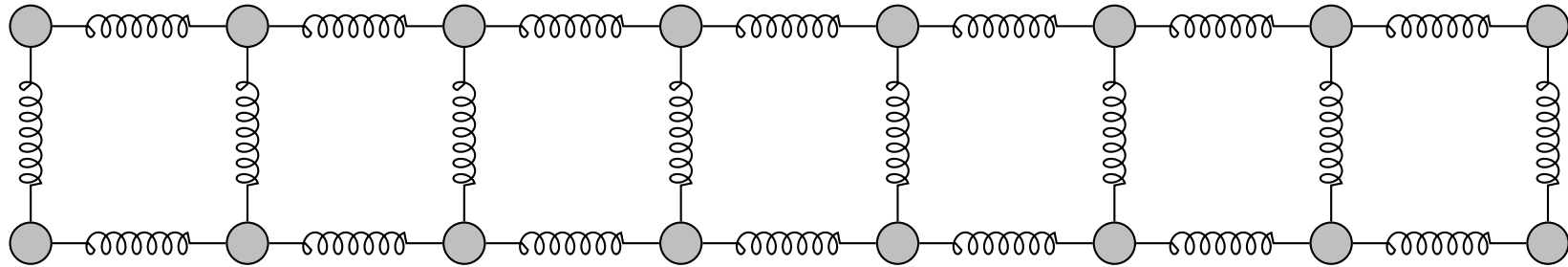


Titranje atoma u kristalima



- ▷ Međudjelovanje atoma u kristalu može se približno prikazati kao elastična sila harmoničkog oscilatora. Atomi kao da su vezani elastičnim oprugama.
- ▷ Skup atoma vezanih elastičnim oprugama moguće je u tz. **normalnim koordinatama** prikazati kao skup nevezanih harmoničkih oscilatora.
- ▷ Ako u kristalu postoji N atoma tada je broj harmoničkih oscilatora jednak $3N$. Faktor 3 dolazi zbog toga što atomi mogu titrati u sva tri smjera nezavisno.

Titranje kristala vrlo je slično titranju EM zračenja, ali postoje neke važne razlike.

- ▷ Električno polje može nezavisno titrati u 2 smjera, dok atomi u kristalu mogu titrati u sva tri smjera nezavisno.
- ▷ Broj harmoničkih oscilatora kod EM zračenja je beskonačno velik, valne duljine mogu biti proizvoljno male i frekvencije beskonačno velike. Titranje kristala se prikazuje konačnim brojem harmoničkih oscilatora koji je jednak $3N$, gdje je N broj atoma. Valne duljine **ne mogu biti manje od udaljenosti atoma** u kristalu, a frekvencija titranja je konačno velika.
- ▷ Kod EM zračenja veza između frekvencije titranja i valnog broja je jednostavna, $\omega = ck$, dok je veza između frekvencije titranja i valnog broja u kristalu vrlo složena funkcija i ovisi o vrsti kristala.

- ▷ Kvante pobuđenja harmoničkih oscilatora kojima se prikazuje titranje kristala nazivamo **fononima**, slično kvantima pobuđenja koje smo uveli kod EM zračenja (fotoni).
- ▷ Ukupnu energiju titranja kristala možemo prikazati ukupnu energiju svih harmoničkih oscilatora kojima se to titranje prikazuje:

$$E_{kr} = \sum_i \hbar\omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right)$$

- ▷ Ako se harmonički oscilatori kristalnog titranja nalaze u termodinamičkoj ravnoteži tada je:

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_B T}} - 1} \quad (\bar{n}_i \text{ je srednji broj fonona})$$

- ▷ A ukupna energija je

$$U = konst. + \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_B T}} - 1}$$

Einsteinov model kristalnog titranja

A. Einstein je 1907. predložio model u kojem svi harmonički oscilatori kristalnog titranja imaju istu frekvenciju.

Tada je unutrašnja energija kristala:

$$U = \frac{3N\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$

a toplinski kapacitet je:

$$C_V = 3Nk_B \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1 \right)^2}$$

