzimajući i četvrtu grupu aksioma sagradili smo geometriju koju nazivamo **apsolutna geometrija**. Dakle, to je geometrija kojoj je aksiomatika dana aksiomima (I), (II), (III) i (IV). Pokazat će se da u toj geometriji točkom van danog pravca prolazi bar jedan pravac koji ga ne siječe. To znači da ako želimo izgraditi Euklidsku geometriju moramo dodati aksiom

AKSIOM (V_E) *Točkom van pravca prolazi najviše jedan pravac koji ga ne siječe.*

Time je pokazano da je Peti postulat zaista pravi aksiom.

Dodamo li aksiomima apsolutne geometrije aksiom

AKSIOM (V_H) *Točkom van pravca prolaze bar dva pravca koji ne sijeku taj pravac.*

dobivamo aksiomatiku **hiperboličke geometrije** i o njoj se detaljnije govori u trećem poglavlju.

Napomenimo da su sve tvrdnje apsolutne geometrije istinite i u euklidskoj geometriji i u hiperboličkoj geometriji. Tako je npr. tvrdnja apsolutne geometrije "*zbroj kutova trokuta nije veći od dva prava kuta* ", ili kraće zapisano $\alpha+\beta+\gamma \leq 2R$, jest istinita i u Euklidskoj geomeriji i u hiperboličkoj geometriji. Ta tvrdnja u Euklidskoj geometriji glasi $\alpha+\beta+\gamma = 2R$, a u hiperboličkoj geometriji $\alpha+\beta+\gamma < 2R$.

Krenemo li pak u izgradnji geometrije s pretpostavkom da vrijedi aksiom

AKSIOM (V_R) *Svaka dva pravca se sijeku.*

i potom izgradimo geometriju u kojoj vrijede i prve čitiri grupe aksioma dobivamo geometriju koja se naziva **elipička geometrija.** Model te geometrije je **sferna geometrija**. Eliptičkom geometrijom se nećemo posebno baviti već samo ukazati na neke tvrdnje apsolutne geometrije koje u njoj nisu istinite. Npr., ranije izrečena tvrdnja apsolutne geometrije o zbroju kutova trokuta u eliptičkoj geometriji nije istinita. U eliptičkoj geometriji vrijedi tvrdnja $\alpha+\beta+\gamma > 2R$.

2.1 AKSIOMI INCIDENCIJE

Aksiomi incidencije govore o relaciji incidencije I. **Relacija incidencije** I je binarna relacija $I \subseteq (\mathcal{T} \times \mathcal{P}) \cup (\mathcal{T} \times \mathcal{R})$. Da je $(A, a) \in I$ znači **točka** A **je incidentna pravcu** a (ili **točka** A **leži na pravcu** a, ili **pravac** a **prolazi točkom** A - koristimo i oznaku $A \ni\!\!\in a$), a da je $(A, \alpha) \in I$ znači da je **točka** A **incidentna s ravninom** α (ili **točka** A **leži u ravnini** α, ili **ravnina** α **sadrži točku** A - koristimo i oznaku $A \ni\!\!\in \alpha$).
Napomenimo da kada kažemo "dvije točke", "tri točke" uvijek razumijevamo da se radi o različitim točkama. Nadalje za tri točke koje su incidentne s istim pravcem kažemo da su **kolinearne**, a ako ne da su **nekolinearne**. Isto tako ako četiri točke leže u istoj ravnini tada govorimo da su one **komplanarne**, a ako ne leže u istoj ravnini da su **nekomplanarne.**

AKSIOM (I_1). *Za svake dvije točke postoji pravac koji prolazi njima.*

AKSIOM (I_2). *Za svake dvije točke postoji najviše jedan pravac koji prolazi njima.*

NAPOMENA 2.1.1 Iz aksioma (I_1) i (I_2) slijedi poznata činjenica da je pravac u potpunosti određen svojim dvjema različitim točkama. Jedinstveni pravac koji određuju različite točke A i B označavamo sa $p(A, B)$ ili $\overleftrightarrow{AB}$.

AKSIOM (I_3). *Na svakom pravcu leže bar dvije točke; postoje bar tri nekolinearne točke.*

AKSIOM (I_4). *Za svake tri nekolinearne točke postoji ravnina u kojoj leže te točke. U svakoj ravnini leži bar jedna točka.*

AKSIOM (I_5). *Za svake tri nekolinearne točke postoji najviše jedna ravnina u kojoj leže te točke.*

NAPOMENA 2.1.2 Iz aksioma (I_4) i (I_5) slijedi da je sa tri nekolinerne točke u potpunosti određena ravnina. Ravninu određenu točkama A, B i C označavamo sa $\alpha(A, B, C)$.

AKSIOM (I_6). *Ako dvije točke pravca leže u ravnini onda sve točke tog pravca leže u toj ravnini.*

DEFINICIJA 2.1.3 *Reći ćemo da je* ***pravac*** *a* ***incidentan s ravninom*** *α (kažemo i da* ***pravac*** *a* ***leži u ravnini*** *α), i pisati $a \ni\!\!\in \alpha$, ako je svaka točka tog pravca incidentna s ravninom α.*

AKSIOM (I_7). *Ako dvije ravnine imaju jednu zajedničku točku onda one imaju još bar jednu zajedničku točku različitu od prve.*

AKSIOM (I_8). *Postoje bar četiri nekomplanarne točke.*

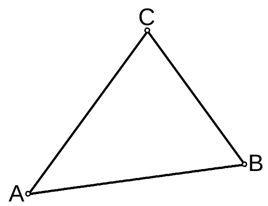
Aksiomi (I_1) - (I_3) nazivaju se **ravninskim aksiomima incidencije**, a aksiomi (I_4) - (I_8) nazivaju se **prostornim aksiomima incidencije**.

Ranije smo spominjali model u kojem zadane aksiome interpretiramo. Geometriju zasnovanu na aksiomima (I_1), (I_2) i (I_3) nazovimo **geometrija incidencije**[1]**.**

Navedimo nekoliko modela te geometrije.

Eliptička geometrija incidencije triju točaka.

Promotrimo skup $\{A, B, C\}$ od tri elementa koje nazovimo "točkama".



Eliptička geometrija incidencije triju točaka.

Sve dvočlane podskupove $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ i $\{A, C\}$ nazovimo "pravcima" a incidenciju interpretirajmo na način: "točka" leži na "pravcu" ako je ona element "pravca". Npr., "točka" A leži na "pravcu" $\{A, B\}$ jer je $A \in \{A, B\}$, a ne leži na "pravcu" $\{B, C\}$ jer $A \notin \{B, C\}$. Očito su ispunjeni aksiomi incidencije. Budući se svaka dva pravca sijeku, tj. vrijedi aksiom (V_R), zaista se radi o eliptičkoj geometriji.

Eliptička geometrija incidencije triju pravaca.

Promotrimo skup $\{a, b, c\}$ i njegove elemente nazovimo "pravcima". "Točke" neka su svi dvočlani poskupovi: $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ i $\{a, c\}$. Neka je incidencija opet interpretirana inkluzijom. Npr., "točka" $\{a, b\}$ je incidentna sa "pravcem" a i "pravcem" b. Ovaj model je izomorfan modelu eliptičke geometrije incidencije triju točaka. Taj izomorfizam je dan sa

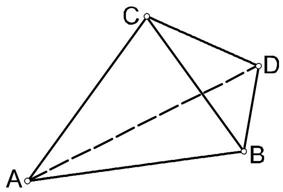
$$\begin{array}{ll} A \longleftrightarrow \{a,b\} & \{A,B\} \longleftrightarrow b \\ B \longleftrightarrow \{b,c\} & \{B,C\} \longleftrightarrow c \\ C \longleftrightarrow \{a,c\} & \{A,C\} \longleftrightarrow a \end{array}$$

Primjetimo da "točka" A leži samo na "pravcima" $\{A, B\}$ i $\{A, C\}$ i da pridružena "točka" $\{a, b\}$ leži na pridruženim "pravcima" a i b. Slično se provjerava da je incidencija sačuvana i za "točke" B i C.

[1] Geometrija incidencije sa konačno mnogo točaka naziva se **konačna geometrija**.

Euklidska geometrija incidencije četriju točaka.

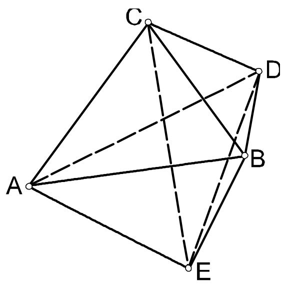
Neka su elementi skupa $\{A, B, C, D\}$ "točke", svi njegovi dvočlani podskupovi "pravci" (dakle, imamo šest "pravaca") neka je incidencija interpretirana inkluzijom.



Euklidska geometrija incidencije četriju točaka.

Opet se lako provjeri da su ravninski aksiomi incidencije ispunjeni. Ovaj model jest euklidska geometrija incidencije jer se lako provjeri da vrijedi aksiom (V_E). Npr., "točka" C je van "pravca" $\{A, B\}$ i njom prolazi najviše jedna paralela, to je "pravac" $\{C, D\}$.

Hiperbolička geometrija incidencije pet točaka.



Hiperbolička geometrija incidencije pet točaka.

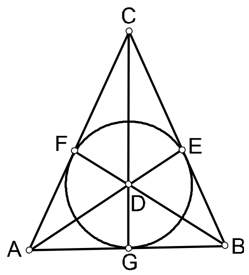
Neka su sada "točke" elementi skupa $\{A, B, C, D, E\}$ i kao i do sada neka su "pravci" svi dvočlani podskupovi (deset "pravaca") i incidencija interpretirana inkluzijom. Lako se provjeri da to jest ravninska geometrija incidencije. Osim toga, ovdje vrijedi aksiom (V_H). Npr., "točkom" C van "pravca" $\{A, B\}$ prolaze dvije paralele $\{C, D\}$ i $\{C, E\}$.

Prethodni primjeri pokazuju da je bilo koji aksiom paralelnosti **nezavisan** o ravninskim aksiomima incidencije. Ovdje je nezavisnost dokazana egzistencijom modela. Npr. za svaki aksiom paralelnosti imamo dva modela, jedan u kojemu on vrijedi i drugi u kojemu on ne vrijedi. Osim toga, incidentna geometrija je **nepotpuna**, jer postoje neizomorfni modeli.

Afina i projektivna ravnina.

Označimo sa $a\,)(\,b$ činjenicu da se pravci a i b ne sijeku. Tada kažemo da su pravci a i b **razilazni** (ili **divergentni**).

Afina ravnina je bilo koji model euklidske geometrije incidencije. Primjer afine ravnine je Euklidska geometrija incidencije četriju točaka**. Projektivna ravnina** je model eliptičke geometrije incidencije u kojemu svaki pravac sadrži najmanje tri različite točke. Najmanja projektivna ravnina (ona sadrži 7 točaka i 7 pravaca koji sadrže točno tri točke), nazivava se **Fanova geometrija**[2] i prikazana je na narednoj slici.



Fanova geometrija.

Označimo sa $\mathcal{A}$ bilo koju afinu ravninu i definirajmo na skupu svih pravaca relaciju $\sim$ na način:

$a \sim b \Leftrightarrow a = b$ ili $a\,)(\,b$

tj. pravci a i b su u relaciji $\sim$ ako su ili jednaki ili se ne sijeku. Nije teško dokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Refleksivnost i simetričnost relacije $\sim$ su očite. Dokažimo tranzitivnost. Neka su $a \sim b$ i $b \sim c$. Ukoliko je $a = b$ ili $b = c$ odmah slijedi $a \sim c$ pa stoga pretpostavimo da su a, b i c različiti pravci. Treba dokazati da se pravci a i c ne sijeku. Pretpostavimo suprotno, da se pravci a i c sijeku u točki P. Točka P ne leži na pravcu b jer je $a\,)(\,b$. To znači da točkom P prolaze dva različita pravca a i c koji ne sijeku pravac b, što je u protuslovlju s Aksiomom (V_E). Kvocijentni skup $\mathcal{A}/\sim$ skupa svih pravaca afine ravnine $\mathcal{A}$ sastoji se od klasa ekvivalencije. Klasa ekvivalencije $[a]$ pravca a je skup koji se sastoji od pravca a i svih pravaca koji ne sijeku pravac a. Model geometrije incidencije $\mathcal{A}^*$ kojemu je skup točaka jednak skupu točaka točaka modela $\mathcal{A}$, a skup pravaca kvocijentni skup $\mathcal{A}/\sim$ postaje eliptički model incidencije. Relacija incidencije "točka P leži na pravcu $[a]$" znači da P leži na nekom pravcu $b \in [a]$.

Ovaj postupak možemo interpretirati i na sljedeći način (koji je lakše vizualizirati). Model $\mathcal{A}^*$ dobivamo iz modela $\mathcal{A}$ tako da svakom pravcu a dodamo novu točku A_∞ (beskonačna točka pravca a), to je pravac $[a]$ iz $\mathcal{A}^*$, i da skupu pravaca dodamo novi pravac l_∞ koji sadrži sve beskonačne točke pravaca iz $\mathcal{A}^*$. Za model $\mathcal{A}^*$ kažemo da je **projektivno upotpunjenje modela $\mathcal{A}$**.

Provjerimo da su u modelu $\mathcal{A}^*$ ispunjeni aksiomi incidencije.

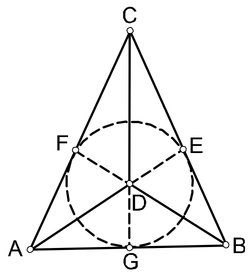
[2]**Gino Fano** (1871.-1952.), talijanski matematičar.

Pokažimo da dvije P i Q točke iz $\mathcal{A}^*$ određuju jedinstveni pravac $\overleftrightarrow{PQ}$. Ako su P i Q dvije različite točke iz $\mathcal{A}$ (Aksiomi (I_1) i (I_2) vrijede), onda postoji pravac koji prolazi njima (i koji je različit od l_∞). Ako je P točka iz $\mathcal{A}$ a Q_∞ beskonačna točka pravca $[q]$ tada ili P leži na q pa je $\overleftrightarrow{PQ} = q$, ili, po Aksiomu (V_E) točka P leži na jedinstvenom pravcu p, $p\,)(\,q$. Kako i Q leži na p (po definiciji incidencije za beskonačne točke) imamo da je $\overleftrightarrow{PQ} = p$. Ukoliko su P i Q beskonačne točke one leže na l_∞.

Osim toga, izgradnja modela $\mathcal{A}^*$ jamči da na svakom pravcu, različitom od l_∞, leže bar tri različite točke. Pokažimo da i na l_∞ leže bar tri različite točke. Budući da $\mathcal{A}$ postoje tri nekolinearne točke A, B i C (po Aksiomu (I_3) za $\mathcal{A}$) njima su jednoznačno određena tri različita pravca $p = \overleftrightarrow{AB}$, $q = \overleftrightarrow{BC}$ i $r = \overleftrightarrow{CA}$. Lako se pokaže da su nihove beskonačne točke P_∞, Q_∞ i R_∞ tri različite točke pravca l_∞.

Konačno, lako se pokazuje da i Aksiom (I_3) u $\mathcal{A}^*$ vrijedi.

Napomenimo da Euklidsku geometriju incidencije četriju točaka, to je i afina ravnina, možemo ilustrirati punim crtama na narednoj slici. Njezino projektivno upotpunjenje (tu su beskonačne točke E, F i G, a pravac l_∞ je crtkana kružnica) je Fanova geometrija.



TEOREM 2.1.4 *Dva različita pravca ili nemaju zajedničkih točaka ili imaju točno jednu zajedničku točku.*

DOKAZ. Neka su a i b dva različita pravca. Treba dokazati da a i b imaju najviše jednu točku zajedničku. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje dvije različite točke zajedničke pravcima a i b. Tada po Aksiomu (I_2) postoji najviše jedan pravac incidentan sa točkama A i B, pa je $a = b$, što je u protuslovlju s našom pretpostavkom $a \neq b$. ∎

Za pravce koji imaju točno jednu zajedničku točku kažemo da se **sijeku**, a tu točku nazivamo **sjecištem** tih pravaca. Činjenicu da je točka T sjecište pravaca a i b zapisujemo sa $T = a \times b$.

TEOREM 2.1.5 *Dvije različite ravnine ili nemaju zajedničkih točaka ili imaju zajednički pravac na kojem leže sve njihove zajedničke točke.*

DOKAZ. Pokažimo da dvije različite ravnine α i β u kojima leži točka C imaju zajednički pravac.
(1) Po Aksiomu (I_7) postoji još jedna točka D različita od C, koja leži u ravninama α i β.
(2) Tada je jednoznačno određen pravac p na kojemu leže točke C i D (Aksiomi (I_1) i (I_2) , Napomena 2.1.1).
(3) Po Aksiomu (I_6) pravac p leži i u α i u β.
(4) Dokažimo da je p i jedini takav pravac, tj. da ravnine α i β nemaju drugih zajedničkih točaka.
Pretpostavimo da postoji točka E van pravca p koja leži u ravninama α i β. Uočimo da su točke C, D, E različite i nisu incidentne istom pravcu, i po Aksiomima (I_4) i (I_5) (Napomena 2.1.2), postoji točno jedna ravnina γ u kojoj leže te točke. No i ravnine α i β sadrže točke C, D, E. To znači da je $\gamma = \alpha = \beta$, što je u protuslovlju s polaznom pretpostavkom $\alpha \neq \beta$. ∎

TEOREM 2.1.6 *Ravnina i pravac koji s njom nije incidentan ne mogu imati više od jedne zajedničke točke.*

DOKAZ. Pretpostavimo da pravac p ne leži u ravnini α i da sa njom ima zajedničku točku A. Pokažimo da osim točke A ne postoji još jedna točka incidentna s ravninom α i pravcem p. U suprotnom, ako osim točke A postoji još jedna točka B (različita od A) koja je incidentna s ravninom α i pravcem p, imamo da je (po Aksiomu (I_6)) pravac p incidentan s ravninom α, a to je u protuslovlju s našom pretpostvkom. ∎

TEOREM 2.1.7 *Kroz pravac i točku koja ne leži na njemu prolazi jedna i samo jedna ravnina.*

DOKAZ. Neka su dani pravac p i točka A koja ne leži na njemu. Treba dokazati da postoji jedna jedina ravnina u kojoj leže dana točka A i dani pravac p.
(1) Po Aksiomu (I_3) postoje dvije različite točke B i C na pravcu p.
(2) Točke A, B, C ne leže na jednom pravcu.
U suprotnom, postojao bi pravac q na kojemu one leže, dakle imali bi da točke B i C leže na q, i po Aksiomu (I_2) bilo bi $p = q$. Slijedi da je i A točka koja leži na pravcu p, a to je u protuslovlju s našom pretpostavkom.
(3) Točkama A, B, C je jednoznačno određena ravnina α koja ih sadrži (Napomena 2.1.2).
(4) Ravnina α sadrži pravac p.
Kako ravnina α sadrži dvije različite točke B i C pravca p, po Aksiomu (I_6), ona sadrži i pravac p.
(5) Ravnina α je jedina takva ravnina.

Zaista, ukoliko bi postojala još jedna ravnina β, različita od ravnine α u kojoj leže A i p, imali bi da i točke B i C leže u ravnini β. Dakle, točke A, B i C leže u ravnini β, a kako je α bila jedina takva ravnina, mora biti $\alpha = \beta$ - protivno našoj pretpostavci da su α i β različite iste ravnine. ∎

Ravninu iz Teorema 2.1.7 označavamo sa $\alpha(A, p)$.

TEOREM 2.1.8 *Kroz dva različita pravca, koji imaju jednu zajedničku točku, prolazi točno jedna ravnina.*

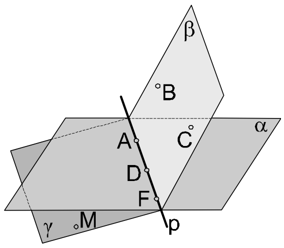
DOKAZ. Neka su a i b različiti pravci i neka je C njihova zajednička točka.
(1) Po Aksiomu (I_3) postoji točka A pravca a različita od C te točka B pravca b različita od C.
(2) Tvrdimo da su A, B i C nekolinearne točke.
Pretpostavimo suprotno, tj. da su A, B i C kolinearne točke. Neka je p pravac koji prolazi njima. Budući da točke A, C leže i na pravcu a i na pravcu p, po Aksiomu (I_2) mora biti $a = p$. Isto tako, jer točke B i C leže na pravcu b i na pravcu p, mora biti $b = p$. Dobili smo $a = p = b$, a to je u protuslovlju s polaznom pretpostavkom da su a i b različiti pravci.
(3) Nekolinearne točke A, B i C jednoznačno određuju ravninu α (Napomena 2.1.2).
(4) Ravnina α sadrži pravce a i b (po Aksiomu (I_6)).
(5) Pokažimo da je α i jedina takva ravnina.
Zaista, ukoliko je i β ravnina koja sadrži pravce a i b, ona bi sadržavala i točke A, B, C. No, α je bila jedina takva ravnina, dakle mora biti $\alpha = \beta$. ∎

Ravninu iz Teorema 2.1.8 označavamo sa $\alpha(a, b)$.

TEOREM 2.1.9 *U svakoj ravnini leže bar tri nekolinearne točke.*

DOKAZ. Neka je dana ravnina α. Po Aksiomu (I_4) u ravnini α postoji bar jedna točka A. Po Aksiomu (I_3) postoje točke B i C takve da A, B i C ne leže na istom pravcu.
Razlikujemo slučajeve:
(a) Točke B i C leže u ravnini α. Dokaz je gotov: pronašli smo tri tražene točke ravnine α.
(b) Bar jedna od točaka B i C leži u ravnini α. Recimo da B leži u ravnini α. Sada imamo dvije točke A i B u ravnini α i treba treba pokazati da postoji treća. Egzistencija te točke slijedi iz dokaza trećeg slučaja.
(c) Točke B i C ne leže u ravnini α.
(c1) Nekolinerne točke A, B i C određuju jedinstvenu ravninu β koja ih sadrži (Napomena 2.1.2).

(c2) Točka A leži i u ravnini α i u ravnini β, pa po Aksiomu (I_7), te ravnine imaju još jednu zajedničku točku D. Time smo pokazali da u ravnini α postoje dvije točke A i D (to je slučaj (b)).



Teorem 2.1.9.

(c3) Po Aksiomu (I_8) postoji točka M koja ne leži u ravnini β.
(c4) Ukoliko je M točka ravnine α dokaz je gotov. Točke A, D i M su tražene točke ravnine α.
(c5) Ukoliko M nije točka ravnine α, tada točke A, C i M ne leže na istom pravcu, pa postoji jedna jednina ravnina γ određena tim točkama (Napomena 2.1.2).
(c6) Budući da ravnine α i γ imaju jednu zajedničku točku A, po Aksiomu (I_7) one imaju još jednu zajedničku točku F.
(c7) Time smo odredili tri točke A, D i F ravnine α.
Ostaje dokazati da su to tražene točke, tj. da ne leže na istom pravcu.
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji pravac p koji prolazi tim točkama. Budući da pravac p prolazi točkama A i D, a te točke leže u ravnini β, po Aksiomu (I_6) i pravac p leži u ravnini β. Isto tako, točke A i F leže na pravcu p, a točke A i F leže u ravnini γ, dakle i pravac p leži u ravnini γ. Dobili smo da pravac p leži i u ravnini β i u ravnini γ. Budući da B ne leži u ravnini α, a pravac p leži, točka B ne leži na pravcu p. Dobili smo da točka B i pravac p leže u ravninama β i γ pa je, po Teoremu 2.1.7, $\beta = \gamma$, a to je protuslovlje jer točka M leži u ravnini γ, ali ne i u ravnini β. ■

2.2 AKSIOMI PORETKA

Ovi aksiomi govore o relaciji "**biti između**". To je ternarna (trosložna) relacija na skupu točaka $\mathcal{T}$ i za "**točka B je između točaka A i C**" koristit ćemo oznaku oznaku (A-B-C).

AKSIOM (II_1) *Ako točka B leži između točaka A i C, tada su A, B i C različite točke jednog pravca i točka B leži između točaka C i A.*

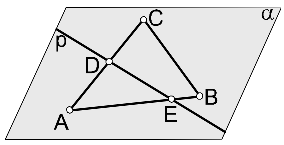
AKSIOM (II_2) *Ako su A i B dvije različite točke, onda postoji točka C takva da je $(A\text{-}B\text{-}C)$.*

AKSIOM (II_3) *Od tri različite točke jednog pravca najviše jedna je između preostalih dviju.*

DEFINICIJA 2.2.1 *Neka su A i B različite točke. Dvočlani skup $\{A, B\}$ nazivamo* ***dužinom*** *i označavamo $\overline{AB}$ (ili $\overline{BA}$). Točke A i B nazivamo* ***krajevima dužine****, točke koje leže između A i B* ***unutarnjim točkama,*** *a sve ostale točke pravca $\overleftrightarrow{AB}$* ***vanjskim točkama*** *dužine $\overline{AB}$. Kažemo da* ***pravac*** *p* ***siječe dužinu*** *$\overline{AB}$, ako postoji točka C pravca p takva da je $(A\text{-}C\text{-}B)$.*

Aksiomi (II_1), (II_2) i (II_3) nazivaju se **linearnim aksiomima poretka.** Primjetimo da aksiomi (II_1), (II_2) i (II_3) ne osiguravaju egzistenciju triju točaka jednog pravca, niti postojanje unutarnje točke dužine $\overline{AB}$. Aksiom (II_2) daje egzistenciju vanjske točke dužine $\overline{AB}$ i jasno je da niti jedna konačna geometrija ne može biti model geometrije u kojoj vrijede i aksiomi poredka.
Neka su A, B i C tri različite nekolinearne točke. Njima je jednoznačno određena ravnina α koja ih sadrži pa je potpuno određen i **trokut** $\triangle ABC$. Točke A, B i C su **vrhovi** tog trokuta, a dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ njegove **stranice**.

AKSIOM (II_4) (Paschov aksiom) *Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i pravac p u istoj ravnini koji ne prolazi niti jednim njegovim vrhom. Ako p siječe stranicu $\overline{AB}$ onda p siječe točno jednu od preostalih dviju stranica trokuta.*



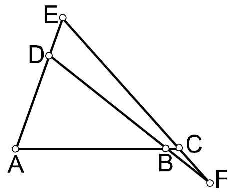
Paschov aksiom.

Aksiom (II_4) se naziva **ravninskim aksiomom poretka.**

TEOREM 2.2.2 *Ako su A i C dvije različite točke, onda postoji točka B takva da vrijedi $(A\text{-}B\text{-}C)$.*

DOKAZ. Neka su A i C dvije različite točke.
(1) Po Aksiomu (I_3) postoji točka D koja ne leži na pravcu $\overleftrightarrow{AC}$.
(2) Po Teoremu 2.1.7 pravac $\overleftrightarrow{AC}$ i točka D jednoznačno određuju ravninu α koja sadrži točke A, C i D.
(3) Na pravcu $\overleftrightarrow{AD}$ postoji točka E takva da vrijedi $(A\text{-}D\text{-}E)$ (po Aksiomu (II_2). Točka E također leži u ravnini α (po Aksiomu (I_6)).
(4) Na pravcu $\overleftrightarrow{EC}$ postoji točka F takva da je $(E\text{-}C\text{-}F)$ (po Aksiomu (II_2)). Točka F također leži u ravnini α (po Aksiomu (I_6)).

(5) Pravac $\overleftrightarrow{DF}$ leži u ravnini α.
Točke D i F leže u ravnini α pa po Aksiomu (I_6) i pravac određen tim točkama leži u toj ravnini.



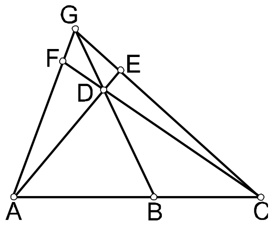
Teorem 2.2.2.

(6) Pravci $\overleftrightarrow{DF}$ i $\overleftrightarrow{ED}$ leže u istoj ravnini i različiti su.
Naime, ukoliko je $\overleftrightarrow{DF} = \overleftrightarrow{ED} = a$ tada točke D, E i F leže na pravcu a. Budući je $(A\text{-}D\text{-}E)$, postoji pravac b koji sadrži točke A, D i E. Dobili smo da različite točke D i E leže na pravcu a i na pravcu b, i po Aksiomu (I_1), imamo $a = b$. Time smo dobili da su D, A i C kolinearne točke, a to je u protuslovlju s pokazanim u (1): točka D ne leži na pravcu $\overleftrightarrow{AC}$.
(7) Pravac $\overleftrightarrow{DF}$ ne siječe dužinu $\overline{EC}$.
Pretpostavimo suprotno, tj. da pravac $\overleftrightarrow{DF}$ siječe dužinu $\overline{EC}$. To znači da postoji točka G pravca $\overleftrightarrow{DF}$ takva da je $(E\text{-}G\text{-}C)$. Vrijedi da točka G pripada pravcu $\overleftrightarrow{EC}$ i $G \neq F$. No sada različite G, F pripadaju različitim pravcima $\overleftrightarrow{DF}$, $\overleftrightarrow{EF} = \overleftrightarrow{EC}$, što je u protuslovlju s Teoremom 2.1.4.
(8) Pravac $\overleftrightarrow{DF}$ siječe dužinu $\overline{AC}$ u nekoj točki unutarnjoj točki B.
Primjenimo Aksiom (II_4) na trokut $\triangle ACE$ i pravac $\overleftrightarrow{DF}$. Pravac $\overleftrightarrow{DF}$ siječe stranicu $\overline{AE}$ (po (3)) i ne siječe stranicu $\overline{EC}$ (po (7)) pa mora sjeći stranicu $\overline{AC}$ u nekoj unutarnjoj točki B.
Dakle, postoji točka B takva da je $(A\text{-}B\text{-}C)$. ■

TEOREM 2.2.3 *Od tri različite točke pravca jedna i samo jedna je između ostalih dviju.*

DOKAZ. Neka su A, B i C tri različite točke jednog pravca. Prema Aksiomu (II_3) najviše je jedna između ostale dvije. Treba dokazati da je bar jedna između ostalih dviju.
Pretpostavimo da vrijedi $\neg(B\text{-}A\text{-}C)$ i $\neg(A\text{-}C\text{-}B)$ i dokažimo da je $(A\text{-}B\text{-}C)$.
(1) Po Aksiomu (I_3) postoji točka D koja ne leži na pravcu $\overleftrightarrow{AC}$.
(2) Po Teoremu 2.1.7 postoji jedinstvena ravnina α u kojoj leže točka D i pravac $\overleftrightarrow{AC}$. U njoj leži i točka B.
(3) Po Aksiomu (II_2) postoji točka G takva da je $(B\text{-}D\text{-}G)$. I točka G leži u ravnini α.
(4) Postoji točka E tako vrijedi $(C\text{-}E\text{-}G)$.

Primjenimo Aksiom (II_4) na trokut $\triangle BCG$ i pravac $\overleftrightarrow{AD}$. Pravac $\overleftrightarrow{AD}$ siječe stranicu $\overline{BG}$ u unutarnoj točki D (po (3)) i ne siječe stranicu $\overline{BC}$ (lako se pokaže!) pa mora sjeći stranicu $\overline{CG}$ u unutarnjoj točki E, tj. (C-E-G).



Teorem 2.2.3.

(5) Postoji točka F tako da vrijedi (A-F-G).
Primjenimo Aksiom (II_4) na trokut $\triangle AGB$ i pravac $\overleftrightarrow{CD}$. Pravac $\overleftrightarrow{CD}$ siječe stranicu $\overline{BG}$ i ne siječe stranicu $\overline{AB}$ (lako se pokaže!), pa mora sjeći stranicu $\overline{AG}$ u unutarnjoj točki F, tj. mora biti (A-F-G).
(6) Vrijedi (A-D-E).
Primjenimo Aksiom (II_4) na trokut $\triangle AGE$ i pravac $\overleftrightarrow{CF}$. Pravac $\overleftrightarrow{CF}$ siječe $\overline{AG}$ u unutarnjoj točki F (po (5)) i ne siječe $\overline{GE}$ (lako se pokaže!), pa mora sjeći $\overline{AE}$ u unutarnjoj točki, dakle mora biti (A-D-E).
(7) Vrijedi (A-B-C).
Primjenimo Aksiom (II_4) na trokut $\triangle ACE$ i pravac $\overleftrightarrow{BG}$. Pravac $\overleftrightarrow{BG}$ siječe $\overline{AE}$ u točki unutarnjoj točki D (po (6)) i ne siječe stranicu $\overline{CE}$ (lako se pokaže!) pa mora sjeći stranicu $\overline{AC}$ u unutarnoj točki, dakle mora biti (A-B-C). ∎

TEOREM 2.2.4 *Ako točka B leži između točaka A i C, a točka C leži između točaka B i D, tada točke B i C leže između točaka A i D.*

DOKAZ. Neka vrijedi (A-B-C) i (B-C-D). Treba dokazati da je (A-C-D) i (A-B-D). Dokažimo tvrdnju[3]

$$\left.\begin{array}{l}(A\text{-}B\text{-}C)\\(B\text{-}C\text{-}D)\end{array}\right\}\Rightarrow (A\text{-}C\text{-}D)$$

(analogno se dokazuje tvrdnja da je (A-B-D)).
(1) Točke A, B, C i D leže na jednom pravcu p.
Po Aksiomu (II_1) točke A, B, C su kolinearne i isto tako su i A, C, D kolinearne točke, a budući su tim pravcima A i C zajedničke točke, sve promatrane točke leže na istom pravcu p.

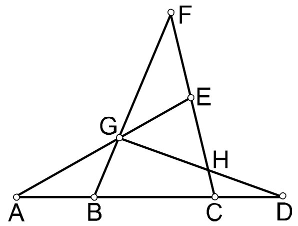
[3] Tvrdnje teorema možemo zapisati i na način

$$\left.\begin{array}{l}(A\text{-}\cancel{B}\text{-}C)\\(\cancel{B}\text{-}C\text{-}D)\end{array}\right\}\Rightarrow (A\text{-}C\text{-}D),\quad \left.\begin{array}{l}(A\text{-}B\text{-}\cancel{C})\\(B\text{-}\cancel{C}\text{-}D)\end{array}\right\}\Rightarrow (A\text{-}B\text{-}D)$$

pa se ovaj teorem katkada naziva **Prvi teorem o kraćenju**.

(2) Postoji točka E van pravca p (po Aksiomu (I_3)).

(3) Postoji vanjska točka dužine $\overline{EC}$, tj. postoji točka F koja leži na pravcu $\overleftrightarrow{EC}$ i vrijedi (C-E-F) (primjena Aksioma (II_2))



Teorem 2.2.4.

(4) Postoji točka G tako da vrijedi (B-G-F).

Primjenimo Aksiom (II_4) na trokut $\triangle BCF$ i pravac $\overleftrightarrow{AE}$. Pravac $\overleftrightarrow{AE}$ siječe stranicu $\overline{CF}$ u unutarnjoj točki E (po (3)) i ne siječe stranicu $\overline{BC}$ (lako se pokaže: ako bi pravac $\overleftrightarrow{AE}$ sijekao stranicu $\overline{BC}$ u unutarnjoj točki I imali bi da su točke A, I, B kolinearne, a budući su i točke A, I, E kolinearne moralo bi biti $E = C$ - a to je protivno s (3)), pa mora sjeći stranicu $\overline{BF}$ u nekoj unutarnjoj točki G, dakle mora biti (B-G-F).

(5) Postoji točka H takva da vrijedi (G-H-D).

Primjenimo Aksiom (II_4) na trokut $\triangle GBD$ i pravac $\overleftrightarrow{FC}$. Pravac $\overleftrightarrow{FC}$ siječe stranicu $\overline{BD}$ u unutarnjoj točki C (po polaznoj pretpostavci (B-C-D)) i ne siječe stranicu $\overline{BG}$ (lako se pokaže!) pa mora sjeći stranicu $\overline{GD}$ u unutarnjoj točki H, dakle vrijedi (G-H-D).

(6) Vrijedi (A-G-E).

Primjenimo Aksiom (II_4) na trokut $\triangle AEC$ i pravac $\overleftrightarrow{BF}$. Pravac $\overleftrightarrow{BF}$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u unutarnjoj točki B (po polaznoj pretpostavci je (A-B-C)) i ne siječe stranicu $\overline{EC}$ (lako se pokaže!), mora sjeći preostalu stranicu $\overline{AE}$, i zaista je (A-G-E).

(7) Konačno, vrijedi (A-C-D).

Primjenimo Aksiom (II_4) na trokut $\triangle AGD$ i pravac $\overleftrightarrow{FC}$. Budući pravac $\overleftrightarrow{FC}$ siječe stranicu $\overline{GD}$ u unutarnjoj točki H (po (5)) i ne siječe stranicu $\overline{AG}$ (lako se pokaže!), zaključujemo da on mora sjeći stranicu $\overline{AD}$ u unutarnjoj točki, dakle vrijedi (A-C-D). ■

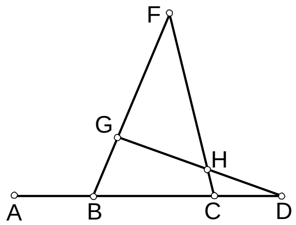
TEOREM 2.2.5 *Ako točka B leži između točaka A i C, a točka C između točaka A i D, tada C leži između B i D, a B između A i D.*

DOKAZ. Neka vrijedi (A-B-C) i (A-C-D). Treba dokazati (B-C-D) i (A-B-D).

Dokažimo tvrdnju[4]

$$\left.\begin{array}{l}(A\text{-}B\text{-}C)\\(A\text{-}C\text{-}D)\end{array}\right\}\Rightarrow (B\text{-}C\text{-}D).$$

(1) Točke A, B, C i D leže na jednom pravcu p.
Po Aksiomu (II_1) iz $(A\text{-}B\text{-}C)$ slijedi da su A, B i C kolinearne točke, a iz $(A\text{-}C\text{-}D)$ da su A, C i D kolinearne točke. Ti pravci imaju dvije zajedničke točke pa sve točke A, B, C i D leže na istom pravcu $\overleftrightarrow{AD}$, označimo ga sa p.



Teorem 2.2.5.

(2) Postoji točka F koja ne leži na pravcu p (po Aksiomu (I_3)).
(3) Postoji unutarnja točka G dužine $\overline{BF}$, tj. vrijedi $(B\text{-}G\text{-}F)$ (po Teoremu 2.2.2).
(4) Dokažimo da je $\overleftrightarrow{CF} \neq \overleftrightarrow{FB}$.
Naime, kad bi bilo $\overleftrightarrow{CF} = \overleftrightarrow{FB}$ onda bi točke B, G, F i C ležale na pravcu $\overleftrightarrow{CF} = \overleftrightarrow{FB}$. No, s druge strane točke B i C leže na pravcu p pa bi zbog Aksioma (I_2) i točka F ležala na pravcu p, što je u protuslovlju s (2).
(5) Po izboru točke F je $\overleftrightarrow{CF} \neq \overleftrightarrow{AD} = p$.
(6) Pravac $\overleftrightarrow{CF}$ ne siječe dužinu $\overline{AB}$.
Naime, u protivnom bi postojala točka K na pravcu $\overleftrightarrow{CF}$ i vrijedilo bi $(A\text{-}K\text{-}B)$. No to bi značilo da se različiti pravci $\overleftrightarrow{CF}$ i $\overleftrightarrow{AD}$ sijeku u dvije različite točke K i C, a to je nemoguće.
(7) Pravac $\overleftrightarrow{CF}$ ne siječe dužinu $\overline{BG}$.
U protivnom se različiti pravci $\overleftrightarrow{CF}$ i $\overleftrightarrow{FB}$ sijeku u dvije različite točke, a to je nemoguće.
(8) Pravac $\overleftrightarrow{CF}$ ne siječe ni dužinu $\overline{AG}$.
U protivnom bi, primjenom Aksioma (II_4) na trokut $\triangle ABG$ i pravac $\overleftrightarrow{CF}$, dobili da pravac $\overleftrightarrow{CF}$ mora sjeći ili $\overline{AB}$ ili $\overline{BG}$, a pokazali smo već u (6) i (7) da to nije istina.
(9) Postoji točka H takva da je $(D\text{-}H\text{-}G)$.
Primjenimo Aksiom (II_4) na trokut $\triangle ADG$ i pravac $\overleftrightarrow{CF}$. Pravac $\overleftrightarrow{CF}$ siječe stranicu $\overline{AD}$ u unutarnjoj točki (po polaznoj pretpostavci je $(A\text{-}C\text{-}D)$) i ne

[4] Zapis tvrdnji $\left.\begin{array}{l}(\cancel{A}\text{-}B\text{-}C)\\(\cancel{A}\text{-}C\text{-}D)\end{array}\right\}\Rightarrow (B\text{-}C\text{-}D)$, $\left.\begin{array}{l}(A\text{-}B\text{-}\cancel{C})\\(A\text{-}\cancel{C}\text{-}D)\end{array}\right\}\Rightarrow (A\text{-}B\text{-}D)$ sugerira naziv **Drugi teorem o kraćenju**.

siječe stranicu $\overline{AG}$ (po (8)) pa zaključujemo da siječe stranicu $\overline{DG}$ u unutarnjoj točki. Dakle, postoji točka H takva da je (D-H-G).

(10) Konačno, vrijedi (B-C-D).

Primjenimo Aksiom(II_4) na trokut $\triangle BDG$ i pravac $\overleftrightarrow{CF}$. Pravac $\overleftrightarrow{CF}$ siječe stranicu $\overline{GD}$ u unutarnjoj točki H (po (9)) i ne siječe stranicu $\overline{BG}$ (po (7)) pa mora sjeći stranicu $\overline{BD}$ unutarnjoj točki, dakle vrijedi (B-C-D).

Time je dokazana prva tvrdnja, tj.da vrijedi (B-C-D).

Iz dokazane tvrdnje (B-C-D) i polazne pretpostavke (A-B-C), po Teoremu 2.2.4, slijedi i druga tvrdnja (A-B-D). ■

KOROLAR 2.2.6 *Između bilo kojih dviju točaka pravca leži prebrojivo mnogo točaka.*

DOKAZ. Prebrojivi niz unutarnjih točaka dužine definira se induktivno primjenom Teorema 2.2.2 i Teorema 2.2.5. ■

Da između točaka A i B, $A \neq B$, postoji neprebrojivo mnogo unutarnjih točaka možemo dokazati tek ako pretpostavimo da vrijede Aksiomi neprekidnosti.

DEFINICIJA 2.2.7 *Neka je p pravac i O točka na pravcu p. Za svake dvije točke A, B pravca p za koje je (A-O-B) kažemo da* ***leže na pravcu** p **s različitih strana od** O. Ako O ne leži između A i B tada kažemo da A i B **leže na pravcu** p **s iste strane od** O.*

TEOREM 2.2.8 *Svaka točka O pravca p dijeli skup svih točaka pravca p različitih od O u dvije klase tako da svake dvije točke iz iste klase leže s iste strane točke O, a svake dvije točke iz različitih klasa leže s različitih strana točke O.*

DOKAZ. Odaberimo točku A pravca p različitu od O (takva postoji po Aksiomu (I_3)) i neka su

$$\mathcal{K}_1^A = \{B : B \text{ i } A \text{ leže s iste strane točke } O\} = \{A\} \cup \{B : \neg(A\text{-}O\text{-}B)\},$$

$$\mathcal{K}_2^A = \{B : A \text{ i } B \text{ leže s različitih strana točke } O\} = \{B : (A\text{-}O\text{-}B)\}.$$

(1) Pokažimo da proizvoljna točka $C \neq O$ pravca p leži u točno jednoj od tih klasa.

Ako je $C = A$, onda je $C \in \mathcal{K}_1^A$.

Ako je $C \neq A$, onda je ili (A-O-C) ili $\neg$(A-O-C) pa je $C \in \mathcal{K}_1^A$ ili $C \in \mathcal{K}_2^A$.

(2) Neka su E i F proizvoljne točke iz $\mathcal{K}_1^A$. Treba dokazati da su E i F s iste strane točke O.

Ako je $E = F$, tvrdnja je očita.

Ako je $E \neq F$ i bar jedna od tih točaka je A, tvrdnja je očita.

Neka je $E \neq F$ i E, $F \neq A$. To znači $\neg(A\text{-}O\text{-}E)$ i $\neg(A\text{-}O\text{-}F)$. Sada

$$\neg(A\text{-}O\text{-}E) \Rightarrow (O\text{-}A\text{-}E) \text{ ili } (A\text{-}E\text{-}O) \text{ i}$$
$$\neg(A\text{-}O\text{-}F) \Rightarrow (O\text{-}A\text{-}F) \text{ ili } (A\text{-}F\text{-}O).$$

Može se dogoditi: ili $(O\text{-}A\text{-}E), (O\text{-}A\text{-}F)$ ili $(O\text{-}A\text{-}E), (A\text{-}F\text{-}O)$ ili $(A\text{-}E\text{-}O)$, $(O\text{-}A\text{-}F)$ ili $(A\text{-}E\text{-}O), (A\text{-}F\text{-}O)$. U svim slučajevima dobivamo da su točke E i F s iste strane točke O.

(3) Neka su E i F proizvoljne točke iz $\mathcal{K}_2^A$. Treba dokazati da su E i F s iste strane točke O.

