Vjerojatnost i raspodjele

« Uvod u statističku fiziku »

Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2005/2006

Pregled predavanja

Permutacije

Pitanje: Koliko različitih troznamenkastih brojeva možemo načiniti od znamenki: 1,2 i 5 ?

- Pješački način je ispisati sve mogućnosti:

  $$125,\ 152,\ 215,\ 251,\ 512,\ 521$$

  Ukupno: 6

- Drugi način:
  - Prva znamenka može biti bilo koja od tri - 3 mogućnosti
  - Druga znamenka može biti jedna bilo koja od preostale dvije - 2 mogućnosti
  - Treća znamenka može biti samo ona zadnja preostala znamenka - 1 mogućnost

  Ukupno: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Permutacije

Radi se o problemu u kojem je potrebno odrediti
na koliko se načina mogu poredati N ***različitih*** *objekata?*:

$$\mathrm{X}_1\ \mathrm{X}_2\ \ldots\ \mathrm{X}_N$$
$$\mathrm{X}_2\ \mathrm{X}_1\ \ldots\ \mathrm{X}_N$$
$$\ldots$$

Svaki od različitih poredaka je jedna **permutacija**.

Ukupni broj permutacija N različitih objekata je:

$$\mathrm{N}! = \mathrm{N} \cdot (\mathrm{N}-1) \cdot \cdots \cdot 1$$

Permutacije

Pitanje: Koliko različitih troznamenkastih brojeva možemo načiniti od znamenki: 1,1,2 i 5 ?

- Pješački način je ispisati sve mogućnosti:

  1125, 1152, 1215, 1251, 1512, 1521, 2115, 2151, 2511, 5112, 5121, 5211

  Ukupno: 12

- Drugi način:
  - Ako bi sve znamenke bile različite broj permutacija je 4!.
  - Međusobno permutiranje istih znamenki ne dovodi do novih brojeva, a broj tih permutacija je 2! (Samo su dvije znamenke iste.)

  Ukupno: $4! \;/\; 2! = 12$

Permutacije

Poopćenje:

Neka se skup znamenki sastoji od N_1 jedinica, N_2 dvojki, N_3 trojki, ...
Koliko se različitih brojeve može dobiti njihovim kombiniranjem?

- Ukupni broj svih permutacija je $(N_1+N_2 \ldots)!$
- Permutiranjem samo jednica ne dobiva se ništa. Broj takvih permutacija je $N_1!$
- Permutiranjem samo dvojki ne dobiva se ništa. Broj takvih permutacija je $N_2!$
- ...

Ukupni broj različitih brojeva je:

$$\frac{(N_1 + N_2 + \ldots)!}{N_1! \cdot N_2! \cdot \ldots}$$

Kombinacije

Pitanje: Od 5 mogućih kandidata treba izdvojiti 2 osobe koje će obaviti određeni posao. Koliko je različitih ekipa po dva čovjeka moguće učiniti?

- Pješački način - ispisati sve mogućnosti:

  $$12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 23,\ 24,\ 25,\ 34,\ 35,\ 45$$

  Ukupno: 10
- Drugi način:
  - Prva osoba može biti bilo tko od 5 kandidata - 5 mogućnosti.
  - Druga osoba može biti bilo tko od prestalih 4 kandidata - 4 mogućnosti.
  - Sve isto je da li smo prvo izabrali jednog pa drugog, ili obrnuto.

  Ukupno: $5 \cdot 4 \,/\, 2 = 10$

Kombinacije

Svaki izbor pojedine ekipe je jedna **kombinacija**.

Ako na raspolaganju imamo ukupno N predmeta / osoba / brojeva ...
Ukupni broj mogućih **kombinacija** od M predmeta / osoba / brojeva ..., jednak je:

$$\binom{N}{M} = \frac{N!}{M!(N\text{-}M)!}$$

Kombinacije

Problem izbornika: Kako napraviti nogometnu ekipu od 20 igrača?

$$\binom{20}{11} = 167960$$

Loto 39/7: Koliko različitih kombinacija od 7 brojeva moguće izvući ?

$$\binom{39}{7} = 15380937$$

Varijacije s ponavljanjem

Pitanje: Koliko različitih četveroznamenkastih brojeva možemo načiniti od znamenki 2, 4 i 5?

