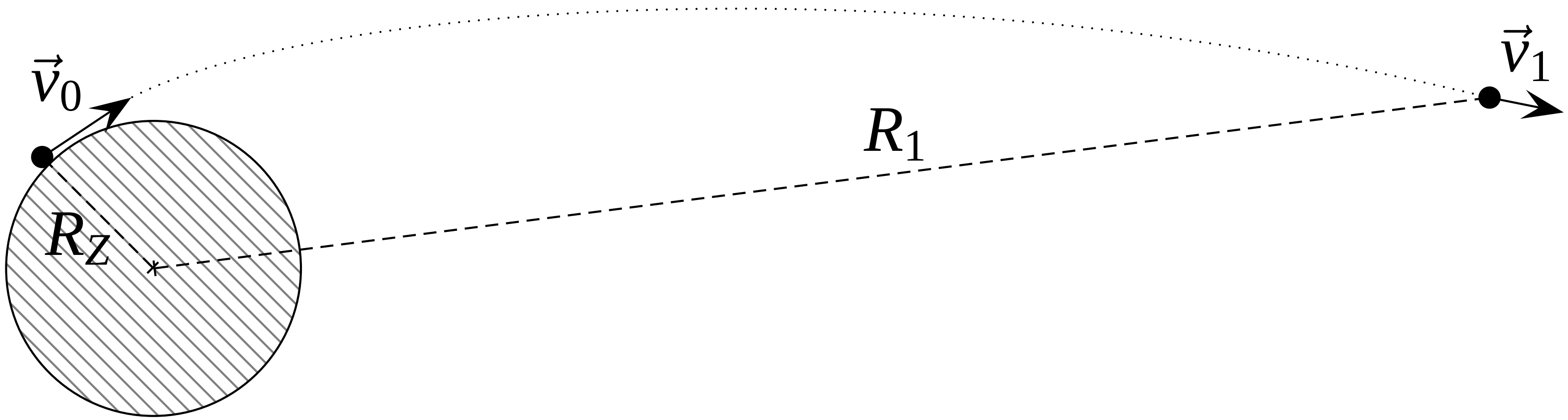
Primjer: Mogu li molekule zraka napustiti Zemlju

Da bi neko tijelo moglo napustiti površinu Zemaljske kugle potrebno je da mu je ukupna energija (kinetička+potencijalna) veća od nule. Kako je na površini Zemaljske kugle potencijalna energija negativna, to znači da tijelo mora imati dovoljno veliku brzinu tako da je kinetička energija po iznosu veća od potencijalne.



To će biti ako mu je brzina veća od tz. 2. kozmičke brzine.

$$E = \frac{m\,v_0^2}{2} - G\,\frac{m\,M_Z}{R_Z} = \frac{m\,v_1^2}{2} - \underbrace{G\,\frac{m\,M_Z}{R_1}}_{=0 \text{ za } R_1\to\infty} > 0$$

Za 2. kozmičku brzinu vrijedi:

$$\frac{m\,v_{2K}^2}{2} - G\,\frac{m\,M_Z}{R_Z} = 0$$

pa je

$$\begin{aligned} v_{2K} &= \sqrt{\frac{2G\,M_Z}{R_Z}} \\ &= 11,2 \text{ km/s} \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} G &=& 6,67\ 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg s}^2 \\ M_Z &=& 5,96\ 10^{24}\ \text{kg} \\ R_Z &=& 6,37\ 10^{6}\ \text{m} \end{array} \right\}$$

U slučaju Mjeseca:

$$v_M = 2,4 \text{ km/s} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} M_M &=& 7,35\ 10^{22}\ \text{kg} \\ R_M &=& 1,735\ 10^{6}\ \text{m} \end{array} \right\}$$

Koristeći Maxwellovu raspodjelu moguće je izračunati vjerojatnost da molekule napuste Zemaljsku površinu:

$$p = \int_{v_{2K}}^{+\infty} dv\, F_{rad}(v)$$

Npr. za plin neona (m=3,37 10^{-26} kg) i temperaturu T = 300 K:

$$p = 5,96\ 10^{-221} \qquad \{\text{numerička integracija !}\}$$

Isti račun ali za Mjesec daje:

$$p_M = 3,71\ 10^{-10} \qquad \{\text{numerička integracija !}\}$$

Razlika je ogromna iako se kozmičke brzine razlikuju samo za fakotor 5! Zašto ?