Po definiciji klase $\mathcal{K}_2^A$ za točke E i F vrijedi $(A\text{-}O\text{-}E)$ i $(A\text{-}O\text{-}F)$. Ako je $E = F$, onda su po definiciji E i F s iste strane. Ako su E i F različite točke iz klase $\mathcal{K}_2^A$ onda iz $(A\text{-}O\text{-}E)$ i $(A\text{-}O\text{-}F)$ (po T. 2.2.5) slijedi $(O\text{-}E\text{-}F)$ odnosno $\neg(E\text{-}O\text{-}F)$, i zaista su točke E i F s iste strane točke O.

(4) Neka su $E \in \mathcal{K}_1^A$ i $F \in \mathcal{K}_2^A$ proizvoljne točke. Treba dokazati da su točke E i F s različitih strana točke O.

Tvrdnja je očita u slučaju $E = A$. Pretpostavimo da vrijedi $E \neq A$. Kako je $E \in \mathcal{K}_1^A$ vrijedi $\neg(A\text{-}O\text{-}E)$ pa je ili $(O\text{-}A\text{-}E)$ ili $(O\text{-}E\text{-}A)$. Jer je $F \in \mathcal{K}_2^A$ imamo $(A\text{-}O\text{-}F)$. Sada je

$$\left.\begin{array}{l}(O\text{-}A\text{-}E)\\(A\text{-}O\text{-}F)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(E\text{-}\cancel{A}\text{-}O)\\(\cancel{A}\text{-}O\text{-}F)\end{array}\right\} \overset{\text{T.2.2.4}}{\Rightarrow} (E\text{-}O\text{-}F) \text{ te}$$
$$\left.\begin{array}{l}(O\text{-}E\text{-}A)\\(A\text{-}O\text{-}F)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(\cancel{A}\text{-}E\text{-}O)\\(\cancel{A}\text{-}O\text{-}F)\end{array}\right\} \overset{\text{T.2.2.5}}{\Rightarrow} (E\text{-}O\text{-}F),$$

pa su u oba slučaja točke E i F s različitih strana točke O. ■

DEFINICIJA 2.2.9 *Dvije klase iz Teorema 2.2.8 nazivaju se* ***polupravci*** *pravca p* ***s početkom u točki*** *O.*

Primjetimo da točka O ne pripada polupravcima. Iz Teorema 2.2.8 slijedi da svaka točka pravca dijeli taj pravac na dva polupravca. No trebali bi još pokazati sljedeće:

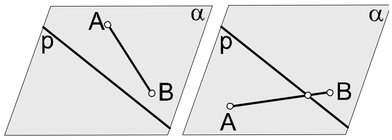
(a) Ako su A i B različite točke s iste strane točke O, onda su klase dobivene podjelom pravca jednom koristeći točku A, a drugi put točku B, jednake, tj. $\mathcal{K}_1^A = \mathcal{K}_1^B$, $\mathcal{K}_2^A = \mathcal{K}_2^B$;

(b) Ako su A i B dvije točke s različitih strana točke O onda vrijedi $\mathcal{K}_1^A = \mathcal{K}_2^B$ te $\mathcal{K}_2^A = \mathcal{K}_1^B$.

Tvrdnje (a) i (b) pokazuju da rastav na klase ovisi samo o točki O, a ne i o točki A, tj. definicija klasa (polupravaca) je korektna.

DEFINICIJA 2.2.10 *Neka točke A, B i pravac p leže u ravnini α te neka A i B ne leže na p. Kažemo da su A i B* ***s iste strane pravca*** *p ako je ili $A = B$*

ili p ne siječe $\overline{AB}$. Kažemo da su A i B ***s različitih strana pravca*** *p ako p siječe $\overline{AB}$.*



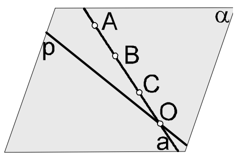
Definicija 2.2.10.

TEOREM 2.2.11 *Svaki pravac p ravnine α dijeli sve točke te ravnine koje ne leže na pravcu p na dvije klase tako da su svake dvije točke iz iste klase s iste strane pravca p, a svake dvije točke iz različitih klasa su s različitih strana pravca p.*

DOKAZ. Odaberimo točku A ravnine α koja ne leži na pravcu p. Definirajmo klase

$$\mathcal{K}_1^A = \{T : A \text{ i } T \text{ su s iste strane pravca } p\} = \{A\} \cup \left\{T : p \text{ ne siječe } \overline{AT}\right\}$$
$$\mathcal{K}_2^A = \{T : A \text{ i } T \text{ su s različitih strana pravca } p\} = \left\{T : p \text{ siječe } \overline{AT}\right\}.$$

$\mathcal{K}_1^A$ i $\mathcal{K}_2^A$ su dobro definirane i neprazne klase. Pokažimo da su to tražene klase.
(A) Dokažimo: ako su $B, C \in \mathcal{K}_1^A$ tada B i C leže s iste strane pravca p.
U slučajevima da su $A = B = C$ ili $A = B$ ili $A = C$ tvrdnja je očita.
Pretpostavimo $B \neq C$ i $B \neq A \neq C$. To znači da pravac p ne siječe dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.
Treba dokazati da pravac p ne siječe $\overline{BC}$.
Razlikujemo sljedeće slučajeve:
(A1) Točke A, B i C su kolinearne, tj. leže na nekom pravcu a u ravnini α.



Teorem 2.2.11 - (A1).

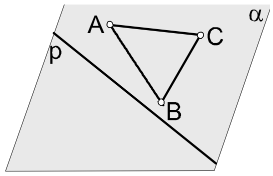
Tvrdimo da p ne siječe $\overline{BC}$.
U slučaju da pravac a ne siječe pravac p, tvrdnja je očito ispunjena. Ako pravac a siječe pravac p, neka je O njihova presječna točka.
Vrijedi:

A i B su s iste strane pravca $p \Rightarrow A$ i B su s iste strane od O te

A i C su s iste strane pravca $p \Rightarrow A$ i C su s iste strane od O.

Po Teoremu 2.2.8 točke B i C su s iste strane od O pa pravac p ne siječe $\overline{BC}$.
Dakle, B i C su s iste strane pravca p.

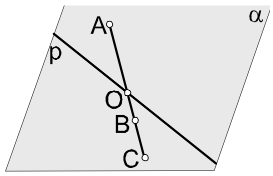
(A2) Točke A, B i C su nekolinearne.



Teorem 2.2.11 - (A2).

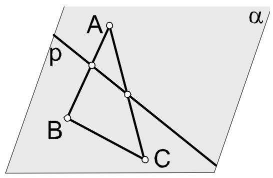
Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. neka p siječe $\overline{BC}$. Tada primjenom Aksioma (II_4) na trokut $\triangle ABC$ i pravac p zaključujemo da p siječe ili $\overline{AC}$ ili siječe $\overline{AB}$, što je nemoguće jer smo pošli od pretpostavke da pravac p ne siječe niti $\overline{AB}$ ni $\overline{AC}$.

(B) Dokažimo: ako su $B, C \in \mathcal{K}_2^A$ tada B i C leže s iste strane pravca p.
Iz $B, C \in \mathcal{K}_2^A$ slijedi da pravac p siječe i dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.
Slučaj $B = C$ je očit pa pretpostavimo da je $B \neq C$ i promotrimo sljedeće slučajeve:
(B1) A, B i C su kolinearne točke.



Teorem 2.2.11 - (B1).

Neka pravac p siječe $\overline{AB}$ u točki O. Tada vrijedi $(A\text{-}O\text{-}B)$ i $(A\text{-}O\text{-}C)$. No onda po Teoremu 2.2.8 točke B i C leže s iste strane od O, vrijedi $\neg(B\text{-}O\text{-}C)$, i pravac p ne siječe $\overline{BC}$. Dakle, točke B i C su s iste strane pravca p.
(B2) A, B i C su nekolinearne točke.



Teorem 2.2.11 - (B2).

Primjenom Aksioma (II_4) na trokut $\triangle ABC$ i pravac p dobivamo da p ne siječe $\overline{BC}$. Dakle, B i C su s iste strane pravca p.
(C) Neka su $B \in \mathcal{K}_1^A$ i $C \in \mathcal{K}_2^A$ proizvoljno odabrane točke. Treba dokazati da su točke B i C s različitih strana pravca p.
Ako je $B \in \mathcal{K}_1^A$ i $C \in \mathcal{K}_2^A$ tada pravac p ne siječe dužinu $\overline{AB}$, ali siječe dužinu $\overline{AC}$. Razlikujemo dva slučaja:

(C1) Točke A, B i C su kolinearne.
Neka je O točka u kojoj pravac p siječe $\overline{AC}$. Tada vrijedi (A-O-C) te $\neg$(A-O-B). Po Teoremu 2.2.8 slijedi (B-O-C), tj. p siječe $\overline{BC}$, pa su B i C s različitih strana pravca p.
(C2) Točke A, B i C nisu kolinearne.
Neka p ne siječe $\overline{AB}$ i neka p siječe $\overline{AC}$. Po Aksiomu (II_4) primjenjenom na prokut $\triangle ABC$ i pravac p slijedi da pravac p siječe $\overline{BC}$. Dakle, B i C su s različitih strana pravca p.
Time smo pokazali da svaki pravac dijeli sve točke ravnine koje ne leže na tom pravcu na dvije klase s traženim svojstvima. ■

DEFINICIJA 2.2.12 *Dvije klase iz* Teorema 2.2.11 *nazivaju se* ***poluravninama ravnine*** α ***s rubom*** p.

Nije teško pokazati da su klase iz Teorema 2.2.11 neovisne o izboru točke A pa je definicija poluravnine korektna. Time smo pokazali, nama poznatu činjenicu da svaki pravac p ravnine α dijeli tu ravninu na dvije poluravnine.

Slično se uvodi pojam polupostora:

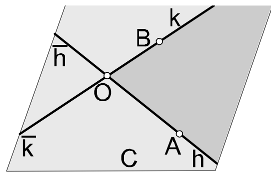
1. Definiramo pojam biti s iste strane (s različitih strana) ravnine:
   Neka je α ravnina, te A i B točke koje ne leže u toj ravnini. Kažemo da su točke A i B **s iste strane ravnine** α ako je $A = B$ ili $\overline{AB}$ ne siječe ravninu α. Kažemo da su točke A i B **s različitih strana ravnine** α ako dužina $\overline{AB}$ siječe ravninu α.
2. Potom se dokaže tvrdnja:
   Svaka ravnina α dijeli sve točke prostora, koje ne leže u ravnini α, na dvije klase tako da proizvoljne dvije točke iz iste klase leže s iste strane ravnine α, a svake dvije točke iz različitih klasa leže s različitih strana ravnine α.
3. Svaka od tih klasa naziva se **poluprostorom s rubom** α (tj. svaka ravnina α dijeli prostor na dva poluprostora).

DEFINICIJA 2.2.13 ***Kut*** *je par polupravaca* $\{h, k\}$ *s istim početkom* O *i koji ne leže na istom pravcu. Taj kut označavamo* $\angle hOk$ *ili* $\angle kOh$. *Polupravci* h, k *nazivaju se* ***krakovima kuta****, a točka* O ***vrhom kuta****.*

Ako je A točka na kraku h, a B točka na kraku k tada kut označavamo sa $\angle AOB$ ili sa $\angle BOA$.

DEFINICIJA 2.2.14 *Neka je dan* $\angle hOk$. *Dopunimo polupravce* h *i* k *do pravaca polupravcima* $\overline{h}$ *i* $\overline{k}$. *Te pravce označavamo sa* $hO\overline{h}$ *i* $kO\overline{k}$. *Sve točke*

ravnine koja prolazi tim pravcima, različite od vrha kuta O i koje ne leže na polupravcima h i k podijeljene su kutom $\angle hOk$ na dva područja:
(1) *sve točke koje leže s iste strane pravca $hO\overline{h}$ kao i k, a ujedno leže s iste strane pravca $kO\overline{k}$ kao i h nazivaju se **unutarnjim područjem** kuta $\angle hOk$;*
(2) *sve ostale točke ravnine nazivamo **vanjskim područjem** kuta $\angle hOk$.*



Definicija 2.2.14.

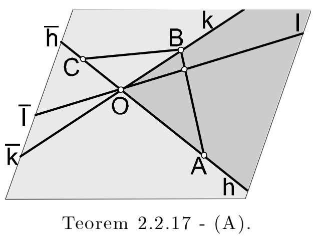
Lako se pokazuje da pravci $hO\overline{h}$ i $kO\overline{k}$ dijele ravninu na četiri međusobno disjunktna područja. Ta područja su unutarnja područja kutova $\angle hOk$, $\angle hOk$, $\angle hOk$ i $\angle hOk$. Nadalje, lako se pokazuje da vrijedi sljedeći teorem.

TEOREM 2.2.15 *Ako su A i B unutarnje točke kuta $\angle hOk$ onda je i svaka točka dužine $\overline{AB}$ unutarnja točka kuta $\angle hOk$. Ako je točka A na polupravcu h, a B na polupravcu k, onda je svaka unutarnja točka od $\overline{AB}$ unutarnja točka kuta $\angle hOk$. Ako je A unutarnja točka, a B vanjska točka kuta $\angle hOk$, onda $\overline{AB}$ siječe ili h ili k ili sadrži točku O.*

DEFINICIJA 2.2.16 *Neka su h, k, l tri polupravca s istim početkom O. Ako l leži u unutarnjem području kuta $\angle hOk$, onda kažemo da **polupravac** l **leži između polupravaca** h **i** k i pišemo $(h\text{-}l\text{-}k)$ ili $(k\text{-}l\text{-}h)$.*

TEOREM 2.2.17 *Neka je dan kut $\angle hOk$. Svaki polupravac l koji je između h i k siječe svaku dužinu $\overline{AB}$ za koju je $A \ni\!\!\in h$ i $B \ni\!\!\in k$. Vrijedi i obrat: svaki polupravac l s početnom točkom u vrhu kuta $\angle hOk$ koji siječe svaku dužinu $\overline{AB}$, za koju je $A \ni\!\!\in h$, $B \ni\!\!\in k$, je između h i k.*

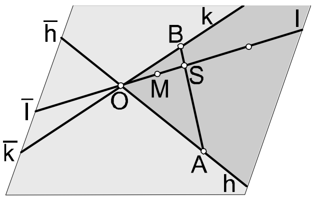
DOKAZ. Neka je $(h\text{-}l\text{-}k)$ i $\overline{AB}$ proizvoljna dužina za koju je $A \ni\!\!\in h$, $B \ni\!\!\in k$.
(**A**) Treba dokazati da polupravac l siječe dužinu $\overline{AB}$.



Teorem 2.2.17 - (A).

Odaberimo točku $C \ni\!\!\in \overline{h}$.

Promotrimo trokut ΔABC i pravac $lO\bar{l}$. Po Aksiomu (II_4) pravac $lO\bar{l}$ siječe ili $\overline{BC}$ ili $\overline{AB}$. Prema Teoremu 2.2.15 svaka unutarnja točka dužine $\overline{BC}$ je unutarnja točka kuta $\angle kO\bar{h}$. Kako $lO\bar{l}$ leži u unutarnjem području kutova $\angle hOk$ i $\angle\bar{h}O\bar{k}$ mora pravac $lO\bar{l}$ sječi dužinu $\overline{AB}$.
(**B**) Dokažimo obrat.

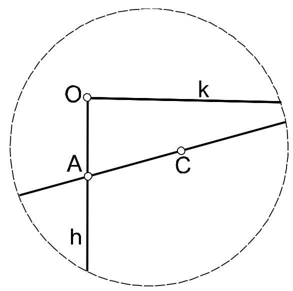


Teorem 2.2.17 - (B).

Neka je l polupravac s početkom u vrhu kuta $\angle hOk$ sa svojstvom da siječe svaku dužinu $\overline{AB}$, $A \ni\in h$, $B \ni\in k$ i neka je S točka presjeka polupravca l i dužine $\overline{AB}$. Treba dokazati da vrijedi (h-l-k).
Očito je S unutarnja točka kuta $\angle hOk$ (po Teoremu 2.2.15). Odaberimo proizvoljnu točku $M \ni\in l$, $M \neq O, S$.
Moguća su dva slučaja: (O-M-S) i (O-S-M).
(1) U prvom slučaju (O-M-S) točke B i S leže s iste strane pravca $hO\bar{h}$ (u protivnom bi pravci $\overleftrightarrow{BS}$ i $hO\bar{h}$ imali osim točke A još jednu zajedničku točku - nemoguće). Nadalje, točke M i S su s iste strane pravca $hO\bar{h}$ (u protivnom bi se pravci $\overleftrightarrow{MS}$ i $hO\bar{h}$ sijekli u točki koja je različita od zajedničke točke O - nemoguće). Kako su B i S s iste strane pravca $hO\bar{h}$ te M i S s iste strane pravca $hO\bar{h}$, onda su po Teoremu 2.2.11 i točke M i B s iste strane pravca $hO\bar{h}$. Analogno se pokaže da točke A i S te točke M i S leže s iste strane pravca $kO\bar{k}$, a onda po Teoremu 2.2.11 slijedi da su i točke A i M s iste strane pravca $kO\bar{k}$. Ova razmatranja pokazuju da je M unutarnja točka kuta $\angle hOk$.
(2) Slučaj (O-S-M) - na potpuno isti način se pokazuje da je M unutarnja točka kuta $\angle hOk$.
Konačno, iz (1) i (2) slijedi da je (h-l-k), a to je i trebalo dokazati. ∎

NAPOMENA 2.2.18 Nije teško dokazati sljedeću tvrdnju (dokažite, korisna vježba): *Neka je dan kut $\angle AOB$ i neka točka C leži na pravcu $\overleftrightarrow{AB}$. Točka C leži u nutrini kuta $\angle AOB$ onda i samo onda ako je (A-C-B).*

Neka je sada dan kut $\angle hOk$, unutarnja točka C tog kuta te točka A na kraku h. Ne možemo sada zaključiti da postoji točka B na kraku k takva da je (A-C-B). Ilustrirajmo to (ravninskim) modelom koji se naziva **Kleinov disk**. To je hiperbolički model (vrijede aksiomi incidencije poretka i svakom točkom van danog pravca prolaze bar dva pravca koji ne sijeku dani pravac). Točke u tom modelu su sve unutarnje točke kružnice, a pravci sve tetive te kružnice (dakako, bez rubnih točaka). Incidenciju i poredak interpretiramo na standardni (euklidski) način.



Kleinov disk.

Na prethodnoj slici je dan kut $\angle hk$, unutarnja točka C, točka A na kraku h i ne postoji točka B na kraku k tako da je $(A\text{-}C\text{-}B)$.

Za vježbu pokažite da vrijedi i ovaj teorem.

TEOREM 2.2.19 *Od tri polupravca h, k i l sa zajedničkim vrhom O koji koje leže u jednoj poluravnini određenoj pravcem kroz točku O, samo jedan leži između preostala dva.*

Na koncu ovog odjeljka navedimo geometriju u kojoj su ispunjeni (ravninski) aksiomi incidencije i aksiomi poretka. Točke neka su svi uređeni parovi racionalnih brojeva, tj. $\mathcal{T} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, a skup svih pravaca $\mathcal{P}$ neka su tvore skupovi oblika

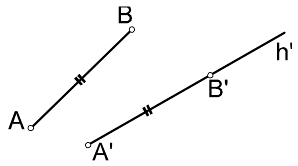
$$p = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid Ax + By + C = 0,\ A, B, C \in \mathbb{Q},\ A^2 + B^2 \neq 0\}$$

Ova se geometrija naziva **Euklidskom racionalnom planimetrijom.** Incidencija je definirana na način: točka $T = (x_0, y_0)$ leži na pravcu p ako vrijedi $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Nadalje, kažemo da je točka $T = (x, y)$ između točka $T_1 = (x_1, y_1)$ i $T_2 = (x_2, y_2)$ ako postoji racionalan broj ϑ, $0 < \vartheta < 1$, takav da je $(x, y) = (x_1 + \vartheta(x_2 - x_1), y_1 + \vartheta(y_2 - y_1))$. Lako se provjeri (korisna vježba!) da su aksiomi incidencije i poretka ispunjeni. Napomenimo da su u ovom modelu ispunjeni svi Euklidovi postulati, no u njemu nije istinita Propozicija 1, što potvrđuje da je njegova aksiomatika geometrije nepotpuna.

2.3 AKSIOMI KONGRUENCIJE

Aksiomi kongruencije govore o binarnoj relaciji " $\equiv$ " na skupu svih dužina $\mathcal{D}$ i na skupu svih kutova $\mathcal{K}$.

AKSIOM (III_1) (Aksiom o prenošenju dužina) *Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i neka je A' početak polupravca h'. Tada postoji točka $B' \ni\!\!\in h'$ tako da je $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. Uvijek je $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$.*

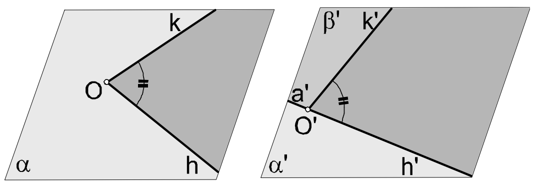


(III_1) - aksiom o prenošenju dužina.

AKSIOM (III_2). *Iz* $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ *i* $\overline{AB} \equiv \overline{A''B''}$ *slijedi* $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$.

AKSIOM (III_3). *Ako je* $(A\text{-}B\text{-}C)$ *i* $(A'\text{-}B'\text{-}C')$ *te* $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ *i* $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, *onda je* $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

AKSIOM (III_4). (Aksiom o prenošenju kutova) *Neka je dan kut* $\angle hOk$ *u ravnini* α *te neka je dana ravnina* α', *pravac* a' *u ravnini* α' *i točka* O' pravcu a', *jedan od polupravaca* h' *pravca* a' *s početkom u* O' *te jedna od poluravnina* β' *ravnine* α' *s rubom* a'. *Tada postoji jedinstveni polupravac* h' *s početkom u* O' *u poluravnini* β' *takav da je* $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$. *Uvijek je* $\angle hOk \equiv \angle hOk$ i $\angle hOk \equiv \angle kOh$.



(III_4) - aksiom o prenošenju kutova.

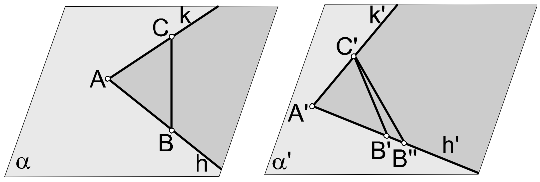
AKSIOM (III_5). *Ako je* $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ i $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, *onda je* $\angle CBA \equiv \angle C'B'A'$.

Aksiome $(III_1), (III_2)$ i (III_3) nazivamo **linearnim aksiomima kongruencije**. Aksiome (III_4) i (III_5) nazivamo **ravninskim aksiomima kongruencije**.

TEOREM 2.3.1 *Točka* B' *iz Aksioma* (III_1) *je jedinstveno određena.*

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno, tj. neka su B' i B'' različite točke na polupravcu h' takve da vrijedi $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{AB} \equiv \overline{A'B''}$.
(1) Po Aksiomu (I_3) postoji točka C koja ne leži na pravcu $\overleftrightarrow{AB}$.
(2) Postoji ravnina α koja sadrži točke A, B i C i postoji ravnina α' koja sadrži polupravac h'.
(3) Primijenimo sada Aksiom (III_4): postoji polupravac k' u ravnini α' tako da vrijedi $\angle h'A'k' \equiv \angle BAC$. Posebno je $\angle C'A'B' \equiv \angle CAB \equiv \angle C'A'B''$.
(4) Po Aksiomu (III_1) na polupravcu k' postoji točka C' tako da vrijedi $\overline{A'C'} \equiv \overline{AC}$.

(5) Točke C', B' i B'' leže u ravnini α' (Aksiom (I_6)) pa stoga i dužine $\overline{C'B'}$ i $\overline{C'B''}$ leže u ravnini α'.



Teorem 2.3.1.

(6) Primijenimo dva puta za redom Aksiom (III_5). Vrijedi :

$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}\\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}\\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ACB \equiv \angle A'C'B' \text{ te} \qquad \text{(a)}$$

$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB} \equiv \overline{A'B''}\\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}\\ \angle BAC \equiv \angle B''A'C'\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ACB \equiv \angle A'C'B''. \qquad \text{(b)}$$

(**7**) Iz (a) i (b), po Aksiomu (III_4), slijedi da $\overleftrightarrow{C'B'} = \overleftrightarrow{C'B''}$, što je u protuslovlju s polaznom pretpostavkom. ■

TEOREM 2.3.2 *Relacija* " $\equiv$ " *je relacija ekvivalencije na* $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

DOKAZ. Treba dokazati (a) refleksivnost, (b) simetričnost i (c) tranzitivnost relacije " $\equiv$ ".

(a) Neka je $\overline{AB}$ bilo koja dužina. Po Aksiomu (III_1) je $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$. Dokažimo da vrijedi $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$

Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $\overline{AB} \not\equiv \overline{AB}$. Po Aksiomu (III_1) postoji točka B' na pravcu $\overleftrightarrow{AB}$ s iste strane točke A kao i B i vrijedi $\overline{AB} \equiv \overline{AB'}$. Po Aksiomu (III_2) vrijedi $\overline{BA} \equiv \overline{AB'}$. Sada je $\overline{BA} \equiv \overline{AB'}$ i $\overline{BA} \equiv \overline{AB}$, što je u protuslovlju s prethodnim teoremom.

(b) Treba dokazati: ako je $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, onda je $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$.

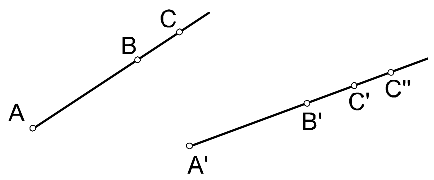
Po (a) je $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$. Sada iz $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ i $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ po Aksiomu (III_2) slijedi $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$.

(c) Treba dokazati: ako je $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$, onda je $\overline{AB} \equiv \overline{A''B''}$.

Iz $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, po (b), slijedi $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$ i jer je po pretpostavci i $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$ imamo, po Aksiomu (III_2), da vrijedi $\overline{AB} \equiv \overline{A''B''}$. ■

TEOREM 2.3.3 *Ako su* B *i* C *točke na istom polupravcu s početkom u točki* A, *a* B' *i* C' *točke na istom polupravcu s početkom u* A' *tada iz* $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ *i* $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ *slijedi* $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$. *Ako je pri tome* $(A\text{-}B\text{-}C)$ *onda je i* $(A'\text{-}B\text{-}'C')$.

DOKAZ. Neka su ispunjene pretpostavke teorema, tj. neka je $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ i neka vrijedi (A-B-C).



Teorem 2.3.3.

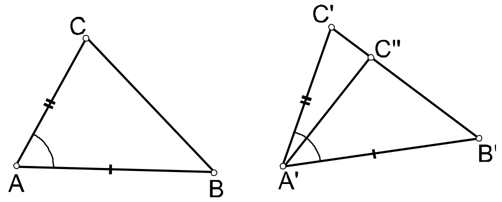
(1) Na polupravcu $h' = \overrightarrow{A'B'}$ odaberimo točku C'' tako da je $\overline{BC} \equiv \overline{B'C''}$ i (A'-B'-C''). Točke B' i C'' su s iste strane točke A'.
(2) Imamo (A-B-C) i (A'-B'-C'') te $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{BC} \equiv \overline{B'C''}$ pa po Aksiomu (III_3) slijedi $\overline{AC} \equiv \overline{A'C''}$.
(3) Kako je po pretpostavci $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ i jer je $\overline{AC} \equiv \overline{A'C''}$ (po (2)), to po Teoremu 2.3.1 slijedi $C' = C''$, tj. $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ i (A'-B'-C'). ■

Trokut $\triangle ABC$ ima šest odredbenih elemenata: tri stranice $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ i tri kuta $\angle CAB$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ koja ćemo označavati redom sa $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

DEFINICIJA 2.3.4 *Za dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ kažemo da su **kongruentni** i pišemo $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, ako vrijedi $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, $\angle A \equiv \angle A'$, $\angle B \equiv \angle B'$ i $\angle C \equiv \angle C'$.*

TEOREM 2.3.5 (S-K-S poučak) *Ako je $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ i $\angle A \equiv \angle A'$ onda je $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

DOKAZ. Po Aksiomu (III_5) odmah slijedi $\angle B \equiv \angle B'$ i $\angle C \equiv \angle C'$.
Preostaje još dokazati $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$.



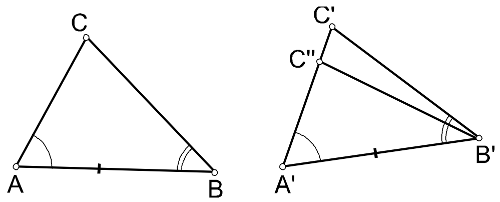
Teorem 2.3.5.

Pretpostavimo suprotno, tj. $\overline{BC} \not\equiv \overline{B'C'}$.
(1) Po Aksiomu (III_1) na polupravcu s početkom u B' postoji točka C'' tako da C'' i C' budu s iste strane točke B' i da vrijedi $\overline{BC} \equiv \overline{B'C''}$.
(2) Vrijedi $C' \neq C''$ pa su i pravci $\overleftrightarrow{A'C'}$ i $\overleftrightarrow{A'C''}$ različiti.
Zaista, kada bi bilo $\overleftrightarrow{A'C'} = \overleftrightarrow{A'C''}$, točke A', C' i C'' ležale bi na nekom pravcu p, a budući i točke B', C' i C'' leže na nekom pravcu q, ta bi dva pravca bila

jednaka (imaju dvije zajedničke točke, Aksiom (II_2)). To znači da bi točke A', B' i C' ležale na nekom pravcu, a to je nemoguće.
(3) Za trokute $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C''$ vrijedi $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C''}$, $\angle B \equiv \angle B'$ i po Aksiomu (III_5) slijedi $\angle A \equiv \angle C''A'B'$.
(4) Konačno, imamo da je $\angle A \equiv \angle C''A'B'$ i $\angle A \equiv \angle C'A'B'$ pa polupravci s istim početkom u A' koji prolaze različitim točkama C' i C'' s iste strane polupravca $\overrightarrow{A'B'}$ određuju isti kut, što je u protuslovlju s Aksiomom (III_4).
Dakle, mora biti $C' = C''$, tj. $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$. ∎

TEOREM 2.3.6 (K-S-K poučak) *Ako za dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ vrijedi $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\angle A \equiv \angle A'$ i $\angle B \equiv \angle B'$, onda je $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

DOKAZ. Dokažimo da je $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.
Pretpostavimo suprotno, tj. $\overline{AC} \not\equiv \overline{A'C'}$.

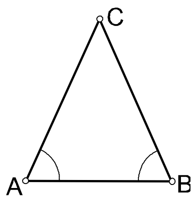


Teorem 2.3.6.

(1) Po Aksiomu (III_1) postoji točka C'' s iste strane točke A' kao i C' takva da vrijedi $\overline{AC} \equiv \overline{A'C''}$.
(2) Tada je očito $C' \neq C''$, a onda je i $\overleftrightarrow{B'C''} \neq \overleftrightarrow{B'C'}$.
(3) Za trokute $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C''$ vrijedi $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C''}$ i $\angle A \equiv \angle A'$ i po Aksiomu (III_5) slijedi $\angle B \equiv \angle A'B'C''$.
(4) Kako je i $\angle B \equiv \angle A'B'C'$ došli smo u protuslovlje s Aksiomom (III_4).
Dakle, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ pa primjenom prethodnog teorema zaključujemo $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. ∎

TEOREM 2.3.7 *U jednakokračnom trokutu su kutovi uz osnovicu kongruentni.*

DOKAZ. Neka je $\triangle ABC$ jednakokračan trokut $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$.
Dokažimo da vrijedi $\angle A \equiv \angle B$.

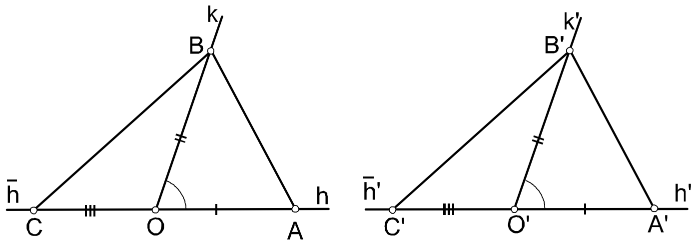


Teorem 2.3.7.

Promotrimo trokute $\triangle ABC$ i $\triangle BAC$. Za te trokute vrijedi $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$, $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$ i $\angle ACB \equiv \angle BCA$. Sada po Aksimu (III_5) imamo $\angle A \equiv \angle B$. ■

TEOREM 2.3.8 *Ako je $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$ onda je $\angle \overline{h}Ok \equiv \angle \overline{h'}O'k'$.*

DOKAZ. Neka su dani kongruentni kutovi $\angle hOk$ i $\angle h'O'k'$.



Teorem 2.3.8.

(1) Na polupravcima h, k, $\overline{h}$, $h^{'}$, $k^{'}$ i $\overline{h^{'}}$ odaberimo redom točke A, B, C, $A^{'}$, $B^{'}$ i $C^{'}$ tako da vrijedi $\overline{OA} \equiv \overline{O'A'}$, $\overline{OB} \equiv \overline{O'B'}$ i $\overline{OC} \equiv \overline{O'C'}$.
(2) Uočimo trokute $\triangle OAB$ i $\triangle O'A'B'$. Budući je $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$, $\overline{OA} \equiv \overline{O'A'}$, $\overline{OB} \equiv \overline{O'B'}$ ti su trokuti kongruentni (po Teoremu 2.3.5), pa je posebno $\angle A = \angle A'$ i $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.
(3) Budući da je (C-O-A), (C'-O'-A'), $\overline{CO} \equiv \overline{C'O'}$ i $\overline{OA} \equiv \overline{O'A'}$, po Aksiomu (III_3) je $\overline{CA} \equiv \overline{C'A'}$.**(4)** Uočimo sada trokute $\triangle CAB$ i $\triangle C'A'B'$. Budući da je $\overline{CA} \equiv \overline{C'A'}$, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\angle A = \angle A'$, po Teoremu 2.3.5 je $\triangle CAB \equiv \triangle C'A'B'$ i posebno $\angle C \equiv \angle C'$ i $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$.
(5) Sada primjenimo Teorem 2.3.5 na trokute $\triangle COB$ i $\triangle C'O'B'$ (jer je $\overline{OC} \equiv \overline{O'C'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ i $\angle C \equiv \angle C'$). Dobili smo $\triangle COB \equiv \triangle C'O'B'$ pa je $\angle COB \equiv \angle C'O'B'$, tj. $\angle \overline{h}Ok \equiv \angle \overline{h}^{'}O'k'$. ■

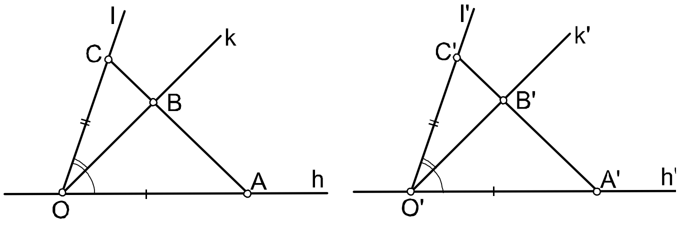
DEFINICIJA 2.3.9 *Kutovi $\angle hOk$ i $\angle \overline{h}O\overline{k}$ nazivaju se **vršni kutovi**, a kutovi $\angle hOk$ i $\angle \overline{h}Ok$ nazivaju se **sukuti**.*

TEOREM 2.3.10 *Vršni kutovi su kongruentni.*

DOKAZ. Neka su $\angle hOk$ i $\angle \overline{h}O\overline{k}$ vršni kutovi. Vrijedi $\angle \overline{h}Ok \equiv \angle kO\overline{h}$ i po Teoremu 2.3.8 je $\angle hOk \equiv \angle \overline{k}O\overline{h}$. ■

TEOREM 2.3.11 *Neka su h, k i l polupravci s istim početkom O u ravnini α, a h', k' i l' polupravci s istim početkom O' u ravnini α'. Neka pri tome h i k leže s iste strane ili s različite strane od l i istodobno h', k' ili s iste ili s različite strane od l'. Ako je $\angle hOl \equiv \angle h'O'l'$ i $\angle kOl \equiv \angle k'O'l'$, onda je $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$.*

DOKAZ. **(a)** Neka su polupravci h, k s iste strane od l, a polupravci h', k' s iste strane od l'.



Teorem 2.3.11 - (a).

(a1) Odaberimo točke $A \ni\!\!\!\!\in h$, $C \ni\!\!\!\!\in l$, $A' \ni\!\!\!\!\in h'$ i $C' \ni\!\!\!\!\in l'$ tako da vrijedi $\overline{OA} \equiv \overline{O'A'}$ i $\overline{OC} \equiv \overline{O'C'}$.

(a2) Po Teoremu 2.2.17 polupravac k siječe dužinu $\overline{AC}$ u točki B (dakle, vrijedi $(A\text{-}B\text{-}C)$) i polupravac k' siječe dužinu $\overline{A'C'}$ u točki B' (dakle, vrijedi $(A'\text{-}B'\text{-}C')$).

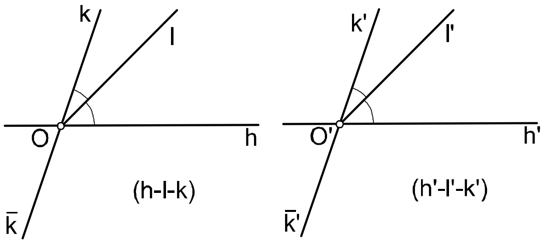
(a3) Uočimo trokute $\triangle OAC$ i $\triangle O'A'C'$. Po Teoremu 2.3.5 su trokuti $\triangle OAC$ i $\triangle O'A'C'$ kongruentni pa je $\angle C \equiv \angle C'$, $\angle A \equiv \angle A'$ i $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

(a4) Sada možemo primjeniti Teorem 2.3.6 na trokute $\triangle OBC$ i $\triangle O'B'C'$ (K-S-K poučak: $\angle C \equiv \angle C'$, $\angle kOl \equiv \angle k'O'l', \overline{OC} \equiv \overline{O'C'}$). Oni su kongruentni pa je $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, $\angle COB \equiv \angle C'O'B'$ i $\overline{OB} \equiv \overline{O'B'}$.

(a5) Primjenom Teorema 2.3.3 iz $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ i $\overline{CB} \equiv \overline{C'B'}$ slijedi da je $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.

(a6) Kako je $\overline{OA} \equiv \overline{O'A'}$, $\angle A \equiv \angle A'$ i $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ (po (a5)) slijedi da je $\triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'$ (S-K-S poučak, Teorem 2.3.5) i dalje $\angle BOC = \angle B'O'C'$, tj. $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$.

(b) Polupravci h, k su s različite strane od l i polupravci h', k' su s različite strane od l'.

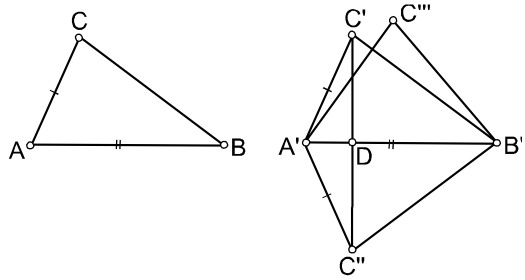


Teorem 2.3.11 - (b).

Po Teoremu 2.3.8 je $\angle \bar{k}Ol \equiv \angle \bar{k'}O'l'$. Po prvom dijelu dokaza je $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$ i po Teoremu 2.3.8 slijedi $\angle hO\bar{k} \equiv \angle h'O'\bar{k'}$, a onda ponovnom primjenom Teorema 2.3.8 imamo $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$. ■

TEOREM 2.3.12 (S-S-S poučak) *Ako za dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ vrijedi $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ i $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, onda je $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

DOKAZ. (1) Nanesimo kut $\angle A$ u točki A', ali sa suprotne strane pravca $\overleftrightarrow{A'B'}$ nego što je C' (Aksiom (III_4)). Neka je C'' odabrana tako da vrijedi $\overline{AC} \equiv \overline{A'C''}$ (po Aksiomu (III_1)).

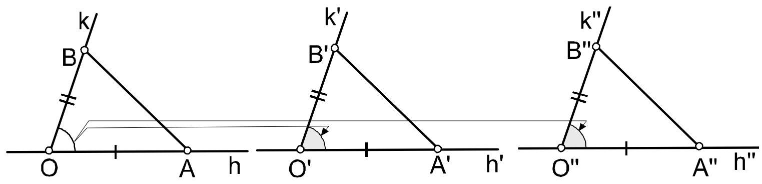


Teorem 2.3.12.

(2) Po Teoremu 2.3.5 vrijedi $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$.
Primjetimo da su točke C' i C''sa suprotnih strana pravca $\overleftrightarrow{A'B'}$ pa pravac $\overleftrightarrow{A'B'}$ sječe pravac $\overleftrightarrow{C'C''}$ u točki D i vrijedi $(C'$-D-$C'')$.
(3) Promotrimo trokut $\triangle A'C''C'$. Jer je $\overline{A'C'} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{A'C''}$ taj je trokut jednakokračan pa vrijedi $\angle A'C'C'' \equiv \angle A'C''C'$.
(4) Analogno vrijedi $\overline{C''B'} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ pa je trokut $\triangle C''B'C'$ jednakokračan i vrijedi $\angle C'C''B' \equiv \angle B'C'C''$.
(5) Sada možemo primjeniti Teorem 2.3.5 na trokute $\triangle A'B'C'$ i $\triangle A'B'C''$. Ti su trokuti kongruentni pa je $\angle B'A'C'' \equiv \angle B'A'C'$.
(6) Dokažimo da je i $\angle A \equiv \angle B'A'C'$.
(6a) Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. da vrijedi $\angle A \not\equiv \angle B'A'C'$.
(6b) Primjenom Aksioma (III_4) i (III_1) odaberimo točku C''' s iste strane pravca $\overline{A'B'}$ kao i točka C' tako da vrijedi $\overline{A'C'''} \equiv \overline{AC}$ i $\angle C'''A'B' \equiv \angle A$.
(6c) Na $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'''$ smijemo primjeniti Teorem 2.3.5. Ti su trokuti kongruentni, pa je $\overline{B'C'''} \equiv \overline{BC}$. Primjetimo da vrijedi $\overline{A'C'} \not\equiv \overline{A'C'''}$.
(6d) Nadalje, primjetimo da su trokuti $\triangle A'B'C'''$ i $\triangle A'B'C''$ kongruentni (S-K-S poučak) pa je $\overline{A'C'''} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{A'C''}$, $\overline{B'C'''} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{B'C''}$, $\angle A'C''B' \equiv \angle A'C'''B'$ i posebno $\angle B'A'C''' \equiv \angle B'A'C''$.
(6e) Dobili smo ranije (u (5)) da je i $\angle B'A'C' \equiv \angle B'A'C''$. Dakle, $\angle B'A'C' \equiv \angle B'A'C'''$ i time smo došli u protuslovlje s jedinstvenim prenošenjem kuta (Aksiom (III_4)).
(7) Konačno, jer je $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ i $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ imamo (po S-K-S poučku) da vrijedi $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. ■

LEMA 2.3.13 *Ako je $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$ i $\angle hOk \equiv \angle h''O''k''$ onda je $\angle h'O'k' \equiv \angle h''O''k''$.*

DOKAZ. **(1)** Odaberimo točke $A \ni\!\in h$ i $B \ni\!\in k$ na proizvoljni način.
(2) Zatim odaberimo točke $A' \ni\!\in h'$, $B' \ni\!\in k'$, $A'' \ni\!\in h''$ i $B'' \ni\!\in k''$ tako da vrijedi $\overline{OA} \equiv \overline{O'A'}$, $\overline{OA} \equiv \overline{O''A''}$, $\overline{OB} \equiv \overline{O'B'}$ i $\overline{OB} \equiv \overline{O''B''}$.
(3) Vrijedi $\overline{O'A'} \equiv \overline{O''A''}$ i $\overline{O'B'} \equiv \overline{O''B''}$.
(4) Po Teoremu 2.3.5 imamo $\triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'$ i $\triangle OAB \equiv \triangle O''A''B''$.



Lema 2.3.13.

(5) Tada je $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{AB} \equiv \overline{A''B''}$ pa po Teoremu 2.3.2 slijedi $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$.
(6) Sada smijemo primjeniti Teorem 2.3.12 pa vrijedi $\triangle O'A'B' \equiv \triangle O''A''B''$.
Iz kongruencije ovih trokuta slijedi tražena tvrdnja $\angle h'O'k' \equiv \angle h''O''k''$. ■

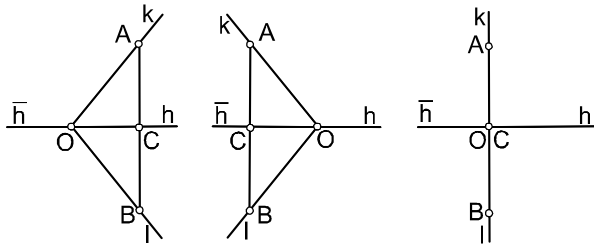
TEOREM 2.3.14 *Relacija* " $\equiv$ " *je relacija ekvivalencije na skupu* $\mathcal{K}$.