- ▷ U granici visokih temperatura ($k_B T \gg \hbar\omega$) eksponencijalna funkcija se može razviti u red:

$$e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{k_B T} + \dots$$

pa je:

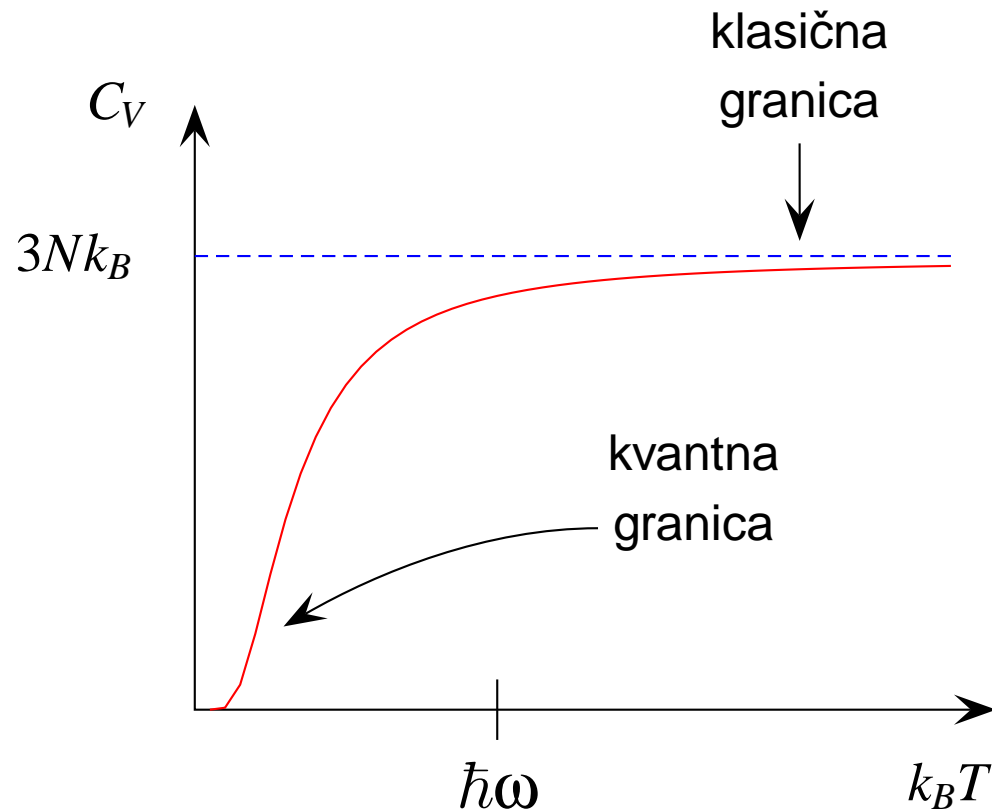
$$C_V \approx 3Nk_B$$

u skladu s Dulong-Petitovim pravilom.

- ▷ U granici niskih temperatura ($k_B T \ll \hbar\omega$), eksponencijalna funkcija je puno veća od jedinice, pa je:

$$C_V \approx 3Nk_B \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}.$$

Toplinski kapacitet teži prema nuli kada temperatura ide u nulu, u skladu s trećim zakonom termodinamike.



Toplinski kapacitet kristala
u Einsteinovom modelu

Einsteinov model predviđa da na apsolutnoj nuli toplinski kapacitet ide u nulu eksponencijalno brzo. To nije u skladu s eksperimentalnim opažanjima koja nalaze da toplinski kapacitet ide u nuli kao:

$$C_V \sim T^3$$

Ovakvo ponašanje toplinskog kapaciteta objasnio je Debyeov model.