- Pješački način - ispisati sve mogućnosti:

$$2222,\ 2224,\ 2225,\ 2242,\ 2252,\ \ldots 5555$$

  Ukupno: 81.
- Drugi način:
  - Prva znamenka broja može biti bilo što - 3 mogućnosti.
  - Druga znamenka broja može biti bilo što - 3 mogućnosti.
  - itd

  Ukupno: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$

Vjerojatnost

Pitanje: Ako bacamo kocku, kolika je vjerojatnost da ćemo dobiti trojku ?

Odgovor je $1/6$.

Vjerojatnosti se računaju kao omjer broja povoljnih ishoda naspram broja svih mogućih ishoda.

- Iznos vjerojatnosti je uvijek manji ili jednak jedan, a veći ili jednak nuli!
- Ako je vjerojatnost nečega jednaka nuli, onda je sasvim sigurno da se to neće dogoditi.
- Ako je vjerojatnost jednaka jedinici, onda će se to sasvim sigurno dogoditi.

Vjerojatnost

Pitanje: Kolika je vjerojatnost da u prvom bacanju kocke dobijemo trojku **i** u drugom bacanju da dobijemo četvorku ?

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Ovdje se radi o kombiniranju dvaju događaja. Povoljni ishod je ako se **i** prvi **i** drugi događaj ispune. Dakle, oba se događaja moraju dogoditi.

Ako poznajemo vjerojatnost pojave jednog događaja i vjerojatnost drugog događaja, tada je vjerojatnost njihove kombinacije umnožak vjerojatnosti pojedinih događaja.

Događaji moraju biti **nezavisni** !

Vjerojatnost

Pitanje: Kolika je vjerojatnost da bacanjem kocke dobijemo 5 ili 6?

Imamo dva povoljna ishoda od šest mogućih.
Vjerojatnost je $2/6 = 1/3$.

Do rezultata se moglo doći zbrajanjem vjerojatnost da će se dobiti 5 **ili** da će se dobiti 6.

Vjerojatnost kombinacije dva događaja, kada je povoljni ishod **ili** pojava jednog **ili** pojava drugog, je dana zbrojem vjerojatnosti pojedinih događaja.

Oba događaja moraju biti međusobno **nezavisna**.

Vjerojatnost

Pitanje: Kolika je vjerojatnost da bacajući dvije kocke (ili dva bacanja) se dobije zbroj brojeva djeljiv s 3 **ili** paran broj ?

Postoje 22 povoljna ishoda, 18 parnih kombinacija te još 1+2, 2+1, 4+5, 5+4.
Vjerojatnost je 22/36.

Povoljni ishodi za zbroj djeljiv s 3 su 1+2, 2+1, 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1, 4+5, 5+4, 6+6, ukupno 10 mogućnosti. Vjerojatnost je 10/36.

Broj kombinacija koji daju parni zbroj je 18.
Vjerojatnost je 1/2.

Međutim, vjerojatnost kombinacije jednog ili drugog događaja nije zbroj vjerojatnosti jer događaji nisu nezavisni.

Vjerojatnost

Pitanje: Kolika je vjerojatnost da bacajući dvije kocke (ili dva bacanja) se dobije zbroj brojeva djeljiv s 3 **i** paran broj ?

Povoljni ishodi su 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1, 6+6, ukupno 6 mogućnosti, naspram 36 mogućih ishoda. Vjerojatnost je $1/6$.

Ponovo vjerojatnost kombinacije jednog i drugog događaja nije umnožak vjerojatnosti, jer događaji nisu nezavisni.

Vjerojatnost

Pitanje: Koja vjerojatnost da će bacajući dvije kocke zbroj brojeva biti paran?

Verojatnost da se dobije paran (ili neparan broj na jednoj kocki je $1/2$.

Vjerojatnost da se dobije param broj na prvoj kocki
i
da se dobije param broj na drugoj kocki
ili
da se dobije neparan broj na prvoj kocki
i
da se dobije neparam broj na drugoj kocki:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Vjerojatnost

Pitanje: Koja je vjerojatnost da u prostoriji s 20 osoba ni jedna nema rođendan na isti dan.