DOKAZ. **(a)** Refleksivnost relacije " $\equiv$ " slijedi iz Aksioma (III_4).
(b) Dokažimo simetričnost relacije , tj. da vrijedi: ako je $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$ onda je $\angle h'O'k' \equiv \angle hOk$.
Vrijedi $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$ i $\angle hOk \equiv \angle hOk$ (po Aksiomu (III_4)) pa primjenom prethodno dokazane Leme 2.3.13 dobivamo $\angle h'O'k' \equiv \angle hOk$.
(c) Dokažimo tranzitivnost, tj. da vrijedi: ako je $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$ i $\angle h'O'k' \equiv \angle h''O''k''$, onda je $\angle hOk \equiv \angle h''O''k''$.
Relacija " $\equiv$ " je simetrična, pa iz $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$ slijedi $\angle h'O'k' \equiv \angle hOk$.
Sada imamo $\angle h'O'k' \equiv \angle hOk$ i $\angle h'O'k' \equiv \angle h''O''k''$ i po Lemi 2.3.13 slijedi $\angle hOk \equiv \angle h''O''k''$. ■

DEFINICIJA 2.3.15 *Za kut kongruentan svom sukutu kažemo da je* ***pravi kut****. Pravci na kojima leže krakovi pravog kuta nazivaju se* ***okomitim pravcima****.*

TEOREM 2.3.16 *Postoji pravi kut.*

DOKAZ. **(1)** Odaberimo proizvoljni kut $\angle hOk$.
(2) Po Aksiomu (III_4) možemo s druge strane od h nego je k odabrati polupravac l tako da je $\angle hOk \equiv \angle hOl$.
(3) Odaberimo proizvoljnu točku A na polupravcu k i potom točku B na polupravcu l tako vrijedi $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$.
(4) Po Teoremu 2.2.17 pravac $\overline{h}Oh$ siječe $\overline{AB}$ u točki C (vrijedi $(A\text{-}C\text{-}B)$).
(5) Razlikujemo tri slučaja za položaj točke C.



Teorem 2.3.16.

(5a) Točka C leži na h.

Vrijedi $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$, $\overline{OC} \equiv \overline{OC}$ i $\angle AOC \equiv \angle COB$ pa je po Teoremu 2.3.5 $\triangle OCA \equiv \triangle OBC$ i posebno $\angle OCA \equiv \angle OCB$. No, $\angle OCB$ je sukut kuta $\angle OCA$ pa smo dobili pravi kut.

(5b) Točka C leži na $\overline{h}$.

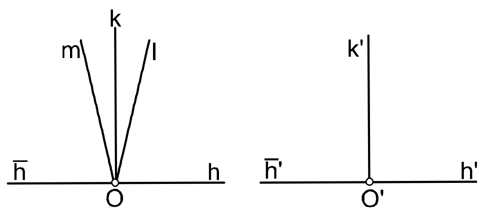
U ovom slučaju po Teoremu 2.3.8 slijedi $\angle \overline{h}Ok \equiv \angle \overline{h}Ol$ pa je situacija kao u slučaju (5a).

(5c) Slučaj $C = O$.

Tada je (A-O-B) i $l = \overline{k}$ pa je kOl pravac i vrijedi $\angle hOk \equiv \angle hOl$, dakle, $\angle hOk$ jest pravi kut. ■

TEOREM 2.3.17 *Svaka dva prava kuta su kongruentna.*

DOKAZ. Neka su dana dva prava kuta $\angle hOk$ i $\angle h'O'k'$ i dokažimo $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$.



Teorem 2.3.17.

Dokaz ćemo provesti svođenjem na kontradikciju pa pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $\angle hOk \not\equiv \angle h'O'k'$.

(1) Kutovi $\angle hOk$ i $\angle h'O'k'$ su pravi pa je $\angle hOk \equiv \angle \overline{h}Ok$ i $\angle h'O'k' \equiv \angle \overline{h'}O'k'$.

(2) Prema Aksiomu (III_4) postoji jedinstveni polupravac l s početkom u točki O tako da je $\angle h'O'k' \equiv \angle hOl$. Očito je $l \neq k$.

Moguća su dva slučaja: (h-l-k) ili (h-k-l).

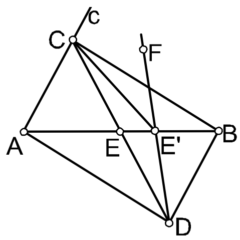
Dokažimo prvi slučaj (h-l-k) (drugi se analogno dokazuje).

(3) Primjenom Aksioma (III_4) postoji polupravac m tako da je (l-k-m) i $\angle lOk \equiv \angle mOk$.

(4) Jer je $\angle hOk \equiv \angle \overline{h}Ok$ i $\angle lOk \equiv \angle mOk$ imamo da su l i h s jedne strane od k, a m i $\overline{h}$ s druge strane od k.
(5) Iz (4), primjenom Teorema 2.3.11, zaključujemo da je $\angle hOl \equiv \angle \overline{h}Om$ i pri tom je ($\overline{h}$-m-k).
(6) Iz (1),(2) i (5) primjenom Teorema 2.3.14 slijedi $\angle \overline{h}Om \equiv \angle h'O'k' \equiv \angle \overline{h'}O'k'$.
(7) Kako je $\angle \overline{h}Om \equiv \angle \overline{h'}O'k'$, po Teoremu 2.3.8, slijedi $\angle hOm \equiv \angle h'O'k'$.
(8) Dobili smo $\angle h'O'k' \equiv \angle hOl$ (po (2)) i $\angle h'O'k' \equiv \angle hOm$ (po (7)). Odavde slijedi da su dva različita kuta kongruentna što je u protuslovlju s Aksiomom (III_4) ■

TEOREM 2.3.18 *Svaka dužina se može raspoloviti i to na jedinstveni način.*

DOKAZ. Neka je $\overline{AB}$ proizvoljna dužina. Treba dokazati da postoji jedinstvena točka E na $\overline{AB}$ takva da vrijedi (A-E-B) i $\overline{AE} \equiv \overline{EB}$.
(1) Nanesimo proizvoljni kut $\angle CAB$, a zatim $\angle CAB$ prenesimo u točki B i to s druge strane pravca $\overleftrightarrow{AB}$ nego li je točka C.



Teorem 2.3.18.

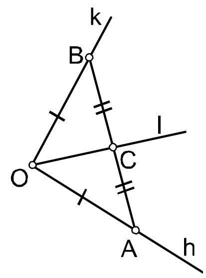
(2) Odaberimo točku D tako vrijedi $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ i $\angle CAB \equiv \angle ABD$.
(3) Primjenom Teorema 2.3.5 zaključujemo da je $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ pa je i $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$.
(4) Kako su točke C i D sa suprotnih strana pravca $\overleftrightarrow{AB}$ to $\overleftrightarrow{AB}$ siječe $\overline{CD}$, tj. postoji točka E na $\overline{AB}$ i (C-E-D).
(5) Promotrimo trokute $\triangle ADC$ i $\triangle DBC$. Kako je $\overline{CD} \equiv \overline{CD}$, $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ i $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ po Teoremu 2.3.12 zaključujemo da je $\triangle ADC \equiv \triangle DBC$ pa je onda i $\angle CDB \equiv \angle ACD$.
(6) Iz $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, $\angle CAB \equiv \angle ABD$ i $\angle AEC \equiv \angle BED$ (vršni kutovi) slijedi, po Teoremu 2.3.5, da je $\triangle AEC \equiv \triangle BED$ pa je i $\overline{AE} \equiv \overline{EB}$.
(7) Da bismo dokazali da je točka E polovište dužine $\overline{AB}$ preostaje još dokazati (A-E-B).
U suprotnom, tj. ako je $\neg$(A-E-B) mora biti ili (E-A-B) ili (A-B-E). Pretpostavimo da je (A-B-E). Sada imamo $\overline{AE} \equiv \overline{EB}$ i $\overline{AE} \equiv \overline{EA}$, dakle i $\overline{EA} \equiv \overline{EB}$, a to je u protuslovlju s Teoremom 2.3.1.

Analogno dokazujemo slučaj (E-A-B).
(8) Dokažimo i drugu tvrdnju teorema: jedinstvenost točke E.
Pretpostavimo da postoji još jedna točka E' s traženim svojstvima i $E \neq E'$. Dakle, neka vrijedi $\overline{AE'} \equiv \overline{E'B}$ i (A-E'-B).
(8a) Promotrimo trokute $\triangle AE'C$ i $\triangle E'BD$. Po Teoremu 2.3.5 oni su kongruentni pa je posebno i $\angle AE'C \equiv \angle BE'D$.
(8b) Pokažimo da su C, E' i D su kolinearne točke.
Pretpostavimo suprotno, tj. C, E' i D su nekolinearne točke. Odaberimo točku F tako da se nalazi s druge strane točke E' nego li točka D obzirom na $\overline{AB}$ i da su E', D i F kolinearne točke. Tada vrijedi $\overrightarrow{E'F} \neq \overrightarrow{E'C}$. Po Teoremu 2.3.10 su vršni kutovi jednaki, $\angle DE'B \equiv \angle AE'F$. No, s druge strane je i $\angle DE'B \equiv \angle AE'C$ (po (8a)) što je protuslovlje s Aksiomom (III_4). Dakle, C, E' i D su kolinearne točke.
(8c) Dobili smo dva različita pravca CED i $CE'D$ koji prolaze dvjema točkama C i D, a to je u protuslovlju s Aksiomom (I_2). Dakle, mora biti $E = E'$ i jedinstvenost je dokazana. ■

KOROLAR 2.3.19 *Svaka dužina može se razdijeliti na* 2^m $(m \in \mathbb{N})$ *kongruentnih dužina.*

TEOREM 2.3.20 *Svaki se kut može raspoloviti na jedinstveni način.*

DOKAZ. Neka je $\angle hOk$ dani kut.



Teorem 2.3.20.

(1) Na h odaberimo proizvoljnu točku A i potom na k odredimo točku B tako da vrijedi $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$.
(2) Neka je C polovište dužine $\overline{AB}$ i označimo sa $l = \overrightarrow{OC}$.
(3) Vrijedi $\triangle OCA \equiv \triangle OCB$ (S-S-S poučak) pa vrijedi $\angle BOC \equiv \angle AOC$ i polupravac l raspolavlja kut $\angle hOk$. ■

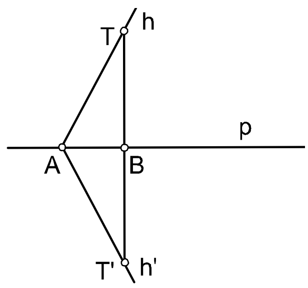
Za dani trokut na standardni način (poznat iz osnovne i srednje škole) definiraju se pojmovi **težišnice**, **visine** i **simetrale**. Tako za dani trokut $\triangle ABC$ imamo: težišnica (iz vrha C) je dužina $\overline{CP}$, gdje je P polovište stranice $\overline{AB}$; visina (iz vrha C) je dužina $\overline{CS}$, gdje je S točka na stranici $\overline{AB}$ i vrijedi $\angle ACS \equiv \angle SCB$; visina (iz vrha C) je dužina $\overline{CN}$, gdje je N točka na pravcu $\overleftrightarrow{AB}$ i pri tome su $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CN}$ okomiti pravci.

KOROLAR 2.3.21 *U jednakokračnom trokutu simetrala kuta naspram osnovice je ujedno i težišnica i visina trokuta.*

DOKAZ. Trvdnja korolara slijedi iz prethodnog teorema. ■

TEOREM 2.3.22 *Svakom točkom ravnine prolazi jedinstvena okomica na dani pravac te ravnine.*

DOKAZ. Neka su dani pravac p i točka T.

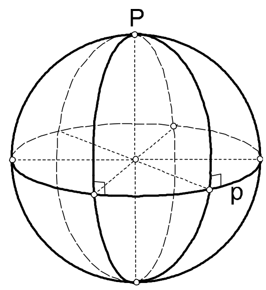


Teorem 2.3.22.

(1) Neka točka T leži na pravcu p.
Po Teoremu 2.3.16 postoji pravi kut pa ga prenesimo u točku T tako da jedan krak leži na pravcu p. Jedinstvenost okomice slijedi iz Teorema 2.3.17. Naime ako postoji još jedna okomica pomoću Teorema 2.3.17 dolazimo do kontradikcije s Aksiomom (III_4).
(2) Neka točka T ne leži na pravcu p.
Odaberimo proizvoljnu točku A na pravcu p te označimo $\overrightarrow{AT} = h$. Prenesimo kut $\angle hAp$ s druge strane pravca p : dolazimo do kuta $\angle h'Ap$. Odredimo točku T' na h' tako da vrijedi $\overline{AT} \equiv \overline{AT'}$.
Neka pravac p siječe $\overline{TT'}$ u točki B. Tada su trokuti $\triangle ABT$ i $\triangle ABT'$ kongruentni ($\angle TAB \equiv \angle T'AB$, $\overline{AT} \equiv \overline{AT'}$, $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ pa primijenimo Teorem 2.3.5) pa vrijedi i $\angle TBA \equiv \angle T'BA$.
Dakle, $\overleftrightarrow{TT'}$ je tražena okomica. ■

NAPOMENA 2.3.23 Napomenimo da ova tvrdnja ukoliko je točka T van pravca p, nije istinita u eliptičkoj geometriji. Ilustrirajmo to. Za model eliptičke geometrije uzmimo **sfernu geometriju**.

Točke u toj geometriji su točke na euklidskoj sferi uz identifikaciju antipodalnih točaka (točaka na sferi čija spojnica prolazi središtem sfere), a pravci su glavne kružnice te sfere (tj. kružnice dobivene kao presjek te sfere s ravninama koje prolaze središtem te sfere). Za dani takav p pravac točka P je njegov pol ako je svaki pravac kroz P okomit na p.



Sferna geometrija.

Na slici je pravac p ekvator sfere, a točka P van njega je sjeverni pol. Svaki pravac kroz pol P je okomit na ekvator.

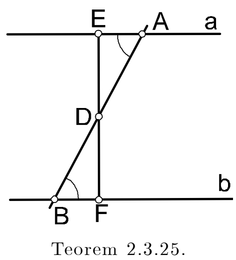
TEOREM 2.3.24 *Ako su dva pravca okomita na treći pravac, onda se ta dva pravca ne sijeku.*

DOKAZ. Neka su b i c različiti pravci koji su okomiti na pravac a. Pretpostavimo da se b i c sijeku i neka je njihovo sjecište točka T. Tada bi se iz točke T mogle povući dvije različite okomice na a, što je u protuslovlju s prethodnim teoremom. ∎

TEOREM 2.3.25 *Ako dva pravca sijeku treći pravac i tvore s njime kongruentne izmjenične kutove, tada se ta dva pravca ne sijeku.*

DOKAZ. Neka c siječe a i b u točkama A i B i neka su izmjenični kutovi kongruentni. Neka je D polovište dužine $\overline{AB}$ (Teorem 2.3.18) i spustimo iz D okomicu na a (Teorem 2.3.22).

(1) Ako je $E = A$ onda je pravac c okomit na pravce a i b pa tvrdnja slijedi iz Teorema 2.3.24.

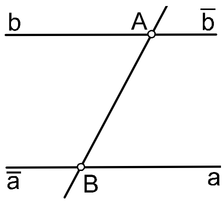


Teorem 2.3.25.

(2) Ako je $E \neq A$ onda prenošenjem dužine $\overline{EA}$ u točki B na b dolazimo do točke F.
Sada je $\triangle EAD \equiv \triangle BDF$ (S-K-S poučak) pa je $\angle EDA \equiv \angle BDF$. Po Teoremu 2.3.10 su to vršni kutovi pa su E, D, F kolinearne točke. Dobili smo da su pravci a i b okomice na pravac $\overleftrightarrow{EF}$ pa se opet pravci a i b ne sijeku (Teorem 2.3.24). ∎

TEOREM 2.3.26 *Ako su u ravnini α dani pravac a i točka A van njega, onda postoji bar jedan pravac b u ravnini α koji prolazi točkom A i ne siječe dani pravac a.*

DOKAZ. Neka je dan pravac i neka je na njemu odabrana proizvoljna točka B. Zapišimo taj pravac u obliku $aB\overline{a}$ gdje su a i $\overline{a}$ polupravci koje određuje točka B.



Teorem 2.3.26.

Neka je $\angle(\overrightarrow{AB}, b)$ prenešen kut $\angle(\overrightarrow{BA}, a)$ i to tako da su a i b s različitih strana pravca $\overleftrightarrow{AB}$. Promotrimo pravac $bA\overline{b}$. Po prethodnom teoremu zaključujemo da se pravci $aB\overline{a}$ i $bA\overline{b}$ ne sijeku. ∎

DEFINICIJA 2.3.27 (a) *Neka su dane dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$. Kažemo da je dužina $\overline{AB}$ **veća** od dužine $\overline{A'B'}$ (i pisati $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ ili $\overline{A'B'} < \overline{AB}$) ako postoji točka C takva da je $(A\text{-}C\text{-}B)$ i $\overline{AC} \equiv \overline{A'B'}$.*
(b) *Neka su dana dva kuta $\angle hOk$ i $\angle h'O'k'$. Kažemo da je kut $\angle hOk$ **veći** od kuta $\angle h'O'k'$ (i pisati $\angle hOk > \angle h'O'k'$ ili $\angle h'Ok' < \angle hOk$), ako postoji polupravac l s početkom u ishodištu polupravaca h i k tako da je $(h\text{-}l\text{-}k)$ i $\angle hOl \equiv \angle h'O'k'$.*

TEOREM 2.3.28 (a) *Za svake dvije dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ uvijek vrijedi jedna i samo jedna od sljedeće tri relacije: ili $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ ili $\overline{AB} < \overline{CD}$ ili $\overline{AB} > \overline{CD}$ (pravilo trihotomije).*
(b) *Ako je $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ i $\overline{A'B'} < \overline{A''B''}$ onda je $\overline{AB} < \overline{A''B''}$ (tranzitivnost relacije "biti manji").*

NAPOMENA 2.3.29 Iz prethodnog teorema slijedi da je skup svih dužina $\mathcal{D}$ potpuno uređen skup. Nadalje, može se uvesti **zbrajanje** i **oduzimanje** dužina i pokazati da vrijedi:

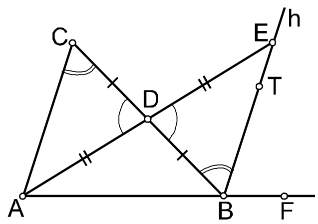
(a) Ako je $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{CD} < \overline{C'D'}$ onda je $\overline{AB} + \overline{CD} < \overline{A'B'} + \overline{C'D'}$;

(b) Ako je $\overline{AB} > \overline{CD}$ onda je $\frac{1}{2^n} \cdot \overline{AB} > \frac{1}{2^n} \cdot \overline{CD}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Slične tvrdnje mogu se dokazati i za kutove i onda se mogu definirati tupi i šiljasti kut: **šiljasti kut** je onaj koji je manji od pravog, a **tupi kut** je onaj koji je veći od pravog.

TEOREM 2.3.30 *Vanjski kut trokuta veći je od svakog nesusjednog unutarnjeg kuta.*

DOKAZ. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i odaberimo točku F tako vrijedi je (A-B-F) (takva postoji po Aksiomu (II_2)).



Teorem 2.3.30.

Dokažimo da vrijedi $\angle CBF > \angle ACB$.

(1) Neka je D polovište stranice $\overline{BC}$ (to možemo po Teoremu 2.3.18).

(2) Na pravcu $\overleftrightarrow{AD}$ odredimo točku E s druge strane točke D nego što je A tako da vrijedi $\overline{AD} \equiv \overline{DE}$ (prenošenje dužine).

(3) Promotrimo trokute $\triangle ADC$ i $\triangle BDE$. Primjenom Teorema 2.3.10 dobivamo $\angle ADC \equiv \angle EDB$ (vršni kutovi) i po Teoremu 2.3.5 (S-K-S poučak) zaključujemo da su trokuti $\triangle ADC$ i $\triangle BDE$ sukladni. Slijedi da je i $\angle ACB \equiv \angle DBE$.

(4) Kako je (A-B-F) , to pravac $\overleftrightarrow{CB}$ siječe dužinu $\overline{AF}$ u unutarnjoj točki pa su točke A i F s različitih strane od $\overleftrightarrow{BC}$.

(5) Analogno, jer vrijedi (A-D-E) to pravac $\overleftrightarrow{BC}$ siječe dužinu $\overline{AE}$ u unutarnjoj točki pa su A i E s različitih strana od $\overleftrightarrow{BC}$.

(6) Po Teoremu 2.2.11 iz (4) i (5) slijedi da su E i F s iste strane pravca $\overleftrightarrow{BC}$.

(7) Vrijedi (C-D-B) pa su C i D s iste strane pravca $\overleftrightarrow{AB}$.

(8) Vrijedi (A-D-E) pa su D i E s iste strane pravca $\overleftrightarrow{AB}$.

(9) Prema Teoremu 2.2.11 iz (7) i (8) slijedi da su točke C i E s iste strane pravca $\overleftrightarrow{AB}$.

(10) Pokazali smo da E leži s iste strane pravca $\overleftrightarrow{AF}$ kao i C (po (9)) i da E leži s iste strane pravca $\overleftrightarrow{CB}$ kao i F (po (6)). Time je pokazano da je točka E unutarnja točka kuta $\angle CBF$.

(11) Odaberimo proizvoljnu točku T na polupravcu $h = \overrightarrow{BE}$ različitu od E (moguć je poredak (B-T-E) ili (B-E-T)). Slično prethodnom dokazuje se da je i T unutarnja točka kuta $\angle CBF$ (dokažite, korisna vježba).
(**12**) Time smo dokazali da je h unutar kuta $\angle CBF$ pa vrijedi $\angle CBF > \angle(\overrightarrow{BC}, h)$. Budući vrijedi $\angle(\overrightarrow{BC}, h) \equiv \angle ACB$ dobili smo da je zaista $\angle CBF > \angle ACB$.
Analogno se dokazuje da je vanjski kut $\angle CBF$ veći i od drugog nesusjednog kuta $\angle CAB$ (dokažite, korisna vježba!). ■

TEOREM 2.3.31 *Ako su dvije stranice jednog trokuta kongruentne odgovarajućim dvjema stranicama drugog trokuta, a kutovi između tih stranica nisu kongruentni, tada nasuprot većeg od tih kutova leži veća stranica i obratno.*

DOKAZ. Vrijedi Euklidov dokaz (Propozicija 24). ■
Dokažite prethodni teorem u ovoj aksiomatici pomoću već dokazanih tvrdnji (korisna vježba!).

Pojmovi poznati iz elementarne geometrije, kao što su kružnica, tetiva, trokutu upisana i opisana kružnica, središnji i obodni kut, na prirodni način se definiraju. Navedimo definiciju kružnice.

Neka je u ravnini α dana točka O. Skup svih točaka M ravnine α za koje $\overline{OM}$ kongruentno jednoj danoj dužini $\overline{AB}$ naziva se kružnica sa središtem O i radijusom $\overline{AB}$ i označava sa $k(O,r)$ gdje je $r = \overline{AB}$. Skup svih točaka M ravnine α za koje je $\overline{OM} < \overline{AB}$ naziva se skup unutrašnjih točaka kružnice $k(O,r)$ (ili nutrina od $k(O,r)$), a skup svih točaka M ravnine α za koje je $\overline{OM} > \overline{AB}$ naziva se skup vanjskih točaka kružnice $k(O,r)$ (ili vanjština od $k(O,r)$).

2.4 AKSIOMI NEPREKIDNOSTI

Aksiomi neprekidnosti su:

AKSIOM (IV_1). (Arhimedov aksiom). *Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ proizvoljne dužine i neka su na polupravcu $\overrightarrow{AB}$ s početkom u točki A, odabrane točke A_1, A_2, $A_3, \ldots$ tako da vrijedi $(A\text{-}A_1\text{-}A_2)$, $(A_1\text{-}A_2\text{-}A_3), \ldots$ i sve dužine $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}, \ldots$ su kongruentne dužini $\overline{CD}$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $(A\text{-}B\text{-}A_n)$.*

Arhimedov aksiom tvrdi da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \cdot \overline{CD} > \overline{AB}$. Bez smanjenja općenitosti možemo staviti $n \cdot \overline{CD} \geq \overline{AB}$.

AKSIOM (IV_2). (Cantorov aksiom). *Neka je dan niz dužina*

$$\overline{A_1B_1},\ \overline{A_2B_2}, \dots,\ \overline{A_nB_n}, \dots$$

od kojih je svaka osim prve sadržana u prethodnoj i neka ne postoji dužina koja bi bila sadržana u svakoj dužini iz niza. Tada postoji jedna i samo jedna točka koja je sadržana u svakoj dužini.

Cantorov aksiom tvrdi da postoji jedna jedina točka C (tzv. *Cantorova točka*) takva da je $(A_n\text{-}C\text{-}B_n)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Poznato je da su Arhimedov aksiom i Cantorov aksiom ekvivalentni Dedekindovom aksiomu.

AKSIOM (IV) (Dedekindov aksiom) *Ako sve točke dužine $\overline{AB}$ uključujući i krajeve podijelimo u dvije klase tako da vrijedi:*

(a) *Svaka točka je u jednoj i samo jednoj klasi, točka A je u prvoj, a B u drugoj klasi;*

(b) *Svaka točka prve klase, različita od A, leži između A i bilo koje točke druge klase;*

*onda postoji jedna i samo jedna točka C dužine $\overline{AB}$ takva da svaka točka koja se nalazi između A i C pripada prvoj klasi, a svaka točka koja se nalazi između C i B pripada u drugoj klasi. Točka C pripada ili prvoj ili drugoj klasi. Točku C nazivamo **graničnom točkom** tih klasa, **točkom prereza** ili **Dedekindovom točkom**.*

NAPOMENA 2.4.1 (a) U iskazu Dedekindovog aksioma može se izostaviti jedinstvenost točke C. Naime, dosta jednostavno se može dokazati da je točka C s traženim svojstvima jedinstvena.
(b) Ako se iskaz s dužine $\overline{AB}$ prenese na pravac $\overleftrightarrow{AB}$ dobija se Dedekindov aksiom za pravac.

Da bi pokazali da su Arihimedov i Cantorov aksiom ekvivalentni Dedekindovom aksiomu treba dokazati tvrdnje narednog teorema.

TEOREM 2.4.2 (a) *Iz Hilbertovih aksioma (I), (II), (III) i Dedekindovog aksioma slijedi Arhimedov aksiom.*

(b) *Iz Hilbertovih aksioma (I), (II), (III) i Dedekindovog aksioma slijedi Cantorov aksiom.*

(c) *Iz Hilbertovih aksioma (I), (II), (III), Arhimedovog aksioma i Cantorovog aksioma slijedi Dedekindov aksiom.*

DOKAZ. Dokažimo tvrdnju (a). Tvrdnje (b) i (c) navedene su u zadacima i korisna je vježba dokazati ih.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji Arhimedovog aksioma, tj. neka je $(\forall n \in \mathbb{N})$ ili $n \cdot \overline{CD} < \overline{AB}$ ili $n \cdot \overline{CD} \equiv \overline{AB}$. Definirajmo klase:

$$\mathcal{K}_1 = \left\{X : (\exists n \in \mathbb{N})\ \ n \cdot \overline{CD} > \overline{AX}\right\} \cup \{A\},$$

$$\mathcal{K}_2 = \left\{Y : (\forall n \in \mathbb{N})\ n \cdot \overline{CD} < \overline{AY}\right\}.$$

(1) Primjetimo da su $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ disjunktni i neprazni skupovi (točke $A_1, ..., A_n, ...$ iz Aksioma (IV_1) sadržane su u $\mathcal{K}_1$, točka B pripada klasi $\mathcal{K}_2$) koji pokrivaju segment $\overline{AB}$.

(2) Klase $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ udovoljavaju i drugom uvjetu Dedekindovog aksioma.

Odaberimo proizvoljnu točku $X \in \mathcal{K}_1 \setminus \{A\}$. To znači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 \cdot \overline{CD} > \overline{AX}$. Nadalje, za proizvoljnu točku $Y \in \mathcal{K}_2$ je za taj n_0 ispunjeno $n_0 \cdot \overline{CD} < \overline{AY}$. Tada je $\overline{AX} < n_0 \cdot \overline{CD} < \overline{AY}$, pa je ispunjeno $(A\text{-}X\text{-}Y)$. Dakle, svaka točka X iz $\mathcal{K}_1$ različita od A leži između A i proizvoljne točke Y iz $\mathcal{K}_2$.

(3) Po Dedekindovu aksiomu postoji jedinstvena točka E takva da je za $(A\text{-}X\text{-}E)$ čim je $X \in \mathcal{K}_1$ i $(E\text{-}Y\text{-}B)$ čim je $Y \in \mathcal{K}_2$ i pri tome sama točka E pripada bilo prvoj bilo drugol klasi.

(4) Točka E ne pripada klasi $\mathcal{K}_1$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $E \in \mathcal{K}_{1.}$.

To znači da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \cdot \overline{CD} > \overline{AE}$. No, to znači da vrijedi $(A\text{-}E\text{-}A_n)$. Odavde slijedi $(E\text{-}A_n\text{-}B)$. Dobili da je $A_n \in \mathcal{K}_2$, a to je u protuslovlju s našom pretpostavkom (sa (1)) .

(5) Točka E ne pripada klasi $\mathcal{K}_2$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $E \in \mathcal{K}_2$.

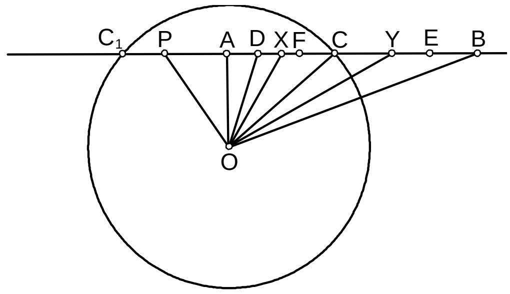
To znači da je $n \cdot \overline{CD} < \overline{AE}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je točka F odabrana tako da je $\overline{FE} \equiv \overline{CD}$ i $(A\text{-}F\text{-}E)$. Činjenica da vrijedi $(A\text{-}F\text{-}E)$ povlači da je $F \in \mathcal{K}_1$ pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \cdot \overline{CD} > \overline{AF}$, tj. $(A\text{-}F\text{-}A_n)$. No, onda je $\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{FE} < \overline{AA_n} + \overline{CD} = (n+1) \cdot \overline{CD}$. Dakle, $(A\text{-}E\text{-}A_{n+1})$ pa je $E \in \mathcal{K}_1$, što je u protuslovlju s (4).

Iz (4) i (5) slijedi protuslovlje sa Dedekindovim aksiomom (točka E ne leži ni u $\mathcal{K}_1$ ni u $\mathcal{K}_2$) pa polaznu pretpostavku moramo mijenjati - Arhimedov aksiom vrijedi. ∎

TEOREM 2.4.3 *Pravac koji leži u istoj ravnini sa kružnicom i prolazi unutarnjom točkom te kružnice siječe tu kružnicu u dvjema točkama.*

DOKAZ. Neka je dana kružnica $k(O,r)$ i neka pravac p siječe $k(O,r)$ u unutarnjoj točki P.

Pretpostavit ćemo da pravac p ne prolazi kroz središte O kružnice (naime tada se pomoću Aksioma (III_1) lako dokazuje da pravac p siječe $k\,(O,r)$ u dvjema točkama).



Teorem 2.4.3

(1) Iz točke O spustimo normalu na pravac p i neka je nožište označimo sa A. Ili je $\overline{OA} \equiv \overline{OP}$ ili $\overline{OA} < \overline{OP} < r$. U oba slučaja je $\overline{OA} < r$, tj. A je unutarnja točka kružnice $k\,(O,r)$. Odredimo na pravcu $\overleftrightarrow{AP}$ točku B tako da je $\overline{AB} \geq r$. Kako je $\triangle AOB$ pravokutan to je $\overline{OB} > \overline{AB} \geq r$. Dakle, B je vanjska točka kružnice $k\,(O,r)$.

(2) Podijelimo sve točke dužine $\overline{AB}$ u sljedeće klase:

$$\mathcal{K}_1 = \{X \in \overline{AB} : \overline{OX} < r\},$$
$$\mathcal{K}_2 = \{Y \in \overline{AB} : \overline{OY} \geq r\}.$$

(3) Rastav segmenta $\overline{AB}$ na klase $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ udovoljava uvjetima Dedekindovog aksioma.

Svaka točka segmenta $\overline{AB}$ pripada samo jednoj klasi, točka A pripada klasi $\mathcal{K}_1$, a točka B klasi $\mathcal{K}_2$. Neka je $X \in \mathcal{K}_1 \setminus \{A\}$ i Y proizvoljna točka iz $\mathcal{K}_2$. To znači $\overline{OX} < r$ i $\overline{OY} \geq r$. Tada je $\overline{OY} > \overline{OX}$. Onda je $\overline{AY} > \overline{AX}$ pa je i $(A\text{-}X\text{-}Y)$.

Po Dedekindovom aksiomu postoji jedinstvena točka prereza C (Dedekindova točka) za koju je $(A\text{-}X\text{-}C)$ čim je $X \in \mathcal{K}_1$ i $(C\text{-}Y\text{-}B)$ čim je $Y \in \mathcal{K}_2$. Sama točka C pripada bilo skupu $\mathcal{K}_1$, bilo skupu $\mathcal{K}_2$.

(4) Dokažimo da točka C pripada u klasi $\mathcal{K}_2$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $C \in \mathcal{K}_1$. Tada je $\overline{OC} < r$. Odredimo točku E segmenta $\overline{AB}$ tako da je $(C\text{-}E\text{-}B)$ i $\overline{CE} \equiv r - \overline{OC}$. Kako je $(C\text{-}E\text{-}B)$ imamo da je $E \in \mathcal{K}_2$. No vrijedi $\overline{OE} < \overline{OC} + \overline{CE} \equiv r$ pa je $E \in \mathcal{K}_1$. Time smo došli do protuslovlja: točka pripada i skupu $\mathcal{K}_1$ i skupu $\mathcal{K}_2$.

Dakle $C \in \mathcal{K}_2$, a to znači da je ili $\overline{OC} \equiv r$ ili pak $\overline{OC} > r$.

(5) Vrijedi $\overline{OC} \equiv r$, tj. točka C pripada kružnici $k(O,r)$.

U suprotnom, ako je $\overline{OC} > r$, možemo na segmentu $\overline{AB}$ odabrati točku F tako da vrijedi $(A\text{-}F\text{-}C)$ i $\overline{FC} \equiv \overline{OC} - r$. Kako je $(A\text{-}F\text{-}C)$ imamo $F \in \mathcal{K}_1$. No vrijedi $\overline{OF} + \overline{FC} > \overline{OC}$, tj. $\overline{OF} > \overline{OC} - \overline{FC} \equiv r$, pa je $F \in \mathcal{K}_2$ - što je nemoguće (točka F bi pripadala i skupu $\mathcal{K}_1$ i skupu $\mathcal{K}_2$).

(6) Odredimo na pravcu p točku C_1, a s druge strane nego što je točka C tako da vrijedi $\overline{AC} \equiv \overline{AC_1}$. Tada su trokuti $\triangle OAC$ i $\triangle OAD$ kongruentni (po Teoremu 2.3.5) pa je $\overline{OC_1} \equiv \overline{OC} \equiv r$, dakle i C_1 je točka kružnice $k(O,r)$.
(7) Trećeg sjecišta nema.
Pretpostavimo suprotno da postoji još jedna točka T na pravcu p i kružnici $k(O,r)$. Točka T može biti s iste strane od A kao i točka C, ili pak s iste strane od A kao i točka C_1. Neka je T s iste strane točke A kao i C. Promotrimo trokute $\triangle OAC$ i $\triangle OAT$. To su pravokutni trokuti koji su kongruentni pa je $\overline{AT} \equiv \overline{AC}$, tj. $T = C$. ■

2.5 AKSIOM O PARALELAMA

Rezultate dobivene na osnovu sistema aksioma (I), (II), (III) i (IV) nazvali smo apsolutnom geometrijom i neovisni su o tome da li točkom van pravca možemo povući jedan i samo jedan ili pak više pravaca koji ne sijeku dani pravac. Naime, po Teoremu 2.3.24 barem jedan takav pravac postoji i da bi osigurali da je to i jedini pravac, dakle i aksiomatizirali euklidsku geometriju potreban je i aksiom o paralelnosti.

AKSIOM (V_E) *Točkom van pravca prolazi najviše jedan pravac koji ga ne siječe.*

Dakle, Euklid je bio u pravu, Peti postulat jest pravi aksiom. Teorem 2.3.24 i Aksiom (V_E) daju uobičajenu formulaciju aksioma o paralelama:

Točkom van pravca prolazi točno jedan pravac koji ga ne siječe.

(za koji smo pokazali da je ekvivalentan Petom Euklidovom postulatu). Taj jedinstveni pravac nazivat ćemo **paralelom** i da su pravci a i b paralelni označavat ćemo sa $a \parallel b$.

Naveli smo već neke tvrdnje ekvivalentne Petom euklidovom postulatu (odnosno Aksiomu (V_E)). Ponovimo neke od njih (dokažite da su one ekvivalentne tvrdnje s Petim Euklidovim postulatom, korisna vježba) :

- Pravac koji siječe jedan od dva pravca u istoj ravnini koji se ne sijeku, siječe i drugi od ta dva pravca (Proklov ekvivalent).
- Udaljenost između dva pravca koji leže u istoj ravnini a ne sijeku se je konačna. (kod Proklova dokaza već nalazimo ovu formulaciju).
- Geometrijsko mjesto točaka koje leže s istih strana danog pravca i imaju istu udaljenost od njega je opet pravac (Posidonije).
- Suma kutova trokuta jednaka je $2R$ (Saccheri, Lambert, Legendre).
- Za svaku točku unutar zadanog kuta može se pronaći pravac koji siječe oba kraka (Legendre).

- Dva pravca od kojih je jedan okomit a drugi kos prema trećem pravcu se sijeku (Legendre).
- Kroz tri nekolinearne točke može se uvijek povući kružnica (F. Bolyai).
- Sve tri visine trokuta sijeku se u jednoj točki.
- Postoji trokut sa po volji velikom površinom.
- Postoje slični trokuti (Wallisov postulat).

Navedimo model Euklidske planimetrije - to je **realna ravnina** $\mathbb{R}^2$. Točke su elementi skupa $\mathbb{R}^2$, a pravci skupovi $p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by+c = 0,\, a, b, c \in \mathbb{R},\, a^2 + b^2 \neq 0\}$. Pravce označavamo i sa $p = [a, b, c]$. Incidencija je interpretira na način: točka $T = (x_0, y_0)$ leži na pravcu $p = [a, b, c]$ ako je $T \in p$, tj. ako je $ax_0 + by_0 + c = 0$. Poredak možemo interpretirati na način: točka T_2 leži između točaka T_1 i T_3 ako vrijedi $d(T_1, T_3) = d(T_1, T_2) + d(T_2, T_3)$, gdje je d standardna metrika na $\mathbb{R}^2$. Konačno, kongruenciju interpretiramo preko grupe gibanja. To je grupa kojoj skup izvodnica čine sve osne simetrije, a grupna operacija je kompozicija. Poznata je činjenica da su to izometrije ravnine i da grupu gibanja tvore nama poznata preslikavanja: osne simetrije, translacije, poluokreti i rotacije. Kongruencija se interpretira na način: dvije figure su kongruentne ako postoji gibanje koje jednu figuru preslikava na drugu. Korisna je vježba provjeriti da ovaj model udovoljava svim aksiomima Euklidske planimetrije.

2.6 ZADACI ZA VJEŽBU

1. Nađite model u kojemu vrijede aksiomi (I_1), (I_2), ali ne i (I_3).

   Dokažite:

2. Postoji tri različita pravca koji ne prolaze istom točkom.
3. Za svaki pravac postoji najmanje jedna točka koja ne leži na njemu.
4. Za svaku točku postoji najmanje jedan pravac koji ne prolazi njom.
5. Za svaku točku postoji najmanje dva pravca koji prolaze njom.
6. Svaka ravnina incidentna je s najmanje tri točke.
7. Za svaki pravac a postoji pravac b takav da pravci a i b ne leže u istoj ravnini.

8. Neka su "točke" jednočlani poskupovi skupa $\{A, B, C, D, E, F\}$ a "pravci" tročlani skupovi $\{A, B, C\}$, $\{C, D, E\}$, $\{E, F, A\}$, $\{B, D, F\}$ i neka je incidencija interpretirana inkluzijom. Npr. "točka" A leži na "pravcu" $\{A, B, C\}$ jer je $\{A\} \subset \{A, B, C\}$. Dokažite da se radi o eliptičkom modelu geometrije incidencije.

9. Neka su "točke" sve točke na listu papira, "pravci" sve kružnice koje možemo nacrtati na tom listu, a "incidencija" znači da točka leži na kružnici. Provjerite jesu li su ispunjeni aksiomi incidencije i ako jesu koji je aksiom o paralelama ispunjen.
10. Neka je dan model geometrije incidencije u kojem na svakom pravcu leže najmanje tri različite točke. Koliko najmanje točaka i najmanje pravaca taj model može imati. Ako je model euklidski, pokažite da on mora imati najmanje 9 točaka i najmanje 12 pravaca.
11. Model geometrije incidencije ima 5 točaka. Načinite ga tako da za različite izbore "pravca" l i "točke" P vrijedi drugačiji aksiom paralelnosti.
12. Neka je "točka" uređeni par realnih brojeva $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a "pravac" l skup svih točaka (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu $ax + by + c = 0$, gdje su a, b realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 > 0$, tj.

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : ax + by + c = 0,\ a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 > 0\}.$$

Točka (x, y) leži na pravcu l ako koordinate te točke udovoljavaju jednadžbu pravca. Dokažite da je ovaj model, nazivamo ga **realna ravnina** i označavamo sa $\mathbb{R}^2$, predstavlja model geometrije incidencije. Pokažite da je to afina ravnina (stoga se ovaj model naziva i **realna afina ravnina**) i odredite njezino projektivno upotpunjenje (koje nazivamo **realna projektivna ravnina**).
13. Neka su "točke" sve točke jedinične sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (uobičajena je iznaka $\mathbb{S}^2$), a "pravci" glavne kružnice (tj. kružnice kojima je središte ujedno i središte sfere). Opet interpretiramo incidenciju na uobičajeni način. Dokažite da je to model geometrije incidencije.
14. Neka su "točke" sve točke unutar kruga $x^2 + y^2 < 1$, a "pravci" sve tetive. Neka incidencija znači da točka leži na tetivi u uobičajenom smislu. Pokažite da li je to model geometrije incidencije (naziva se i **Kleinov disk**). Koji aksiom paralelnosti vrijedi?
15. Ispitajte da li su ispunjeni svi aksiomi incidencije u Fanovoj geometriji.
16. Dokažite:
    (a) $(A\text{-}B\text{-}C) \wedge (B\text{-}C\text{-}D) \Rightarrow (A\text{-}B\text{-}D)$;
    (b) $(A\text{-}B\text{-}D) \wedge (B\text{-}C\text{-}D) \Rightarrow (A\text{-}B\text{-}C)$;
    (c) $(A\text{-}B\text{-}C) \wedge (B\text{-}C\text{-}D) \Rightarrow (A\text{-}C\text{-}D)$;
    (d) $(A\text{-}B\text{-}D) \wedge (B\text{-}C\text{-}D) \Rightarrow (A\text{-}C\text{-}D)$;
    (e) $(A\text{-}B\text{-}C) \wedge (A\text{-}D\text{-}C) \Rightarrow (A\text{-}D\text{-}B) \vee (B\text{-}D\text{-}C)$.
17. Neka su A, B, C, D i M kolinearne točke te neka vrijedi $(A\text{-}C\text{-}B)$, $(A\text{-}D\text{-}B)$ i $(C\text{-}M\text{-}D)$. Dokažite da je $(A\text{-}M\text{-}B)$.
18. Neka su A, B, C i D, kolinearne točke. Dokažite:
    (a) $\neg(B\text{-}A\text{-}C) \wedge \neg(B\text{-}A\text{-}D) \Rightarrow \neg(C\text{-}A\text{-}D)$.

(b) $(B\text{-}A\text{-}C) \wedge (B\text{-}A\text{-}D) \Rightarrow \neg(C\text{-}A\text{-}D)$.

19. Skup S je konveksan ako za svake dvije točke A i B tog skupa i dužina $\overline{AB}$ pripada tom skupu. Prazan skup je konveksan skup. Dokažite da je presjek konačnog broja konveksnih skupova konveksan skup. Je li presjek beskonačno mnogo konveksnih skupova konveksan skup? Je li unija beskonačno mnogo konveksnih skupova konveksan skup?
20. Dokažite da je definicija polupravca korektna, tj. da klase $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ ne ovise o izboru točke A.
21. Dokažite da je definicija poluravnine korektna, tj. da klase $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ ne ovise o izboru točke A.
22. Dokažite da je definicija poluprostora korektna, tj. da klase $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ ne ovise o izboru točke A.
23. Dokažite Teorem 2.2.15.
24. Dokažite Teorem 2.2.19.