$$p \sim e^{-\alpha\ v_{2K}^2} \sim e^{-\alpha\ (5v_M)^2} \sim e^{-25\ \alpha\ (v_M)^2} \sim [e^{-\alpha\ v_M^2}]^{25} \sim p_M^{25}$$

Dometi klasične statističke fizike

Maxwellova raspodjela odnosi se na klasične čestice za koje vrijede Newtonovi zakoni. Klasični zakoni prestaju vrijediti za:

- ▷ jako velike brzine - tada se pojavljuju **relativistički efekti**
- ▷ i za niske temperature kada se pojavljuju **kvantni efekti**.

Potrebno je odrediti granice valjanosti Maxwellove raspodjele.

Relativistička granica

Klasična nerelativistička fizika vrijedi ako je: $v \ll c$. Ako je

$$v \sim \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \ll c \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_B T \ll m\, c^2}$$

Relativistički efekti postaju važni tek na visokim temperaturama.

Kvantna granica

- Čestici brzine v i mase m (impulsa $p = mv$) pridružuje se val valne duljine:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \qquad \text{gdje je } h = 6,626\ 10^{-34}\ \text{Js} \quad \text{Planckova konstanta.}$$

- Kvantni efekti postaju zanemarivi ako je srednja udaljenost među česticama, R_s, veća od valne duljine:

$$\lambda \ll R_s$$

- Srednja udaljenost među česticama

$$\frac{V}{N} = \text{volumen po čestici} = R_s^3 \qquad \Rightarrow \qquad R_s = \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

▷ Tražimo da je:

$$\lambda \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{h}{mv} \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

▷ Uvrštavajući izraz za brzinu:

$$v \sim \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{m}\sqrt{\frac{m}{k_B T}} \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_B T \gg \frac{h^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}}$$

Kombinirajući rezultat relativističke i kvantne granice:

$$\underbrace{\frac{h^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}}_{k_B T_{kv}} \ll k_B T \ll \underbrace{m\,c^2}_{k_B T_{rel}}$$

Primjer helija

$$\left.\begin{array}{rcl} m & = & 6,7\,10^{-27}\ \text{kg} \\ \dfrac{N}{V} & = & 10^{25}\ \ \text{m}^{-3} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{rcl} T_{kv} & \sim & 1\ \text{K} \\ T_{rel} & \sim & 10^{13}\ \text{K} \end{array}$$

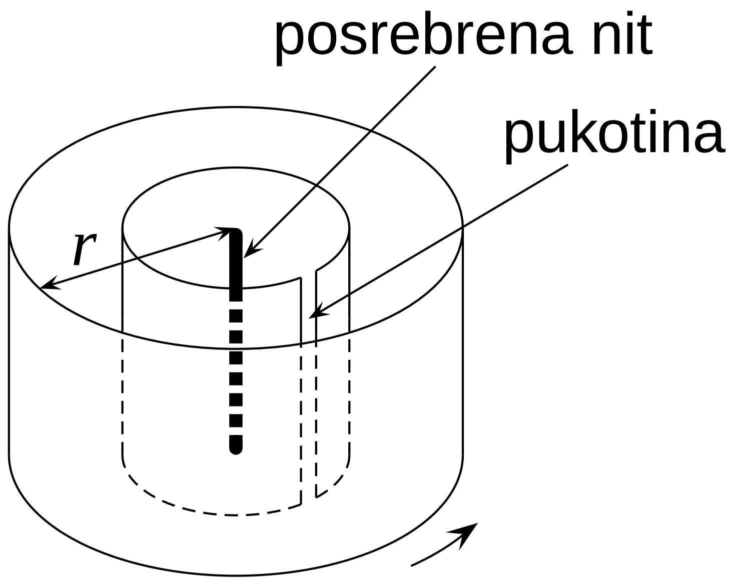
U normalnim uvjetima (T = 300 K) kvantni i relativistički efekti su zanemarivi.