Broj povoljnih kombibacija:

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \ldots 346 = \prod_{i=0}^{19} (365 - i)$$

Broj svih mogućnosti:

$$365 \cdot 365 \cdot 365 \ldots 365 = 365^{20}$$

Vjerojatnost:

$$P = \prod_{i=0}^{19} (1 - \frac{i}{365}) = 0,588562$$

Vjerojatnost

Pitanje: Kolika je vjerojatnost da nasumice odabrana točka u kugli u 20-dimenzionalnom prostoru bude bliža centru nego površini?

Vjerojatnost je dana omjerom volumena kugli radijusa $R/2$ i R:

$$P = \frac{1}{2^{20}} = 0,953674\ 10^{-6}$$

Pitanje: Kolika je vjerojatnost da će kuglica radijusa 1 cm, gibajući se iz centra u proizvoljnom smjeru pogoditi metu radijusa 10 cm na udaljenosti od 1 m ?

$$P = \frac{\pi(0,11\ \mathrm{m})^2}{4\pi(1\ \mathrm{m})^2} = 3,025\ 10^{-3}$$

Vjerojatnost

Pitanje: Koja je vjerojatnost da se u Lotu 39/7 izvuče sedmica ?

Vjerojatnost je dana brojem kombinacija:

$$P = \frac{1}{15380937} = 6,5\ 10^{-8}.$$

Pitanje: Koja je vjerojatnost da se u zadnjih 10 izvlačenja Lota 39/7 ne izvuče niti jedna kuglica s brojem 10 ?

$$P = (1 - \frac{7}{39})^{10} = 0,13831$$

Funkcija raspodjele

U fizici se često promatraju svojstva većeg broja čestica ili prodmeta: njihove brzine, položaju ili energija, ...

Ako se radi o jako velikom broju čestica, 10^6 *npr.*, tada nije praktično pratiti fizikalne vrijednosti za svaku pojedinu česticu.

Za proračunavanje srednjih vrijednosti koristimo se **funkcijom raspodjele**, koja nam kaže koliko čestica ima određeno fizikalno svojstvo.

Funkcija raspodjele

Neka u sobi ima 14 osoba:

Broj osoba	1	1	3	2	2	5
Uzrast (godina)	14	15	16	22	24	25

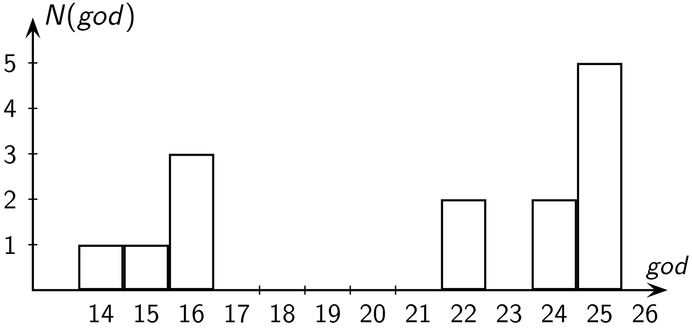
Uvodimo funkciju raspodjele po godinama, N(god):

$N(god)$	...	0	1	1	3	0	...
godina	...	13	14	15	16	17	...

$N(god)$	...	2	0	2	5	0	...
godina	...	22	23	24	25	26	...

Vrijednost funkcije $N(god)$ je broj osoba u prostoriji koji imaju *god* godina.

Funkcija raspodjele



Histogram funkcije $N(god)$.

Funkcija raspodjele

Koliko ukupno osoba ima u sobi ?

$$\mathrm{N}_{uk} = \sum_{god=1}^{\infty} N(god) = 14$$

Ako izaberemo jednu osobu u sobi, koja je vjerojatnost da će imati 15 godina.

Postoji samo jedna osoba s 15 godina, povoljni ishod je samo jedan od 14 mogućih:

$$P_{14} = \frac{N(15)}{N_{uk}} = \frac{1}{14}$$

Funkcija raspodjele

Ako izaberemo jednu osobu u sobi, koja je vjerojatnost da će imati 17 godina.

U prostoriji nema osoba od 17 godina, dakle ne postoji niti jedan povoljni ishod:

$$P_{17} = \frac{N(17)}{N_{uk}} = \frac{0}{14} = 0$$

Ako izaberemo jednu osobu u sobi, koja je vjerojatnost da će imati 16 godina.