Dokažite:

25. U svakom trokutu nasuprot većoj stranici leži veći kut i obratno, nasuprot većem kutu leži veća stranica.
26. Suma bilo kojih dvaju kutova trokuta manja je od dva prava kuta.
27. U svakom trokutu najviše jedan kut može biti pravi ili tupi i bar dva šiljasta (dokazati koristeći teorem o vanjskom kutu trokuta).
28. Suma svih kutova trokuta nije veća od dva prava kuta.
29. Vanjski kut trokuta veći je ili jednak zbroju dvaju nesusjednih unutarnjih kutova.
30. Suma kutova četverokuta nije veća od četiri prava kuta.
31. Kutovi uz gornju osnovicu Saccherijevog četverokuta i četvrti kut Lambertovog četvrokuta nisu tupi.
32. Ako za trokut $\triangle ABC$ vrijedi $\angle A \equiv \angle B$ onda je $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$, tj. trokut je jednakokračan.
33. Ako su težišnica i visina iz istog vrha trokuta kongruentne, onda je taj trokut jednakokračan.
34. Ako je simetrala jednog unutrašnjeg kuta trokuta jednaka njegovom poluopsegu onda je taj trokut jednakokračan.
35. Ako je p bilo koji pravac i T bilo koja točka koja ne leži na njemu i N nožište okomice iz T na p i ε bilo koji dani kut tada na pravcu p postoji točka A tako da je $\angle NAT < \varepsilon$.
36. Ako za trokute $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ vrijedi $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, $\angle B \equiv \angle B'$ i ako je $\overline{AB} > \overline{AC}$ onda je $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (S-S-K$^{>}$ poučak o sukladnosti).

37. Ako za trokute $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ vrijedi da su im kongruentne dvije stranice i kut nasuprot jednoj od njih onda vrijedi $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.
38. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i neka je A_1 njegova težišnica. Dokažite tvrdnju: $\angle BAA_1 > \angle CAA_1$ ako i samo ako je $\overline{AB} < \overline{AC}$.
39. Ako je M u unutrašnjosti trokuta $\triangle ABC$, onda je $\angle AMB > \angle ACB$.
40. Pravac siječe kružnicu u najviše dvije točke.
41. Dvije kružnice mogu imati najviše dvije zajedničke točke.
42. Dokažite da obodni kut nije veći od polovine središnjeg kuta nad istom tetivom kružnice.
43. Dokažite da obodni kut nad promjerom kružnice nije veći od pravog kuta.
44. Kongruentnim središnjim kutovima kružnice kongruentne su odgovarajuće tetive.
45. Pravac koji prolazi jednom točkom kružnice i okomit je na spojnicu te točke sa središtem kružnice nema više niti jednu zajedničku točku s tom kružnicom (taj je pravac ustvari tangenta kružnice u toj točki).
46. Krug je konveksan skup.
47. U svaki trokut može se upisati jedinstvena kružnica.
48. Dokažite tvrdnju (b) iz Teorema 2.4.2.
49. Dokažite tvrdnju (c) iz Teorema 2.4.2.
50. Iskažite i dokažite Arhimedom aksiom za kutove.
51. Iskažite i dokažite Cantorov aksiom za kutove.
52. Iskažite i dokažite Dedekindov aksiom za kutove.
53. Dokažite tvrdnju: Ako dvije kružnice leže u istoj ravnini i jedna od njih prolazi kroz jednu unutarnju i jednu vanjsku točku druge kružnice, tada se te dvije kružnice sijeku u točno dvije točke. Dokažite!
54. Dokažite tvrdnju: Za svaku dužinu $\overline{AB}$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji dužina $\overline{AD}$ takva da je $n \cdot \overline{AD} \equiv \overline{AB}$ ($\overline{AD} \equiv \frac{1}{n} \cdot \overline{AB}$ - poopćenje tvrdnje iz Korolara 2.3.19).

Poglavlje 3

HIPERBOLIČKA GEOMETRIJA

3.1 AKSIOM O PARALELAMA

Dodamo li aksiomima apsolutne geometrije kao aksiom paralelnosti

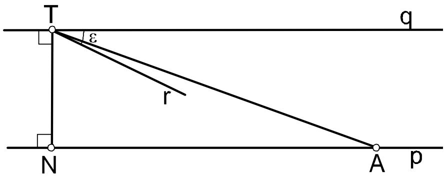
AKSIOM (V_H) *Točkom van pravca prolaze bar dva pravca koji ne sijeku taj pravac.*

dobivamo hiperboličku geometriju. Dakako, sve tvrdnje apsolutne geometrije istinite su i u hiperboličkoj geometriji (i u euklidskoj geometriji). One tvrdnje hiperboličke geometrije gdje se u dokazu koristi aksiom (V_H) **nisu istinite u euklidskoj geometriji.** Ilustrirajmo to primjerom**.** Tvrdnja apsolutne geometrije da je suma $\alpha+\beta+\gamma$ kutova trokuta manja ili jednaka $2R$ (2.6. Zadaci za vježbu, Zadatak 28) istinita je i u euklidskoj geometriji i u hiperboličkoj geometriji. U euklidskoj geometriji se pokazuje da vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 2R$. Pokažimo da ta tvrdnja $\alpha+\beta+\gamma \leq 2R$ (apsolutne geometrije) prelazi u tvrdnju $\alpha + \beta + \gamma < 2R$ (hiperboličke geometrije).

TEOREM 3.1.1 *Suma $s = \alpha + \beta + \gamma$ kutova trokuta manja je od $2R$.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je $s = 2R$.
Promotrimo sada pravac p i točku T izvan njega. Spustimo okomicu iz T na pravac p i nožište označimo sa N. Zatim u točki T dignimo okomicu na pravac $\overleftrightarrow{TN}$. Označimo tu okomicu sa q. Pravci p i q se ne sijeku. To smo dokazali u apsolutnoj geometriji.
Neka je sad r proizvoljni pravac kroz T koji je različit od q.
Tvrdimo da on mora sjeći pravac p.

Označimo sa $\varepsilon = \angle(q, r)$. Neka je A točka na pravcu p tako da vrijedi $\angle TAN < \varepsilon$ (2.6. Zadaci za vježbu, Zadatak 35.).

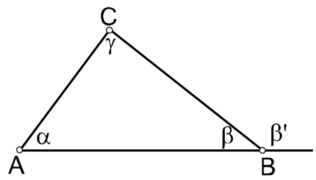


Teorem 3.1.1.

Trokut ΔNTA je pravokutan pa je zbog naše pretpostavke $\angle NTA + \angle NAT \equiv R$. Kako je $\angle TAN < \varepsilon$ onda je $\angle NTA > R - \varepsilon$. Nadalje $\angle(\overrightarrow{TN}, r) = R - \varepsilon$, dakle r je unutar kuta $\angle NTA$ pa pravac r siječe $\overline{NA}$, a onda i p. Vidimo da je q jedini pravac kroz T koji ne siječe p, što je u protuslovlju s Aksiomom (V_H). Dakle, mora biti $s < 2R$. ∎

TEOREM 3.1.2 *Vanjski kut trokuta veći je od sume dvaju nesusjednih unutarnjih kutova.*

DOKAZ. Neka je β' vanjski kut trokuta $\triangle ABC$.



Teorem 3.1.2.

Tada je $\beta + \beta' = 2R$. Prema Teoremu 3.1.1 je $\alpha + \beta + \gamma < 2R$ pa je $\alpha + \beta + \gamma < \beta + \beta'$, tj. $\beta' > \alpha + \gamma$. ∎

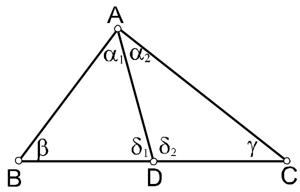
TEOREM 3.1.3 *Suma kutova četverokuta manja je od četiri prava kuta.*

Dakle u ovoj geometriji nema "kvadrata", niti "pravokutnika".

TEOREM 3.1.4 *Kutovi uz gornju osnovicu Saccherijevog četverokuta i četrvrti kut Lambertovog četverokuta su šiljasti.*

TEOREM 3.1.5 *Suma kutova trokuta nije ista za sve trokute.*

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno, tj. da svi trokuti imaju istu sumu kutova. Promotrimo $\triangle ABC$ i odaberimo untrašnju točku D na stranici $\overline{BC}$.

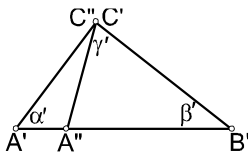


Teorem 3.1.5.

Prema pretpostavci vrijedi $(\alpha_1 + \alpha_2) + \beta + \gamma = \alpha_1 + \beta + \delta_1$. Slijedi $\alpha_2 + \gamma = \delta_1 = 2R - \delta_2$ i dalje $\alpha_2 + \gamma + \delta_2 = 2R$, no to je u protuslovlju s Teoremom 3.1.1 (primjenjenom na trokut $\triangle ADC$). ■

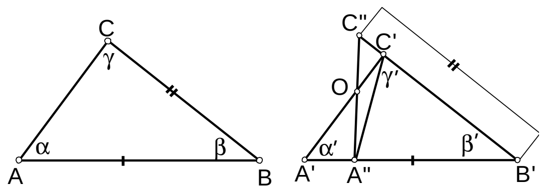
TEOREM 3.1.6 *Dva su trokuta kongruentna ako su im svi kutovi u parovima kongruentni.*

DOKAZ. Neka su dani trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ kojima su kutovi u parovima kongruentni: $\alpha \equiv \alpha'$, $\beta \equiv \beta'$, $\gamma \equiv \gamma'$.
Dovoljno je dokazati da je $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. Naime, tvrdnja će izići primjenom S-K-K poučka o sukladnosti.
Pretpostavimo suprotno, tj. $\overline{AB} \not\equiv \overline{A'B'}$. Prema pravilu trihotomije vrijedi $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ ili $\overline{A'B'} < \overline{AB}$. Pretpostavimo da vrijedi $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ (drugi slučaj posve analogno).
Odredimo točku A'' tako da vrijedi $\overline{AB} \equiv \overline{A''B'}$ i $(A'$-A''-$B')$.
Prenesimo dužinu $\overline{BC}$ na $\overline{B'C'}$ i neka je C'' točka takva da je $\overline{B'C''} \equiv \overline{BC}$.
Može se dogoditi:
(**1**) $C'' = C'$.



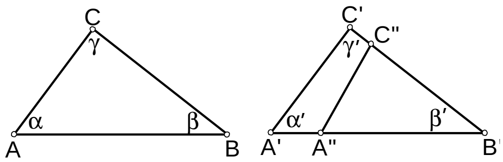
Teorem 3.1.6 (1).

Tada je $\triangle ABC \equiv \triangle A''B'C''$ (po S-K-S poučku). No, onda je $\gamma = \angle A'C''B' \equiv \angle A''C''B'$, a to je u protuslovlju s Aksiomom (III_4).
(**2**) $(B'$-C'-$C'')$.



Teorem 3.1.6 (2).

Promotrimo trokut $\triangle A'B'C'$ i pravac $\overleftrightarrow{A''C''}$. Primjenom Aksioma (II_4), pravac $\overleftrightarrow{A''C''}$ siječe stranicu $\overline{A'C'}$ trokuta $\triangle A'B'C'$ u unutrašnjoj točki O. Vrijedi $\triangle A''B'C'' \overset{\text{(S-K-S)}}{\equiv} \triangle ABC$. Promotrimo sada trokut $\triangle OC'C''$. Dobili smo da je vanjski kut $\angle A'C'B' = \gamma$ trokuta $\triangle OC'C''$ kongruentan nesusjednom unutarnjem kutu $\angle OC''C' = \gamma$, što je u protuslovlju s Teoremom 2.3.30.
(**3**) $(B'$-C''-$C')$.



Teorem 3.1.6 (3).

Vrijedi $\triangle A''B'C'' \overset{\text{(S-K-S)}}{\equiv} \triangle ABC$ pa je zbog kongruentnosti ispunjeno:

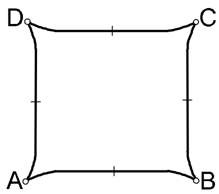
$\angle B'A''C'' \equiv \angle BAC = \alpha,$

$\angle A''C''B' \equiv \angle ACB = \gamma.$

Promotrimo sada četverokut $A'A''C''C'$. Imamo da je

$s(A'A''C''C') = \alpha + (2R - \alpha) + (2R - \gamma) + \gamma = 4R,$

što je u protuslovlju s Teoremom 3.1.3. ■

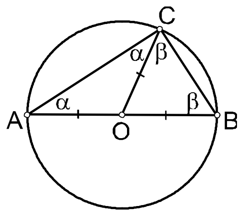


Pseudokvadrat.

Dakle, u neeuklidskoj geometriji nema pojma sličnih trokuta. Prema Teoremu 3.1.3 slijedi da u hiperboličnoj geometriji nema ni kvadrata niti pravokutnika, ali postoji **pseudokvadrat**: to je četverokut koji ima kongruentne stranice i svi kutovi su mu šiljasti.
Isto tako, u hiperboličkoj geometriji ne vrijedi poučak o obodnom i središnjem kutu i posebno Talesov poučak (obodni kut nad promjerom kružnice je pravi). Vrijedi međutim njegov analogon.

TEOREM 3.1.7 *Obodni kut nad promjerom kružnice je šiljasti.*

DOKAZ. Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice $k(O, r)$ i $\angle ACB$ obodni kut nad $\overline{AB}$. Promotrimo $\triangle ABC$. Spojimo točku C s točkom O. Trokut $\triangle AOC$ je jednakokračan jer je $\overline{AO} \equiv \overline{OC} = r$. I trokut $\triangle OBC$ je jednakokračan. Sada je $\angle ACO \equiv \angle CAO = \alpha$ i $\angle OCB \equiv \angle OBC = \beta$.



Teorem 3.1.7.

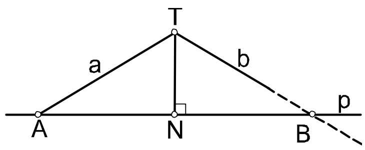
Po Teoremu 3.1.1 je $\alpha+\beta+\gamma < 2R$ i, jer je $\gamma = \alpha+\beta$, imamo da je $2\alpha+2\beta < 2R$, tj. $\alpha + \beta < R$. Dakle, $\angle ACB < R$. ∎

3.2 PARALELE I RAZILAZNI PRAVCI

Pojam paralela u hiperboličkoj geometriji nije isti kao u euklidskoj geometriji. Naime, po Aksiomu (V_H) točkom izvan zadanog pravca prolaze bar dva pravca koja ne sijeku dani pravac.

TEOREM 3.2.1 *Neka je dana točka T van pravca p i neka je $\overleftrightarrow{TN}$ okomica iz točke T na pravac p. Ako pravci a i b koji prolaze točkom T zatvaraju kongruentne kutove s okomicom $\overleftrightarrow{TN}$, tada pravci a i b istovremeno oba ili sijeku ili ne sijeku pravac p.*

DOKAZ. Neka je dan pravac p, točka T van njega i označimo sa N nožište okomice iz T na p. Neka su a i b pravci koji prolaze točkom T i neka vrijedi $\angle(a, \overrightarrow{TN}) \equiv \angle(b, \overrightarrow{TN})$.

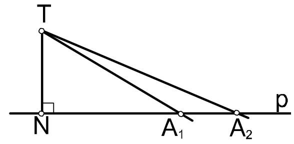


Teorem 3.2.1.

Neka pravac a siječe p i u točki A. Uočimo dužinu $\overline{AN}$. Odredimo točku B tako da vrijedi $(A\text{-}N\text{-}B)$ i $\overline{AN} \equiv \overline{NB}$. Trokuti $\triangle ANT$ i $\triangle TNB$ su kongruentni pa je $\angle ATN \equiv \angle BTN$, tj. $\angle(a, \overrightarrow{TN}) \equiv \angle BTN$ i $\angle(a, \overrightarrow{TN}) \equiv \angle(b, \overrightarrow{TN})$ i zbog jedinstvenosti mora biti $b \equiv \overleftrightarrow{TB}$, tj. pravac b siječe p.
Pretpostavimo sada da pravac a ne siječe p. Tvrdimo da pravac b ne siječe p. Naime, kad bi pravac b sijekao p onda bi, prema prethodnom, i pravac a sijekao p - suprotno našoj pretpostavci. ∎

TEOREM 3.2.2 *Ako je $\overleftrightarrow{TN}$ okomica iz točke T na pravac p i A varijabilna točka jednog polupravca od p s početkom u N, onda kut $\angle NTA$ monotono raste ostajući uvijek šiljasti ukoliko dužina $\overline{NA}$ monotono raste.*

DOKAZ. Neka je $\overline{NA_1} < \overline{NA_2}$. Tvrdimo da je $\angle NTA_1 < \angle NTA_2$.

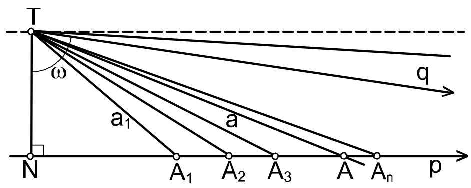


Teorem 3.2.2.

Kako je $\overline{NA_1} < \overline{NA_2}$ vrijedi (N-A_1-A_2) pa je $\overrightarrow{TA_1}$ unutarnji polupravac kuta $\angle NTA_2$, tj. $\angle NTA_1 < \angle NTA_2$. Nadalje kako je suma kutova u trokutu manja od $2R$ i $\angle N = R$ zaključujemo da je $\angle NTA_2$ šiljasti kut. ∎

TEOREM 3.2.3 *Ako udaljenost nožišta N okomice $\overleftrightarrow{TN}$ iz T na pravac p od sjecišta A pravca p s varijabilnim pravcem a kroz T neograničeno raste, tada kut $\angle(\overrightarrow{TN}, a)$ konvergira određenom kutu ω koji je manji od R. Svaki pravac a koji prolazi kroz T i s polupravcem $\overrightarrow{TN}$ tvori kut $\varphi < \omega$ siječe p, a svaki pravac b kroz T koji s polupravcem $\overrightarrow{TN}$ tvori kut $\omega \leq \varphi \leq R$ ne siječe p.*

DOKAZ. Promotrimo niz polupravaca s početkom u točki T koji sijeku pravac p. Neka su to polupravci $a_1, a_2 \ldots, a_n, \ldots$ i sjecišta tih polupravaca s pravcem p označimo sa $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ i neka udaljenosti od A_i do N neograničeno rastu. Označimo sa $\varphi_n = \angle NTA_n$, $n \in \mathbb{N}$. Prema Teoremu 3.2.2, kutovi φ_n monotono rastu, tj. $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ i vrijedi $\varphi_n < R$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, (φ_n) je monotono rastući i odozgo omeđeni niz pa postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \omega$ i $\omega \leq R$.
Neka je q pravac za koji je $\angle(\overrightarrow{TN}, q) = \omega$. Neka je a pravac kroz T sa svojstvom da je $\angle(\overrightarrow{TN}, a) = \varphi < \omega$.

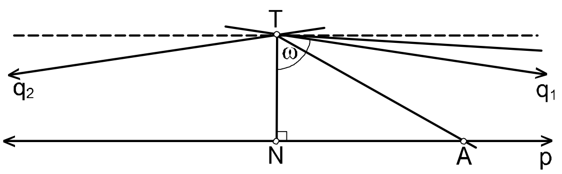


Teorem 3.2.3.

(1) Pravac a siječe p.
Kako je $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi < \varphi_n < \omega$, čim je $n \geq n_0$. Dakle, za gotovo sve $n \in \mathbb{N}$ je $\angle(\overrightarrow{TN}, a) = \varphi < \varphi_n$, tj. a je unutarnja zraka kuta φ_n, $n \geq n_0$. Kako je $\varphi_n = \angle NTA_n$, tj. a je unutarnji polupravac kuta $\angle NTA_n$, mora a sječi $\overline{NA_n}$, dakle postoji točka A na pravcu a i (N-A-A_n) (po Teoremu 2.2.17).
(2) Pravac q ne siječe p.
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji zajednička točka Q pravaca p i q. Kako dužina $\overline{NA_n}$, $n \in \mathbb{N}$, stalno raste mora postojati $n \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $\overline{NQ} <$

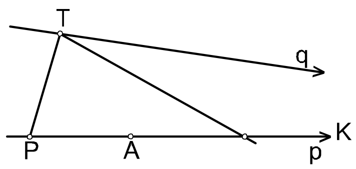
$\overline{NA_n}$. No, to bi povlačilo da je $\angle NTQ < \angle NTA_n$, tj. $\omega < \varphi_n$ - što je u protuslovlju s činjenicom da je $\varphi_n < \omega$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
(3) Proizvoljni pravac b koji prolazi točkom T i za koji vrijedi $\angle(\overrightarrow{TN}, b) = \varphi$ i $\omega \leq \varphi \leq R$ ne siječe p.
Kad bi pravac b sjekao p onda bi pogotovo pravac q morao sjeći p, što je u protuslovlju s prethodno dokazanom tvrdnjom.
(4) Preostaje dokazati da je $\omega < R$.
Pretpostavimo suprotno, tj. $\omega = R$. Tada bi svaki pravac a sa svojstvom $\angle(\overrightarrow{TN}, a) < \omega$ sjekao pravac p pa bi q bio jedini pravac koji ne siječe p što je u protuslovlju s Aksiomom (V_H) koji kaže da postoje barem dva različita takva pravca. ■
Iz prethodna dva teorema slijedi da vrijedi sljedeći teorem.

TEOREM 3.2.4 *Ako je T bilo koja točka koja nije na pravcu p tada postoje točno dva pravca q_1 i q_2 točkom T, simetrična obzirom na okomicu iz T na p, koji ne sijeku pravac p i imaju svojstvo da svaki pravac koji prolazi točkom T unutar onog kuta $\angle(q_1, q_2)$ u kojem je okomica iz T na p, siječe pravac p, a svi ostali pravci točkom T ne sijeku pravac p.*



Teorem 3.2.4.

DEFINICIJA 3.2.5 *Neka je p bilo koji pravac i T bilo koja točka izvan njega te P i A bilo koje točke pravca p. Tada ćemo pravac q koji prolazi točkom T zvati* ***paralelom s pravcem** p **kroz točku** T **u smjeru od** P **prema** A, i pisati $q \overset{T}{\underset{\overrightarrow{PA}}{\parallel}} p$, ako pravac q ne siječe p i ako svaki polupravac unutar kuta $\angle(\overrightarrow{TP}, q)$ u kojem leži točka A siječe pravac p.*



Definicija 3.2.5.

U Euklidskoj geometriji se govorilo da paralelni pravci imaju beskonačno daleku zajedničku točku. Slično tomu se i u hiperboličkoj geometriji govori - sada imamo dvije zajedničke točke u beskonačnosti, dva kraja, pa ima smisla pisati $q \overset{T}{\underset{K}{\parallel}} p$ - paralela q sa p kroz T prema kraju K.

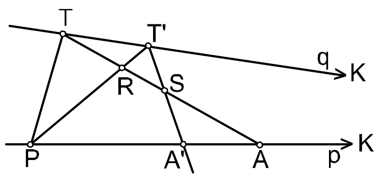
TEOREM 3.2.6 *Ako je* $q \underset{K}{\overset{T}{\|}} p$ *i* $T' \neq T$ *proizvoljna točka pravca* q *različita od* T*, onda je i* $q \underset{K}{\overset{T'}{\|}} p$.

DOKAZ. Da bismo dokazali da je $q \underset{K}{\overset{T'}{\|}} p$ treba dokazati da se q i p ne sijeku (što je istinito), i da za proizvoljnu odabranu točku P na pravcu p svaki polupravac $\overrightarrow{T'S}$ unutar kuta $\angle(\overrightarrow{T'P}, q)$ siječe pravac p. Razlikujemo dva moguća slučaja: (T-T'-K) i (T'-T-K).

(A) Prvi slučaj: (T-T'-K).

(1) Odaberimo proizvoljni polupravac $\overrightarrow{T'S}$ unutar kuta $\angle(\overrightarrow{T'P}, q)$ gdje je S s iste strane pravca p kao i T'. Ukoliko S leži na pravcu p tada je dokaz gotov, a ako T' i S leže s različitih strana pravca p tada $\overline{T'S}$ siječe p i je opet je dokaz gotov.

(2) Dokažimo da je S unutarnja točka $\angle(\overrightarrow{TP}, q)$.



Teorem 3.2.6 (A).

(2a) Budući je S unutarnja točka kuta $\angle(\overrightarrow{T'P}, q)$, S je s iste strane pravca q kao i P. Dakle, točka S je s iste strane pravca q kao i polupravac $\overrightarrow{TP}$.

(2b) Treba još pokazati da je S s iste strane pravca $\overleftrightarrow{TP}$ kao i kraj K. Pretpostavimo suprotno, tj. neka su S i K su sa suprotnih strana $\overleftrightarrow{TP}$. Primjenimo Paschov aksiom (II_4) na trokut $\triangle PTT'$ i pravac $\overleftrightarrow{SK}$: pravac $\overleftrightarrow{SK}$ siječe dužinu $\overline{TP}$ (točke S i K su sa suprotnih strana pravca $\overleftrightarrow{TP}$) i ne siječe dužinu $\overline{TT'}$ (protuslovlje s pretpostavkom (T-T'-K)) pa mora sjeći $\overline{PT'}$. To znači da točka S leži sa suprotne strane pravca $\overleftrightarrow{PT'}$ nego polupravac $\overrightarrow{T'K}$ - što je u protuslovlju s pretpostavkom da je S unutarnja točka kuta $\angle PT'K$.

(3) Dokazali smo da je S unutarnja točka $\angle(\overrightarrow{TP}, q)$ pa zbog $q \underset{K}{\overset{T}{\|}} p$ postoji točka A u kojoj polupravac $\overrightarrow{TS}$ siječe p.

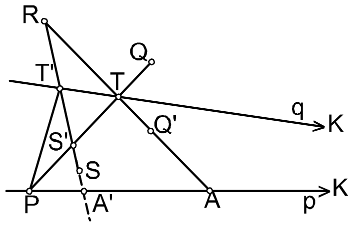
(4) Dokažimo da polupravac $\overrightarrow{T'S}$ siječe dužinu $\overline{PA}$ u nekoj točki A'.

Po Teoremu 2.2.17 polupravac $\overrightarrow{TS}$ siječe $\overline{PT'}$ u nekoj unutarnjoj točki R, tj. (P-R-T') i R leži na $\overrightarrow{TS}$. Vrijedi (R-S-A), jer bi u suprotnome, ako je (S-R-A), točka S bi bila vanjska točka kuta $\angle(\overrightarrow{T'P}, q)$ - protuslovlje s našom pretpostavkom. Primjenimo sada Paschov aksiom (II_4) na trokut $\triangle PRA$ i polupravac $\overrightarrow{T'S}$: on mora sjeći stranicu $\overline{PA}$ u nekoj točki A'.

Dakle, u ovom slučaju je zaista $q \overset{T'}{\underset{K}{\|}} p$.

(B) Drugi slučaj: (T'-T-K).

Odaberimo proizvoljni unutarnji polupravac $\overrightarrow{T'S}$ kuta $\angle(\overrightarrow{T'P}, \overrightarrow{T'K})$. Slučaj kad je S na pravcu p i slučaj kada je S sa suprotne strane pravca p nego što je T' su očiti. Razmotramo stoga slučaj kad su T' i S s iste strane pravca p.



Teorem 3.2.6 (B).

(1) Prema Teoremu 2.2.17 polupravac $\overrightarrow{T'S}$ siječe dužinu $\overline{PT}$ u nekoj unutarnjoj točki S'.

(2) Odaberimo točku R sa suprotne strane od T' nego što je S', tj. neka vrijedi (R-T'-S').

(3) Označimo sa Q točku za koju je (P-T-Q) i sa Q' točku za koju je (R-T-Q').

(4) R je unutarnja točka kuta $\angle T'TQ$ pa je $\overrightarrow{TR}$ je unutarnji polupravac kuta $\angle T'TQ$.

Točke R i T' leže s iste strane pravca $\overleftrightarrow{PT}$ (u protivnom bi vrijedilo (R-S'-T')), točke R i P su s različitih strana pravca $\overleftrightarrow{TT'} \equiv q$ (R i S' su sa različitih strana od q, a P i S' su s iste strane od q) i zaista je R je unutarnja točka kuta $\angle T'TQ$.

(5) Slijedi da komplementaran polupravac $\overrightarrow{TQ'}$ leži unutar kuta $\angle PTK$.

(6) No, po pretpostavci je $q \overset{T}{\underset{K}{\|}} p$ pa polupravac $\overrightarrow{TQ'}$ siječe p u nekoj točki A.

(7) Promotrimo sada trokut $\triangle PTA$ i pravac $\overleftrightarrow{RS}$. Po Paschovom aksiomu (II_4) taj pravac mora sjeći dužinu $\overline{PA}$ u nekoj unutarnjoj točki A'.

Dakle, i u ovom slučaju je $q \overset{T'}{\underset{K}{\|}} p$. ■

Iz prethodnog teorema proizlazi da se uloga točke T može bez poteškoća zanemariti pa ima smisla nova oznaka $q \underset{K}{\|} p$.

TEOREM 3.2.7 *Ako je $q \underset{K}{\|} p$, onda je i $p \underset{K}{\|} q$.*

DOKAZ. Odaberimo proizvoljnu točku P na pravcu p proizvoljnu točku Q na pravcu q. Da je $p \underset{K}{\|} q$ treba pokazati da p i q nemaju zajedničkih točaka (što je ispunjeno jer je po pretpostavci $q \underset{K}{\|} p$) i da svaki unutarnji polupravac $\overrightarrow{PS}$ kuta $\angle QPK$ siječe pravac q.

Slučaj kada S leži na q i slučaj kada je S sa supotne strane od q nego je p su očiti. Zato promotrimo slučaj kada su P i S s iste strane pravca q.

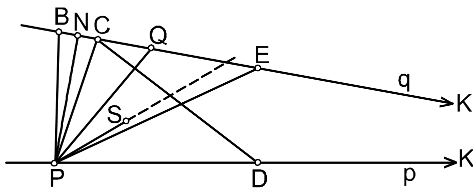
(1) Neka je N nožište okomice iz P na q. Odaberimo kut

$$\alpha < \min\left\{\angle NPQ, \tfrac{1}{2}\angle SPK\right\}.$$

(2) Nanesimo kut α i u jednu i u drugu poluravninu određenu pravcem $\overleftrightarrow{PN}$ s vrhom u točki P. Sjecišta krakova sa pravcem q označimo sa B i C.

(3) Budući je $\alpha < \angle NPQ$ vrijedi i $(N$-C-$Q)$.

(4) Promotrimo trokute $\triangle PNB$ i $\triangle PNC$. Oni su kongurentni po $(K$-S-$K)$ poučku o sukladnosti. Dakle, vrijedi $\overline{PB} \equiv \overline{PC}$ i $\angle PBC \equiv \angle PCB < R$ (trokut $\triangle\ PBC$ je jednokračan pa su mu kutovi uz osnovicu šiljasti).



Teorem 3.2.7.

(5) Promotrimo sada kut $\angle PCK$. On je sukut kuta $\angle PCB$ pa vrijedi

$$\angle PCK > R > \angle PBC \equiv \angle PCB.$$

(6) Prenesimo sada kut $\angle PBC$ na $\overrightarrow{CP}$ s vrhom u C prema K. Time smo dobili unutarnji polupravac kuta $\angle PCK$, a budući je $q \underset{K}{\|} p$ taj polupravac siječe p u nekoj točki D.

(7) Prenesimo sada dužinu $\overline{CD}$ od točke B prema K i neka je E takva točka da vrijedi $\overline{CD} \equiv \overline{BE}$.

(8) Promotrimo trokute $\triangle PBE$ i $\triangle PCD$. Oni su kongurentni (po S-K-S poučku). Dakle, $\angle BPE \equiv \angle CPD$.

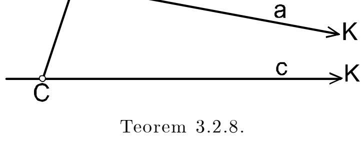
(9) Konačno imamo

$$\angle DPE \equiv \angle DPC - \angle EPC \equiv \angle EPB - \angle EPC \equiv \angle CPB = 2\alpha < \angle SPK$$

pa je $\overrightarrow{PS}$ unutarnji polupravac kuta $\angle EPB$ i stoga on siječe dužinu $\overline{BE}$. Dakle, $p \underset{K}{\|} q$. ∎

TEOREM 3.2.8 *Ako je* $a \underset{K}{\|} c$ *i* $b \underset{K}{\|} c$ *onda je* $a \underset{K}{\|} b$.

DOKAZ. Primjetimo da se a i b ne sijeku.



Teorem 3.2.8.

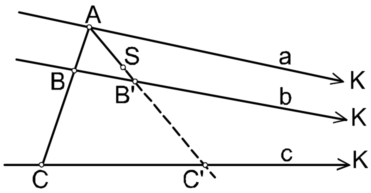
Naime kad bi sjekli, tj. postojala zajednička točka T pravaca a i b (vidi prethodnu sliku) onda bi a bio unutarnji polupravac kuta $\angle(\overrightarrow{TC}, b)$ pa bi sjekao pravac c, a to je u protuslovlju s našom pretpostavkom $a \underset{K}{\|} c$.

Razlikujemo dva slučaja.

(A) Pravci a i b su s iste strane pravca c.

Najprije, bez smanjenja općenitosti, možemo uzeti da su pravci a i c sa suprotnih strana od b. Dokažimo da vrijedi $a \underset{K}{\|} b$. Odaberimo proizvoljne točke $A \mathrel{\ni\!\!\!\in} a$ i $B \mathrel{\ni\!\!\!\in} b$. Treba dokazati da svaki unutarnji polupravac $\overrightarrow{AS}$ kuta $\angle BAK$ siječe pravac b. Razmotrimo jedini netrivijalni slučaj kada su točke A i S s iste strane pravca b. Odaberimo proizvoljnu točku C pravca c.

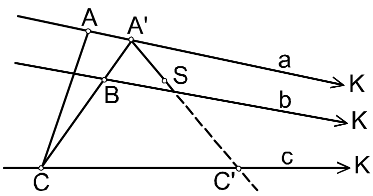
Mogu nastupiti tri slučaja.



Teorem 3.2.8 (1).

(1) Točke A, B i C su kolinearne, tj. $\angle KCB \equiv \angle KCA$.

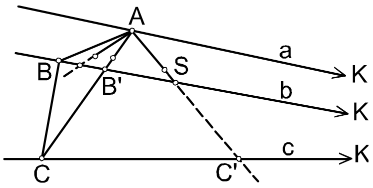
Unutarnji polupravac $\overrightarrow{AS}$ kuta $\angle BAK$ je unutarnji polupravac kuta $\angle CAK$ pa, jer je po pretpostavci $a \underset{K}{\|} c$, polupravac $\overrightarrow{AS}$ siječe pravac c u točki C'. Kako su sada A i C' sa suprotne strane od pravca b to polupravac $\overrightarrow{AC'}$ siječe pravac b u nekoj točki B'.



Teorem 3.2.8 (2).

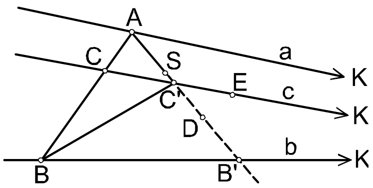
(2) Točke A, B i C nisu kolinearne i neka je $\angle KCB < \angle KCA$. Tada je $\overrightarrow{CB}$ unutarnji polupravac kuta $\angle KCA$ i, jer je $c \underset{K}{\|} a$, imamo da $\overrightarrow{CB}$ siječe pravac a u nekoj točki A'. Sada su A', B i C kolinearne točke i da je $a \overset{A'}{\underset{K}{\|}} b$, tj. $a \underset{K}{\|} b$ (po Teoremu 3.2.6) slijedi iz prethodnog slučaja.

(3) Točke A, B i C nisu kolinearne i neka je $\angle KCA < \angle KCB$.



Teorem 3.2.8 (3).

Sada je $\overrightarrow{CA}$ unutarnji polupravac kuta $\angle KCB$ i jer je $c \underset{K}{\|} b$ mora $\overrightarrow{CA}$ siječi pravac b u nekoj točki B'. Neka je $\overrightarrow{AS}$ unutarnji polupravac kuta $\angle BAK$. Ako je $\angle SAK < \angle B'AK$ onda radimo kao u slučaju (1). Trivijalni je slučaj i kada je točka S na $\overline{AB'}$. Ako je $\angle SAK > \angle B'AK$, onda je $\overrightarrow{SA}$ unutarnji polupravac kuta $\angle BAB'$ pa siječe $\overline{BB'}$ (po Teoremu 2.2.15).
Dakle, u svim mogućim slučajevima smo pokazali da je $a \underset{K}{\|} b$.
(B) Neka su sada a i b sa suprotnih strana pravca c i neka su $A \ni\!\in a$ i $B \ni\!\in b$ proizvoljne točke. Tada pravac c siječe $\overline{AB}$ u nekoj točki C.



Teorem 3.2.8 (3).

(**1**) Neka je $\overrightarrow{AS}$ unutarnji polupravac kuta $\angle BAK$. Tada je $\overrightarrow{AS}$ unutarnji polupravac i kuta $\angle CAK$ i jer je $a \underset{K}{\|} c$ on siječe pravac c u nekoj točki C'.
(**2**) Pokažimo da polupravac $\overrightarrow{AS}$ prolazi nutrinom kuta $\angle BC'K$.
(**2a**) Odaberimo bilo koju točku D tako da je $(A\text{-}C'\text{-}D)$ i bilo koju točku E tako da je $(C\text{-}C'\text{-}E)$.
(**2b**) Pokažimo da je D unutarnja točka kuta $\angle BC'K$.
Budući su A i D sa suprotne strane pravca c te B i D s iste strane pravca c, imamo da je točka D s iste strane pravca c kao i $\overrightarrow{C'B}$. Nadalje, C i A su sa iste strane pravca $\overleftrightarrow{C'B}$ te C i E sa suprotnih strane pravca $\overleftrightarrow{C'B}$ pa su A i E sa suprotnih strana pravca $\overleftrightarrow{C'B}$. Dobili smo da su točke A i E te A i D sa suprotnih strana pravca $\overleftrightarrow{C'B}$ pa su stoga D i $\overrightarrow{C'K}$ s iste strane pravca $\overleftrightarrow{C'B}$.
Dakle, D je unutarnja točka kuta $\angle BC'K$.
(**3**) Time smo pokazali da je $\overrightarrow{C'D}$ unutarnji polupravac kuta $\angle BC'K$ i, zbog $c \underset{K}{\|} b$, on siječe pravac b u nekoj točki B'.
Dakle, i $\overrightarrow{AS}$ siječe b u točki B, a to je i trebalo dokazati. ∎

NAPOMENA 3.2.9 Budući se refleksivnost podrazumijeva, iz prethodnih teorema slijedi da je "biti paralelan" relacija ekvivalencije među pravcima.

Nije teško dokazati i tvrdnju narednog teorema (dokažite, korisna vježbe!)

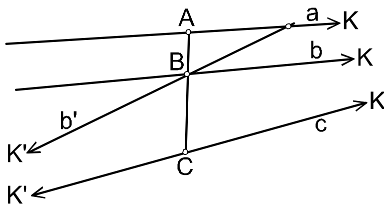
TEOREM 3.2.10 *Ako je $a \underset{K}{\|} b$ te pravci a i b leže sa suprotnih strana pravca c, onda je $c \underset{K}{\|} a$ i $c \underset{K}{\|} b$.*

DEFINICIJA 3.2.11 *Za dva pravca u istoj ravnini koji se ne sijeku i nisu paralelni kažemo da su **razilazni.***

Za razilazne pravce a i b koristit ćemo oznaku $a\,)(\,b$.

NAPOMENA 3.2.12 U hiperbolnoj geometriji postoji pravac koji siječe dvije paralele, ali treću paralelu ne siječe.

Opišimo tu konstrukciju. Neka je $a \underset{K}{\|} b$ i $b \underset{K}{\|} c$.

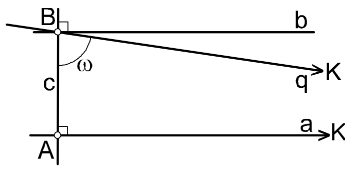


Napomena 3.2.12.

Odaberimo proizvoljne točke $A \ni\!\!\in a$ i $C \ni\!\!\in c$. Budući su A i C sa suprotnih strana pravca b to postoji točka $B \ni\!\!\in b$ u kojoj b siječe $\overline{AC}$. Točkom B povucimo paralelu $b' \underset{K'}{\|} c$. Paralela b' siječe pravace b i a, a ne siječe pravac c.

TEOREM 3.2.13 *Ako su a i b okomiti na pravac c onda su oni razilazni.*

DOKAZ. Povucimo točkom B paralelu q s pravcem a, $q \underset{K}{\|} a$. Neka je $\omega = \angle ABK$.

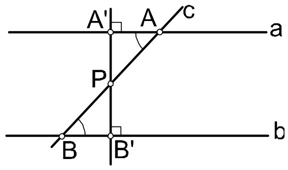


Teorem 3.2.13.

Vrijedi $\omega < R$, jer po Teoremu 3.2.2 imamo da se pravci a i b ne sijeku. Osim toga b nije paralelan sa a. Dakle, a i b su razilazni pravci. ∎

TEOREM 3.2.14 *Ako pravac c siječe pravce a i b i tvori s njima kongruentne izmjenične kutove, onda su pravci a i b razilazni.*

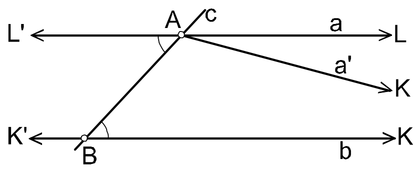
DOKAZ. Odredimo polovište P dužine $\overline{AB}$. Iz točke P spustimo okomicu na a s nožištem A' i okomicu na b s nožištem B'.



Teorem 3.2.14.

Promotrimo trokute $\triangle PAA'$ i $\triangle PBB'$. Po pretpostavci je $\angle A \equiv \angle B$, po konstrukciji je $\angle A' \equiv \angle B' \equiv R$ i $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ pa po K-K-S poučku o sukladnosti imamo $\triangle PAA' \equiv \triangle PBB'$. Posebno je i $\angle APA' \equiv \angle BPB'$ pa su to vršni kutovi i točke P, A' i B' su kolinearne. Dobili smo da $\overleftrightarrow{A'B'}$ siječe pravac c u točki P pa su A' i B' sa suprotnih strana pravca c. Sada je $\overleftrightarrow{A'B'}$ pravac sa svojstvom da su pravci a i b okomiti na njega i primjenom prethodnog teorema zaključujemo da su pravci a i b razilazni. ■

Neka su sada a i b pravci sa svojstvom da ih pravac c siječe u točkama A i B i tvori jednake izmjenične kutove. Povucimo točkom A paralelu a' s b prema kraju K.



Teorem 3.2.15.

Po pretpostavci je $\angle ABK \equiv \angle BAL'$. Budući je $\angle BAL' + \angle BAL = 2R$, vrijedi $\angle ABK + \angle BAL = 2R$. Nadalje, iz $a\,)(\,b$ imamo da je $\angle BAL > \angle BAK$. Dakle, vrijedi $\angle BAK + \angle ABK < 2R$. Dobili smo: ako je $a' \underset{K}{\|} b$, onda vrijedi $\angle BAK + \angle ABK < 2R$. Time smo dokazali tvrdnju koja je negacija Petog Euklidovog postulata.

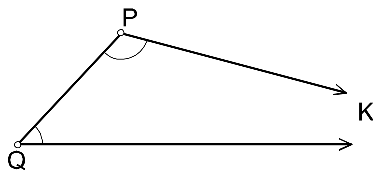
TEOREM 3.2.15 *Pravac c koji siječe dva paralelna pravca a i b u točkama A i B tvori sa njima unutrašnje kutove čiji je zbroj manji od $2R$.*

3.3 ASIMPTOTSKI TROKUTI

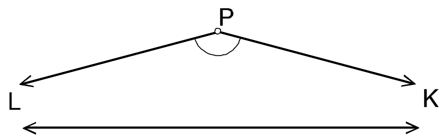
DEFINICIJA 3.3.1 *Figuru koju čine dvije točke P i Q, njihova spojnica $\overline{PQ}$ i polupravci $\overrightarrow{PK}$ i $\overrightarrow{QK}$ paralelni prema kraju K zovemo* ***jednokrajnikom.*** *Figuru koju čine točke P, dva kraja K i L, pravac $\overleftrightarrow{KL}$ i polupravci $\overrightarrow{PK}$ i $\overrightarrow{PL}$*

paralelni s pravcem $\overleftrightarrow{KL}$ prema njihovim krajevima K i L, nazivamo ***dvokrajnikom****. Figuru koju čine tri pravca $\overleftrightarrow{KL}$, $\overleftrightarrow{KM}$ i $\overleftrightarrow{LM}$ paralelna u parovima prema krajevima K, L i M, ali ne sva tri paralelna istom kraju, ta tri kraja K, L i M nazivamo* ***trokrajnikom****.*

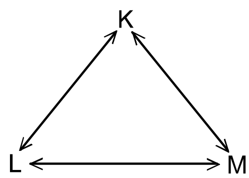
Jednokrajniku PQK točke P i Q su konačni vrhovi, K kraj ili beskonačni vrh, $\overline{PQ}$ konačna stranica, a $\angle KPQ$ i $\angle KQP$ kutovi jednokrajnika. Dvokrajniku PKL točka P je konačni vrh, K i L su beskonačni vrhovi, a $\angle KPL$ kut dvokrajnika. Trokrajnik KLM nema kutova, ima tri beskonačna vrha i tri beskonačne stranice.