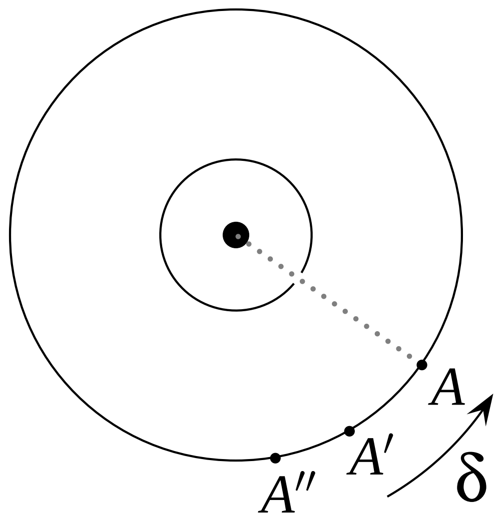
Pažnja: Elektroni u metalu čine elektronski plin za koji vrijedi:

$$T_{kv} \sim 1000\ \text{K}.$$

Također, u krutim tijelima gustoća čestica je puno veća, pa se kvantni efekti pojavljuju na višim temperaturama.

Sternov pokus





Otto Stern je 1920. napravio pokus kojim je provjerio ispravnost Maxwellove raspodjele.

U unutrašnjem cilindru nalazio se je plin srebrnih atoma. Unutrašnji cilindar imao je malu pukotinu kroz koju su mogli izlaziti atomi srebra. Zavisno od brzine, atomi bi prije ili kasnije udarili u točku A na vanjskom cilindru. Između dvaju cilindara nalazi se vakuum.

Međutim vanjski se cilindar giba nekom kutnom brzinom ω tako da čestice udaraju u točke A', A'', ... zavisno od brzine kojom izlaze iz pukotine. Prostorna raspodjele priljepljenih čestica na vanjskom cilindru odgovara raspodjeli čestica po brzinama.

Nađimo vezu između prostorne raspodjele po pomaku δ, udaljenosti između točke A i točke u koju će čestica udariti, i raspodjele po brzinama.

U pokusu je radijus unutrašnjeg cilindra bio puno manji od vanjskog, tako da su čestice morale preći put dužine radijusa vanjskog cilindra. Ako se čestica giba brzinom v, vrijeme potrebno da udari u vanjski cilindar je:

$$t = \frac{r}{v}.$$

Za to vrijeme točka A pređe put dužine:

$$\delta = r \cdot \varphi = r \cdot \omega \cdot t = r\,\omega\,\frac{r}{v}$$

Relacija između pomaka δ i brzine kojom se čestica giba, v, je:

$$v = \frac{\omega\, r^2}{\delta}$$

Fazni (konfiguracijski) prostor

Promatrajmo gibanje jedne čestice idealnog plina.

▷ Stanje čestice određeno je njenim položajem i brzinom:

$$(\vec{r},\vec{v}) = (r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z),$$

tj. s 6 brojeva. Umjesto brzina uobičajeno je koristiti impulse:

$$(\vec{r},\vec{p}) = (r_x, r_y, r_z, p_x, p_y, p_z).$$

▷ Razlog za izbor položaja i impulsa je simetričnost zapisa Hamiltonovih jednadžbi gibanja. Hamiltonove jednadžbe su ekvivalentne Newtonovim jednadžbama gibanja. Newtonove jednadžbe gibanja su diferencijalne jednadžbe drugog reda u vremenu:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r})$$

- Ovo je sustav od tri nelinearne diferencijalne jednadžbe. Za njihovo rješavanje potrebno je poznavati i tz. početne uvjete, tj. znati točan položaj i brzinu u nekom početnom vremenskom trenutku:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t=t_0) &= \vec{r}_0 \\ \dot{\vec{r}}(t=t_0) &= \vec{v}_0 \end{aligned}$$

- Hamiltonove jednadžbe su jednadžbe prvog reda u vremenu. Newtonova diferencijalna jednadžba drugog reda zamjenjuje se s dvije jednadžbe prvog reda:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \frac{\vec{p}}{m} \\ \dot{\vec{p}} &= \vec{F} \end{aligned} \right.$$

- Ovi izrazi mogu se preurediti. Pođimo od izraza za energiju sustava (Hamiltonijan):

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}).$$

- Uočimo da je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} &= \frac{\vec{p}}{m} \\ \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} &= \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \equiv -\vec{F}. \end{aligned}$$