Postoji tri osobe s 16 godina, dakle, imamo 3 moguća povoljna ishoda:

$$P_{16} = \frac{N(16)}{N_{uk}} = \frac{3}{14} = 0,1875$$

Funkcija raspodjele

Vjerojatnost izbora jedne osobe od j-godina je:

$$P(j) = \frac{N(j)}{N} = \frac{N(j)}{\sum_j N(j)}$$

Vrijedi:

$$\sum_j P(j) = 1$$

Funkcija raspodjele

Koja je **najvjerojatnija** dob?
(Za koju dob j je vjerojatnost najveća?)

Vjerojatnost je najveća za $j = j_{max} = 25$.

Koja je **srednja** dob?
(Jedna polovica osoba je starija od toga a druga je mlađa!)

Srednja dob je $j = j_{med} = 23$.
7 osoba je starije od 23 a 7 ih je mlađe!

Funkcija raspodjele

Koja je **prosječna** dob?

$$j_{av} = \frac{\sum_j j\ N(j)}{\sum_j N(j)} = \sum_j j\ P(j) = 21.$$

Neka zapažanja:
Nema niti jedne osobe dobi od 21 ili 23!

Funkcija raspodjele

Izračunati prosječni kvadrat dobi!

$$(j^2)_{av} = \frac{\sum_j j^2 \; N(j)}{\sum_j N(j)} = \sum_j j^2 \; P(j) = 459,5714.$$

Da li su $(j^2)_{av}$ i $(j_{av})^2$ isti ?

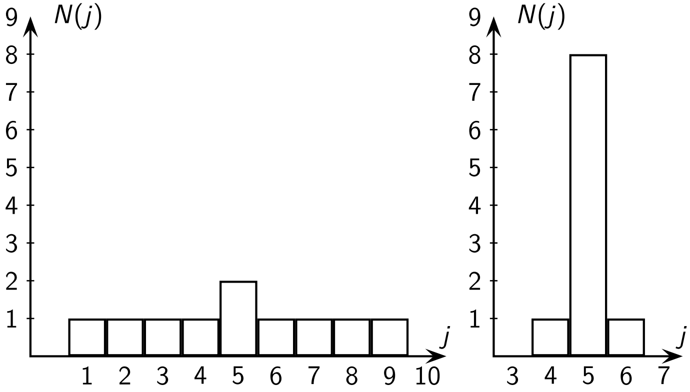
$$(j^2)_{av} = 459,5714 > (j_{av})^2 = 441$$

Može se uvesti pojam prosječne vrijednosti neke funkcije od dobi:

$$(f(j))_{av} = \sum_j f(j) \; P(j).$$

Funkcija raspodjele

Primjer dviju različitih funkcija raspodjele koje imaju istu srednju vrijednost, istu najvjerojatniju vrijednost i istu prosječnu vrijednost.



Funkcija raspodjele

Kako razlikovati funkcije raspodjele koje imaju istu srednju, najvjerojatniju i prosječnu vrijednost?

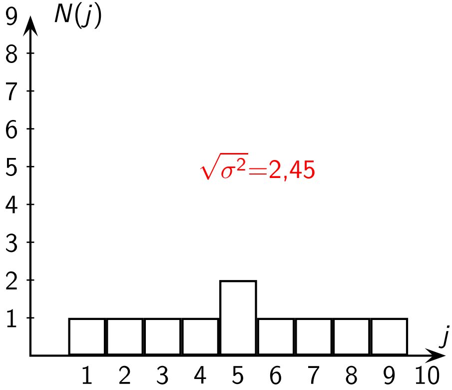
Uvodimo pojam **srednje kvadratno odstupanje**:

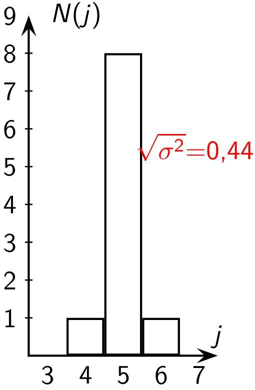
$$\Delta j = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_j (j - j_{av})^2 \; P(j)}$$

- Ako je funkcija raspodjele *široka* srednje kvadratno odstupanje je veliko,
- a ako je funkcija raspodjele jedan uski vrh, onda je srednje kvadratno odstupanje malo.