Jednokrajnik.



Dvokrajnik.



Trokrajnik.

Jednokrajnici, dvokrajnici i trokrajnici se kraće nazivaju **asimptotskim trokutima**.

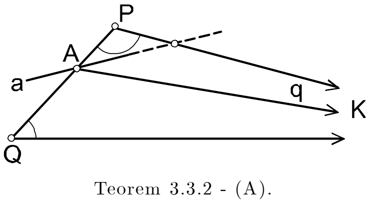
TEOREM 3.3.2 *Ako pravac a ne prolazi niti jednim vrhom asimptotskog trokuta, a siječe jednu njegovu stranicu, onda a siječe još točno jednu stranicu tog trokuta.*

DOKAZ. Dajemo dokaz samo za jednokrajnik. Neka su dani jednokrajnik PQK i pravac a. Razlikujemo dva slučaja:

(A) Pravac a siječe konačnu stranicu, tj. neka a siječe stranicu $\overline{PQ}$ u točki A, tj. neka vrijedi (P-A-Q).

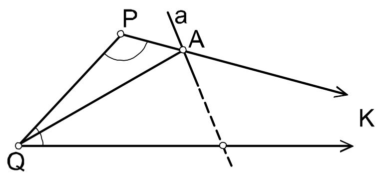
(1) Povucimo točkom A paralelu q sa pravcem $\overleftrightarrow{QK}$ prema kraju K.

Tada pravac a prolazi nutrinom kuta $\angle QAK$ ili pak nutrinom kuta $\angle PAK$. Primjetimo da je $a \neq q$, jer bi u tom slučaju a prolazio vrhom K.



Teorem 3.3.2 - (A).

(2) Ako pravac a prolazi nutrinom kuta $\angle PAK$, onda zbog $q \underset{K}{\|} \overleftrightarrow{PK}$ on siječe polupravac $\overrightarrow{PK}$.
(3) Ako pravac a prolazi nutrinom kuta $\angle QAK$, onda zbog $q \underset{K}{\|} \overleftrightarrow{QK}$ on siječe polupravac $\overrightarrow{QK}$.
(B) Pravac a siječe beskonačnu stranicu $\overrightarrow{PK}$ u točki A.

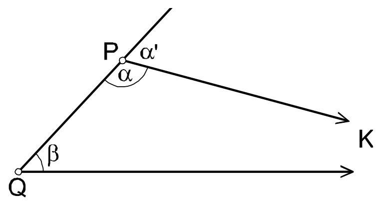


Teorem 3.3.2 - (B).

(1) Spojimo A sa Q. Tada pravac a ili prolazi nutrinom kuta $\angle PAQ$ ili nutrinom kuta $\angle QAK$. Ne može biti na spojnici $\overline{AQ}$, jer bi u tom slučaju pravac a prolazio vrhom Q.
(2) Ako pravac a prolazi nutrinom kuta $\angle PAQ$, onda on po Teoremu 2.2.17 siječe $\overline{PQ}$.
(3) Ako pravac a prolazi nutrinom kuta $\angle QAK$, onda zbog $\overleftrightarrow{PK} \underset{K}{\|} \overleftrightarrow{QK}$ siječe $\overrightarrow{QK}$. ■

TEOREM 3.3.3 *Vanjski kut jednokrajnika veći je od nesusjednog unutrašnjeg kuta.*

DOKAZ. Prema Teoremu 3.2.15 je $\alpha + \beta < 2R$.



Teorem 3.3.3.

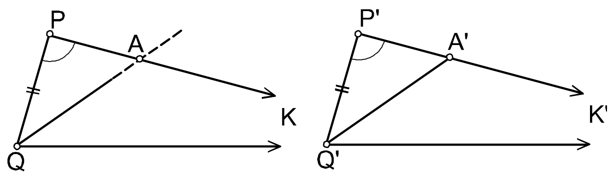
No, s druge strane je $\alpha + \alpha' = 2R$, tj. $\alpha + \beta < \alpha + \alpha'$. Slijedi $\beta < \alpha'$, što je i trebalo dokazati. ■

DEFINICIJA 3.3.4 *Za dva jednokrajnika kažemo da su* ***kongruentni*** *ako su im kongruentne konačne stranice te ako su im odgovarajući kutovi kongruentni.*

TEOREM 3.3.5 *Dva su jednokrajnika kongruentna:*

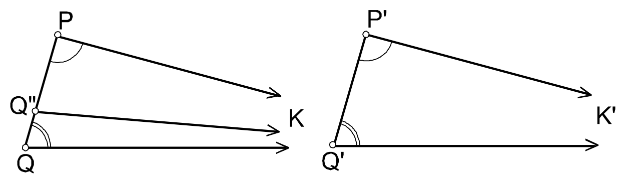
(a) *ako su im kongruentne konačne stranice i jedan kut;*
(b) *ako su im kongruentni kutovi.*

DOKAZ. (a) Neka su dani jednokrajnici PQK i $P'Q'K'$ takvi da vrijedi $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$ i $\angle P \equiv \angle P'$.



Teorem 3.3.5 - (a).

Tvrdimo da je $\angle Q \equiv \angle Q'$.
Pretpostavimo suprotno, tj. $\angle Q < \angle Q'$ ili $\angle Q > \angle Q'$. Razmotrimo slučaj kada je $\angle Q > \angle Q'$.
(1) Prenesimo kut $\angle Q'$ s vrhom u Q duž $\overrightarrow{QP}$ prema kraju: dolazimo do kuta $\angle P'Q'K'$ koji je kongruentan kutu $\angle PQA$.
(2) Po definiciji paralelnosti preneseni krak mora siječi polupravac $\overrightarrow{PK}$ u nekoj točki A.
(3) Odredimo sada točku A' na $\overrightarrow{P'K'}$ tako da vrijedi $\overline{PA} \equiv \overline{P'A'}$ i $(P\text{-}A\text{-}K)$.
(4) Sada je $\triangle PQA \equiv \triangle P'Q'A'$ (po S-K-S poučku). Slijedi da je $\angle P'Q'A' \equiv \angle PQA$.
(5) Po konstrukciji je $\angle P'Q'K' \equiv \angle PQA$, a po (4) imamo $\angle P'Q'A' \equiv \angle PQA$ pa je $\angle P'Q'K' \equiv \angle P'Q'A'$, što je u protuslovlju s Aksiomom (III_4).
(b) Neka su dani jednokrajnici PQK i $P'Q'K'$ takvi da vrijedi $\angle P \equiv \angle P'$ i $\angle Q \equiv \angle Q'$.

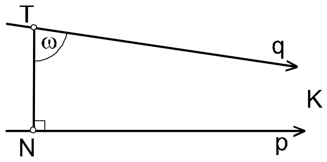


Teorem 3.3.5 - (b).

Tvrdimo da je $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$. Pretpostavimo suprotno, tj. $\overline{PQ} < \overline{P'Q'}$ ili $\overline{P'Q'} < \overline{PQ}$. Razmotrimo slučaj $\overline{P'Q'} < \overline{PQ}$.
(1) Odredimo točku Q'' tako da vrijedi $(P\text{-}Q''\text{-}Q)$ i $\overline{PQ''} \equiv \overline{P'Q'}$.
(2) Točkom Q'' povucimo paralelu s $\overleftrightarrow{QK}$ prema K.
(3) Dobili smo novi jednokrajnik $PQ''K$ i prema tvrdnji (a) vrijedi da je $PQ''K \equiv P'Q'K'$ pa je i $\angle Q'' \equiv \angle Q'$.
(4) No, po pretpostavci je $\angle Q \equiv \angle Q'$ pa je $\angle Q'' \equiv \angle Q$.
(5) Pogledajmo sada jednokrajnik $QQ''K$. Njemu je $\angle PQ''K \equiv \angle Q''$ vanjski kut i kongruentan je nesusjednom unutrašnjem kutu $\angle Q$, što je u protuslovlju s Teoremom 3.3.3. ∎

3.4 FUNKCIJA LOBAČEVSKOG

Neka je dan pravac p i točka T van njega. Povucimo točkom T paralelu q sa p prema kraju K i neka je N nožište okomice iz točke T na p.

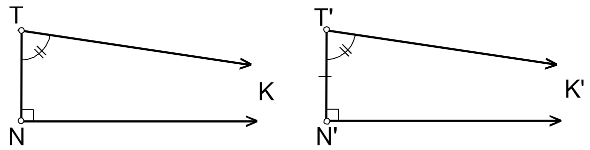


Definicija 3.4.1.

DEFINICIJA 3.4.1 *Kut $\angle NTK$ naziva se* ***kutom paralelnosti dužine*** $\overline{TN}$*, a dužina* $\overline{TN}$ ***distancom paralelnosti kuta*** $\angle NTK$*.*

TEOREM 3.4.2 *Ako je $\overline{TN} \equiv \overline{T'N'}$, onda je $\angle NTK \equiv \angle N'T'K'$, tj. kongruentnim dužinama odgovaraju kongruentni kutovi paralelnosti.*

DOKAZ. Neka su TNK i $T'N'K'$ jednokrajnici kojima je $\angle N \equiv N' \equiv R$ i $\overline{TN} \equiv \overline{T'N'}$.



Teorem 3.4.2.

Po Teoremu 3.3.5 (a) jednokrajnici TNK i $T'N'K'$ su kongruentni što znači da je $\angle NTK \equiv \angle N'T'K'$, tj. i kutovi paralelnosti su kongruentni. ■

Prethodni teorem pokazuje da je za danu dužinu l jednoznačno određen pripadni kut paralelnosti, označimo ga sa $\omega \equiv \pi(l)$.

Funkciju $\pi : \mathbb{R}^+ \to \langle 0, R\rangle$ nazivamo **funkcijom Lobačevskog**.

TEOREM 3.4.3 *Funkcija Lobačevskog je bijekcija.*

DOKAZ. (A) Funkcija Lobačevskog je injekcija.

Neka su dani jednokrajnici TNK i $T'N'K'$ i neka je $\angle NTK \equiv \angle N'T'K'$ (v. sliku Teorem 3.4.2.). Jednokrajnici TNK i $T'N'K'$ imaju kongruentne kuteve pa su, po Teoremu 3.3.5 (b), oni kongruentni, dakle kongruentne su i dužine paralelnosti $\overline{TN} \equiv \overline{T'N'}$.

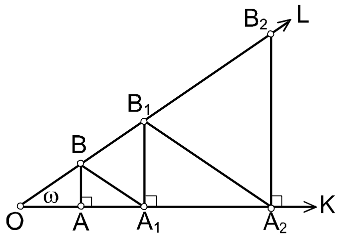
(B) Funkcija Lobačevskog je surjekcija.

Neka je $\omega = \angle LOK$ proizvoljan šiljasti kut. Treba odrediti dužinu $\overline{OC}$ takvu da je $\pi(\overline{OC}) = \omega$.

(a) U točkama kraka $\overrightarrow{OK}$ dignimo okomice i dokažimo da sve te okomice ne mogu sječi drugi krak $\overrightarrow{OL}$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da sve okomice na jedan krak sijeku drugi krak.

(a1) Odaberimo proizvoljnu točku A na kraku $\overrightarrow{OK}$ i neka okomica u točki A na $\overrightarrow{OK}$ siječe $\overrightarrow{OL}$ u točki B. Odaberimo točku A_1 tako da vrijedi $(O\text{-}A\text{-}A_1)$ i $\overline{OA} \equiv \overline{AA_1}$. Neka okomica u točki A_1 na $\overrightarrow{OK}$ siječe $\overrightarrow{OL}$ u točki B_1. Sada odredimo točku A_2 tako da je $(O\text{-}A_1\text{-}A_2)$ i $\overline{OA_1} \equiv \overline{A_1A_2}$. Sjecište okomice u A_2 sa drugim krakom označimo s B_2. Nastavimo dalje istim postupkom.



Teorem 3.4.3 - (a1).

(a2) Znamo da vrijedi $s(\triangle OAB) < 2R$. Stavimo

$$s(\triangle OAB) \equiv 2R - \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 2R.$$

(a3) Vrijedi $s(\triangle OA_nB_n) < 2R - 2^n\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Računamo

$$s(\triangle OA_1B_1) \equiv s(\triangle OAB) + s(\triangle AA_1B) + s(\triangle BA_1B_1) - 4R.$$

Kako su $\triangle OAB \equiv \triangle AA_1B$ (po S-K-S poučku), to je

$$s(\triangle OAB) \equiv s(\triangle AA_1B) \equiv 2R - \varepsilon.$$

Dakle,

$$s(\triangle OA_1B_1) < 2R - \varepsilon + 2R - \varepsilon + 2R - 4R \equiv 2R - 2\varepsilon.$$

Nadalje,

$$s(\triangle OA_2B_2) \equiv s(\triangle OA_1B_1) + s(\triangle A_1A_2B_1) + s(\triangle B_1A_2B_2) - 4R <$$
$$< 2R - 2\varepsilon + 2R - 2\varepsilon + 2R - 4R \equiv 2R - 4\varepsilon.$$

Nastavljanjem postupka dobivamo da je zaista $s(\triangle OA_nB_n) < 2R - 2^n\varepsilon$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

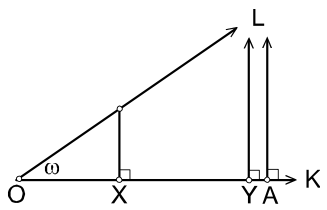
(a4) Primjenimo Arhimedov aksiom: postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{n_0}\varepsilon > 2R$. Sada imamo

$$s(\triangle OA_{n_0}B_{n_0}) < 2R - 2^{n_0}\varepsilon < 0,$$

što je traženo protuslovlje.

Dakle, nije istina da svaka okomica na krak $\overrightarrow{OK}$ siječe krak $\overrightarrow{OL}$, tj. postoji okomica na krak $\overrightarrow{OK}$ koja ne siječe krak $\overrightarrow{OL}$ i neka je A točka na $\overrightarrow{OK}$ točno s tim svojstvom.

(b) Egzistencija točke C.



Slika 3.4.3 - (b).

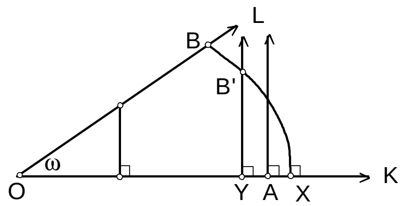
(b1) Uočimo sada dužinu $\overline{OA}$. Sve točke dužine $\overline{OA}$ podijelimo u dvije klase na slijedeći način:

$$\mathcal{K}_1 = \{X : \text{okomica na } \overrightarrow{OK} \text{ u točki } X \text{ siječe } \overrightarrow{OL}\} \cup \{O\},$$
$$\mathcal{K}_2 = \{Y : \text{okomica na } \overrightarrow{OK} \text{ u točki } Y \text{ ne siječe } \overrightarrow{OL}\}.$$

(b2) $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ su neprazni skupovi, jer je $O \in \mathcal{K}_1$, $A \in \mathcal{K}_2$.

(b3) Dokažimo da rastav udovoljava uvjete Dedekindovog aksioma, tj. da je $(O\text{-}X\text{-}Y)$ za bilo koje točke $X \in \mathcal{K}_1$ i $Y \in \mathcal{K}_2$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $(O\text{-}Y\text{-}X)$.



Slika 3.4.3 - (b3).

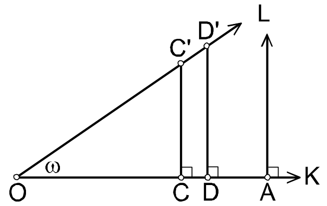
Neka okomica u točki X na krak $\overrightarrow{OK}$ siječe krak $\overrightarrow{OL}$ u točki B. Primijenimo Paschov aksiom na trokut $\triangle OXB$ i okomicu na $\overrightarrow{OK}$ u točki Y. Kako ta okomica ne siječe krak $\overrightarrow{OL}$ mora sjeći dužinu $\overline{XB}$ u unutarnjoj točki B'. No, tada bi trokut $\triangle YXB'$ imao dva prava kuta što je nemoguće. Dakle, doista vrijedi $(O\text{-}X\text{-}Y)$.

(b4) Primjenom Dedekindovog aksioma postoji Dedekindova točka C takva da

$(O\text{-}X\text{-}C) \Rightarrow X \in \mathcal{K}_1$ i

$(C\text{-}Y\text{-}A) \Rightarrow Y \in \mathcal{K}_2$.

(c) Tvrdimo da je $C \in \mathcal{K}_2$.



Slika 3.4.3 - (c).

Kako je $C \in \mathcal{K}_1$ ili $C \in \mathcal{K}_2$ dovoljno je dokazati $C \notin \mathcal{K}_1$.

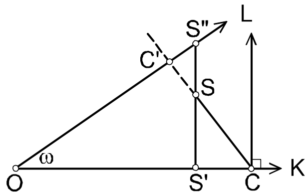
(c1) Pretpostavimo suprotno, tj. $C \in \mathcal{K}_1$. Neka okomica u točki C na $\overrightarrow{OK}$ siječe $\overrightarrow{OL}$ u točki C'.

(c2) Odaberimo točku D' na $\overrightarrow{OL}$ tako da vrijedi $(O\text{-}C'\text{-}D')$.

(c3) Spustimo iz D' okomicu na $\overrightarrow{OK}$ i neka je nožište točka D.

(c4) Dobili smo da je $(C\text{-}D\text{-}A)$ i $D \in \mathcal{K}_1$ i, po svojstvu točke C, vrijedi $D \in \mathcal{K}_2$, što je traženo protuslovlje. Dakle, $C \in \mathcal{K}_2$.

(d) Tvrdimo da je okomica u točki C na $\overrightarrow{OK}$ paralelna sa $\overrightarrow{OL}$.



Slika 3.4.3 - (d)

(d1) Budući da je $C \in \mathcal{K}_2$ ta okomica ne siječe $\overrightarrow{OL}$.

(d2) Preostaje još pokazati svojstvo da svaki unutarnji polupravac $\overrightarrow{CS}$ kuta $\angle OCL$ siječe $\overrightarrow{OL}$. Jedini netrivijalni slučaj je kada su točke C i S s iste strane pravca $\overleftrightarrow{OL}$.

(d3) Spustimo iz S okomicu na $\overrightarrow{OK}$ i neka je S' nožište te okomice. Vrijedi $(O\text{-}S'\text{-}C)$. Naime kad bi bilo $(O\text{-}C\text{-}S')$, onda bi u trokutu $\triangle SCS'$ suma kuteva bila veća od $2R$.

(d4) Kako je $(O\text{-}S'\text{-}C)$ imamo da je $S' \in \mathcal{K}_1$ pa ta okomica siječe $\overrightarrow{OL}$ u nekoj točki S''.

(d5) Primjenimo Pacshov aksiom na trokut $\triangle OS'S''$ i $\overrightarrow{CS}$: $\overrightarrow{CS}$ siječe stranicu $\overline{S'S''}$ u unutarnjoj točki pa mora sjeći i stranicu $\overline{OS''}$.

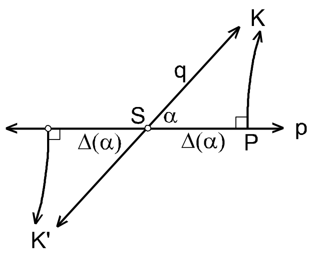
Dakle, $\overrightarrow{SC}$ siječe $\overline{OS''}$ u unutrašnjoj točki C'.

Ovim smo pokazali da je $\overrightarrow{CL} \underset{L}{\parallel} \overrightarrow{OL}$. Dakle, $\pi(\overline{OC}) = \omega$. ■

Inverznu funkciju funkcije Lobačevskog označavamo sa

$$\pi^{-1} = \Delta : \langle 0, R\rangle \to \mathbb{R}^+.$$

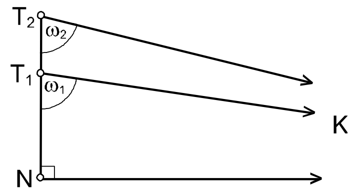
Neka se pravci p i q sijeku u točki S i neka je $\angle(p,q) < R$. Ortogonalna projekcija pravca q na pravac p interval duljine $2\Delta(\alpha)$.



Ortogonalna projekcija pravca.

TEOREM 3.4.4 *Funkcija Lobačevskog* $\pi : \mathbb{R}^+ \to \langle 0, R\rangle$ *je monotono padajuća, neprekidna funkcija za koju vrijedi* $\lim\limits_{l\to\infty} \pi(l) = 0$ *i* $\lim\limits_{l\to 0} \pi(l) = R$.

DOKAZ. (**a**) Neka je $l_1 < l_2$, tj. $\overline{NT_1} < \overline{NT_2}$. Pokažimo da je $\pi(l_1) > \pi(l_2)$.

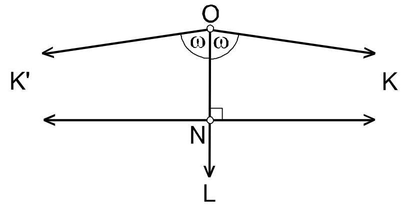


Teorem 3.4.4.

Promotrimo jednokrajnik T_2T_1K. Tada je $\angle NT_1K \equiv \pi(l_1) \equiv \omega_1$ vanjski kut jednokrajnika T_2T_1K pa je, po Teoremu 3.3.3, $\angle NT_1K = \pi(l_1) > \angle T_1T_2K = \pi(l_2) \equiv \omega_2$. Dakle, π je monotono padajuća bijekcija pa je i neprekidna.
(**b**) Dokažimo da je $\lim\limits_{l\to\infty} \pi(l) = 0$.
Pretpostavimo suprotno, tj. $\lim\limits_{l\to\infty} \pi(l) = \varepsilon > 0$. Odaberimo proizvoljni ω takav da je $0 < \omega < \varepsilon$. Budući je funkcija π bijekcija, postoji $l \in \langle 0, \infty\rangle$ takav da je $\pi(l) = \omega < \varepsilon$ - što je u protuslovlju sa $\lim\limits_{l\to\infty} \pi(l) = \varepsilon$. Dakle, $\lim\limits_{l\to\infty} \pi(l) = 0$.
(**c**) Dokažimo da je $\lim\limits_{l\to 0} \pi(l) = R$.
Promotrimo niz $l_1 > l_2 > \cdots > l_n > \cdots$ za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} (l_n) = 0$. Prema prethodnom je $\pi(l_1) < \pi(l_2) < \cdots < \pi(l_n) < \cdots$. Dakle, to je uzlazni niz i omeđen odozgo sa R pa postoji $\lim\limits_{l\to 0} \pi(l) \leqslant R$. Dokažimo da je $\lim\limits_{l\to 0} \pi(l) = R$.
Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\lim\limits_{l\to 0} \pi(l) = \varphi < R$. Tada postoji ω takav da je $\varphi < \omega < R$. Zbog surjektivnosti funkcije π postoji $l > 0$ takav da je $\pi(l) = \omega$. No, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} \pi(l_n) = \varphi < \omega = \pi(l)$ pa imamo da je $0 < l < l_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, što je protuslovlje sa pretpostavkom $\lim\limits_{n\to\infty} (l_n) = 0$. ∎

TEOREM 3.4.5 *Za svaki kut* $\alpha < 2R$ *postoji jednoznačno određen pravac koji je paralelan s krakovima tog kuta prema njihovim krajevima, tj. postoji dvokrajnik.*

DOKAZ. Neka je $\angle KOK' = \alpha$. Kako je $\alpha < 2R$ to je $\frac{\alpha}{2} = \omega < R$.



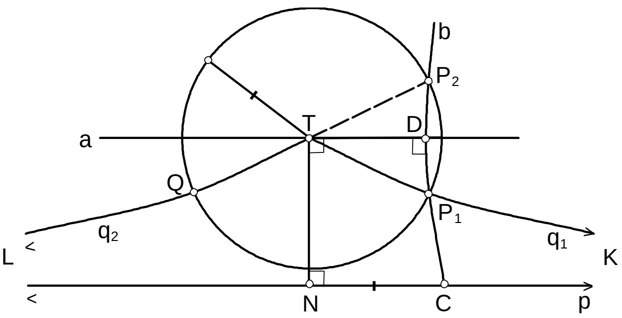
Teorem 3.4.5.

Neka je $l \in \langle 0, \infty \rangle$ takav da vrijedi $\pi(l) = \omega$. Na simetrali $\overrightarrow{OL}$ kuta $\angle KOK'$ odredimo točku N tako da je $\overline{ON} \equiv l$. U točki N dignimo okomicu na $\overrightarrow{OL}$. Time smo dobili traženi dvokrajnik KOK'. ■

Neposredna posljedica prethodnog teorema je:

TEOREM 3.4.6 *Postoji trokrajnik.*

Na koncu ovoga odjeljka navedimo (bez dokaza) konstrukciju paralela, odnosno kostrukciju kuta paralelnosti ω za danu dužinu $\overline{TN} = l$. Neka je $p = \overleftrightarrow{KK'}$ okomica na $\overleftrightarrow{TN}$ u točki N i a okomica na $\overleftrightarrow{TN}$ u točki T. Odaberimo bilo koju točku $D \ni\in a$ i iz nje spustimo okomicu b na pravac p te nožište označimo sa C.



Konstrukcija paralele.

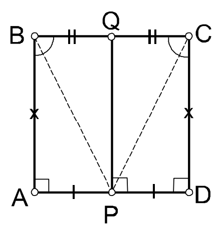
Neka je k kružnica sa središtem u T radijusa $\overline{NC}$ te neka su P_1 i P_2 sjecišta te kružnice i pravca b. Pravci $\overleftrightarrow{TP_1}$ i $\overleftrightarrow{TP_2}$ su tražene paralele.

3.5 DVOPRAVOKUTNI ČETVEROKUTI

DEFINICIJA 3.5.1 *Četverokut sa dva susjedna prava kuta naziva se* ***dvopravokutnim četverokutom.***

Dvopravokutnom četverokutu $ABCD$ za kojega vrijedi $\angle A \equiv \angle D = R$ stranicu $\overline{AD}$ nazivamo **donjom bazom**, stranice $\overline{AB}$ i $\overline{DC}$ **krakovima**, a stranicu $\overline{BC}$ **gornjom bazom**.

Primjeri dvopravokutnika su Saccherijev četverokut i Lambertov četverokut.



Saccherijev četverokut.

Saccherijev četverokut je dvopravokutnik kojemu su krakovi kongruentni. Pokazali smo da vrijedi:

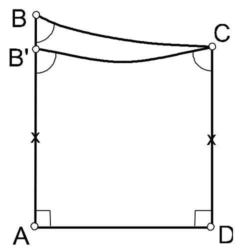
- *U Saccherijevom četverokutu je* $\angle B \equiv \angle C$.

Pokažimo da vrijedi i obrat:

- *Dvopravokutni četverokut je Saccherijev, ako su mu nepravi kutovi kongruentni.*

Neka je dan dvopravokutni četverokut $ABCD$ kojemu su nepravi kutovi kongruentni $\angle B \equiv \angle C$ i dokažimo da je tada $\overline{BA} \equiv \overline{CD}$.

U suprotnom, ako je $\overline{AB} > \overline{CD}$ tada prenošenjem manje dužine na veću dolazimo do točke B' tako vrijedi $\overline{B'A} \equiv \overline{CD}$ i $(A\text{-}B'\text{-}B)$. Sada je $B'ADC$ Sacherijev četverokut pa vrijedi $\angle AB'C \equiv \angle DCB'$. Zbog $(A\text{-}B'\text{-}B)$ imamo $\angle DCB' < \angle DCB \equiv \angle ABC$.



Dobili smo da je u trokutu $\triangle BB'C$ vanjski kut $\angle AB'C$ manji od nesusjednog unutarnjeg kuta $\angle BB'C$ $(\equiv \angle ABC)$, a to je nemoguće.

Nadalje, istaknimo i tvrdnju koju ćemo često koristiti:

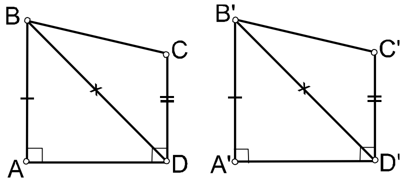
- *U Saccherijevom četverokutu je spojnica polovišta baza ujedno i simetrala baza.*

DEFINICIJA 3.5.2 *Kažemo da su dva dvopravokutna četverokuta* ***kongruentna*** *ako su im u parovima kongruentni sve četiri stranice i oba kuta.*

Umjesto "u parovima kongruentne stranice (kutovi)" uobičajilo se "podudarne stranice (kutovi)".

TEOREM 3.5.3 *Dva su dvopravokutna četverokuta kongruentna ako se podudaraju u jednoj bazi i oba kraka.*

DOKAZ. (A) Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dvopravokutni četverokuta takva da su im krakovi kongruentni, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$ te neka se podudaraju u donjoj bazi $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$. Treba dokazati da vrijedi $\angle B \equiv \angle B'$.



Teorem 3.5.3 (A).

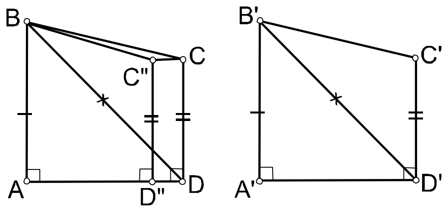
(1) Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su kongruentni (po S-K-S poučku) pa je $\overline{BD} \equiv \overline{B'D'}$ i $\angle ADB \equiv \angle A'D'B'$.

(2) Sada imamo $\angle BDC \equiv R - \angle ADB \equiv R - \angle A'D'B' \equiv \angle B'D'C'$ pa su trokuti $\triangle BDC$ i $\triangle B'D'C'$ kongruentni (po S-K-S poučku). Slijedi $\overline{DC} \equiv \overline{D'C'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'D'}$ i $\angle C \equiv \angle C'$.

(3) Budući je $\angle ABD \equiv \angle A'B'D'$ i $\angle DBC \equiv \angle D'B'C'$ slijedi $\angle B \equiv \angle B'$.

(**B**) Neka se dvopravokutni četverokuti $ABCD$ i $A'B'C'D'$ poduraju u gornjoj bazi. Dokažimo da su tada kongruentne donje baze pa tvrdnja slijedi kao i u prethodnom slučaju.

Pretpostavimo suprotno, recimo $\overline{AD} > \overline{A'D'}$.



Slika 3.5.3 (B).

(1) Prenošenjem manje dužine na veću dolazimo do točke D''.

(2) U točki D'' dignimo okomicu i na nju nanesimo $\overline{C'D'}$. Dolazimo do točke C'' za koju vrijedi $\overline{D''C''} \equiv \overline{C'D'} \equiv \overline{DC}$.

(3) Po prethodnom slučaju je $ABC''D'' \equiv A'B'C'D'$ pa je $\overline{BC''} \equiv \overline{B'C'} \equiv \overline{BC}$.

(4) Primjetimo da vrijedi (A-D''-D) i da su C' i C'' s iste strane pravca $\overleftrightarrow{AB}$.

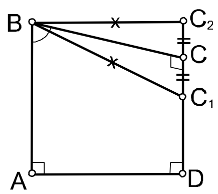
(5) Točke B, C i C'' nisu kolinearne pa čine trokut koji je jednakokračan. Slijedi da i simetrala baze prolazi vrhom B.

(6) Sada je $C''D''DC$ Saccherijev i simetrala donje baze je ujedno i simetrala gornje baze pa mora prolaziti vrhom B jednakokračnog trokuta $\triangle BC''C$.

(7) Dobili smo protuslovlje - imamo dvije različite okomice kroz točku B na $\overleftrightarrow{AD}$ (to su $\overleftrightarrow{AB}$ i okomica kroz polovište dužine $\overline{D''D}$).

Dakle, mora biti $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$. ∎

NAPOMENA 3.5.4 Dvopravokutni četverokuti koji se poduraju u obje baze i jednom kraku ne moraju biti kongruentni.

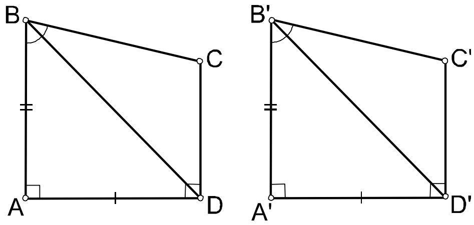


Napomena 3.5.4

Naime, ako u Lambertovom četverokutu $ABCD$ nanesemo u C dužinu manju od $\overline{CD}$ dolazimo točaka C_1 i C_2 i do dva dvopravokutna četverokuta ABC_1D i ABC_2D koja nisu kongruentna.

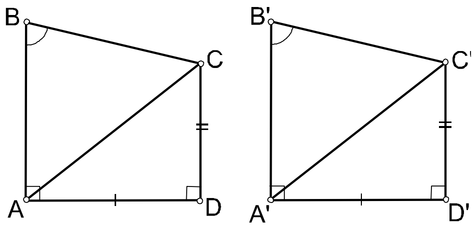
TEOREM 3.5.5 *Dva su dvopravokutna četverokuta kongruentna ako se podudaraju u jednom kutu, donjoj bazi i jednom kraku.*

DOKAZ. **(A)** Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dvopravokutni četverokuti takvi da vrijedi $\angle B \equiv \angle B'$, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$.



Teorem 3.5.5 (A).

(1) Trokuti $\triangle ABD$ i $\triangle A'B'D'$ su kongruentni (S-K-S poučak) pa je $\overline{BD} \equiv \overline{B'D'}$, $\angle ABD \equiv \angle A'B'D'$ i $\angle ADB \equiv \angle A'D'B'$.
(2) Slijedi da je $\angle BDC \equiv \angle B'D'C'$ i $\angle DBC \equiv \angle D'B'C'$ pa su i trokuti $\triangle BDC$ i $\triangle B'D'C'$ kongruentni (S-K-S poučak).
(3) Iz kongruentnosti trokuta slijedi $\overline{DC} \equiv \overline{D'C'}$ pa su dvopravokutnici $ABCD$ i $A'B'C'D'$ kongruentni po Teoremu 3.5.3.
(B) Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dvopravokutni četverokuti takvi da vrijedi $\angle B \equiv \angle B'$, $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$ i $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$.

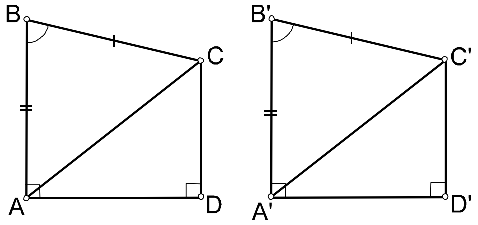


Teorem 3.5.5 (B).

(1) Sada su trokuti $\triangle ADC$ i $\triangle A'D'C'$ kongruentni (S-K-S poučak) pa je $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, $\angle CAD \equiv \angle C'A'D'$ i $\angle ADC \equiv \angle A'D'B'$.
(2) Slijedi da je $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ pa su trokuti $\triangle BAC$ i $\triangle B'A'C'$ kongruentni (K-K-S poučak).
(3) Dakle, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i po prethodnom slučaju su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ kongruentni. ∎

TEOREM 3.5.6 *Dva su dvopravokutna četverokuta kongruentna ako se podudaraju u gornjoj bazi, jednom kutu i kraku uz njega.*

DOKAZ. Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dvopravokutni četverokuti takvi da vrijedi $\angle B \equiv \angle B'$, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$.

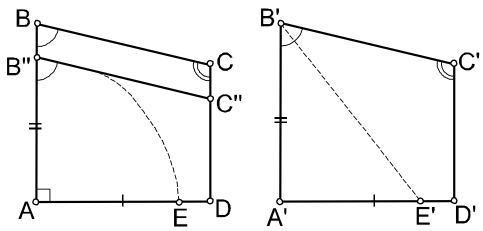


Teorem 3.5.6.

(1) Sada su trokuti $\triangle ACB$ i $\triangle A'C'B'$ kongruentni (S-K-S poučak) pa je $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.
(2) Slijedi da su trokuti $\triangle ADC$ i $\triangle A'D'C'$ kongruentni, a odatle slijedi kongruentnost donjih baza.
(3) Po Teoremu 3.5.5 su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ kongruentni dvopravokutni četverokuti. ■

TEOREM 3.5.7 *Dva su dvopravokutna četverokuta kongruentna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta.*

DOKAZ. Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dvopravokutni četverokuti takvi da vrijedi $\angle B \equiv \angle B'$ i $\angle C \equiv \angle C'$.
(A) Neka se u promatranim dvopravokutnim četverokutima podudaraju donje baze.
Dovoljno je dokazati $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ (po Teoremu 3.5.5).



Teorem 3.5.7 (A).

(1) Pretpostavimo suprotno i ako je $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ prenošenjem manje na veću dolazimo do točke B'' tako da vrijedi $\overline{AB''} \equiv \overline{A'B'}$.
(2) Nanesimo kut $\angle B \equiv \angle B'$ u vrh B''.
(3) Drugi krak kuta $\angle B''$ ne siječe $\overline{BC}$.
(4) Ne siječe ni $\overline{AD}$.
Naime, ako bi sjekao donju bazu u nekoj točki E, tada prenošenjem dužine $\overline{AE}$ na $\overline{A'D'}$ dolazimo do točke E''. Sada su trokuti $\triangle B''AE$ i $\triangle B'A'E'$ kongruentni.

Slijedi da je $\angle AB''E \equiv \angle A'B'E' \equiv \angle A'B'C'$, a to je protuslovlje s Aksiomom (III_4).

(5) Paschov aksiom vrijedi i za četverokute (dokažite!) pa drugi krak mora sjeći stranicu $\overline{CD}$ u nekoj točki C''.

(6) Dobili smo dvopravokutni četverokut $AB''C''D$ koji je po Teoremu 3.5.5 kongruentan dvopravokutnom četverokutu $A'B'C'D'$.

(7) Slijedi $\angle C \equiv \angle B''C''D \equiv \angle C'$.

(8) Sada je $s(BB''C''C) = 4R$ što je nemoguće. Dakle, mora biti $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.

(B) Neka se u promatranim dvopravokutnim četverokutima podudaraju gornje baze.

Dovoljno je dokazati $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ (po Teoremu 3.5.5).

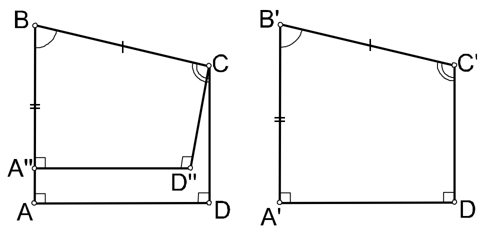
(1) Pretpostavimo suprotno i ako je $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ prenošenjem manje na veću od B prema A dolazimo do točke A'' tako da vrijedi $\overline{BA''} \equiv \overline{B'A'}$.

(2) U točki A'' dignimo okomicu na $\overleftrightarrow{AB}$.

(3) Iz točke C spustimo okomicu $\overleftrightarrow{CD''}$ na okomicu iz A'' na $\overleftrightarrow{AB}$ (sa D'' označili smo presjek tih okomica).

(4) Dobili smo dvopravokutni četverokut $BA''D''C$ koji je, po Teoremu 3.5.6, kongruentan četverokutu $A'B'C'D'$.

(5) Slijedi da je $\angle BCD'' \equiv \angle C' \equiv \angle BCD$ pa su točke C, D'' i D kolinearne.

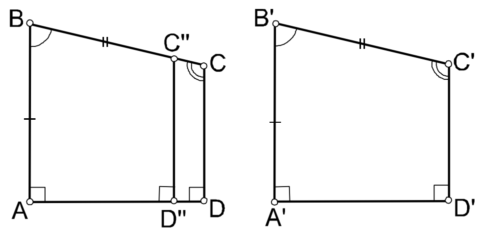


Teorem 3.5.7 (B).

(6) Time smo dobili pravokutnik $AA''D''D$ - što je nemoguće (pravokutnik ne postoji u hiperboličkoj geometriji).

(C) Neka se u promatranim dvopravokutnim četverokutima podudaraju krakovi $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.

Dovoljno je dokazati da se podudaraju gornje baze (po Teoremu 3.5.6).

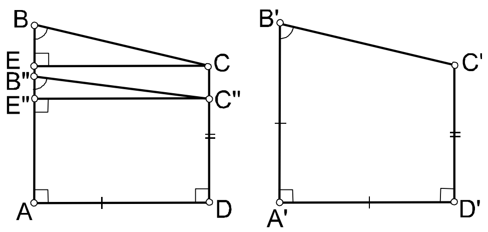


Teorem 3.5.7 (C).

(1) U suprotnom ako je $\overline{BC} > \overline{B'C'}$ nanošenjem manje na veću od B prema C dolazimo do točke C'' za koju vrijedi $\overline{BC''} \equiv \overline{B'C'}$.
(2) Spustimo okomicu iz C'' na $\overleftrightarrow{AB}$ i nožište označimo sa D''.
(3) Dobili smo dvopravokutni četverokut $ABC''D''$ koji je, po Teoremu 3.5.6, kongruentan dvopravokutnom četverokutu $A'B'C'D'$.
(4) Slijedi da je $\angle BC''D'' \equiv \angle C' \equiv \angle C$.
(5) Sada je $s(C''D''DS) = 4R$, a to je nemoguće. Dakle, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$. ■

TEOREM 3.5.8 *Dva su dvopravokutna četverokuta kongruentna ako se podudaraju u obje baze i jednom kutu.*

DOKAZ. Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dvopravokutni četverokuti takvi da je $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ i $\angle B \equiv \angle B'$.
Dovoljno je dokazati da je $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$ (po Teoremu 3.5.5).
(1) Pretpostavimo suprotno, da je recimo $\overline{CD} > \overline{C'D'}$. Prenesimo dužinu $\overline{D'C'}$ od D prema C. Dolazimo do točke C'' takve vrijedi $\overline{D'C'} \equiv \overline{DC''}$.
(2) Iz točaka C i C'' spustimo okomice na $\overleftrightarrow{AB}$ i nožišta označimo E i E''.
(3) Budući je (D-C''-C) to je i (A-E''-E).
(4) Neka je B'' točka na $\overline{AB}$ takva da vrijedi $\angle C''B''A \equiv \angle B' \equiv \angle B$.

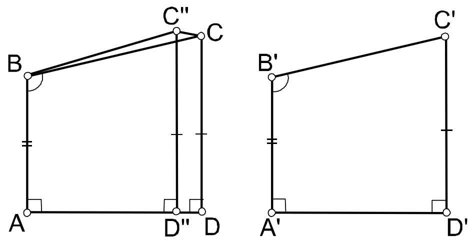


Teorem 3.5.8.

(5) Dvopravokutni četverokuti $AB''C''D$ i $A'B'C'D'$ su kongruentni (po Teoremu 3.5.5) pa je $\overline{B''C''} \equiv \overline{B'C'} \equiv \overline{BC}$.
(6) Sada su trokuti $\triangle BCE$ i $\triangle B''C''E''$ kongruentni pa imamo $\overline{CE} \equiv \overline{C''E''}$.
(7) Dobili smo da je $CEE''C''$ Saccherijev četverokut pa je $\angle CC''E'' < R$.
(8) Slijedi $\angle DC''E'' > R$ što je nemoguće jer bi imali $s(E''ADC'') > 4R$. Dakle, mora biti $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$. ■

TEOREM 3.5.9 *Dva su dvopravokutna četverokuta kongruentna ako se podudaraju u oba kraka i kutu nasuprot većem od njih.*

DOKAZ. Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dvopravokutni četverokuti kojima je $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'} < \overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$ i $\angle B \equiv \angle B'$.



Teorem 3.5.9.

Dovoljno je dokazati da vrijedi $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$.

(1) U suprotnom, ako je $\overline{AD} > \overline{A'D'}$, prenesimo manju na veću od A prema D. Dolazimo do točke D'' takve da je $\overline{AD''} \equiv \overline{A'D'}$.

(2) U točki D'' dignimo okomicu na $\overleftrightarrow{AD}$. Ona mora sjeći gornju bazu.

(3) Na njoj odredimo točku C'' tako da vrijedi $\overline{D''C''} \equiv \overline{D'C'}$.

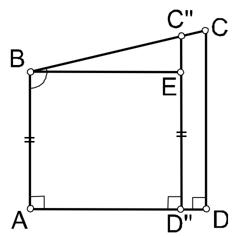
(4) Po Teoremu 3.5.3 imamo $ABC''D'' \equiv A'B'C'D'$ pa je $\angle ABC'' \equiv \angle B' \equiv \angle B \equiv \angle ABC$.

(5) Slijedi da su B, C'' i C kolinearne točke. Budući je (A-D''-D) mora biti i (B-C''-C).

(6) Promotrimo sada četverokut $C''D''DC$. On je Saccherijev četverokut pa je $\angle D''C''C \equiv \angle DCC'' < R$.

(7) Slijedi da je suplementarni kut $\angle D''C''B > R$.

(8) Prenesimo dužinu $\overline{AB}$ na $\overline{D''C''}$ od D'' prema C''. Dobivenu točku označimo sa E.



Teorem 3.5.9 - 1.

(9) Budući je $\overline{D''E} < \overline{D''C''}$ vrijedi (D''-E-C'').

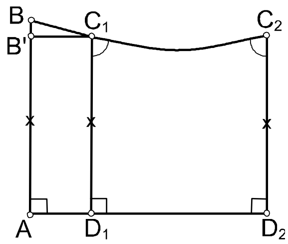
(10) Sada je $AD''EB$ Saccherijev četverokut pa su kutovi uz gornju bazu šiljasti: dobivamo $\angle ABE \equiv \angle D''EB < R$.