- Tako da se Hamiltonove jednadžbe mogu zapisati kao:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= +\frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \\ \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \end{aligned}\right\}$$

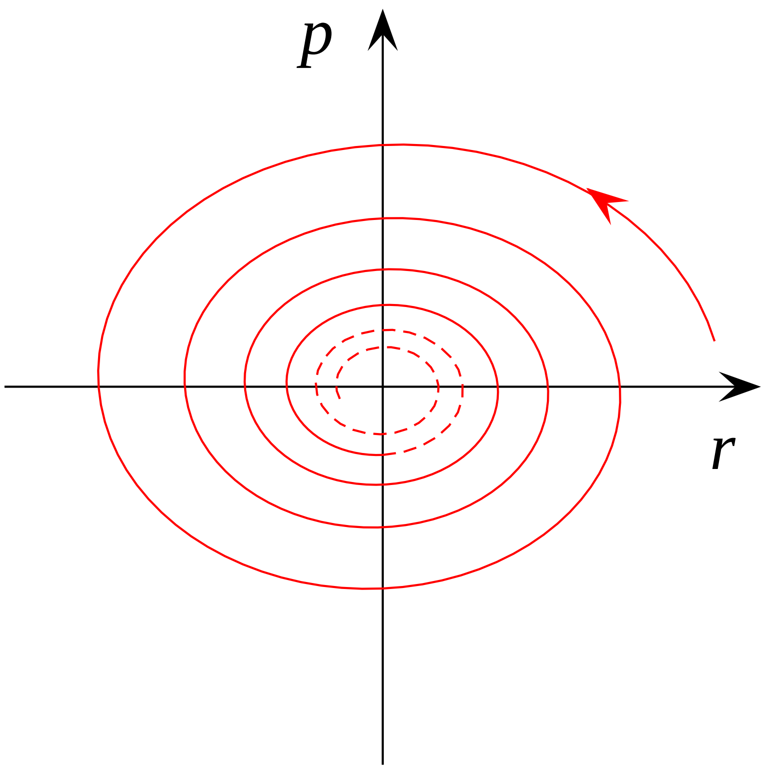
Hamiltonove jednadžbe gibanja

sustav od 6 nelinearnih jednadžbi

prvog reda u vremenu

- Ove jednadžbe nam govore kako se položaj, $\vec{r}$, i impuls, $\vec{p}$ mijenjaju u vremenu. Ta se promjena može prikazati kao gibanje točke u 6-dimenzionalnom prostoru koji čine 3 prostorne koordinate i 3 komponente impulsa.

- 6-dimenzionalni prostor s 3 prostorne koordinate i 3 komponente impulsa zovemo **fazni (ili konfiguracijski) prostor** (jedna čestica).



Frazna trajektorija čestice u 2–dimenzionalnom faznom prostoru.

Primjer: 1-d harmonički oscilator

- Hamiltonijan (energija):

$$H(r,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

- Koja je trajektorija u faznom prostoru ? Ona koja čuva energiju.

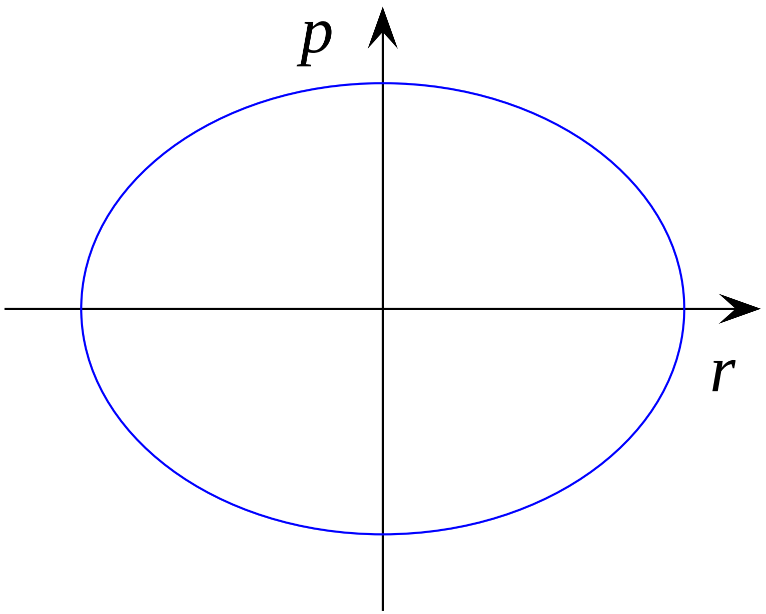
$$\frac{p(t)^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r(t)^2}{2} = E = \text{konst.}$$