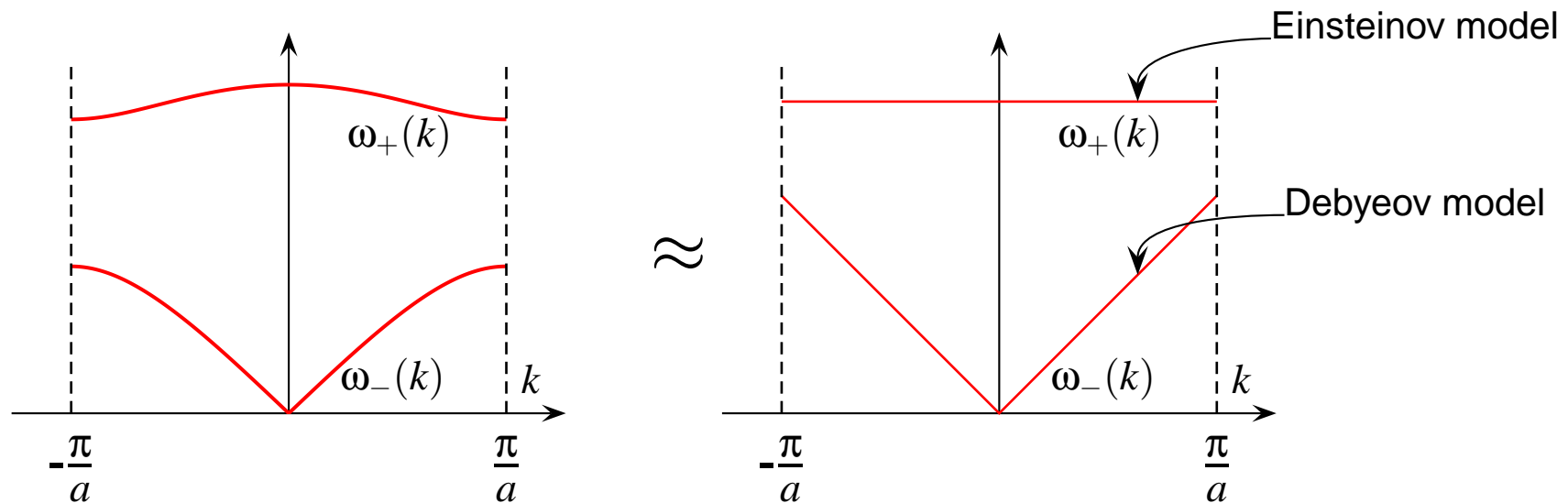
Debyeov model

- ▷ Istraživanja svojstava materijala na niskih temperatura (niskotemperaturna fizika) započela su kada su prvi put dobiveni tekući vodik (J. Dewar, 1898.) i tekući helij (H. Kamerlingh-Onnes, 1908.).
- ▷ To je dovelo do mnogih neočekivanih otkrića, kao što su supravodljivost, suprafluidnost,
- ▷ W.H. Nernst i F.A. Lindemann mjerili su 1911. ponašanje toplinskog kapaciteta oko apsolutne nule za razne kristale (Cu, Al, Zn, Pb, Al, . . .) i našli da C_V **ne slijedi** Einsteinovu formulu:

$$C_V \not\propto e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \quad (\text{eksponencijalni brzi pad}) \quad \Rightarrow$$

Treba uzeti u obzir ovisnost frekvencije titranja i valnog broja.

- ▷ Ovisnost frekvencije titranja kristala o valnom broju je složena funkcija. Ona ovisi o složenosti strukture kristala.
- ▷ Primjer ovisnosti frekvencije titranja za jednodimenzionalnu rešetku izgrađenu od dva različita (alternirajuća) atoma:



- ▷ Međutim dobar rezultat za toplinski kapacitet se može dobiti i s jednostavnom aproksimacijom.