(11) Dobili smo da je trokutu $\triangle BEC''$ vanjski kut $\angle BED'' < R$ manji od unutarnjeg kuta $\angle BC''D'' > R$, što je nemoguće.

Dakle, $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$ pa tvrdnja teorema slijedi po Teoremu 3.5.3. ■

NAPOMENA 3.5.10 Pretpostavka da je kut nasuprot većeg kraka je bitna što pokazuje sljedeća konstrukcija.

Neka je $C_1D_1D_2C_2$ Saccherijev četverokut.

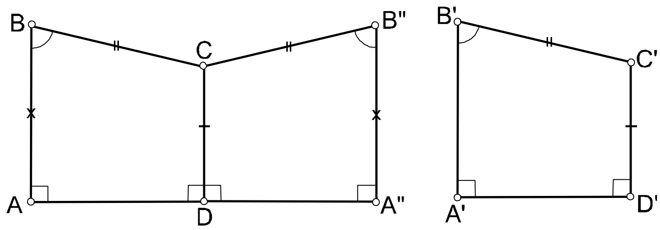


Napomena 3.5.10.

(1) Neka je A vanjska točka segmenta, tj. $(A\text{-}D_1\text{-}D_2)$.
(2) U točki A dignimo okomicu na $\overleftrightarrow{D_1D_2}$ i sjecište te okomice sa $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ označimo sa B.
(3) Prenesimo $\overline{C_1D_1} \equiv \overline{C_2D_2}$ od A prema B - dolazimo do točke B'.
(4) Tvrdimo da vrijedi $(A\text{-}B'\text{-}B)$.
U Saccherijevom četverokutu $C_1D_1D_2C_2$ je $\angle D_1C_1C_2 < R$ pa je sukut $\angle BC_1D_1 > R$. Nadalje, u Saccherijevom četverokutu $B'AD_1C_1$ je $\angle B'C_1D_1 < R < \angle BC_1D_1$ pa je $\overline{C_1D_1} \equiv \overline{B'A'} < \overline{BA}$ i zaista vrijedi $(A\text{-}B'\text{-}B)$.
(4) Sada su BAD_1C_1 i BAD_2C_2 dvopravokutni četverokuti koji se podudaraju u oba kraka i kutu nasuprot manjem od njih i nisu kongruentni.

TEOREM 3.5.11 *Dva su dvopravokutna četverokuta kongruentna ako se podudaraju u gornjoj bazi, jednom kraku i kutu nasuprot njega.*

DOKAZ. Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dvopravokutni četverokuti kojima su $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$ i $\angle B \equiv \angle B'$. Uz stranicu $\overline{CD}$ konstruiramo s druge strane dvopravokutan četverokut $CDA''B''$ kongruentan dvopravokutnom četverokutu $B'A'D'C'$. Dakle, vrijedi $\overline{B''C} \equiv \overline{B'C'} \equiv \overline{CB}$ i posebno je $\angle B'' \equiv \angle B' \equiv \angle B$.
Može se dogoditi:
(A) Točke B, C i B'' su kolinearne.



Teorem 3.5.11.

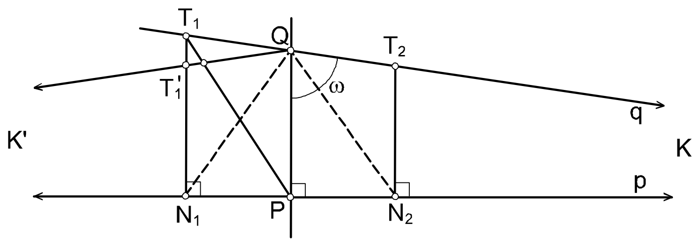
Tada je $\angle ABB'' \equiv \angle A''B''C$ pa je $BAA''B''$ Saccherijev četverokut i dalje vrijedi $\overline{BA} \equiv \overline{B''A''} \equiv \overline{B'A'}$. Sada su $BADC$ i $B'A'D'C'$ kongruentni po Teoremu 3.5.3.
(B) Točke B, C i B'' nisu kolinearne.

Tada je trokut BCB'' jednakokračan pa su kutovi uz bazu kongruentni $\angle CBB'' \equiv \angle CB''B$. Slijedi da je onda (dodavanjem $\angle B'' \equiv \angle B$) i $\angle ABB'' \equiv \angle A''B''B$. Dakle, četverokut $BAA''B''$ je Saccherijev pa je $\overline{BA} \equiv \overline{B''A''} \equiv \overline{B'A'}$. Sada su $BADC$ i $B'A'D'C'$ kongruentni (po Teoremu 3.5.3). ∎

3.6 MEĐUSOBNI ODNOSI DVAJU PRAVACA U RAVNINI

TEOREM 3.6.1 *Udaljenost točaka jedne od dviju paralela monotono opada u smjeru zajedničkog kraja.*

DOKAZ. Neka je $p \underset{K}{\parallel} q$ i neka su T_1, T_2 točke na pravcu q takve da vrijedi $(T_1\text{-}T_2\text{-}K)$.
Treba dokazati da je $\overline{T_1N_1} > \overline{T_2N_2}$.

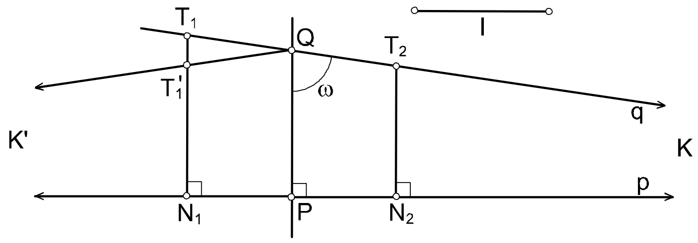


Teorem 3.6.1.

(1) Neka je P polovište dužine $\overline{N_1N_2}$.
(2) U točki P dignimo okomicu na p.
(3) Ta okomica po Paschovom aksiomu za jednokrajnike mora presjeći q i neka je to točka Q. Vrijedi $(T_1\text{-}Q\text{-}T_2)$.
(4) Točkom Q povucimo paralelu sa p, ali prema kraju K'.
(5) Primjenom Teorema 3.3.2 (Pashovog aksioma) na jednokrajnik T_1N_1K i pravac $\overleftrightarrow{QK'}$ dolazimo do unutarnje točke T_1' dužine $\overleftrightarrow{T_1N_1}$.
(6) Po Teoremu 3.5.5 su dvopravokutnici $T_1'N_1PQ$ i PQN_2T_2 kongruentni pa imamo da je $\overline{NT_2} \equiv \overline{N_1T_1'} < \overline{N_1T_1}$, a to se i tvrdilo. ∎

TEOREM 3.6.2 *Ako je $p \underset{K}{\parallel} q$ i $l > 0$ dana dužina, tada na pravcu q postoji jedinstvena točka T koja je od pravca p udaljena za l.*

DOKAZ. Dovoljno je dokazati egzistenciju točke T jer iz monotonosti dokazane u Teoremu 3.6.1 slijedi njena jedinstvenost.



Teorem 3.6.2 (A).

Odaberimo proizvoljnu točku T_1 na q i spustimo okomicu na p s nožištem N_1. Zbog pravila trihotomije vrijedi jedno od $\overline{T_1N_1} \equiv l$, $\overline{T_1N_1} < l$ i $\overline{T_1N_1} > l$. U prvom slučaju dokaz je gotov. Zato razmotrimo dva netrivijalna slučaja.

(A) Neka je $\overline{T_1N_1} > l$.

(1) Odredimo točku $T_1^{'}$ tako da vrijedi (N_1-$T_1^{'}$-T_1) i $\overline{N_1T_1'} \equiv l$.

(2) Točkom $T_1^{'}$ povučemo paralelu iz p prema kraju K'.

(3) Primjenom Paschovog aksioma za jednokrajnik N_1T_1K zaključujemo da pravac $\overleftrightarrow{T_1^{'}K'}$ mora sjeći $\overrightarrow{T_1K}$ u nekoj točki Q, (T_1-Q-K).

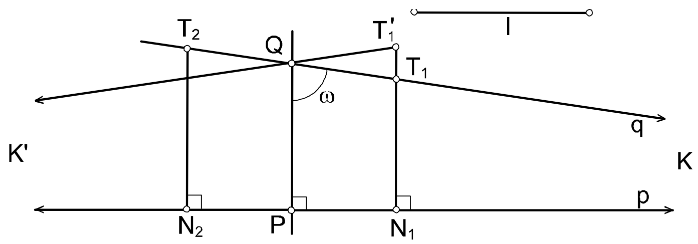
(4) Iz Q spustimo okomicu na p i nožište označimo sa P.

(5) Odredimo točku N_2 tako da vrijedi $\overline{N_1P} \equiv \overline{PN_2}$ i (N_1-P-N_2).

(6) Podignimo okomicu u p u točki N_2. Ta okomica po Paschovom aksiomu mora sjeći pravac q u točki T_2.

(7) Dobili smo da je $PQT_1^{'}N_1 \equiv PQT_2N_2$ (po Teoremu 3.5.5) pa je onda $\overline{T_2N_2} \equiv \overline{N_1T_1'} \equiv l$.

(B) Neka je sada $\overline{T_1N_1} < l$.



Teorem 3.6.2 (B).

(1) Odredimo točku $T_1^{'}$ tako da je (N_1-T_1-$T_1^{'}$) i $\overline{N_1T_1'} \equiv l$.

(2) Povucimo točkom $T_1^{'}$ paralelu s p ili prema kraju K'.

(3) Po Paschovom aksiomu za jednokrajnik $T_1^{'}N_1K'$ i pravac q slijedi da q mora sjeći $\overrightarrow{T_1^{'}K'}$ u točki Q.

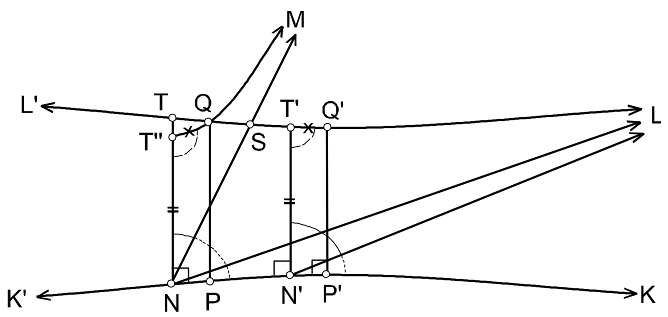
(4) Odredimo točku T_2 tako da je $\overline{QT_1'} \equiv \overline{QT_2}$ i (T_2-Q-T_1).

(5) Spustimo iz Q i T_2 okomice na p i nožišta označimo P i N_2.

(6) Sada su dvopravokutni četverokuti T_2N_2PQ i $PN_1T_1^{'}Q$ kongruentni pa je $\overline{T_2N_2} \equiv \overline{N_1T_1'} \equiv l$. ■

TEOREM 3.6.3 *Svaka dva razilazna pravca imaju točno jednu zajedničku okomicu.*

DOKAZ. Jedinstvenost zajedničke okomice je posljedica činjenice da u hiperboličkoj geometriji nema pravokutnika koji bi postojao u slučaju egzistencije dviju zajedničkih okomica.



Teorem 3.6.3.

Neka su $p = \overleftrightarrow{LL'}$ i $q = \overleftrightarrow{KK'}$ razilazni pravci.

(1) Odaberimo proizvoljne točke T i T' na q. Iz tih točaka spustimo okomice na p i nožišta označimo N i N'.

(2) Ako je $\overline{TN} \equiv \overline{T'N'}$ onda je $NN'TT'$ Sacherijev četverokut pa je simetrala dužine $\overline{NN'}$ tražena zajednička okomica. Zato pretpostavimo da vrijedi $\overline{TN}$ $> \overline{T'N'}$.

(3) Neka je T'' točka za koju vrijedi (N-T''-T) i $\overline{NT''} \equiv \overline{N'T'}$.

(4) Uočimo kut $\angle N'T'L$ i prenesimo ga: dolazimo do kongruentnog kuta $\angle NT''M \equiv \angle N'T'L$.

(5) Povucimo točkom N paralelu sa $\overleftrightarrow{T''M}$ prema kraju M. Povucimo paralelu točkom N' sa $\overleftrightarrow{T'L}$ prema kraju L.

(6) Time smo dobili jednokrajnike $NT''M$ i $N'T'L$ i vrijedi $NT''M \equiv N'T'L$. Dakle i $\angle T''NM \equiv \angle T'N'L$, a onda su kongruentni i kutovi $\angle LN'K$ i $\angle MNK$.

(7) Povucimo točkom N paralelu sa q prema kraju L. Prema Teoremu 3.3.3 primjenjenom na jednokrajnik $NN'L$ dobivamo $\angle LN'K > \angle LNK$, a onda je i $\angle MNK > \angle LNK$.

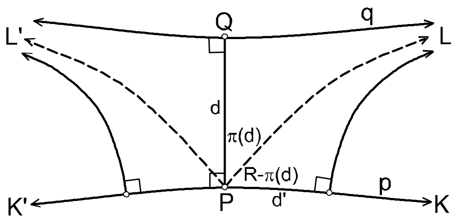
(8) Dakle, $\overrightarrow{NM}$ je unutarnji polupravac kuta $\angle TNL$ pa $\overrightarrow{NM}$ siječe q u točki S.

(9) Uočimo $\triangle NTS$ i polupravac $\overleftrightarrow{T''M}$. Prema Paschovom aksiomu $\overleftrightarrow{T''M}$ siječe $\overline{TS}$ u unutrašnjoj točki, označimo je sa Q. Spustimo iz Q okomicu na p i nožištem označimo sa P.

(10) Neka je Q' točka na q sa svojstvom da je (T-T'-Q') $\overline{T'Q'} \equiv \overline{T''Q}$, a P' nožište okomice iz Q' na p.

(11) Dvopravokutnici $NT''QP$ i $N'T'Q'P'$ su kongruentni pa je $\overline{QP} \equiv \overline{Q'P'}$. Dakle, pokazali smo da je $PP'Q'Q$ Saccherijev četverokut pa je simetrala baze $\overline{PP'}$ tražena zajednička okomica. ■

NAPOMENA 3.6.4 Neka su p i q razilazni pravci i neka zajednička normala siječe p i q u točkama P i Q redom. Neka je $d = |PQ|$. Točka Q je najbliža pravcu p, ako se točka T pravca q giba prema kraju L (odnosno L') tada udaljenost te točke od pravca p monotono raste.

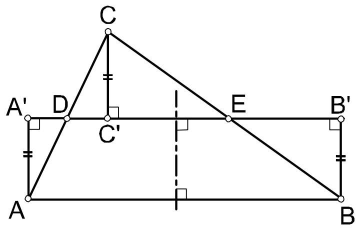


Napomena 3.6.4.

Ortogonalna projekcija pravca q na pravac p je interval $2d' = 2\Delta(R - \pi(d))$ s polovištem u točki P zajedničke okomice.

TEOREM 3.6.5 *Srednjica trokuta je razilazna s trećom stranicom, a njihova zajednička okomica je simetrala treće stranice.*

DOKAZ. Neka je $\overline{DE}$ srednjica trokuta $\triangle ABC$.
Iz vrhova trokuta spustimo okomice na pravac $\overleftrightarrow{DE}$ i nožišta označimo redom A', B' i C'.
Iz $\triangle AA'D \equiv \triangle CC'D$ slijedi da je $\overline{AA'} \equiv \overline{CC'}$. Iz $\triangle CC'E \equiv \triangle BB'E$ slijedi da je $\overline{CC'} \equiv \overline{BB'}$. Dobivamo da je $\overline{AA'} \equiv \overline{CC'}$ pa je $ABB'A'$ Saccherijev četverokut.

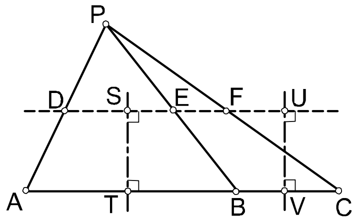


Teorem 3.6.5.

U Saccherijevom četverokutu je simetrala donje baze ujedno i simetrala gornje baze, dakle zajednička okomica srednjice i treće stranice jest simetrala treće stranice. ■

TEOREM 3.6.6 *Ako su A, B i C tri točke jednog pravca a P točka van tog pravca tada polovišta dužina $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ i $\overline{PC}$ nisu kolinearne točke.*

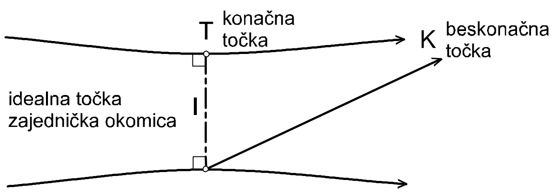
DOKAZ. Neka su D, E i F polovišta dužina $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ i $\overline{PC}$. Treba dokazati da D, E i F nisu kolinearne točke.



Teorem 3.6.6.

Pretpostavimo suprotno, tj. da su točke D, E i F kolinearne. Primjenom prethodnog teorema na trokute $\triangle ABP$ i $\triangle BCP$ imamo zajedničke okomice $\overleftrightarrow{ST}$ i $\overleftrightarrow{UV}$. Prva je simetrala od $\overline{AB}$, a druga simetrala od $\overline{BC}$. Budući su te okomice različiti pravci dobili smo pravokutnik $STVU$, a time i protuslovlje (u hiperboličkoj geometriji pravokutnici ne postoje). ■

U hiperboličkoj geometriji postoje "konačne točke" (oznaka T), to su točke koje su sjecišta pravaca, "beskonačne točke" (oznaka K), to je kraj paralelnih pravaca, i "idealne točke" (oznaka I) čiji je predstavnik zajednička okomica dvaju razilaznih pravaca.



"Točke" u hiperboličkoj geometriji.

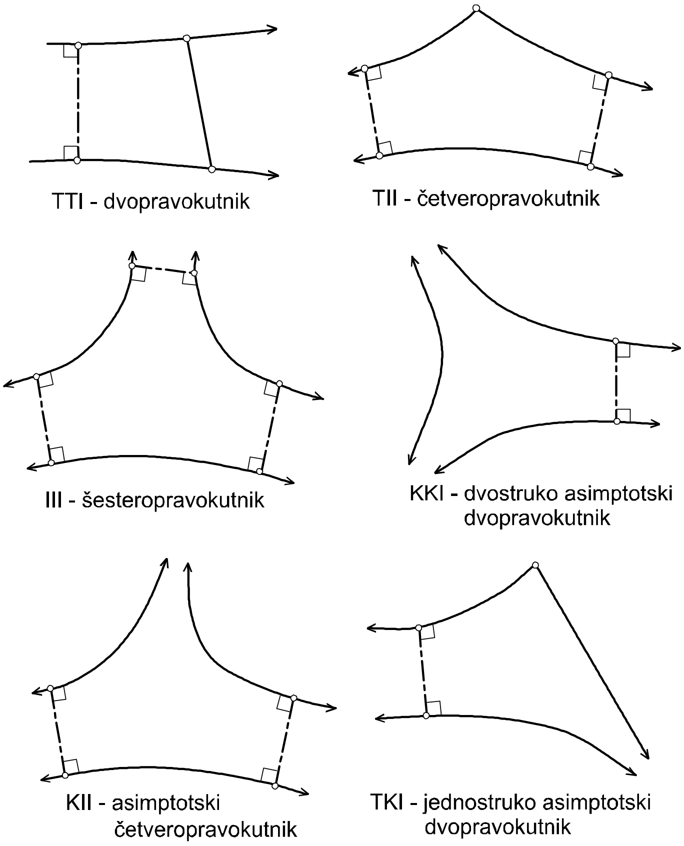
Već smo naveli "poopćenja" trokuta:

- jednokrajnik (oznaka TTK),
- dvokrajnik (oznaka TKK),
- trokrajnik (oznaka KKK),

i u tom smislu moguća su i sljedeća "poopćenja"

- TTI - dvopravokutnik,
- TII - četveropravokutnik,
- III - šesteropravolutnik,
- KKI - dvostruko asimptotski dvopravokutnik,
- KII - asimptotski četveropravokutnik i

- TKI - jednostruko asimptotski dvopravokutnik.



3.7 POINCAREOV MODEL HIPERBOLIČKE GEOMETRIJE

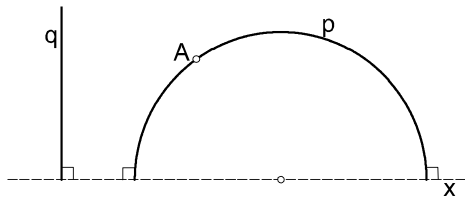
3.7.1 Opis modela i aksiomi (I), (II), (IV)

Da bismo dokazali neproturječnost hiperboličke geometrije, potrebno je navesti neki njen model.

Pretpostavljajući, da je euklidska planimetrija neproturječna, dokazat ćemo neproturječnost hiperbolične planimetrije, navodeći njen **Poincareov model**.

U tom modelu hiperboličke ravnine, za osnovne objekte, točke i pravce uzimamo:

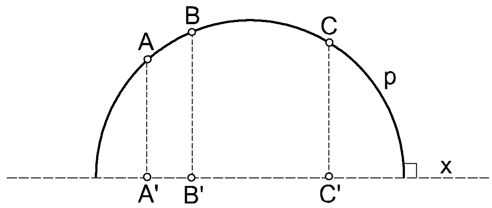
- točke su sve točke jedne euklidske poluravnine (bez ruba, to je granični pravac i označimo ga sa x),
- pravci su sve polukružnice u toj poluravnini okomite na granični pravac (središta su im na pravcu x) i svi polupravci te poluravnine okomiti na njezin granični pravac. I polukružnice i polupravce kraće ćemo nazivati h-pravci



Točke i pravci.

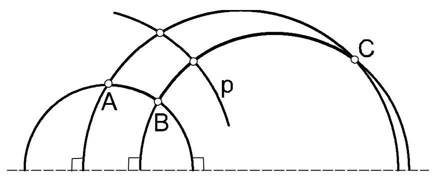
Incidenciju interpretiramo u euklidskom smislu: $A \ni\!\in p$ ako točka A leži na polukružnici (polupravcu) p. Nije teško provjeriti da su svi planimetrijski aksiomi incidencije ispunjeni.

I ispunjenost druge grupe aksioma, aksiomi poredka (II) provjerava se sredstvima euklidske geometrije.



Relacija poredka.

Reći ćemo da na h-pravcu p (polukružnica) vrijedi **poredak** (A-B-C) ako vrijedi (A'-B'-C'), gdje su A', B' i C' ortogonalne projekcije točaka A, B i C na granični pravac x. Ako su točke A, B i C na h-pravcu (polupravcu p) onda je (A-B-C) poredak u euklidskom smislu. Nije teško provjeriti da su aksiomi poredka ispunjeni. Na narednoj slici dana je interpretacija Paschovog aksioma.



Paschov aksiom.

Očito je da Dedekindov aksiom neprekidnosti vrijedi za h-dužinu.
Za interpretaciju aksioma kongruencije koristiti ćemo preslikavanje - inverziju u odnosu na kružnicu.

3.7.2 Inverzija

Duljinu dužine $\overline{AB}$ označavati ćemo sa $|AB|$

DEFINICIJA 3.7.1 *Neka je α euklidska ravnina i $k(O,r) \subset \alpha$ kružnica. Preslikavanje f koje svakoj točki M ravnine, različitoj od O, pridužuje točku $f(M) = M'$ te ravnine tako da vrijedi:*

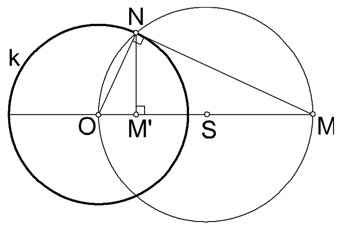
(a) *točke* O, M *i* M' *su kolinearne,*

(b) *točke* M *i* M' *su s iste strane od* O *i*

(c) $|OM| \cdot |OM'| = r^2$,

nazivamo ***inverzijom*** *(simetrijom)* ***u odnosu na kružnicu*** k.

Točku O nazivamo **pol inverzije**, kružnicu $k(O, r)$ ćemo označavati sa k i nazivamo je **kružnica inverzije**, a polumjer r nazivamo **radijus inverzije**. Dodamo li skupu točaka i "beskonačno daleku točku" ∞ (kojom prolaze svi euklidski pravci) tada uzimamo da se pol O preslikava u točku ∞. Napomenimo da i osnu simetriju smatramo inverzijom obzirom na os te simetrije ("kružnicu s beskonačnim radijusom"). Nju ćemo nazivati **inverzija u odnosu na pravac**.



Konstrukcija pridružene točke.

Neka je $k = k(O, r)$ kružnica inverzije i M bilo koja točka. Označimo sa N diralište tangente iz točke M na kružnicu inverzije k. Označimo sa M' nožište okomice iz N na pravac $\overleftrightarrow{OM}$. Točka M' je invrzna slika točke M. Uvjeti (a) i (b) su ispunjeni pa ostaje provjeriti uvjet (c). Zaista, budući su $\triangle OMN$ i $\triangle ONM'$ slični trokuti imamo $|OM| : |NO| = |NO| : |OM'|$ i dalje $|OM| \cdot |OM'| = r^2$.

NAPOMENA 3.7.2

(**A**) Ako ravninu α smatramo Gaussovom kompleksnom ravninom, s pravokutnim koordinatnim sustavom s ishodištem u O, tj. točkama M i $M' \in \alpha$ pridružimo kompleksne brojeve $z = (x, y)$ i $z' = (x', y')$, onda je inverzija dana formulom

$$z' = \frac{r^2}{\overline{z}}.$$

Ako se radi o inverziji u odnosu na kružnicu $|z - a| = r$, onda zamjenjujući z', z redom sa $z' - a$, $z - a$ iz prethodne formule dobijamo

$$z' = \frac{\alpha\overline{z} + \beta}{\gamma\overline{z} + \delta},\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}.$$

Ova formula obuhvaća i inverziju u odnosu na pravac, koja je dana formulom $z' = e^{-2i\varphi}\overline{z} +$ const.

Zapis inverzije kao preslikavanja kompleksne ravnine omogućava jednostavnije izučavanje svojstava takvih preslikavanja.

(**B**) Inverzija je involutorno preslikavanje, tj. ako je f inverzija tada je $f \circ f = id$ (identiteta), i sve točke kružnice inverzije k su fiksne.

(**C**) Inverzija nutrinu kružnice inverzije preslikava na njegovu vanjštinu i obratno, vanjšinu na nutrinu.

(**D**) Inverzija kružnicu, koja ne sadži O, preslikava na kružnicu.
Zaista, iz $z' = \dfrac{r^2}{\overline{z}}$ i $|z| = a$ slijedi $|z'| = \dfrac{r^2}{a}$.

(**E**) Kompozicija parnog broja inverzija dana je formulom
$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$
a kompozicija neparnog broja inverzija formulom
$$z' = \frac{\alpha \overline{z} + \beta}{\gamma \overline{z} + \delta}.$$

(**F**) Kompozicija parnog broja inverzija, koja ima tri fiksne točke, je identiteta.
Zaista,
$$z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \Rightarrow \gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0,$$
a budući da ova jednadžba ima tri različita rješenja, mora biti $\gamma = 0$, $\delta = \alpha \neq 0$ i $\beta = 0$ pa je $z' = z$.

(**G**) Kompozicija neparnog broja inverzija, koja ima tri fiksne točke, je inverzija u odnosu na kružnicu određenu tim točkama.
Zaista, neka je f takva kompozicija neparnog broja inverzija, koja ima tri fiksne točke i g inverzija u odnosu na kružnicu određenu tim točkama. Tada je $g \circ f$ kompozicija parnog broja inverzija koja ima tri fiksne točke pa je, prema prethodnoj tvrdnji, $g \circ f = id$ (identiteta). Iz
$$g \circ f = id \Rightarrow g \circ (g \circ f) = g \circ id \Rightarrow$$
$$(g \circ g) \circ f = g \Rightarrow id \circ f = g \Rightarrow f = g,$$
dakle f je inverzija.

(**H**) Inverzija, a time i kompozicija inverzija, čuva kutove (ne i njihovu orjentaciju), jer je to analitička funkcija.

(**I**) Skup svih inverzija ravnine u odnosu na kompoziciju praslikavanja čini grupu, označavat ćemo je sa $\mathcal{G}$.

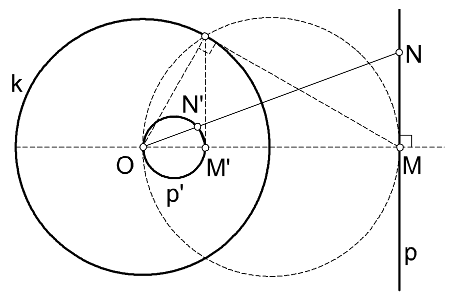
Navedimo neka osnovna svojstva inverzije:

TEOREM 3.7.3 *Pravac koji prolazi polom inverzije O preslikava se na samog sebe (bez točke O).*

DOKAZ. Tvrdnja slijedi iz definicije inverzije. ∎

TEOREM 3.7.4 *Pravac koji ne prolazi polom inverzije O preslikava se na kružnicu koja sadrži O (bez O). Vrijedi i obrnuto: kružnica kroz pol O (bez O) preslikava se na pravac (koji ne sadrži O).*

DOKAZ. Neka $k = k(O, r)$ kružnica inverzije i neka je p pravac koji ne prolazi polom O. Iz O spustimo okomicu na pravac p i nožište označimo sa M. Neka je N bilo koja točka pravca p i neka je N' njezina inverzna slika.
Vrijedi $|OM| \cdot |OM'| = |ON| \cdot |ON'| = r^2$ i $|OM| \cdot |OM'| = |ON| \cdot |ON'| = r^2$ pa je $|OM| : |ON| = |ON'| : |OM'|$.

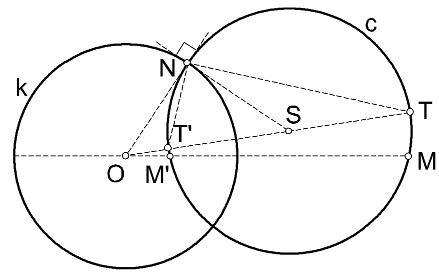


Teorem 3.7.4.

Iz propocionalnosti stranica slijedi da su trokuti $\triangle OMN$ i $\triangle ON'M'$ slični pa je $\angle OMN \equiv \angle ON'M' = R$. To znači da točka N' leži na kružnici kojoj je $\overline{OM'}$ promjer. Time smo dokazali da je slika p' kružnica. ∎

TEOREM 3.7.5 *Svaka kružnica, ortogonalna na kružnicu inverzije, je fiksna kružnica (kao figura). I obrnuto: svaka fiksna kružnica je ortogonalna na kružnicu inverzije.*

DOKAZ. Neka je c bilo koja kružnica okomita na kružnicu inverzije $k = k(O, r)$ te neka je N sjecište kružnica k i c a M bilo koja točka kružnice c. Označimo sa M' drugu presječnu točku kružnice c i pravca $\overleftrightarrow{OM}$.
Potencija točke O obzirom na kružnicu c daje $|ON|^2 = |OM| \cdot |OM'|$, odnosno $|OM| \cdot |OM'| = r^2$. Slijedi da je M' slika od M i budući je M bila proizvoljna točka kružnice c zaista je $c' = c$.



Teorem 3.7.5.

Neka je sada kružnica c fiksna, tj. $c = c'$. Neka je S središte kružnice c. Pravac $\overleftrightarrow{OS}$ siječe kružnicu c u paru pridruženih točaka T i T', a presječna točka N preslikava u samu sebe. Dakle vrijedi

$$|OT| \cdot |OT'| = r^2 \text{ i } |ON| \cdot |ON| = r^2$$

pa imamo $|OT| : |ON| = |ON| : |OT'|$. Slijedi da su trokuti $\triangle OTN$ i $\triangle ONT'$ slični pa je $\angle OTN \equiv \angle ONT'$. Budući je trokut $\triangle SNT$ jednakokračan to je $\angle STN \equiv \angle SNT$ i $\angle T'NT = R$. Slijedi da je $\angle ONS = R$. Time je dokazano da su kružnice k i c okomite. ∎

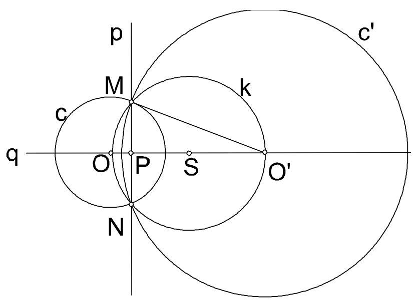
TEOREM 3.7.6 *Ako su M i M' pridružene točke inverzije, onda je svaka kružnica, koja prolazi tim točkama ortogonalna na kružnicu inverzije.*

DOKAZ. Dokaz slijedi po prethodnom teoremu. ∎

TEOREM 3.7.7 *Postoji inverzija koja preslikava dani pravac i danu kružnicu jedno na drugo.*

DOKAZ. Neka su dani pravac p i kružnica k sa središtem S. Navest ćemo postupak iz kojega je lako utvrditi ispravnost konstrukcije.

(**A**) Neka se pravac p i kružnica k sijeku u točkama M i N. Odredimo inverziju koja p preslikava na k.



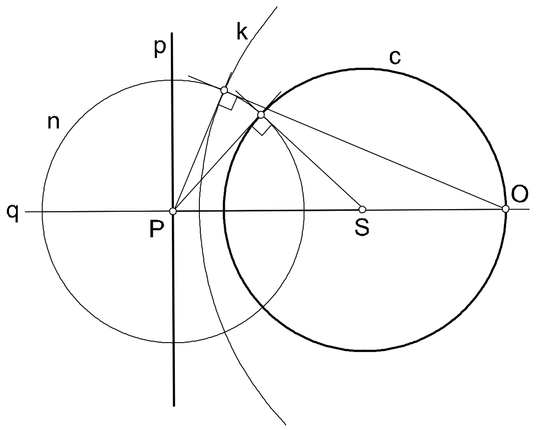
Teorem 3.7.7 -(A).

(1) Označimo sa q pravac koji prolazi središtem S kružnice k i okomit je na pravac p.

(2) Kao središte O tražene inverzije uzmimo jedno od sjecišta O i O' pravca q s kružnicom k.

(3) Kružnica inverzije c (ili c') je kružnica koja ima središte u O (ili O') i prolazi točkama M i N.

(**B**) Neka se pravac p i kružnica c ne sijeku. Odredimo inverziju koja p preslikava na c.

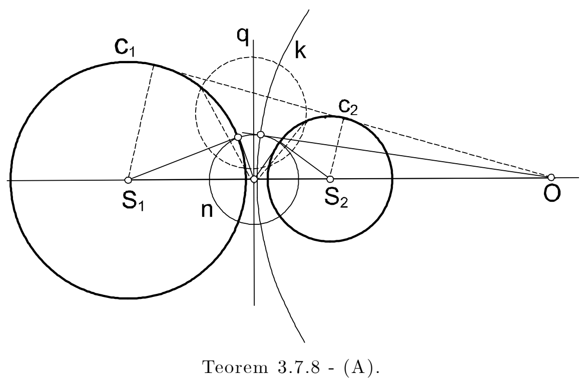


Teorem 3.7.7 -(B).

(1) Neka je q okomica iz središta S kružnice c na pravac p i označimo nožište te okomice sa P.
(2) Neka je n kružnica sa središtem u P koja okomito siječe kružnicu c.
(3) Središte O kružnice inverzije je ono sjecište pravca q i kružnice c koje je izvan kružnice n.
(4) Kružnica inverzije je kružnica k (sa središtem u O) koja je ortogonalna na kružnicu n. ∎

TEOREM 3.7.8 *Postoji inverzija koja dvije kružnice preslikava jednu na drugu.*

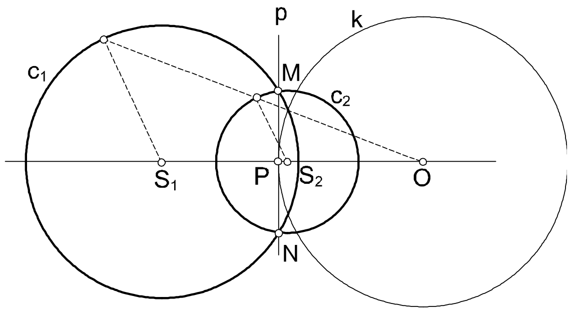
DOKAZ. (**A**) Neka se kružnice c_1 i c_2 ne sijeku i leže jedna izvan druge.



Teorem 3.7.8 - (A).

Označimo sa S_1 i S_2 središta tih kružnica.
(1) Odredimo kružnicu n koja ortogonalno siječe kružnice c_1 i c_2. Središte takve kružnice nalazi se u sjecištu pravca $\overleftrightarrow{S_1S_2}$ i potencijale q tih dviju kružnica.
(2) Inverzija koja preslikava kružnice c_1 i c_2 uzajamno preslikava kružnicu n na samu sebe.
(3) Tražena kružnica inverzije je kružnica kojoj je središte O središte homotetije kružnica c_1 i c_2 i okomita je na kružnicu n.

(**B**) Neka se kružnice c_1 i c_2 sijeku u točkama M i N. Neka su S_1 i S_2 središta tih kružnica



Teorem 3.7.8 - (B).

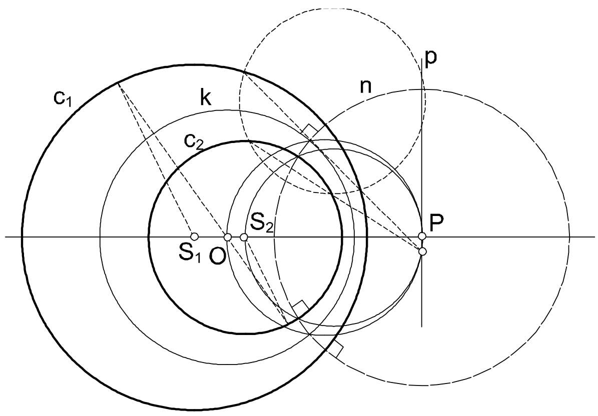
(1) Odredmo potencijalu p kružnica c_1 i c_2. Potencijala je pravac koji prolazi točkama M i N.

(2) Središte kružnice inverzije k je središte homotetije O kružnica c_1 i c_2.

(3) Označimo sa P sjecište potencijale p i pravca $\overleftrightarrow{S_1S_2}$.

(4) Radijus kružnice inverzije k je $\overline{PO}$.

(**C**) Jedna kružnica leži unutar druge.



Teorem 3.7.8 - (C).

Konstrukcija se provodi analogno prethodnim.

(1) Odredimo kružnicu n koja ortogonalno siječe kružnice c_1 i c_2. Središte takve kružnice nalazi se u sjecištu pravca $\overleftrightarrow{S_1S_2}$ i potencijale p tih dviju kružnica.

(2) Inverzija koja preslikava kružnice c_1 i c_2 uzajamno preslikava kružnicu n na samu sebe.

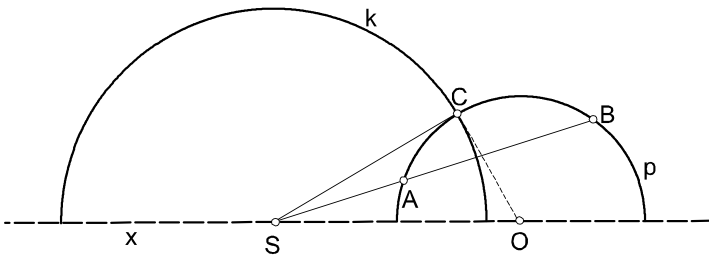
(3) Kružnica inverzije je kružnica kojoj je središte O središte homotetije kružnica c_1 i c_2 i okomita je na kružnicu n. ∎

3.7.3 Aksiomi (III), (IV) i (V)

Neka je $\mathcal{G}$ grupa generirana svim inverzijama u odnosu na (polu)kružnice i (polu)pravce ortogonalne na granični pravac x u Poincareovom modelu.

DEFINICIJA 3.7.9 *Reći ćemo da je dužina $\overline{AB}$* ***kongruentna*** *dužini $\overline{A'B'}$, oznaka $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, ako postoji $f \in \mathcal{G}$ tako da je $f\left(\overline{AB}\right) = \overline{A'B'}$. Analogno, reći ćemo da je kut $\angle AOB$* ***kongruentan*** *kutu $\angle A'O'B'$, oznaka $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$, ako postoji inverzija $f \in \mathcal{G}$ tako da je $f(\angle AOB) = \angle A'O'B'$.*

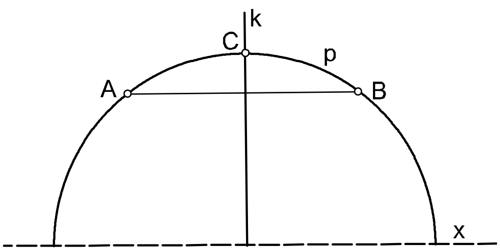
Pokažimo da svaka dužina ima simetralu.



Simetrala dužine.

Neka je $\overline{AB}$ dužina na h-pravcu p, S sjecište graničnog pravca x sa euklidskim pravcem $\overleftrightarrow{AB}$ i neka je $\overline{SC}$ euklidska tangenta kružnice p u C. Tada je $|SA| \cdot |SB| = |SC|^2$ pa su A i B međusobno inverzne u odnosu na kružnicu k kojoj je polumjer $\overline{SC}$ i točka S središte.

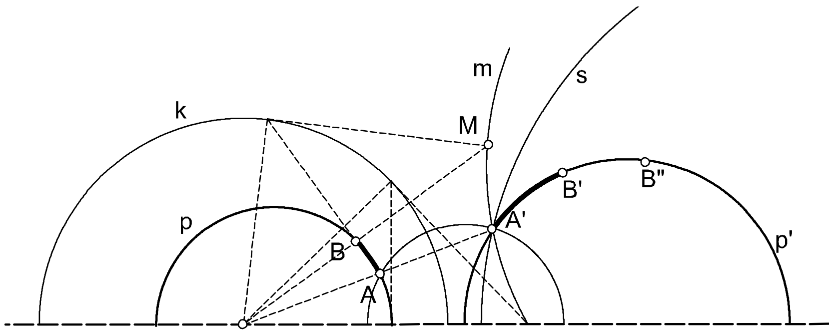
Ukoliko točke A i B h-pravca p leže na eukldskom pravcu koji je paralelan sa graničnim pravcem x onda je simetrala k euklidski polupravac koji leži na euklidskoj simetrali euklidske dužine $\overline{AB}$.



Simetrala dužine.

Tom se inverzijom dužina $\overline{AC}$ preslikava na dužinu $\overline{BC}$ pa je C polovište dužine $\overline{AB}$, a popupravac k je njena simetrala. Dakle, ako je $\overleftrightarrow{AB}$ paralelan s graničnim pravcem x, onda se simetrala poklapa sa euklidskom simetralom dužine $\overline{AB}$.

Interpretacija aksioma (III_1).
Neka su dani h-dužina $\overline{AB}$ na h-pravcu p i točka A' na h-polupravcu p'.



Interpretacija aksioma (III_1).

Treba pokazati da postoji točka B' h-polupravca p' takva da je h-dužina $\overline{A'B'}$ kongruentna s h-dužinom $\overline{AB}$.

(1) Neka je je k simetrala dužine $\overline{AA'}$ (naveli smo tu konstrukciju!).

(2) Inverzijom u odnosu na kružnicu k se h-dužina $\overline{AB}$ preslikava na h-dužinu $\overline{A'M}$ koja leži na euklidskoj kružnici m koja je slika (kružnice) p po toj inverziji.

(3) Inverzija u odnosu na simetralu s h-kuta $\angle B'A'M$ preslikava m na p' i $\overline{A'M}$ na $\overline{A'B'}$. Točka B' je tražena točka sa svostvom da je $\overline{A'B'}$ kongruntna dužini $\overline{AB}$. Napomenimo da je simetrala s takva kružnica da se invrzijom obzirom na nju m preslikava u p' (v. Teorem 3.7.8).

(4) Treba još dokazati jedinstvenost točke B'.

Neka osim navedene kompozicije $f \in \mathcal{G}$, za koju je $f\left(\overline{AB}\right) = \overline{A'B'}$, postoji $f' \in \mathcal{G}$, tako da je $f'\left(\overline{AB}\right) = \overline{A'B''}$. Tada kompozicija $f' \circ f^{-1}$ točke S, S', A' i B' preslikava redom na točke S, S', A' i B''. Ukoliko $f' \circ f^{-1}$ kompozicija parnog broja inverzija onda je $f' \cdot f^{-1} = id$ pa je $f' = f$, a odatle slijedi $B^{''} = B'$. Ukoliko je pak $f' \circ f^{-1}$ kompozicija neparnog broja inverzija, onda je $f' \circ f^{-1}$ inverzija u odnosu na p' pa je opet $B'' = B'$.

Interpretacija aksioma (III_2).

Treba dokazati da iz $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$ i $\overline{A''B''} \equiv \overline{AB}$ slijedi $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$.

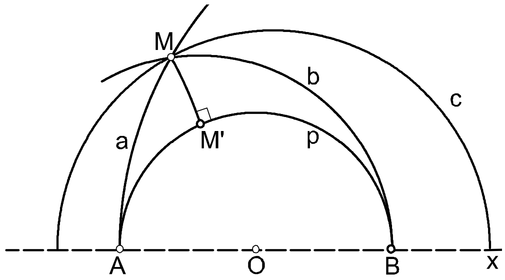
Zaista, ako je $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$ to znači da postoji $f \in \mathcal{G}$ tako da je $f(\overline{A'B'}) \equiv \overline{AB}$. Da je $\overline{A''B''} \equiv \overline{AB}$ znači da postoji $g \in \mathcal{G}$ tako da je $g(\overline{A''B''}) = \overline{AB}$. Imamo da za kompoziciju $g^{-1} \circ f \in \mathcal{G}$ i vrijedi $\left(g^{-1} \circ f\right)(\overline{A'B'}) = g^{-1}(f(\overline{A'B'}) = g^{-1}(\overline{AB}) = \overline{A''B''}$ pa je $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$.