To je u stvari jednadžba elipse:

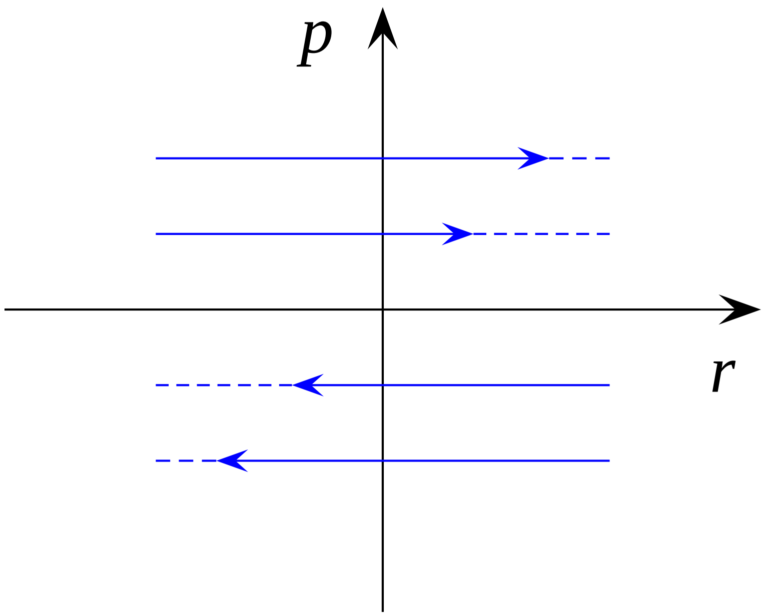
$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$$

gdje su

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \qquad b = \sqrt{2m\,E}$$



Fazna trajektorija 1d harmoničkog oscilatora, ujedno i ploha (krivulja) konstantne energije.

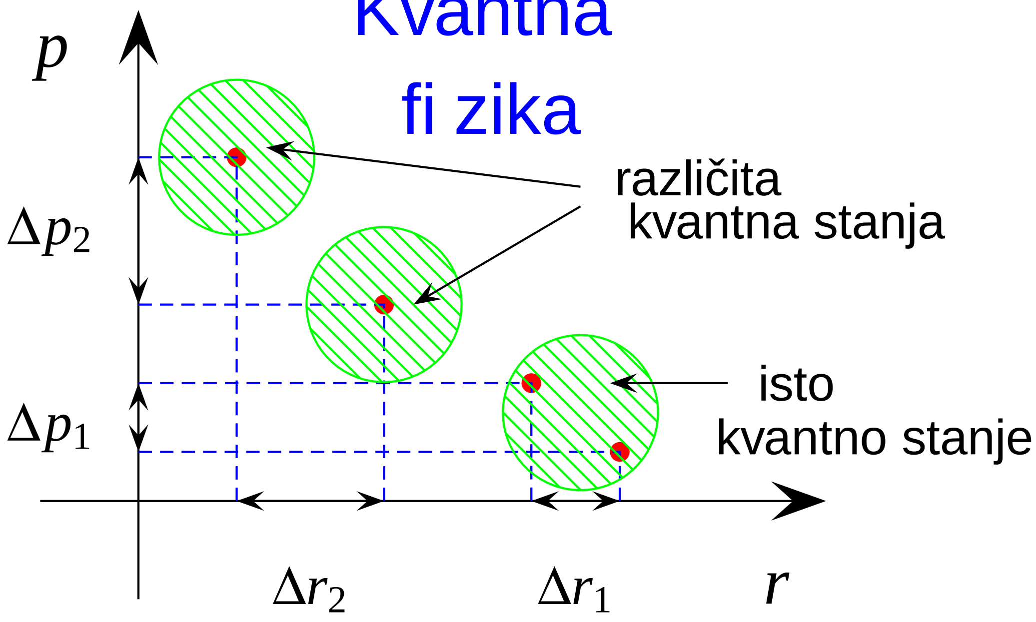


Fazna trajektorija slobodnih 1d čestica koje imaju konstantan impuls (brzinu).