- ▷ P. Debye 1912. godine predlaže da izraz za frekvenciju titranja rešetke aproksimira:

$$\omega = u \cdot |\vec{q}|,$$

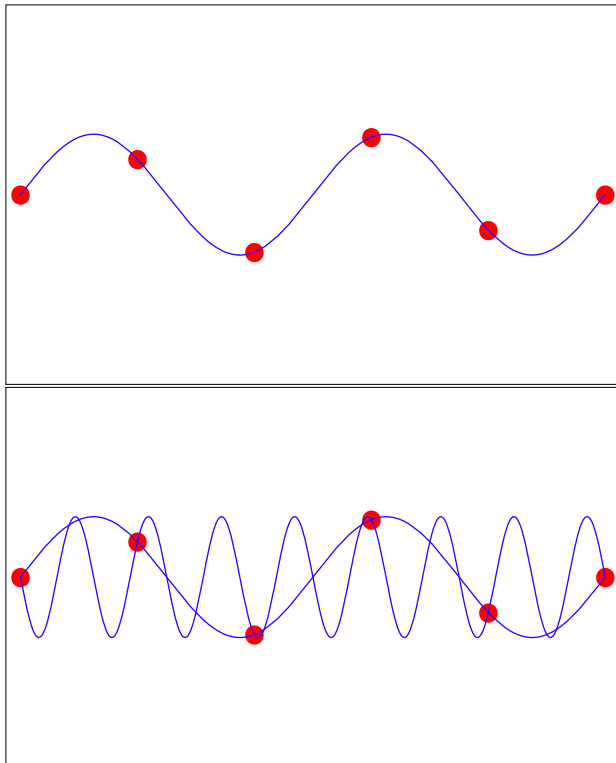
gdje je u brzina širenja zvuka u materijalu.

- ▷ Debyeov izraz za frekvenciju je dobar za male valne vektore (velike valne duljine),
- ▷ a nije dobar za kratke valne duljine, reda veličine udaljenosti među atomima u kristalu.

(U anizotropnim kristalima brzina zvuka ovisi o smjeru širenja valova.)

- ▷ Ukupna energija titranja kristala je zbroj energija harminičkih oscilatora. Svaki harminički oscilator je definiran/zadan sa svojim valnim brojem \vec{q} . U proračun ukupne energije treba uzeti u obzir tri razna smjera titranja.

$$U = \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_B T}} - 1} \quad \rightarrow \quad 3 \sum_{\vec{q}} \frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{e^{\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{k_B T}} - 1}$$



Valni vektori u sumaciji ne mogu biti proizvoljno veliki. Isti se pomaci atoma dobiju za valove čiji se valni vektori razlikuju za $2\pi/a$. Da bi se dobili svi mogući različiti pomaci atoma dovoljno se promatrati valove čiji su valni vektori u intervalu:

$$|q| \leq \frac{\pi}{a}. \quad \left(\begin{array}{l} a \text{ je razmak} \\ \text{među atomima} \end{array} \right)$$

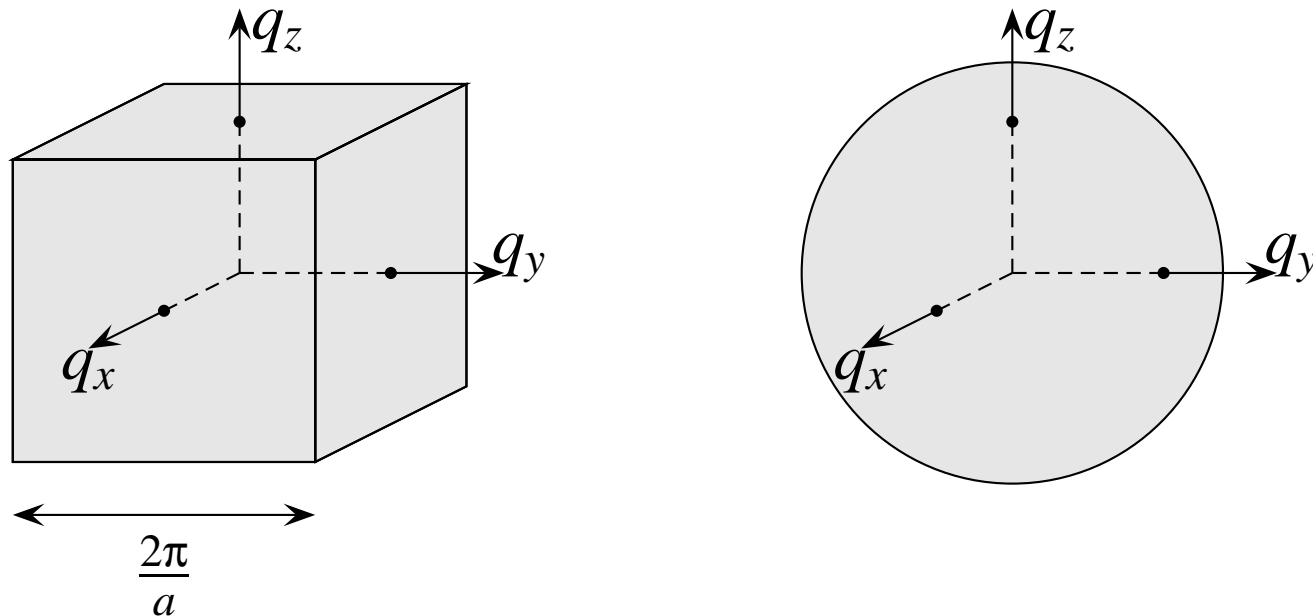
- ▷ Sumacija po valnim brojevima se može zamijeniti integracijom po *poznatom receptu*:

$$\sum_{\vec{q}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{|q_{x,y,z}| \leq \pi/a} d^3 q$$

pri čemu se treba voditi računa o ograničenju na iznose valnih brojeva.

- ▷ Ograničenje na iznose valnih brojeva u sumaciji, odnosno integraciji, znači da je broj harmoničkih oscilatora jednak ukupnom broju atoma u kristalu:

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{q}} 1 &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dq_x \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dq_y \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dq_z 1 \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^3 = \frac{V}{a^3} = N_{atoma} \end{aligned}$$



- ▷ Područje integracije u \vec{q} -prostoru je kocka dužine brida $\frac{2\pi}{a}$.
- ▷ Podintegralna funkcija je funkcija frekvencije, dakle, funkcija iznosa valnog broja ali ne i smjera.
- ▷ Da bi pojednostavili integraciju, područje integracije po kocki aproksimira se sfernosimetričnim područjem, tj. kuglom.
- ▷ Zahtijeva se da radijus kugle (q_{max}) bude takav da su volumeni kocke i kugla isti.

$$V_{kocka} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^3 = V_{kugla} = \frac{4\pi}{3} q_{max}^3 \quad \Rightarrow \quad q_{max} = \frac{(6\pi^2)^{1/3}}{a}$$

Unutrašnja energija:

$$\begin{aligned}
 U &= 3 \sum_{\vec{q}} \frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{e^{\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{k_B T}} - 1} = 3 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{|q_{x,y,z}| \leq \pi/a} d^3q \frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{e^{\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{k_B T}} - 1} \\
 &\approx 3 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{|\vec{q}| \leq q_{max}} d^3q \frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{e^{\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{k_B T}} - 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Debyeov model} \\ \omega_{\vec{q}} = u \cdot |\vec{q}| \end{array} \right\} \\
 &= \frac{3V}{(2\pi)^3} \int_0^{q_{max}} dq q^2 \underbrace{\int d\Omega}_{=4\pi} \frac{\hbar u q}{e^{\frac{\hbar u q}{k_B T}} - 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{smjena varijabli} \\ \omega = u q \end{array} \right\} \\
 &= \frac{3V \hbar}{2\pi^2 u^3} \int_0^{\omega_{max}} d\omega \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{gdje je} \\ \omega_{max} = u q_{max} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Faktor ispred integrala:

$$\frac{3V\hbar}{2\pi^2u^3} = \frac{3Na^3\hbar}{2\pi^2u^3} = \frac{9\hbar N}{\omega_{max}^3} \quad \text{jer je} \quad \omega_{max}^3 = u^3 q_{max}^3 = \frac{6\pi^2 u^3}{a^3}$$

Unutrašnja energija titranja kristala:

$$U = \frac{9\hbar N}{\omega_{max}^3} \int_0^{\omega_{max}} d\omega \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{smjena varijable} \\ x = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \end{array} \right\}$$
$$= 9Nk_B T \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\Theta}{T}} dx \frac{x^3}{e^x - 1}$$

gdje je

$$\Theta = \frac{\hbar\omega_{max}}{k_B} = \frac{\hbar u}{k_B} \left(\frac{6\pi^2}{a^3} \right)^{1/3} = \frac{\hbar u}{k_B} \left(6\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3}$$

tz. Debyeova temperatura.