Interpretacija aksioma (III_3).

Treba dokazati: ako je $(A\text{-}B\text{-}C)$ i $(A'\text{-}B'\text{-}C')$ te $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, tada je $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

Zaista, postoji $f \in \mathcal{G}$ tako da je $f\left(\overline{AB}\right) = \overline{A'B'}$ i $f(C) = C''$ i dalje $f\left(\overline{BC}\right) = \overline{B'C''}$. Slijedi da je $\overline{BC} \equiv \overline{B'C''}$. Sada iz $\overline{BC} \equiv \overline{B'C''}$ i $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ slijedi $\overline{B'C''} \equiv \overline{B'C'}$ pa je $C'' = C'$. Dakle, $f\left(\overline{AC}\right) = \overline{A'C'}$, tj. $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

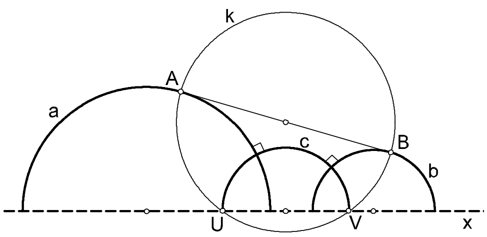
Interpretacije preostalih aksioma (III_4) i (III_5) izvode se analogno prethodnim. Budući su u Poincareovom modelu ispunjeni svi aksiomi apsolutne planimetrije, preostaje još pitanje ispunjenja ili aksioma (V_E) ili aksioma (V_H).



Paralele i razilzni pravci.

No, očito, aksiom (V_H) u Poincareovom modelu jest ispunjen, jer točkom M van pravca p (p je euklidska polukružnica kojoj je $\overline{AB}$ promjer, O središte), prolaze barem dva pravca, koji ne presjecaju dani pravac p. Pravci a i b su paralelni s pravcem p (po su euklidske polukružnice kojima su euklidske dužine $\overline{AM}$ i $\overline{BM}$ sekante). Na slici je pravac c je razilazan s pravcem p, a pravac $\overleftrightarrow{MM'}$ je okomica iz M na pravac p.
Dakle, postojanje Poincareovog modela u euklidskoj planimetriji dokazuje, da iz neproturječnosti euklidske planimetrije proizilazi neproturječnost hiperbolične planimetrije.

Na koncu ovog odjeljka odredimo zajedničku normalu dvaju razilazih h-pravaca. Neka su a i b razilazni h-pravci. Njihova zajednička normala, gledano euklidski, je polukružnica sa središtem na pravcu x i koja je ortogonalna na polukružnice a i b. Neka je k ma koja kružnica ortogonalna na kružnice a i b (na narednoj slici odabrali smo kružnicu k kojoj je promjer $\overline{AB}$, gdje su A i B dirališta zajedničke tangente kružnica a ib. Sjecišta U i V kružnice k i graničnog pravca x su međusobno inverzne točke u odnosu na obje kružnice a i b.



Budući je svaka kružnica koja prolazi točkama U i V ortogonalna na kružnice a i b, polukružnica c dijametra $\overline{UV}$ je traženi h-pravac ortogonalan na dane h-pravce a i b.

3.8 ZADACI ZA VJEŽBU

1. Dokažite Teorem 3.2.10.
2. Dokažite Paschov aksiom za dvokrajnik i trokrajnik.
3. **Jednakokutni jednakokrajnik** je jednakokrajnik s kongruentnim kutovima. Dokažite da su dva jednakokutna jednokrajnika kongruentna ako su im kongruentne konačne stranice.
4. Dva su Saccherijeva četverokuta kongruentna ako su im kongruentni odgovarajući elementi:
   (a) kutu i jedna stranica;
   (b) jedna baza i krak;
   (c) obje baze.
5. Dva su Lambertova četverokuta kongruentna ako su im kongruentni odgovarajući elementi:
   (a) dvije stranice nasuprot šiljastog kuta;
   (b) dvije susjedne stranice od kojih je jedna uz, a druga nasuprot šijastog kuta;
   (c) jedna stranica i šiljasti kut;
   (d) dvije nasuprotne stranice;
   (e) dvije stranice uz šiljasti kut;
6. Dokažite da su dva četverokuta kod kojih su po jedan par nasuprotnih kutova pravi kutovi, kongruentna, ako su im kongruentni odgovarajući elementi:
   (a) tri stranice;
   (b) dvije stranice koje koje su pod pravim kutom i jedan nepravi kut;
   (c) dvije susjedne stranice i nepravi kut među njima;
   (d) jedna stranica i oba neprava kuta.
7. Neka je $q \underset{K}{\parallel} p$ i $l = \overline{AB}$. Dokažite da na pravcu q postoji jedinstvena točka koja je od pravca p udaljena za l.
8. Dokažite da u hiperboličkoj ravnini postoji peterokut s četiri prava kuta (četveropravokutnik). Odredbeni elementi četveropravokutnika su: nepravi kut, stranice uz njega - gornji krakovi, stranica nasuprot nepravog kuta - baza, stranice okomite na bazu - donji krakovi.
9. Dokažite da su dva černeropravokutnika kongruentna ako su im kongruentni odgovarajući elementi:
   (a) tri susjedne stranice;
   (b) kut i dvije stranice;

(c) tri stranice od kojih su dvije susjedne, a treća nesusjedna je ili baza ili donji krak;
(d) baza, jedan donji krak i njemu nesusjedni gornji krak ako pravci na kojima leže preostale dvije stranice nisu razilazni.

10. Peteropravokutnik je peterokut s pravim kutovima. Dokažite da u hiperboličkoj ravnini postoji peteropravokutnik.

    Dokažite da su dva peteropravokutnika kongruentna

    (a) ako su dvije susjedne stranice jednog kongruentne odgovarajućim elementima drugog;
    (b) ako su dvije nesusjedne stranice jednog kongruentne odgovarajućim elementima drugog.

11. Dokažite da u hiperboličkoj ravnini postoji šesterokut čiji su svi kutovi pravi (šesteropravokutnik).
12. Dokažite da su dva šesteropravokutika kongruentna, ako su tri susjedne stranice jednog kongruentne odgovarajućim elementima drugog šesteropravokutnika.
13. Neka je $ABCD$ Lambertov četverokut kojemu je $\angle D < R$. Dokažite da je $\overline{AB} < \overline{CD}$.
14. Dokažite da je donja osnovica Saccherijevog četverokuta manja od gornje.
15. Dokažite da je srednjica trokuta manja od polovice odgovarajuće stranice.
16. Dokažite da je stranica pravilnog šesterokuta upisanog u kružnicu veća od polumjera te kružnice.
17. Neka je $ABCD$ Lambertov četverokut kojemu je $\angle D < R$. Dokažite da je dužina koja spaja polovišta baza manja od $\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$.
18. Dokažite da je dužina koja spaja polovište hipotenuze s vrhom pravog kuta manja od polovice hipotenuze.
19. Dokažite da je u pravokutnom trokutu okomica iz polovišta hipotenuze na jednu od kateta manja od polovice druge katete.
20. Dokažite da u hiperboličkoj geometriji vrijedi za visine trokuta (misli se na pravce koji prolaze vrhom trokuta i okomiti su na suprotnu stranicu) vrijedi:

    (a) Ako se dvije visine trokuta sijeku, tada točkom presjeka prolazi i treća visina trokuta;
    (b) Ako su dvije visine razilazne, tada je i treća razilazna sa svakom od njih i sve tri su okomite na isti pravac;
    (c) Ako su dvije visine paralelne u istom smjeru, tada je i treća paralelna sa svakom od njih u istom smjeru.

21. Skup svih pravaca koji prolaze jednom točkom O nazivamo **eliptičkim pramenom,** a točku O **vrhom pramena**. Skup svih pravaca koji su paralelni prema istom kraju K nazivamo **paraboličkim pramenom,** a kraj K **krajem** tog pramena. Skup svih pravaca koji su okomiti na jedan te isti pravac o nazivamo **hiperboličkim pramenom,** a pravac o **bazom** tog pramena.

    Dokažite:

    (a) Simetrale stranica trokuta pripadaju istom pramenu.
    (b) Simetrale dvaju vanjskih kutova trokuta i simetrala nasuprotnog unutarnjeg kuta pripadaju istom pramenu.

22. Neka su a i b dva pravca i točke A i B na njima. Kažemo da su A i B **korespondentne točke,** oznaka $A \backsim B$, ako pravci a i b čine s pravcem $\overline{AB}$ s iste strane tog pravca kongruentne kutove. Dokažite: Točke A i B pravaca a i b su korespondentne onda i samo onda ako pravci a i b i simetrala dužine $\overline{AB}$ pripadaju istom pramenu pravaca.

    Dokažite: Za svaku točku A pravca a postoji jedinstvena točka B pravca b tako da su A i B korespondentne točke.

23. Neka su A i B korespondentne točke na pravcima a i b te A' i B' točke na pravcima a' i b'. Točke A' i B' su korespondentne ako i samo ako je $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.

24. Neka pravci a, b i c pripadaju istom parmenu i neka su A, B i C točke na njima (redom). Dokažite da iz $A \backsim B$ i $A \backsim C$ slijedi $B \backsim C$.

25. Četverokut $ABCD$ kojemu je $\overleftrightarrow{AB} \underset{K}{\parallel} \overleftrightarrow{DC}$ i $\overleftrightarrow{AD} \underset{L}{\parallel} \overleftrightarrow{BC}$ nazivamo **hiperboličkim četverokutom**. Dokažite da su simetrale vanjskih kutova u vrhovima B i D i simetrale unutarnjih vrhova u vrhovima A i C međusobno razilazni pravci i da su okomite na jedan isti pravac (zajednička normala svih naznačenih simetrala).

    U narednim zadacima se pretpostavlja da je poznata konstrukcija pravca koji prolazi kroz danu točku i paralelan je danom pravcu u danom smjeru.

26. Konstruirajte kut paralelnosti $\pi(l)$ za danu dužinu l.

27. Neka se pravci a i b sijeku u točki T. Konstruirajte pravac c paralelan pravcima a i b.

28. Dana su dva pravca koji se sijeku. Konstruirajte pravac koji je okomit na jedan od njih, a paralelan je s drugim.

29. Dana su dva paralelna pravca. Konstruirajte pravac paralelan njima.

30. Dana su dva razilazna pravca. Konstruirajte paralelu s njima.

ELEMENTI - PRVA KNJIGA

DEFINICIJE

(D-1) **Točka** *je ono što nema djelova.*

(D-2) **Crta** *je duljina bez širine.*

(D-3) *Krajevi crte su točke.*

(D-4) **Dužina** *je ona crta koja jednako leži prema točkama na njoj.*

(D-5) **Ploha** *je ono što ima samo duljinu i širinu.*

(D-6) *Krajevi plohe su crte.*

(D-7) **Ravnina** *je ploha koja jednako leži prema dužinama na njoj.*

(D-8) **Kut u ravnini** *je nagib u ravnini jedne prema drugoj dviju crta koje se međusobno dotiču i koje ne leže u dužini.*

(D-9) *Kada su crte koje obuhvaćaju kut ravne, kut se naziva* **ravnocrtnim.**

(D-10) *Kada dužina uspravljena na dužinu čini međusobno jednake susjedne kutove, tada je svaki od jednakih kutova* **pravi**, *a dužina koja stoji naziva se* ***okomitom*** *na onu kojoj stoji.*

(D-11) **Tupi kut** *je onaj koji je veći od pravog.*

(D-12) **Oštar kut** *je onaj koji je manji od pravog.*

(D-13) **Granica** *je ono što je nečemu kraj.*

(D-14) **Lik** *je ono što je obuhvaćeno s jednom ili više granica.*

(D-15) **Krug** *je lik u ravnini koji je obuhvaćen jednom crtom takvom da su sve dužine koje padaju na nju iz jedne točke od onih koje leže unutar lika međusobno jednake.*

(D-16) *Ta se točka naziva* **središtem kruga**.

(D-17) **Promjer** *kruga je bilo koja dužina povučena kroz središte i ograničena s obje strane kružnicom kruga, a koja također siječe krug u dva jednaka dijela.*

(D-18) **Polukrug** *je lik obuhvaćen promjerom i njime odrezanom kružnicom. A središte polukruga isto je ono koje je i središte kruga.*

(D-19) **Ravnocrtni** su **likovi** *oni koji su omeđeni dužinama, oni obhvaćeni s tri su* **trostranični**, *oni obuhvaćeni s četiri* ***četverostranični,*** *a oni obuhvaćeni s više od četiri dužine jesu* **mnogostranični** *likovi.*

(D-20) *Od trostraničnih likova* **jednakostraničnan trokut** *jest onaj koji ima tri iste stranice,* **jednakokračan** *onaj koji ima samo dvije jednake stranice, a* **raznostraničnan** *onaj koji ima tri nejednake stranice.*

(D-21) *Od trostraničnih likova još je* **pravokutnan trokut** *onaj koji ima pravi kut,* **tupokutan** *onaj koji ima tupi kut, a* **oštrokutan** *onaj koji ima tri oštra kuta.*

(D-22) *Od četverostraničnih likova* **kvadrat** *je onaj koji je jednakostraničan i pravokutan,* **pravokutnik** *onaj koji je pravokutan, a nije jednakostraničan,* **romb** *onaj koji je jednakostraničan, a nije pravokutan, a* **romboid** *je onaj kojemu su nasuprotne stranice i kutovi međusobno jednaki, a koji nije ni jednakostraničan ni pravokutan. A četverostranični likovi pored tih neka se nazovu* **trapezima**.

(D-23) *Paralelne su one dužine koje se u istoj ravnini i koji se, neograničeno produžene u oba smjera, međusobno ne sastaju ni u jednom smjeru.*

POSTULATI I AKSIOMI

(P-1) *Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.*

(P-2) *I da se ograničena dužina neprekinuto produžuje u dužini.*

(P-3) *I da se sa svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.*

(P-4) *I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.*

(P-5) *I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.*

(A-1) *Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.*

(A-2) *Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.*

(A-3) *Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostatci su jednaki.*

(A-4) *Stvari koje se jedna s drugom poklapaju međusobno su jednake.*

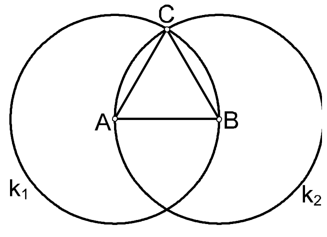
(A-5) *Cjelina je veća od dijela.*

PROPOZICIJE

PROPOZICIJA 1. *Na danoj dužini konstruiraj jednakostraničan trokut.*

DOKAZ. Neka je dana dužina $\overline{AB}$. Treba konstruirati jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ sa stranicom $\overline{AB}$.

Konstruirajmo kružnice $k_1 = k(A, \overline{AB})$ oko točke A radijusa $\overline{AB}$ te analogno $k_2 = k(B, \overline{AB})$ [primjenom Postulata (P-3)]. Neka je C presječna točka tih kružnica. Spojimo točku C s točkama A i B [(P-1)].

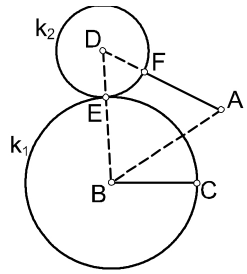


Propozicija 1.

Time je nastao $\triangle ABC$ za kojeg tvrdimo da je jednakostraničan.
Zaista, jer je $\overline{AC} = \overline{AB}$, $\overline{BC} = \overline{AB}$ [po Definiciji (D-15)] vrijedi $\overline{AC} = \overline{BC}$ [po Aksiomu (A-1)]. Ovim je dokazano da vrijedi $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$, tj. $\triangle ABC$ je jednakostraničan. ■

PROPOZICIJA 2. *Iz dane točke nanijeti dužinu jednaku danoj dužini.*

DOKAZ. Neka su dani točka A i dužina $\overline{BC}$. Treba odrediti točku F tako da vrijedi $\overline{AF} = \overline{BC}$.
Spojimo točke A i B [(P-1)]. Nad dužinom $\overline{AB}$ konstruirajmo jednakostraničan trokut $\triangle ABD$ (primjenom Propozicije 1.). Konstruirajmo kružnicu $k_1 = k(B, \overline{BC})$ [(P-3)]. Neka su $\overleftrightarrow{AD}$ i $\overleftrightarrow{BD}$ pravci [(P-2)] i neka je E točka u kojoj ta kružnica siječe pravac $\overleftrightarrow{BD}$. Opišimo kružnicu $k_2 = k(D, \overline{DE})$ [(P-3)] i neka je F točka u kojoj ta kružnica siječe pravac $\overleftrightarrow{AD}$.



Propozicija 2.

Tvrdimo da je F tražena točka, tj. $\overline{AF}$ je tražena dužina. Vrijedi [po (D-15) i konstrukciji]:

$$\overline{BE} = \overline{BC},\ \overline{DE} = \overline{DF} \text{ i } \overline{DA} = \overline{DB}.$$

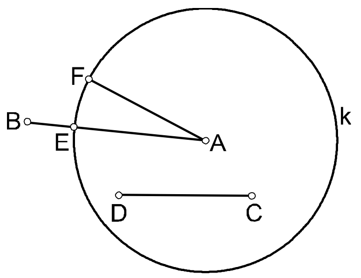
Primjenom aksioma (A-3) vrijedi

$$\overline{AF} = \overline{DA} - \overline{DF} = \overline{DB} - \overline{DE} = \overline{BE}.$$

Dobili smo $\overline{AF} = \overline{BC}$ i $\overline{BE} = \overline{BC}$ te po (A-1) $\overline{AF} = \overline{BC}$, tj. $\overline{AF}$ je tražena dužina. ■

PROPOZICIJA 3. *Ako su dane dvije nejednake dužine, na veću prenijeti manju.*

DOKAZ. Neka su dane nejednake dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\overline{AB} > \overline{CD}$.
Treba odrediti točku E dužine $\overline{AB}$ tako da je $\overline{AE} = \overline{CD}$.

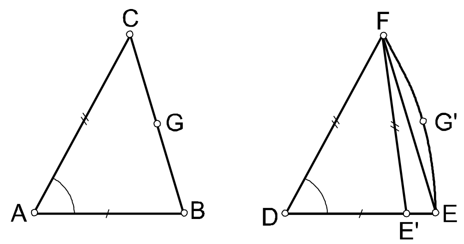


Propozicija 3.

Primjenom Propozicije 2. na točku A i dužinu $\overline{CD}$ dobivamo točku F tako da je $\overline{AF} = \overline{CD}$. Ako je F točka dužine $\overline{AB}$, stavimo $E = F$. Ako F nije točka dužine $\overline{AB}$, opišimo kružnicu $k(A, \overline{AF})$ [(P-3)] i neka je E točka u kojoj ta kružnica siječe $\overline{AB}$. E je tražena točka. Zaista, jer je $\overline{AC} = \overline{AF}$ i $\overline{AF} = \overline{CD}$, po Aksiomu (A-1) slijedi da je $\overline{AF} = \overline{CD}$. ∎

PROPOZICIJA 4. *Ako su kod dva trokuta dvije stranice jednog jednake dvjema odgovarajućim stranicama drugog, a kutovi između tih stranica jednaki, tada su i trokuti jednaki* (*tj. jednake su i preostale stranice i preostali kutovi*).

DOKAZ. Neka su dani trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ tako da vrijedi: $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ i $\angle A = \angle D$. Treba dokazati da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ jednaki[1].
Kako je $\angle A = \angle D$ položimo $\angle A$ na $\angle D$ tako da se točka A poklopi s točkom D, krak $\overrightarrow{AB}$ s krakom $\overrightarrow{DE}$, a krak $\overrightarrow{AC}$ s krakom $\overrightarrow{DF}$.
Tvrdimo da se pri tom polaganju točka B mora poklopiti s točkom E, a točka C s točkom F.



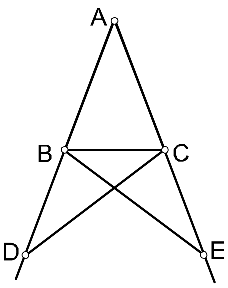
Propozicija 4.

[1]Da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ jednaki, znači da su oni sukladni i pisat ćemo $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Tvrdnja Propozicije 4. je poznati S-K-S poučak o sukladnosti trokuta.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je pri postupku polaganja točka B pala u točku E' na dužini $\overline{DE}$ i $E \neq E'$. Dakle ili vrijedi $\overline{DE'} < \overline{DE}$ ili vrijedi $\overline{DE} < \overline{DE'}$. No kako je $\overline{AB} = \overline{DE'}$ i $\overline{AB} = \overline{DE}$, po Aksiomu (A-1), slijedi da je $\overline{DE} = \overline{DE'}$. Dakle, $E = E'$, a to je u protuslovlju s našom pretpostavkom.
Analogno se pokazuje da se točka C mora poklopiti s točkom F.
Dokažimo sada da je svaka točka dužine $\overline{BC}$ pala u točku dužine $\overline{EF}$.
Pretpostavimo suptrotno, tj. da točka G dužine $\overline{BC}$ pri polaganju nije pala u točku dužine $\overline{EF}$. Neka je to točka G'.
Dobili smo da dvije dužine $\overline{EF}$ i $\overline{E(G')F}$ omeđuju područje, a to je nemoguće.
Time je $\overline{BC} = \overline{EF}$ [(A-4)], a onda i $\angle B = \angle E$ i $\angle C = \angle F$. ■

PROPOZICIJA 5. *Kod jednakokračnih trokuta su kutovi uz osnovicu jednaki, a ako se produže jednake stranice i kutovi uz osnovicu su jednaki.*

DOKAZ. Neka je dan jednakokračni trokut $\triangle ABC$ s osnovicom $\overline{BC}$. Produžimo $\overline{AB}$ preko B i na tom produžetku odaberemo proizvoljnu točku D [Postulat (P-2)]. Produžimo $\overline{AC}$ preko C i na tom produžetku odredimo točku E tako da je $\overline{BD} = \overline{CE}$ (primjena Propozicije 3.).
Treba dokazati da je $\angle ABC = \angle ACB$ i $\angle DBC = \angle BCE$.



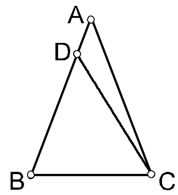
Propozicija 5.

Spojimo točke D i C te točke B i E [(P-1)] i promotrimo trokute $\triangle DCA$ i $\triangle BEA$. Vrijedi $\overline{AD} = \overline{AE}$ (po konstrukciji), $\angle A = \angle A$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ (po pretpostavci) pa je po prethodnoj Propoziciji 4., $\triangle DCA \cong \triangle BEA$. Posebno je $\overline{BE} = \overline{DC}$, $\angle ADC = \angle AEB$ i $\angle ACD = \angle ABE$.
Uočimo trokute $\triangle BDC$ i $\triangle BEC$. Primjenom Propozicije 4. dobivamo da je $\triangle BDC \cong \triangle BEC$ pa je $\angle DBC = \angle BCE$ (to je druga tvrdnja koju treba dokazati) i $\angle BCD = \angle CBE$. Sada vrijedi $\angle ABE - \angle CBE = \angle ACD - \angle BCD$ (primjena Aksioma (A-3)) i zaista je $\angle ABC = \angle ACB$. ■

PROPOZICIJA 6. *Ako su u trokutu dva kuta jednaka, onda su jednake i stranice koje leže nasuprot tih kutova.*

DOKAZ. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ kojemu je $\angle B = \angle C$.

Treba pokazati da je $\overline{AB} = \overline{AC}$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je stranica $\overline{AB}$ veća od stranice $\overline{AC}$. Na većoj odredimo točku D tako da je $\overline{DB} = \overline{AC}$ (Propozicija 3.). Spojimo točke D i C [(P-1)].

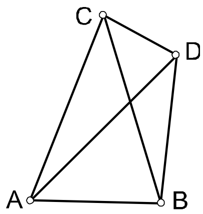


Propozicija 6.

Promotrimo trokute $\triangle ABC$ i $\triangle DBC$. Vrijedi $\overline{AC} = \overline{DB}$, $\overline{BC} = \overline{CB}$ i $\angle BDC = \angle CDB$ pa je $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ (Propozicija 4.). Time smo došli do protuslovlja s Aksiomom (A-5): cjelina (trokut $\triangle ABC$) bila bi jednaka svom dijelu (trokutu $\triangle DBC$). Dakle, mora biti $\overline{AB} = \overline{AC}$. ∎

PROPOZICIJA 7. *Nije moguće iz dvije različite točke koje se nalaze s iste strane dužine povuči na krajnjim točkama dvije dužine tako da dužine s istim krajevima budu međusobno jednake.*

DOKAZ. Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i različite točke C i D s iste strane dužine.

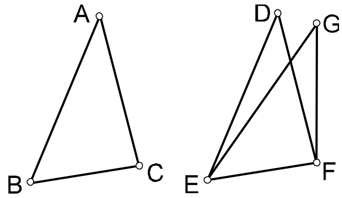


Propozicija 7.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\overline{AC} = \overline{AD}$ i $\overline{BC} = \overline{BD}$. Po Propoziciji 5. je trokut $\triangle ACD$ jednakokračan pa je $\angle ACD = \angle ADC$ i pogotovo $\angle BCD < \angle DCB$.
Isto tako, trokut $\triangle CBD$ je jednakokračan pa je i $\angle BCD = \angle DCB$. No to je nemoguće jer smo dokazali da je $\angle BCD < \angle DCB$. ∎

PROPOZICIJA 8. *Ako dva trokuta imaju dvije stranice jednake odgovarajućim dvjema stranicama i osnovice su im jednake, onda će imati i jednake kutove koje zatvaraju jednake stranice.*

DOKAZ. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ trokuti kojima je $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ te neka su im i osnovice jednake $\overline{BC} = \overline{EF}$. Trvdimo da vrijedi $\angle BAC = \angle EDF$. Položimo trokut $\triangle ABC$ u trokut $\triangle DEF$ tako da točka B padne u E i dužina $\overline{BC}$ u dužinu $\overline{EF}$.
Tvrdimo da će i točka A pasti u točku D.

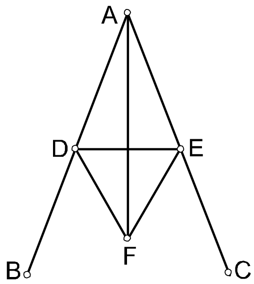


Propozicija 8.

U suprotnom, ako točka A padne u točku G različitu od D imali bi dvije točke i dužinu $\overline{EF}$ i vrijedilo bi $\overline{ED} = \overline{EG}$, $\overline{FD} = \overline{FG}$ - a to je nemoguće po Propo ziciji 7. ■

PROPOZICIJA 9. *Raspoloviti dani pravolinijski kut.*

DOKAZ. Neka je $\angle BAC$ dani pravolinijski kut.
Treba ga podijeliti na dva jednaka dijela.

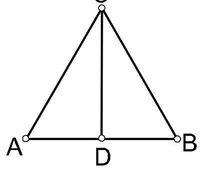


Propozicija 9.

Odaberimo proizvoljnu točku D na $\overline{AB}$ i neka je D točka na $\overline{AC}$ takva je je $\overline{AE} = \overline{AD}$ (Propozicija 3.). Konstruirajmo dužinu $\overline{DE}$ [(P-1)] i nad njom jednakostraničan trokut $\triangle DEF$ (Propozicija 1.) i potom dužinu $\overline{AF}$ [(P-1)].
Tvrdimo da je kut $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ s polupravcem $\overrightarrow{AF}$ podijeljen na dva jednaka dijela.
Promotrimo trokute $\triangle ADF$ i $\triangle AEF$. Po konstrukciji je $\overline{DF} = \overline{EF}$, $\overline{AD} = \overline{AE}$, a $\overline{AF}$ je zajednička stranica pa su oni sukladni (Propozicija 8.). Prema tome je $\angle DAF = \angle EAF$. ■

PROPOZICIJA 10. *Raspoloviti danu dužinu.*

DOKAZ. Neka je $\overline{AB}$ dana dužina.



Propozicija 10.

Nad njom konstruiramo jednakostraničan trokut (Propozicija 1.) i kut $\angle ACB$ raspolovimo sa $\overrightarrow{AD}$ (Propozicija 9.).

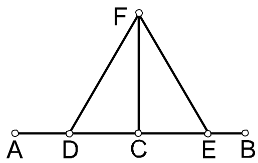
Tvrdimo da točka D raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

Promotrimo trokute $\triangle ADC$ i $\triangle BDC$. Po konstrukciji je $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\angle ACD = \angle BCD$ a $\overline{CD}$ je zajednička stranica i, po Propoziciji 4., slijedi da su trokuti $\triangle ADC$ i $\triangle BDC$ sukladni. Dobivamo, posebno, da je i $\overline{AD} = \overline{BD}$. ■

PROPOZICIJA 11. *Iz dane točke na danom pravcu povući pravac pod pravim kutom prema danom pravcu.*

DOKAZ. Neka je $\overleftrightarrow{AB}$ dani pravac i C dana točka na njemu.

Treba konstruirati okomicu na pravac $\overleftrightarrow{AB}$ u točki C.



Propozicija 11.

Neka je D bilo koja točka $\overline{AC}$ i na $\overline{CD}$ odredimo točku E tako da je $\overline{CD} = \overline{CE}$ (Propozicija 3.) i nad $\overline{DE}$ konstruirajmo jednakostraničan trokut $\triangle DEF$ (Propozicija 1.). Spojimo točku F s točkom C [(P-1)].

Tvrdimo da je $\overleftrightarrow{FC}$ [(P-2)] tražena okomica.

Promotrimo trokute $\triangle DCF$ i $\triangle ECF$. Po konstrukciji je $\overline{DC} = \overline{CE}$ i $\overline{FD} = \overline{FE}$, a $\overline{FC}$ je zajednička stranica pa su, po Propoziciji 8, ta dva trokuta sukladna. Dakle i $\angle DCF = \angle ECF$. Susjedni kutovi, sukuti, koji su međusobno jednaki su pravi kutovi [(D-10)] i zaista je pravac $\overleftrightarrow{FC}$ tražena okomica. ■

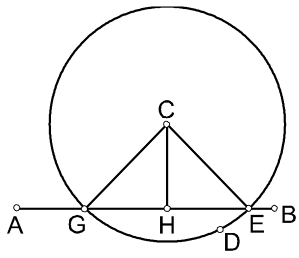
PROPOZICIJA 12. *Povući okomicu na dani pravac iz dane točke koja ne leži na danom pravcu.*

DOKAZ. Neka su dani pravac $\overleftrightarrow{AB}$ i točka C koja ne leži na njemu.

Treba konstruirati okomicu na $\overleftrightarrow{AB}$ koja prolazi točkom C.

Odaberimo točku D s druge strane pravca $\overleftrightarrow{AB}$ i konstruirajmo kružnicu $k = k(C, \overline{CD})$ [(P-3)] i sjecišta te kružnice sa $\overleftrightarrow{AB}$ označimo sa G i E. Raspolovi mo točkom H dužinu $\overline{GE}$ (Propozicija 10.) i povucimo dužine $\overline{CG}$, $\overline{CH}$ i $\overline{CE}$ [(P-1)].

Tvrdimo da je $\overleftrightarrow{CH}$ tražena okomica, tj. $\overleftrightarrow{CH} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

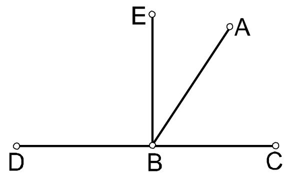


Propozicija 12.

Promotrimo trokute $\triangle GHC$ i $\triangle ECH$. Po konstrukciji je $\overline{CG} = \overline{CE}$, $\overline{GH} = \overline{HE}$, a $\overline{CH}$ je zajednička stranica pa su, po Propoziciji 8., promatrani trokuti sukladni. Slijedi jednakost $\angle CHG = \angle CHE$ pa su po Definiciji (D-10) to pravi kutovi. ■

PROPOZICIJA 13. *Ako pravac povučen nad pravcem čini kutove moraju ti kutovi biti ili oba prava ili sačinjavaju zajedno dva prava kuta.*

DOKAZ. Neka se pravci $\overleftrightarrow{AB}$ i neka $\overleftrightarrow{CD}$ sijeku u točki B i neka su kutovi $\angle DBA$ i $\angle ABC$ susjedni kutovi.



Propozicija 13.

Tvrdimo da su kutovi $\angle DBA$ i $\angle ABC$ ili pravi ili sačinjavaju zajedno dva prava kuta.

Ukoliko su oni jednaki onda su po (D-10) i pravi.

Ukoliko oni nisu jednaki tada u točki B povucimo okomicu $\overleftrightarrow{EB}$ na pravac $\overleftrightarrow{DC}$ (Propozicija 11.). Sada su kutovi $\angle DBE$ i $\angle EBC$ pravi. Tada je $\angle CBE = \angle CBA + \angle ABE$ i dodavanjem kuta $\angle EBD$ dobivamo [(A-2)] :

$$\angle CBE + \angle EBD = \angle CBA + \angle ABE + \angle EBD.$$

Analogno je $\angle DBA = \angle DBE + \angle EBA$ i dodavanjem kuta $\angle ABC$ dobivamo [(A-2)] :

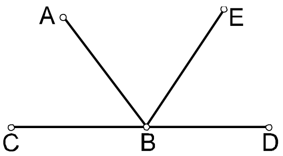
$$\angle DBA + \angle ABC = \angle DBE + \angle EBA + \angle ABC.$$

U dobivenim jednakostima desne strane su jednake pa je [(A-1)]

$\angle CBE + \angle EBD = \angle DBA + \angle ABC$,i kutovi $\angle DBA$, $\angle ABC$ sačinjavaju zajedno dva prava kuta. ■

PROPOZICIJA 14. *Ako ma s kojim pravcem u istoj točki na njemu dva polupravca s različitih strana ovog pravca grade susjedne kutove koji zajedno čine dva prava kuta tada se ta dva polupravca moraju se nalaziti na istom pravcu.*

DOKAZ. Neka je dan pravac $\overleftrightarrow{AB}$ i neka su $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BD}$ polupravci s različitih strana pravca $\overleftrightarrow{AB}$ takvi da je zbroj $\angle ABC + \angle ABD$ jednak dvama pravim kutovima.
Tvrdimo da polupravci $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BD}$ leže na istom pravcu, tj. $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{BD}$.
U suprotnom, neka je $\overrightarrow{BE}$ onaj polupravac koji sa $\overrightarrow{BC}$ leži na istom pravcu. Po Propoziciji 13. je zbroj kutova $\angle ABC + \angle ABE$ jednak dvama pravim kutovima.

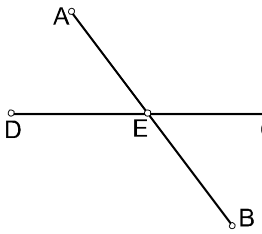


Propozicija 14.

Po pretpostavci je i $\angle ABC + \angle ABD$ jednak dvama pravim kutovima. Dakle, mora biti $\angle ABC + \angle ABE = \angle ABC + \angle ABD$ i oduzimanjem kuta $\angle ABC$ dobivamo $\angle ABE = \angle ABD$ [(A-3)]. To znači da je dio, kut $\angle ABE$, jednak cjelini, kutu $\angle ABD$, a to je u protuslovlju s Aksiomom (A-5). Dakle, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BD}$ leže na istom pravcu. ∎

PROPOZICIJA 15. *Ako se dva pravca sijeku, onda čine međusobno jednake vršne kutove.*

DOKAZ. Neka se pravci $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ sijeku u točki E.
Treba dokazati da je $\angle CEA = \angle DEB$ i $\angle AED = \angle CEB$.



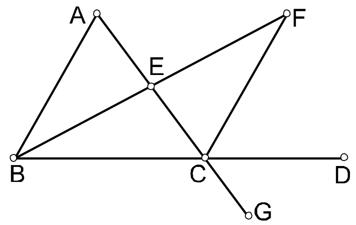
Propozicija 15.

Primjenom Propozicije 13. na polupravce $\overrightarrow{EA}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ dobivamo da je zbroj $\angle DEA + \angle CEA$ jednak dvama pravim kutovima. Isto tako, primjenimo li istu propoziciju na polupravce $\overrightarrow{ED}$ i $\overleftrightarrow{AB}$ dobivamo da je zbroj $\angle DEA + \angle DEB$ jednak dvama pravim kutovima. Slijedi $\angle DEA + \angle CEA = \angle DEA + \angle DEB$ [(A-1)]. Oduzimanjem kuta $\angle DEA$ [(A-3)] dobivamo $\angle CEA = \angle DEB$.
Analogno se pokazuje i druga tvrdnja. ∎

PROPOZICIJA 16. *U svakom trokutu je vanjski kut dobiven produživanjem jedne stranice veći od svakog od dva nesusjedna unutarnja kuta.*

DOKAZ. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i produljimo jednu njegovu stranicu $\overline{BC}$ do $\overline{BD}$.

Treba dokazati da je kut $\angle DCA$ veći od kutova $\angle BAC$ i $\angle ABC$.
Konstruiramo polovište E dužine $\overline{AC}$ (Propozicija 10.) i spojimo E i B [(P-1)]. Produžimo spojnicu $\overline{BE}$ [(P-2)] do točke F tako da je $\overline{BE} = \overline{EF}$ (Propozicija 3.) i spojimo F sa C [(P-1)].
Tvrdimo da je $\angle DCA > \angle ABC$ i $\angle DCA > \angle BAC$.
Promotrimo trokute $\triangle BEA$ i $\triangle ECF$.

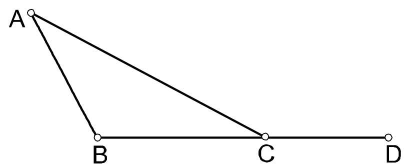


Propozicija 16.

Po konstrukciji je $\overline{BE} = \overline{EF}$, $\overline{AE} = \overline{EC}$, a po Propoziciji 15. je $\angle BEA = \angle CEF$. Primjenom S-K-S poučka o sukladnosti trokuta (Propozicija 4.) slijedi da su trokuti $\triangle BEA$ i $\triangle ECF$ sukladni. Dakle mora biti i $\angle BAE = \angle ECF$. Kako je $\angle ECD > \angle ECF$ [(A-5)], zaista je $\angle ECD = \angle DCA > \angle BAE = \angle BAC$.
Analogno se dokazuje tvrdnja $\angle DCA > \angle ABC$. ∎

PROPOZICIJA 17. *U svakom trokutu je zbroj bilo koja dva kuta manji od dva prava kuta.*

DOKAZ. Neka je dan trokut $\triangle ABC$.
Tvrdimo da je zbroj bilo koja dva kuta manji od dva prava kuta.



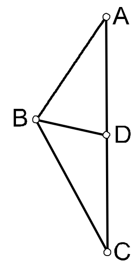
Propozicija 17.

Izmimo bilo koja dva kuta, recimo $\angle ABC$ i $\angle ACB$, i dokažimo da je zbroj $\angle ABC + \angle ACB$ manji od dva prava kuta. Produljimo $\overline{BC}$ do $\overline{BD}$ [(P-2)]. Po Propoziciji 16. je $\angle ACD > \angle ABC$. Odavde, dodavanjem kuta $\angle ACB$ dobivamo da je $\angle ACD + \angle ACB > \angle ABC + \angle ACB$. Budući je $\angle ACD + \angle ACB$ jednako dvama pravim kutovima (Propozicija 13.) imamo da je zbroj $\angle ABC + \angle ACB$ manji od dva prava kuta. ∎

PROPOZICIJA 18. *U svakom trokutu nasuprot veće stranice leži veći kut.*

DOKAZ. Neka je u trokutu $\triangle ABC$ stranica $\overline{AC}$ veća od $\overline{AB}$.

Treba dokazati da je $\angle ABC > \angle BCA$.
Konstruirajmo točku D na stranici $\overline{AC}$ tako da je $\overline{AD} = \overline{AB}$ (Propozicija 3.) i spojimo D sa B [(P-1)].

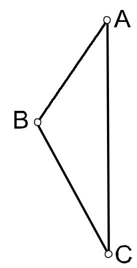


Propozicija 18.

Po Propoziciji 6. je vanjski kut $\angle ADB$ trokuta $\triangle BCD$ veći od nesusjednog kuta $\angle DCB$. Kako je $\triangle ABD$ jednakokračan trokut vrijedi $\angle ABD = \angle ADB$ (Propozicija 5.). Dobili smo $\angle ABC > \angle ABD = \angle ADB > \angle DCB = \angle ACB$, a to se i tvrdilo. ■

PROPOZICIJA 19. *U svakom trokutu nasuprot većem kutu leži veća stranica.*

DOKAZ. Neka je u trokutu $\triangle ABC$ kut $\angle ABC$ veći od kuta $\angle BCA$.
Treba dokazati da je $\overline{AC} > \overline{AB}$.

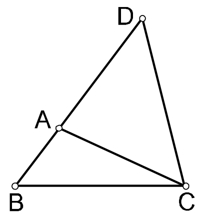


Propozicija 19.

Prepostavimo suprotno. Tada je ili $\overline{AC} = \overline{AB}$ ili $\overline{AC} < \overline{AB}$. Sigurno je $\overline{AC} \neq \overline{AB}$ jer bi u suprotnom, po Propoziciji 5., bilo $\angle ABC = \angle BCA$ što je u protuslovlju s našom pretpostavkom. Sigurno nije ni $\overline{AC} < \overline{AB}$ jer bi tada, po Propoziciji 18., bilo $\angle ABC < \angle BCA$ što je u protuslovlju s našom polaznom pretpostavkom. ■

PROPOZICIJA 20. *U svakom trokutu zbroj bilo koje dvije stranice veći je od treće stranice.*

DOKAZ. Neka je dan trokut $\triangle ABC$.
Treba dokazati da vrijedi $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$, $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$ i $\overline{BC} + \overline{CA} > \overline{AB}$.
Produljimo stranicu $\overline{BA}$ do točke D tako da je $\overline{AD} = \overline{AC}$.



Propozicija 20.

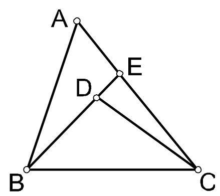
Po Propoziciji 5. je $\angle ADC = \angle ACD$. Dakle, vrijedi $\angle BCD > \angle ADC$ [(A-4)]. Budući je $\triangle DCB$ trokut kojemu je $\angle BCD > \angle ADC$, po Propoziciji 19. mora biti $\overline{DB} > \overline{BC}$, odnosno $\overline{BA} + \overline{AC} > \overline{BC}$.

Analogno se dokazuju i ostale tvrdnje. ■

PROPOZICIJA 21. *Ako se u unutrašnjosti trokuta iz krajnjih točaka jedne njegove stranice trokuta povuku dva pravca koji se sijeku, suma povučenih dužina bit će manja od dužina preostalih stranica trokuta, a kut kojeg one tvore bit će veći.*

DOKAZ. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i pravci $\overleftrightarrow{BD}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ gdje je D unutarnja točka trokuta.

Treba dokazati da je $\overline{BD} + \overline{DC} < \overline{AB} + \overline{AC}$ i $\angle BDC > \angle BAC$.



Propozicija 21.

Neka je E sjecište pravaca $\overleftrightarrow{BD}$ i $\overleftrightarrow{AC}$. U trokutu $\triangle BAE$ vrijedi $\overline{AB} + \overline{AE} > \overline{BE}$ (Propozicija 20.). Dodavanjem $\overline{EC}$ dobivamo $\overline{AB} + \overline{AE} + \overline{EC} > \overline{BE} + \overline{EC}$ [(A-4)]. Kako je $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}$ slijedi da je i

$$\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BE} + \overline{EC}.$$

Isto tako, u trokutu $\triangle CED$ je $\overline{CE} + \overline{ED} > \overline{CD}$ (Propozicija 20.), i dodavanjem $\overline{BD}$ dobivamo $\overline{CE} + \overline{ED} + \overline{BD} > \overline{CD} + \overline{BD}$ [(A-4)]. Po konstrukciji je $\overline{ED} + \overline{DB} = \overline{EB}$ pa iz prethodne nejednakosti imamo

$$\overline{CE} + \overline{ED} > \overline{CD} + \overline{BD}.$$

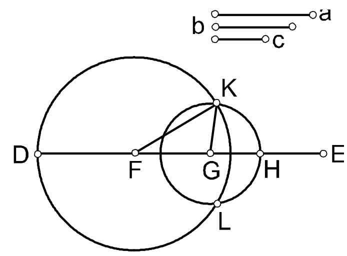
Imamo $\overline{BA} + \overline{AC} > \overline{BE} + \overline{EC} > \overline{CE} + \overline{ED} > \overline{CD} + \overline{BD}$, a to je i trebalo dokazati.

Dokažimo i drugu tvrdnju $\angle BDC > BAC$.