- U klasičnoj fizici dvije različite točke faznog prostora, ma koliko blizu bile jedna drugoj, prestavljaju različita stanja čestice.
- Volumen faznog prostora srazmjeran je broju mikroskopskih stanja čestice.

Svaka točka faznog prostora (beskonačno mala) predstavlja različito stanje sustava.

Kvantna fizika



U kvantnoj fizici ako je produkt razlike položaja dvaju točaka i razlike impulsa dvaju točaka manji od h (Planckove konstante) onda se radi o istom stanju sustava.

Ako su razlike među položajima i impulsima točaka:

$$\Delta r \cdot \Delta p \quad > \quad h \qquad \Rightarrow \qquad \text{različito stanje}$$

$$\Delta r \cdot \Delta p \quad < \quad h \qquad \Rightarrow \qquad \text{isto stanje}$$

Kvantno stanje nije bezdimenzionalna, beskonačno mala točka faznog prostora, nego svako kvantno stanje zauzima određeni volumen (kvantnu ćeliju).

- Za sustav od jedne čestice koja se giba u jednoj dimenziji, fazni prostor je dvodimenzionalni, (x, p_x), i volumen koji neko kvantno stanje zauzima je:

$$V_{kv} \approx \Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$$

- Za sustav od jedne čestice koja se giba u tri dimenziji, fazni prostor je šesterodimenzionalan, (x, y, z, p_x, p_y, p_z), i volumen koji neko kvantno stanje zauzima je:

$$V_{kv} \approx (\Delta x \cdot \Delta p_x) \cdot (\Delta y \cdot \Delta p_y) \cdot (\Delta z \cdot \Delta p_z) \approx h^3$$

- Općenito, volumen kvantne ćelije je:

$$V_{kv} \approx h^f = (2\pi\hbar)^f \qquad \left(\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}\right)$$

gdje je $2f$ dimenzija faznog prostora sustava, a f broj stupnjeva slobode.

Pod određenim uvjetima kvantna i klasična statistička fizika daju slične rezultate. Kada kvantni efekti **neće** doći do izražaja ?

Onda kada su kvantna stanja čestica dobro definirana, tako da se za svaku česticu može kazati u kojem se stanju nalazi !

To će biti ispunjeno ako su "prosječne udaljenosti" među kvantnim stanjima čestica u faznom prostoru dovoljno velike tako da vrijedi:

$$\text{prosječna udaljenost} = \bar{r} \sim \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \gg \Delta r$$

$$\text{prosječni impuls} = \overline{p} \sim \sqrt{m\,k_B T} \gg \Delta p$$

Kombinirajući ova dva uvjeta:

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \cdot \sqrt{m\,k_B T} \gg \Delta r \cdot \Delta p \approx h$$

Dobiva se:

$$k_B T \gg \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} .$$

Ovaj već prije izvedeni uvjet može se zapisati i kao:

$$\frac{N\, h^3}{V\, (m\, k_B T)^{3/2}} \ll 1$$

ili

$$\frac{h^3}{v_0(\overline{p})^3} \ll 1, \qquad \text{gdje su} \quad v_0 = \frac{V}{N} \quad \& \quad \frac{\overline{p}^2}{2m} = k_B T$$

Uvjet valjanosti klasične statističke fizike je ujedno uvjet da je čestice moguće razlikovati.

Fazni prostor nije nužno zadan samo s 3 koordinate i 3 komponente impulsa. On može sadržavati koordinate i impulse ostalih stupnjeva slobode, npr. rotacijskih:

$$
\begin{aligned}
(x, y, z, p_x, p_y, p_z) &\longrightarrow (x, y, z, \theta, p_x, p_y, p_z, M_\theta) \\
d^3r\, d^3p &\longrightarrow d^3r\, d^3p\, d\theta\, dM_\theta
\end{aligned}
$$

U kvantnoj fizici čestice mogu imati i interne stupnjeve slobode, kao što je spin. Spin čestice se ne može kontinuirano mijenjati nego može poprimiti samo diskretne vrijednosti. U toj situaciji, ukupni fazni prostor postaje skup **faznih podprostora**, a svaki podprostora odgovara jednoj vrijednosti spinske varijable.