Funkcija raspodjele

Standardna devijacija za spomenute primjere:





Funkcija raspodjele

Neka zapažanja:

- $\sigma^2 > 0$
- $(j^2)_{av} > (j_{av})^2$
- $\sigma^2 = (j^2)_{av} - (j_{av})^2$
- Ako raspodjela nema širine, svi primjerci imaju istu vrijednost fizikalne veličine, tada je $\sigma^2 \equiv 0$

Funkcija raspodjele

Primjer: Promatramo raspodjelu znamenki u broju π napisanom do 100 decimalnih mjesta:

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534 2117068

Znamenka	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Broj znamenki	8	8	12	12	10	8	9	7	13	13

Funkcija raspodjele

Znamenka	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Broj znamenki	8	8	12	12	10	8	9	7	13	13

- Koja je vjerojatnost za znamenku 6 ? (0,09)
- Koja je najvjerojatnija znamenka ? (8 i 9)
- Koja je "prosječna znamenka" ? (4,72)
- Koja je srednje kvadratno odstupanje ? (2,91)

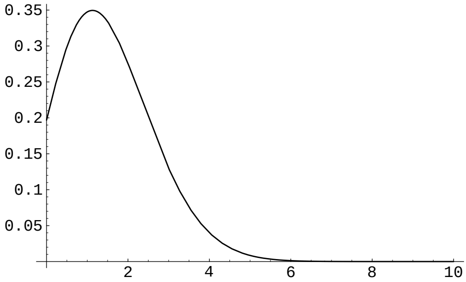
Funkcija raspodjele

Vjerojatnost nekog događaja u vremenskom intervalu Δt neka je p. (Neka se događaj može pojaviti samo jednom!)

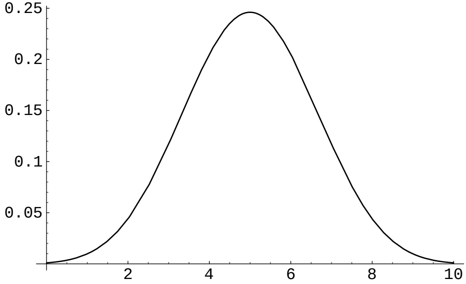
- Čemu je jednaka vjerojatnost da se događaj dogodi točno m-puta u periodu vremena $N\Delta t$?
- Izračunati srednji broj pojavljivanja događaja! (Unutar perioda $N\Delta t$)
- Izračunati srednje kvadratno odstupanje !

$$P(m) = p^m (1-p)^{N-m} \cdot \frac{N!}{m!(N-m)!}$$

Funkcija raspodjele



$p = 0{,}17$
$N = 10$



$p = 0{,}5$
$N = 10$

Funkcija raspodjele

$$P(x) = \sum_{m=0}^{N} x^m P(m) = (1 - p + xp)^N$$

- Izračunati srednji broj pojavljivanja događaja

$$m_{av} = \sum_{m=1}^{N} m \; P(m) = \left. \frac{\partial P(x)}{\partial x} \right|_{x=1} = Np$$

- Izračunati srednje kvadratno odstupanje

$$\begin{aligned} ((m(m-1))_{av} &= \sum_{m=2}^{N} m(m-1) \; P(m) \\ &= \left. \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} \right|_{x=1} = N(N-1)p^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{(m^2)_{av} - (m_{av})^2} = \sqrt{Np(1-p)}$$

Neki kombinatorički problemi

Na koliko raznih načina možemo rasporediti N različitih kuglica tako da ih bude N_1 u prvoj kutiji, N_2 u drugoj, N_3 u trećoj, ...

$$\frac{N!}{N_1!N_2!N_3!\ldots}$$

Na koliko raznih načina možemo rasporediti N različitih kuglica u g kutija, ako ih u svakoj kutiji može biti proizvoljan broj ?

$$g^N$$

Neki kombinatorički problemi

Na koliko raznih načina možemo rasporediti N potpuno identičnih kuglica u g kutija, ako ih u svakoj kutiji može biti proizvoljan broj ?

$$\frac{(N+g-1)!}{N!(g-1)!}$$

Na koliko raznih načina možemo rasporediti N potpuno identičnih kuglica u g kutija, ako ih u svakoj kutiji može biti najviše jedna?

$$\frac{g!}{N!(g-N)!}$$