Promotrimo trokut $\triangle DEC$. Vanjski kut trokuta $\angle BDC$ je veći od kuta $\angle DEC$ (Propozicija 16.). Isto tako za trokut $\triangle ABE$ je $\angle BEC > \angle EAB$. Slijedi da je $\angle BDC > \angle DEC = \angle BEC > \angle EAB = \angle CAB$ i tvrdnja je dokazana. ■

PROPOZICIJA 22. *Od tri dužine koje su jednake danim trima dužinama načiniti trokut, pri tom zbroj bilo kojih dviju dužina mora biti veći od treće.*

DOKAZ. Neka su zadane tri dužine a, b i c te neka je zbroj bilo kojih dviju dužina veći od treće.

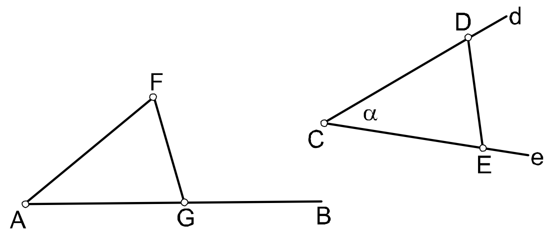


Propozicija 22.

Treba konstruirati trokut kojemu su stranice jednake zadanim dužinama. Uzmimo bilo koji polupravac $\overrightarrow{DE}$ i na njemu odredimo točke F, G i H tako da je $\overline{DF} = a$, $\overline{FG} = b$ i $\overline{GH} = c$ [(P-3)]. Opišimo potom kružnice $k_1 = k(F, a)$ i $k_2 = k(G, c)$. Sjecište tih kružnica označimo sa K i spojimo ga sa F i G. Kako je $\overline{DF} = \overline{FK} = a$ [(D-15)], $\overline{FG} = b$ (po konstrukciji) i $\overline{GK} = \overline{GH} = c$ [(D-15)], zaista je $\triangle FGK$ traženi trokut. ∎

PROPOZICIJA 23. *Na danom pravcu u danoj točki na njemu konstruirati kut jednak danom kutu.*

DOKAZ. Neka je dan pravac $\overleftrightarrow{AB}$ i neka je A dana točka na njemu. Neka je $\alpha = \angle(d, e)$ dani kut. Uzmimo na polupravcu e točku E a na d točku D i spojimo ih.

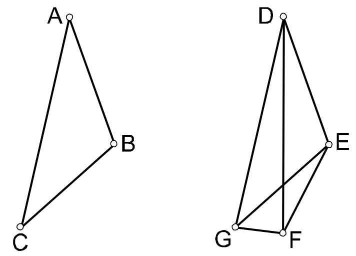


Propozicija 23.

Konstruiramo potom trokut $\triangle AGF$ kojemu $\overline{AG} = \overline{CE}$, $\overline{AF} = \overline{CD}$ i $\overline{GF} = \overline{ED}$ (Propozicija 22.). Trokuti $\triangle DCE$ i $\triangle FAG$ su sukladni (Propozicija 8.) pa je $\angle FAG = \angle DCE = \alpha$. ∎

PROPOZICIJA 24. *Ako su kod dva trokuta dvije stranice jednog jednake dvjema stranicama drugog, a kutovi među njima nisu jednaki, tada je u onom trokutu gdje je taj kut veći nasuprotna stranica veća.*

DOKAZ. Neka su dani trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ tako da je $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ i $\angle CAB > \angle FDE$.
Treba dokazati da vrijedi $\overline{BC} > \overline{EF}$.

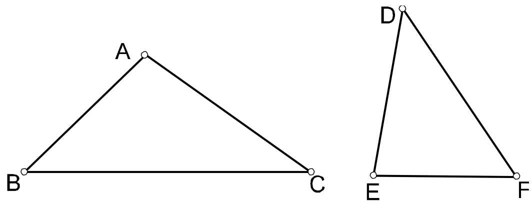


Propozicija 24.

Budući je $\angle CAB > \angle FDE$ konstruirajmo kut $\angle EDG$ nad $\overrightarrow{DE}$ jednak kutu $\angle BAC$ (Propozicija 23.) i na $\overrightarrow{DG}$ neka je G točka takva da je $\overline{DG} = \overline{AC}$. Spojimo G sa D i E. Promotrimo trokute $\triangle ABC$ i $\triangle DEG$. Po S-K-S poučku o sukladnosti (Propozicija 4.) oni sukladni pa je $\overline{BC} = \overline{EG}$. Budući je trokut $\triangle DGF$ jednakokračan imamo da vrijedi $\angle DGF = \angle DFG$ (Propozicija 5.). Dakle, $\angle DFG = \angle DGF > \angle EGF$ pa je pogotovo $\angle EFG > \angle EGF$. Dakle, u trokutu $\triangle EFG$ je $\angle EFG > \angle EGF$ pa je $\overline{EG} > \overline{EF}$ (Propozicija 19.). Kako je $\overline{EG} = \overline{BC}$ to je i $\overline{BC} > \overline{EF}$. ∎

PROPOZICIJA 25. *Ako su kod dva trokuta dvije stranice jednake, a treće stranice nejednake, onda je u onom trokutu kojem je stranica veća nasuprotni kut veći.*

DOKAZ. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ takvi da je $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ i $\overline{BC} > \overline{EF}$.
Treba dokazati da je $\angle BAC > \angle EDF$.

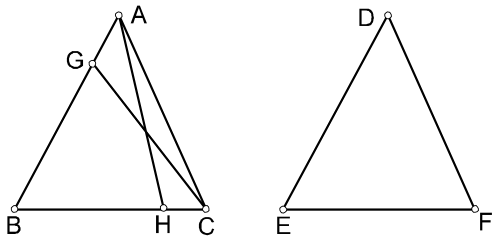


Propozicija 25.

Pretpostavimo suprotno. Moguća su dva slučaja:
(1) $\angle BAC = \angle EDF$ i tada je (po Propoziciji 16.) $\overline{BC} = \overline{EF}$, a to je u protuslovlju s našom pretpostavkom da je $\overline{BC} > \overline{EF}$;
(2) $\angle BAC < \angle EDF$ i tada je (po Propoziciji 24.) $\overline{BC} < \overline{EF}$, a to je u protuslovlju s pretpostavkom da je $\overline{BC} > \overline{EF}$.
Dakle, mora biti $\angle BAC > \angle EDF$. ∎

PROPOZICIJA 26. *Ako su kod dva trokuta po dva odgovarajuća kuta jednaka i jednake odgovarajuće stranice i to ili one uz ta dva kuta ili one nasuprot jednom od odgovarajućih kutova tada su i preostale odgovarajuće stranice i preostali kutovi jednaki.*

DOKAZ. Neka su dani trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ tako da je $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\angle ABC = \angle DEF$ i $\angle BCA = \angle EFD$.



Propozicija 26.

Treba dokazati da se i preostali elementi trokuta jednaki, tj. $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ i $\angle BAC = \angle EDF$.

Pretpostavimo da je $\overline{AB} \neq \overline{DE}$. Tada je jedna od njih veća, uzmimo da je $\overline{AB} > \overline{DE}$. Prenesimo dužinu $\overline{DE}$ na $\overline{AB}$ od točke B i neka je G točka na $\overline{AB}$ takva da je $\overline{DE} = \overline{BG}$. Tada je $\triangle GBC \cong \triangle DEF$ (Propozicija 4.), dakle, i $\angle GCB = \angle DFE$. No, po pretpostavci je $\angle DFE = \angle BCA$ pa bi bilo da je i $\angle BCG = \angle BCA$. Dobili smo da je manji kut jednak većemu kutu, što je nemoguće [(A-6)]. Dakle, mora biti $\overline{AB} = \overline{DE}$. Vrijedi $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (po pretpostavci je $\overline{BC} = \overline{EF}$ i $\angle ABC = \angle DEF$, a dokazali smo $\overline{AB} = \overline{DE}$, pa možemo primijeniti Propoziciju 4.), i odatle je $\overline{BC} = \overline{EF}$.

Dokažimo drugi slučaj.

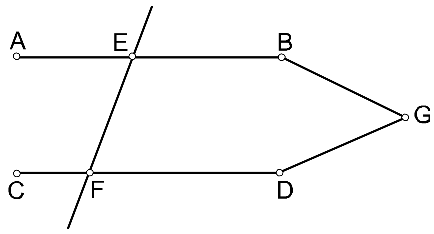
Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ takvi da je $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle EFD$ i $\overline{AB} = \overline{ED}$.

Treba dokazati da su i preostali elementi trokuta jednaki, tj. da je $\overline{AC} = \overline{DF}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ i $\angle BAC = \angle EDF$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\overline{BC} \neq \overline{EF}$ i neka je $\overline{BC} > \overline{EF}$. Prenesimo $\overline{EF}$ na $\overline{BC}$ od točke B i neka je H točka na $\overline{BC}$ takva da je $\overline{BH} = \overline{EF}$. Tada je $\triangle ABH \cong \triangle DEF$ ($\overline{AB} = \overline{DE}$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\overline{BH} = \overline{EF}$, primijenimo Propoziciju 4.) odakle slijedi $\angle BHA = \angle EFD$. No, po pretpostavci je i $\angle EFD = \angle BCA$. Dobili smo da je u trokutu $\triangle AHC$ vanjski kut $\angle BHA$ jednak unutrašnjem nesusjednom kutu $\angle BCA$ što je u kontradikciji s Propozicijom 16. Dakle, mora biti $\overline{BC} = \overline{EF}$. Sada imamo $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\overline{AB} = \overline{ED}$ i $\angle BAC = \angle EDF$ pa je $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (Propozicija 4.) te posebno $\angle BAC = \angle EDF$. ∎

PROPOZICIJA 27. *Ako pravac siječe druga dva pravca i tvori s njima jednake unutarnje, izmjenične kutove onda su ta dva pravca paralelna.*

DOKAZ. Neka pravac $\overleftrightarrow{EF}$ siječe pravce $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ u točkama E i F i neka su izmenični kutovi jednaki, tj. $\angle AEF = \angle EFD$ (ili $\angle BEF = \angle CFE$).
Treba dokazati da su $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ paralelni pravci.

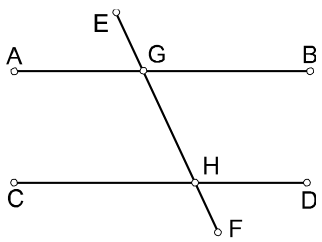


Propozicija 27.

Pretpostavimo suprotno, tj. da se polupravac $\overrightarrow{EB}$ siječe sa $\overrightarrow{FD}$ u točki G. Promotrimo trokut $\triangle EFG$. Kako je $\angle AEF$ je vanjski kut trokuta $\triangle EFG$ to je $\angle AEF > \angle EFG$ (Propozicija 16.), što je u protuslovlju s pretpostavkom.
Slično se dokazuje da $\overrightarrow{EA}$ ne siječe $\overrightarrow{FC}$.
Dakle, pravci $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ su paralelni [(D-23)]. ■

PROPOZICIJA 28. *Ako pravac koji siječe dva pravca tvori s njima s iste svoje strane vanjski kut jednak unutarnjem kutu ili dva unutarnja kuta jednaka dvama pravim kutovima onda su ti pravci paralelni.*

DOKAZ. Neka pravac $\overleftrightarrow{EF}$ siječe pravce $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ u točkama G i H, te neka je ili $\angle EGB = \angle GHD$ ili $\angle BGH + \angle GHD = 2R$.
Treba dokazati da je $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.



Propozicija 28.

Promotrimo prvi slučaj: $\angle EGB = \angle GHD$.
Tada je $\angle EGB = \angle AGH$ (Propozicija 15.). Dakle, izmjenični kutovi $\angle EGB$ i $\angle GHD$ su jednaki pa je $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (Propozicija 27.).
Drugi slučaj: $\angle BGH + \angle GHD = 2R$.
Budući je $\angle AGH + \angle BGH = 2R$ (Propozicija 13.) imamo $\angle BGH + \angle GHD = \angle AGH + \angle BGH$. Oduzimanjem kuta $\angle BGH$ dobivamo $\angle GHD = \angle AGH$.

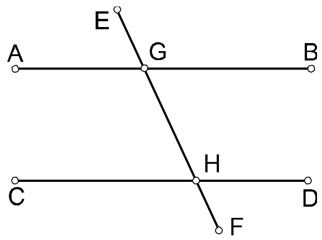
Dakle, izmjenični kutovi $\angle GHD$ i $\angle AGH$ su jednaki pa je $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (Propozicija 27.). ∎

PROPOZICIJA 29. *Ako pravac siječe dva paralelna pravca, onda on s njima tvori jednake izmjenične kutove, vanjski kut odgovara unuhtrašnjem s iste strane i dva unutrašnja kuta s iste strane su jednaka dvama pravim kutovima.*

DOKAZ. Neka pravac $\overleftrightarrow{EF}$ siječe paralelne pravce $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ u točkama G i H. Treba dokazati da je

$$\angle AGH = \angle GHD,\ \angle EGB = \angle GHD \text{ i } \angle BGH + \angle GHD = 2R.$$

Dokažimo prvu tvrdnju $\angle AGH = \angle GHD$.



Propozicija 29.

Pretpostavimo suprotno, i neka je $\angle AGH > \angle GHD$. Dodavanjem kuta $\angle BGH$ dobivamo $\angle AGH + \angle BGH > \angle GHD + \angle BGH$.

Kako je $\angle AGH + \angle BGH = 2R$ (Propozicija 13.) dobili smo da je $\angle GHD + \angle BGH < 2R$. To znači da se pravci $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ sijeku [(P-5)], a to je u kontra dikciji s pretpostavkom $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Dakle, mora biti $\angle AGH = \angle GHD$.

Odavde slijedi i druga tvrdnja $\angle EGB = \angle GHD$.

Dokažimo treću tvrdnju $\angle BGH + \angle GHD = 2R$.

Kako je $\angle AGH = \angle EGB$ (Propozicija 15.), a po prvoj dokazanoj tvrdnji je $\angle AGH = \angle GHD$, dobivamo da je $\angle EGB = \angle GHD$ [(A-1)].

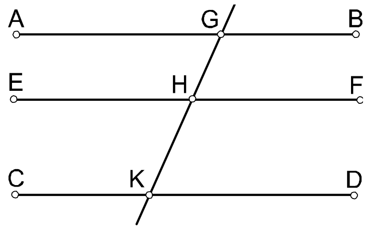
Dodavanjem kuta $\angle BGH$ dobivamo $\angle EGB + \angle BGH = \angle GHD + \angle BGH$. Budući je $\angle EGB + \angle BGH = 2R$ (Propozicija 13.) dobili smo $\angle GHD + \angle BGH = 2R$. ∎

PROPOZICIJA 30. *Pravci koji su paralelni istom pravcu paralelni su i međusobno.*

DOKAZ. Neka je $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ i $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$.

Treba dokazati $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

Presjecimo dane pravce nekim pravcem i neka ih on siječe u točkama G, H i K. Iz $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ slijedi $\angle AGK = \angle GHF$, a iz $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ slijedi $\angle GHF = \angle GKD$ (Propozicija 29.).

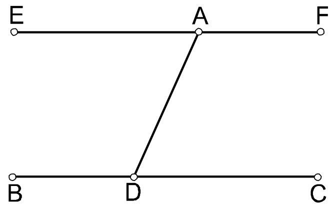


Propozicija 30.

Dobili smo da je $\angle AGK = \angle GKD$ [(A-1)] i dalje $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (Propozicija 27.). ■

PROPOZICIJA 31. *Kroz danu točku povući pravac paralelan danom pravcu.*

DOKAZ. Neka je dana točka A van danog pravca $\overleftrightarrow{BC}$.

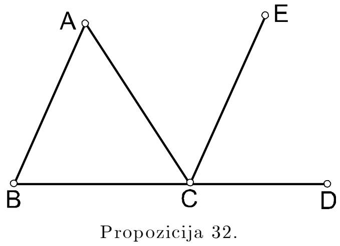


Propozicija 31.

Odaberimo na $\overleftrightarrow{BC}$ proizvoljnu točku D i spojimo $\overline{AD}$. Uočimo kut $\angle ADC$. Prenesimo $\angle ADC$ uz $\overline{AD}$ s druge strane iz vrha A. Neka je tako dobiven $\angle EAD$ (Propozicija 23.). Dobili smo da je $\overleftrightarrow{EA}$ tražena paralela (Propozicija 27.). ■

PROPOZICIJA 32. *U svakom trokutu vanjski kut je jednak zbroju dvaju nesusjednih unutarnjih kutova, a zbroj sva tri unutrašnja kuta jednak je dvama pravim kutovima.*

DOKAZ. Neka je dan trokut $\triangle ABC$. Odaberimo na $\overrightarrow{BC}$ točku D. $\angle ACD$ je vanjski kut trokuta $\triangle ABC$.
Dokažimo $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$.
Povucimo kroz C paralelu $\overleftrightarrow{CE}$ sa $\overleftrightarrow{AB}$ (Propozicija 31.).
Iz $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$ i jer $\overleftrightarrow{AC}$ siječe te pravce slijedi $\angle BAC = \angle ACE$ (Propozicija 29.). Isto tako iz $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$ i jer $\overleftrightarrow{BD}$ siječe te pravce, slijedi $\angle ECD = \angle ABC$ (Propozicija 29.). Sada je $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD$ [(A-1)], tj. $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$.

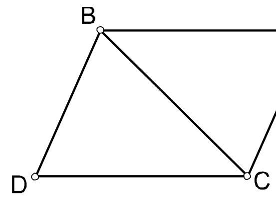


Propozicija 32.

Time je dokazano da je vanjski kut trokuta jednak zbroju dva nesusjedna kuta trokuta: $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$.
Dodavanjem ovoj jednakosti kuta $\angle BCA$ dobivamo da je $\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = \angle ACD + \angle BCA$. Budući je $\angle ACD + \angle BCA = 2R$ (Propozicija 13.), zaista je zbroj sva tri unutrašnja kuta trokuta jednak $2R$ [(A-1)]. ■

PROPOZICIJA 33. *Dužine koje spajaju s iste strane krajeve jednakih i paralelnih dužina i same su jednake i paralelne.*

DOKAZ. Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paralelne dužine i $\overline{AB} = \overline{CD}$.
Treba dokazati da je $\overline{AC} = \overline{BD}$ i $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$.

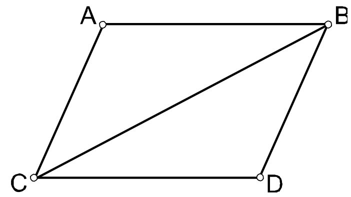


Propozicija 33.

Spojimo $\overline{BC}$. Budući je $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ i pravac $\overleftrightarrow{BC}$ siječe paralelne pravce izmjenični kutovi su jednaki: $\angle ABC = \angle BCD$ (Propozicija 29.). Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle BCD$ su sukladni ($\overline{AC} = \overline{BD}$, $\angle ABC = \angle BCD$, $\overline{BC}$ zajednička stranica, Propozicija 26.). Iz sukladnosti trokuta slijedi prva tvrdnja $\overline{BD} = \overline{AC}$.
Dokažimo i drugu tvrdnju $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{AC}$.
Iz sukladnosti trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle BCD$ slijedi i $\angle ABC = \angle DCB$. Budući $\overleftrightarrow{BC}$ siječe pravce $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{CD}$ i čini međusobno jednake izmjenične kutove zaista je $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ (Propozicija 27.). ■

PROPOZICIJA 34. *Kod paralelograma su nasuprotne stranice jednake, nasuprotni kutovi su jednaki i dijagonala ga raspolavlja.*

DOKAZ. Neka je $ACDB$ pralelogram, a $\overline{BC}$ njegova dijagonala.



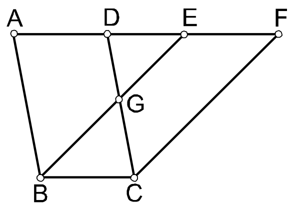
Propozicija 34.

Budući je $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ i pravac $\overleftrightarrow{CD}$ ih presjeca, imamo $\angle ABC = \angle CBD$ (Propozicija 29.). Isto tako, $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ i pravac $\overleftrightarrow{CD}$ ih presjeca, vrijedi $\angle ACB = \angle CBD$. Slijedi da su trokuti $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$ sukladni (zajednička stranica i jednaki kutovi na njoj, Propozicija 26.), tj. dijagonala raspolavlja paralelogram. Dakle,

i ostali elementi trokuta su jednaki: nasuprotni kutovi $\angle CAB = \angle CDB$, i nasuprotne stranice $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$.
Budući je $\angle ABC = \angle CBD$ i $\angle CAB = \angle CDB$ dobivamo $\angle ABC + \angle CAB = \angle CBD + \angle CDB$ [(A-2)], odnosno preostali nasuprotni kutovi su jednaki $\angle BAC = \angle CDB$. ∎

PROPOZICIJA 35. *Paralelogrami s istom osnovicom između istih paralela su jednaki (po površini).*

DOKAZ. Neka su $ABCD$, $EBCF$ paralelogrami na istoj osnovici i istim paralelama $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AF}$.
Treba dokazati da je paralelogram $ABCD$ jednak paralelogramu $EBCF$.

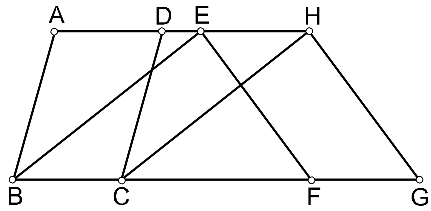


Propozicija 35.

Budući su $ABCD$ i $EBCF$ paralelogrami imamo $\overline{AD} = \overline{BC}$ i $\overline{EF} = \overline{BC}$ (Propozicija 34.) pa je onda i $\overline{AD} = \overline{EF}$ [(A-1)]. Dodavanjem dužine $\overline{DE}$ dobivamo $\overline{AD} + \overline{DE} = \overline{EF} + \overline{DE}$ [(A-2)], tj. $\overline{AE} = \overline{DF}$. Vrijedi i $\overline{AB} = \overline{DC}$ ($ABCD$ je paralelogram, Propozicija 34.). Promotrimo trokute $\triangle EAB$ i $\triangle FDC$. Oni su sukladni jer je $\overline{AD} = \overline{EF}$, $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\angle FDC = \angle EAB$ (Propozicija 29.). Kada se od sukladnih trokuta $\triangle EAB$ i $\triangle FDC$ oduzme zajednički dio trokut $\triangle GBC$ dobit ćemo jednake trapeze $ABGD$ i $EGCF$ [(A-3)]. Dodajmo tim trapezima trokut $\triangle GBC$ pa je paralelogram $ABCD$ jednak paralelogramu $EBCF$ [(A-3)]. ∎

PROPOZICIJA 36. *Paralelogrami s jednakim osnovicama između istih paralela su jednaki.*

DOKAZ. Neka su $ABCD$, $EFGH$ paralelogrami s jednakim osnovicama $\overline{BC}$, $\overline{FG}$ i istim paralelama $\overleftrightarrow{AH}$, $\overleftrightarrow{BG}$.
Tvrdimo da je paralelogram $ABCD$ jednak paralelogramu $EFGH$.

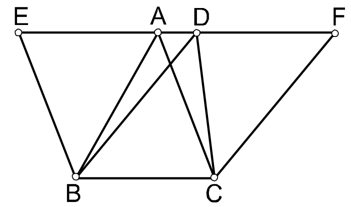


Propozicija 36.

Spojimo točku A s točkom H i točku B s točkom E. Budući je $\overline{BC} = \overline{FG}$ i $\overline{FG} = \overline{EH}$ imamo $\overline{BC} = \overline{EH}$ [(A-1)]. Jednake stranice $\overline{BC}$ i $\overline{EH}$ su i paralelne i spajaju ih $\overline{EB}$ i $\overline{HC}$ pa su i one jednake i paralelne (Propozicija 33.). Dakle, $EBCH$ paralelogram. Taj je paralelogram jednak paralelogramu $ABCD$ (Propozicija 35.). Iz istog razloga je paralelogram $EFGH$ jednak paralelogramu $EBCH$ (Propozicija 35.). Dakle, i paralelogram $ABCD$ jednak je paralelogramu $EFGH$ [(A-1)]. ■

PROPOZICIJA 37. *Trokuti s istom osnovicom između istih paralela su jednaki.*

DOKAZ. Neka su $\triangle ABC$, $\triangle DBC$ trokuti s istom osnovicom $\overline{BC}$ i između paralela $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AD}$.
Tvrdimo da je trokut $\triangle ABC$ jednak trokutu $\triangle DBC$.

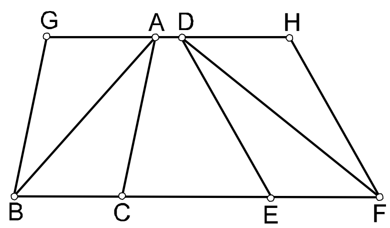


Propozicija 37.

Konstruiramo paralelu kroz B sa $\overleftrightarrow{CA}$, a kroz C paralelu sa $\overleftrightarrow{BD}$ (Propozicija 31.). Sjecišta tih paralela s pravcem $\overleftrightarrow{AD}$ označimo sa E i F. Dobili smo dva jednaka paralelograma $EBCA$ i $DBCF$ (Propozicija 35.). Trokut $\triangle ABC$ je polovina paralelograma, a trokut $\triangle DBC$ je polovina paralelograma $DBCF$ (Propozicija 36.). Dakle, trokut $\triangle ABC$ je jednak trokutu $\triangle DBC$. ■

PROPOZICIJA 38. *Trokuti s jednakim osnovicama između istih paralela su jednaki.*

DOKAZ. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ trokuti dakvi da je $\overline{BC} = \overline{EF}$ i $\overline{BF} \parallel \overline{AD}$. Tvrdimo da su ti trokuti jednaki (po površini).



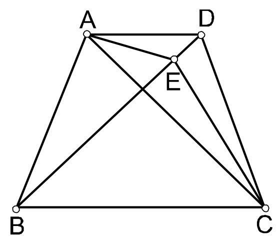
Propozicija 38.

Konstruiramao paralelu kroz B sa $\overleftrightarrow{AC}$ i paralelu kroz F sa $\overleftrightarrow{DE}$ (Propozicija 31.) i sjecišta dobivenih paralela sa $\overleftrightarrow{AD}$ označimo sa G i H. Dobili smo dva jednaka

paralelograma $GBCA$ i $DEFH$ (Propozicija 36.). Trokut $\triangle ABC$ je polovina paralelograma $GBCA$, a trokut $\triangle EFD$ polovina paralelograma $DEFH$ (Propozicija 34.).
Prema tome trokut $\triangle ABC$ je jednak trokutu $\triangle DEF$. ∎

PROPOZICIJA 39. *Jednaki trokuti s istom osnovicom i iste njezine strane leže između istih paralela.*

DOKAZ. Neka su dani jednaki trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DBC$ s istom osnovicom $\overline{BC}$ i s iste strane osnovice.
Tvrdimo $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$.

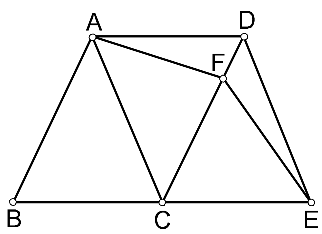


Propozicija 39.

Pretpostavimo suprotno, tj. da pravci $\overleftrightarrow{BC}$ i $\overleftrightarrow{AD}$ nisu paralelni. Povucimo točkom A paralelu s pravcem $\overleftrightarrow{BC}$ (Propozicija 31.) i njeno sjecište s pravcem $\overleftrightarrow{BD}$ označimo E. Spojimo točke E i C. Trokut $\triangle ABC$ jednak je trokutu $\triangle EBC$ (Propozicija 37.). No $\triangle ABC$ jednak je i trokutu $\triangle DBC$ pa imamo da je trokut $\triangle BCE$ jednak trokutu $\triangle BCD$ [(A-1)]. Dobili smo da je veći trokut jednak manjemu, što je nemoguće [(A-5)]. ∎

PROPOZICIJA 40. *Jednaki trokuti s jednakim osnovicama s iste strane od njih leže između istih paralela.*

DOKAZ. Neka su $\triangle ABC$, $\triangle CDE$ jednaki trokuti s jednakim osnovicama $\overline{BC} = \overline{CE}$ i s iste strane.
Tvrdimo de je $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overline{AD}$.



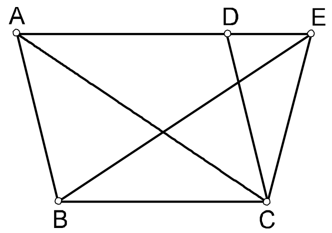
Propozicija 40.

U suprotnom, povucimo točkom A paralelu s pravcem $\overleftrightarrow{BC}$ (Propozicija 31.) i njeno sjecište s pravcem $\overleftrightarrow{CD}$ označimo sa F. Spojimo točke F i E. Trokut

$\triangle ABC$ jednak je trokutu $\triangle FCE$ (Propozicija 38.). Kako su i trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DCE$ jednaki, dobivamo da je trokut $\triangle DCE$ jednak trokutu $\triangle FCE$, a to je nemoguće [(A-5)]. ■

PROPOZICIJA 41. *Ako paralelogram ima istu osnovicu s nekim trokutom i ako leže između istih paralela, onda je paralelogram dva puta veći od trokuta.*

DOKAZ. Neka paralelogram $ABCD$ i trokut $\triangle EBC$ imaju istu osnovicu i neka leže između istih paralela.
Trvdimo da je paralelogram $ABCD$ dvostruko veći od trokuta $\triangle EBC$.

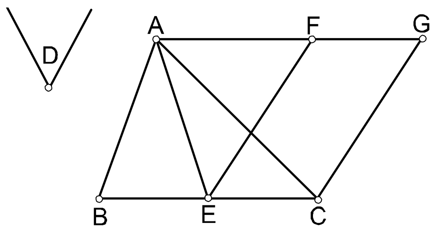


Propozicija 41.

Spojimo točke A i C. Trokuti $\triangle ABC$, i $\triangle EDC$ su jednaki (Propozicija 37.) i kako je paralelogram $ABCD$ dvostruko veći od trokuta $\triangle ABC$ (Propozicija 34.) zaista je paralelogram $ABCD$ dvostruko veći od trokuta $\triangle EBC$. ■

PROPOZICIJA 42. *U danom pravocrtnom kutu konstruirati paralelogram jednak danom trokutu.*

DOKAZ. Neka su dani trokut $\triangle ABC$ i kut $\angle D$.



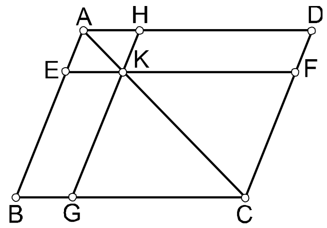
Propozicija 42.

Raspolovimo dužinu $\overline{BC}$ i neka je E njeno polovište, tj. $\overline{BE} = \overline{EC}$. Nanesimo kut $\angle D$ iz E tako da je $\angle FEC = \angle D$ (Propozicija 23.). Točkom A povucimo paralelu s $\overleftrightarrow{BC}$ (Propozicija 31.) i neka je F točka u kojoj ta paralela siječe $\overleftrightarrow{EF}$. Točkom C povucimo paralelu s $\overleftrightarrow{EF}$ (Propoziija 23.) i neka je G točka u kojoj ta paralela siječe $\overleftrightarrow{AF}$. Time smo dobili paralelogram $FECG$.
Tvrdimo da je to traženi paralelogram. Budući je $\overline{BE} = \overline{EC}$ trokuti $\triangle ABE$ i $\triangle AEC$ su jednaki jer leže između istih paralela (Propozicija 38.). Dakle, trokut $\triangle ABC$ je dvostruko veći od trokuta $\triangle AEC$. No, i paralelogram $FECG$

je dvostruko veći od trokuta $\triangle AEC$ (Propozicija 41.) pa je on jednak i danom trokutu $\triangle ABC$.
Dakle, jer je $\angle FEC = \angle D$, paralelogram $FECG$ je upisan u dani kut i jednak je danom trokutu $\triangle ABC$, što se i tvrdilo. ■

PROPOZICIJA 43. *U svakom paralelogramu dopune paralelogramima na dijagonali su jednake.*

DOKAZ. Neka je $ABCD$ dani paralelogram i $\overline{AC}$ njegova dijagonala.

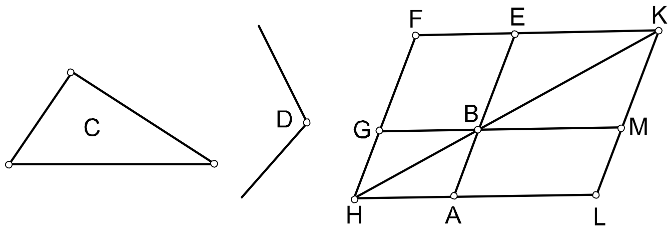


Propozicija 43

Odaberimo na dijagonali točku K i povucimo njome paralele s $\overleftrightarrow{AD}$ i $\overleftrightarrow{AB}$. Presječne točke tih paralela sa stranicama paralelograma označimo sa E, F, H i G.
Paralelogrami $EBGK$ i $HKFD$ su dopune na dijagonali i treba dokazati da su one jednake.
Budući je $\overline{AC}$ dijagonala paralelograma $ABCD$ trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ su jednaki (Propozicija 34.). Isto tako trokuti $\triangle AEK$ i $\triangle AKH$ su jednaki i nadalje trokuti $\triangle KGC$ i $\triangle KCF$ su jednaki (Propozicija 34.). Sada je zbroj trokuta $\triangle AEK$ i $\triangle KGC$ jednak zbroju trokuta $\triangle AHK$ i $\triangle KCF$ [(A-2)]. Budući je trokut $\triangle ABC$ jednak trokutu $\triangle ADC$ preostala dopuna $EBGH$ jednaka je preostaloj dopuni $HKFD$ [(A-3)]. ■

PROPOZICIJA 44. *Na danoj dužini u danom pravocrtnom kutu konstruirati paralelogram jednak danom trokutu.*

DOKAZ. Neka je $\overline{AB}$ dana dužina, C dani trokut, a $\angle D$ je dan pravocrtni kut.
Treba uz danu dužinu $\overline{AB}$ u kutu jednakom D konstruirati paralelogram jednak danom trokutu C.



Propozicija 44.

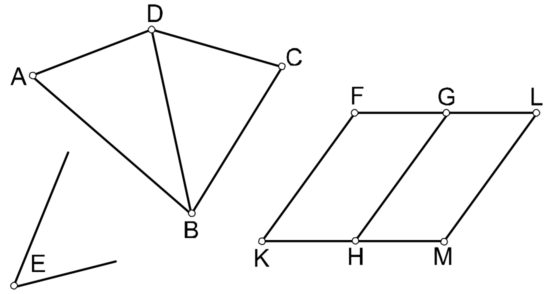
Odaberimo proizvoljni pravac i na njemu nanesimo danu dužinu $\overline{AB}$. Produžimo dužinu $\overline{AB}$ i u vrhu B nanesimo kut $\angle D$ i u njemu paralelogram $BEFG$ jednak danom trokutu $\triangle C$ (Propozicija 42.). Povucimo točkom A paralelu s $\overleftrightarrow{BG}$ (Propozicija 31.) i presjek te paralele s praavcem $\overleftrightarrow{FG}$ označimo sa H. Pravac $\overleftrightarrow{FH}$ siječe paralelne pravace $\overleftrightarrow{FE}$ i $\overleftrightarrow{HA}$ pa je $\angle AHF + \angle HFE = 2R$ (Propozicija 29.). Slijedi $\angle BHG + GFE < 2R$, a to znači da se pravci $\overleftrightarrow{HB}$ i $\overleftrightarrow{FE}$ sijeku [(P-5)]. Sjecište označimo sa K i njime povučimo paralelu s pravcem $\overleftrightarrow{EA}$ (Propozicija 31.) i sjecište te paralele s pravcem $\overleftrightarrow{HA}$ označimo sa L. Dobili smo paralelogram $HLKF$ kojemu je dijagonala $\overline{HK}$, a paralelogrami $LMBA$ i $BEGB$ su dopune oko dijagonale $\overline{HK}$. Dopune su jednake (Propozicija 43.) i kako je dopuna $BEFG$ jednaka trokutu $\triangle C$, to je i dopuna $LMBA$ jednaka trokutu $\triangle C$ [(A-1)]. Budući je $\angle GBE = \angle ABM$ (Propozicija 15.), a $\angle GBE = \angle D$, onda je i $\angle ABM = \angle D$.

Dakle, $ALMB$ je traženi paralelogram. ■

PROPOZICIJA 45. *U danom pravocrtnom kutu konstruirati paralelogram jednak danom pravocrtnom liku.*

DOKAZ. Neka je $ABCD$ pravocrtni lik i $\angle E$ dani pravocrtni kut.

Spojimo točke B i D i promotrimo trokut ΔABD. Konstruirajmo u danom kutu $\angle E$ paralelogram $KHGF$ jednak trokutu $\triangle ABD$ (Propozicija 42.). U kutu $\angle GHM = \angle E$ nad $\overline{GH}$ konstruirajmo paralelogram $GHML$ jednak trokutu $\triangle BDC$ (Propozicija 44.). Kutovi $\angle HKH$ i, $\angle GHM$ su jednaki kutu $\angle E$ pa su i međusobno jednaki [(A-1)]. Dodajmo im kut $\angle KHG$ pa dobivamo $\angle HKF + \angle KHG = \angle GHM + \angle KHG$. Kako je $\angle HKF + \angle KHG = 2R$ (Propozicija 29.) to je i $\angle GHM + \angle KHG = 2R$. Slijedi da točke K, H i M leže na jednom pravcu (Propozicija 14.).



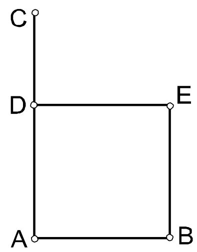
Propozicija 45.

Budući da pravac $\overleftrightarrow{GH}$ siječe paralelne pravce $\overleftrightarrow{KM}$ i $\overleftrightarrow{FG}$ to su i izmjenični kutovi $\angle MHG$ i$\angle HGF$ jednaki. Dodavanjem kuta $\angle HGL$ dobivamo $\angle MHG + \angle HGL = \angle HGF + \angle HGL$. Budući je $\angle MHG + \angle HGL = 2R$ (Propozicija 29.) to je i $\angle HGF + \angle HGL = 2R$ [(A-1)]. Prema tome točke F, G i L leže na

istom pravcu (Propozicija 14.). Budući su dužine $\overline{FK}$ i $\overline{HG}$ jednake i paralelne (Propozicija 34.), te dužine $\overline{HG}$ i $\overline{ML}$ jednake i paralelne, onda su i dužine $\overline{KF}$ i $\overline{ML}$ jednake i paralelne [po (A-1) i Propoziciji 30.].
Dakle $KFLM$ je paralelogram jednak danom pravocrtnom liku $ABCD$. ∎

PROPOZICIJA 46. *Na danoj dužini konstruirati kvadrat.*

DOKAZ. Neka je $\overline{AB}$ dana dužina.
U točki A dignimo okomicu $\overleftrightarrow{AC}$ (Propozicija 11.) i na njoj odredimo točku D tako da je $\overline{AB} = \overline{AD}$. Točkom D povucimo paralelu s pravcem $\overleftrightarrow{AB}$, a točkom B paralelu s pravcem $\overleftrightarrow{AD}$ (Propozicija 31.). Sjecište tih pravaca označimo sa E. Dobili smo paralelogram $ADEB$ pa je $\overline{AB} = \overline{DE}$ i $\overline{AD} = \overline{BE}$ (Propozicija 34.).



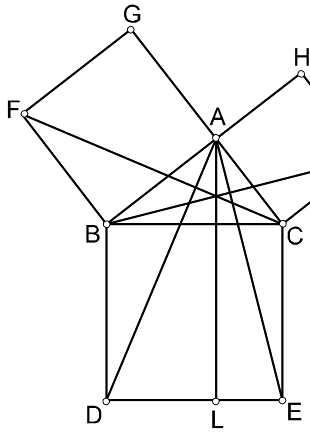
Propozicija 46.

Kako je i $\overline{AB} = \overline{AD}$, paralelogram $ADEB$ je jednakostraničan. Dokažimo da je on i pravokutan. Budući je pravac $\overleftrightarrow{AD}$ siječe paralelne pravace $\overleftrightarrow{AB}$ i $\overleftrightarrow{DE}$ vrijedi $\angle BAD + \angle ADE = 2R$. Jer je $\angle BAD = R$, to je i $\angle ADE = R$. Budući su suprotni kutovi paralelograma jednaki, to su i kutovi $\angle ABE$ i $\angle BED$ pravi.
Dakle, $ADEB$ je pravokutan i jednakostraničan, dakle i kvadrat. ∎

PROPOZICIJA 47. *U svakom pravokutnom trokutu kvadrat nad stranicom nasuprot pravog kuta jednak je zbroju kvadrata nad stranicama uz pravi kut.*

DOKAZ. Neka je $\triangle ABC$ pravokutni trokut s pravim kutom $\angle BAC$.
Konstrirajmo nad stranicama danog trokuta kvadrate $BDEF$, $ACKH$ i $AGFB$ (Propozicija 46.). Iz A povucimo paralelu s $\overleftrightarrow{BD}$ i njeno sjecište s $\overleftrightarrow{DE}$ označimo sa L. Spojimo A sa D, L, E, te F sa C i B sa K. Budući su kutovi $\angle BAC$ i $\angle BAG$ pravi, točke A, C, G leže na istom pravcu (Propozicija 14.). Iz istog rrazloga i točke B, A, H leže na istom pravcu. Budući je $\angle DBC = \angle FBA$ dodavanjem kuta $\angle ABC$ dobivamo da je $\angle DBA = \angle FBC$ [(A-2)]. Promotrimo trokute $\triangle ABD$, $\triangle FBC$. Oni imaju po dvije stranice jednake i jednaki kut među njima pa su sukladni (Propozicija 4.). Osim toga paralelogram kojemu je $\overline{BL}$ dijagonala dvostruko je veći od trokuta $\triangle ABD$, jer imaju istu osnovicu i leže između istih paralela (Propozicija 41.). Isto tako i kvadrat s dijagonalom $\overline{GB}$

dvostruko je veći od trokuta $\triangle FBC$ (Propozicija 41.). Dakle, paralelogram s dijagonalom $\overline{BL}$ jednak je kvadratu s dijagonalom $\overline{GB}$.

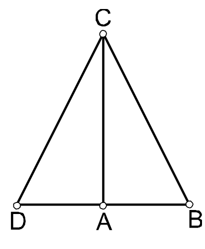


Propozicija 47.

Slično se dokazuje da ako spojimo E sa E i B sa K, da je tada paralelogram s dijagonalom $\overline{CL}$ jednak kvadratu s dijagonalom $\overline{HC}$. Slijedi da je zaista kvadrat nad stranicom nasuprot pravog kuta trokuta jednak zbroju kvadrata nad stranicama uz pravi kut. ∎

PROPOZICIJA 48. *Ako je kod trokuta kvadrat nad jednom stranicom jednak zbroju kvadrata nad drugim dvjema stranicama, onda je kut između tih dviju stranica pravi.*

DOKAZ. Neka je trokut $\triangle ABC$ takav da zadovoljava uvjet, tj. neka je kvadrat nad stranicom $\overline{BC}$ jednak zbroju kvadrata nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.
Tvrdimo da je kut $\angle BAC$ pravi.



U točki A dignimo okomicu na $\overleftrightarrow{AC}$ i na toj okomici odaberimo točku D tako da je $\overline{DA} = \overline{AB}$. Sada su kvadrati nad dužinama $\overline{DA}$ i $\overline{AB}$ jednaki. Dodajmo im kvadrat nad $\overline{AC}$. Zbroj kvadrata nad dužinama $\overline{DA}$ i $\overline{AC}$ jednak je zbroju kvadrata nad dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Prvi zbroj je jednak kvadratu nad $\overline{CD}$ (Propozicija 47.), a drugi zbroj je po pretpostavci jednak zbroju kvadrata nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Dakle kvadrati nad $\overline{AD}$ i $\overline{CB}$ su jednaki pa je $\overline{AD} = \overline{CB}$.

Dobili smo da se trokuti $\triangle ACD$ i $\triangle ACB$ podudaraju u sve tri stranice, dakle sukladni su (Propozicija 8.).
Slijedi $\angle CAB = \angle CAD = R$, a to se i tvrdilo. ■

LITERATURA

[1] Euklid, *Elementi I-VI.* Kruzak, Zagreb, 1999.

[2] Euklidovi Elementi,
`http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`

[3] The MacTutor History of Mathematics archive
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/ index.html`

[4] T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements with Introduction and Commentata,* Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1956.

[5] G. A. Venema. *The Foundations of Geometry,* Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2006.

[6] P.J. Ryan, *Euclidean and Non-Eucidean Geometry: an Analitytic Approach*, Cambridge university press, Cambridge, 1986.

[7] N.V. Efimov, *Higher geometry*, Mir, Moscow, 1980.

[8] M. Prvanović, *Osnovi geometrije,* Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

[9] R. Tošić, V. Petrović, *Zbirka zadataka iz osnova geometrije*, Građevinska knjiga, Novi sad, 1982.

[10] J.N. Cedenberg, *A Course in Modern Geometries*, second 2d.,Springer-Verlag, New York, Berlin, 2001.

[11] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Eucidean Geometry; Development and Hystory, third ed., W.H. Freeman and Company, New York, 1994.*

[12] H.S.M. Coxeter, *Non-Euclidean Geometry, sixth ed., MAA,* Washington, 1988.