Klasična granica: $T \gg \Theta$

Gornja granica integracije:

$$\frac{\Theta}{T} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \text{podintegralna varijabla } x \ll 1$$

Tada se eksponencijalna funkcija može razviti u red potencija:

$$e^x \approx 1 + x + \dots$$

pa je:

$$U = 9Nk_B T \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\Theta}{T}} dx \frac{x^3}{e^x - 1} \approx 9Nk_B T \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 \underbrace{\int_0^{\frac{\Theta}{T}} dx \frac{x^3}{1 + x - 1}}_{= \frac{1}{3} x^3}$$

$$= 9Nk_B T \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 \frac{1}{3} \left(\frac{\Theta}{T} \right)^3 = 3Nk_B T$$

Klasični rezultat, isti
kao i u Einsteinovom modelu
na visokim temperaturama

Kvantna granica: $T \ll \Theta$

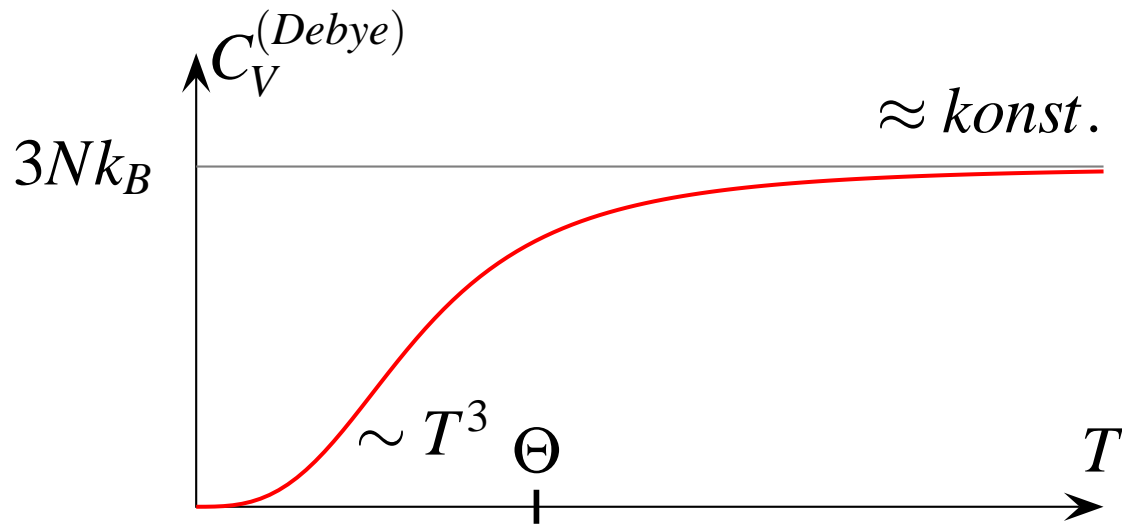
U kvantnoj granici, gornju granicu integrala aproksimiramo s beskonačnim brojem:

$$\begin{aligned} U &= 9Nk_B T \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \int_0^{\frac{\Theta}{T}} dx \frac{x^3}{e^x - 1} \approx 9Nk_B T \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \underbrace{\int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{e^x - 1}}_{\text{broj}=\frac{\pi^4}{15}} \\ &= \frac{3\pi^4}{5} Nk_B T \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \end{aligned}$$

Toplinski kapacitet:

$$C_V = \frac{12\pi^4 Nk_B}{5} \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3$$

Toplinski kapacitet i unutrašnja energija, na niskim temperaturama ($T \ll \Theta$), u Debyeovom modelu ima sasvim drugačiju temperaturnu ovisnost nego što je ima Einsteinov model.



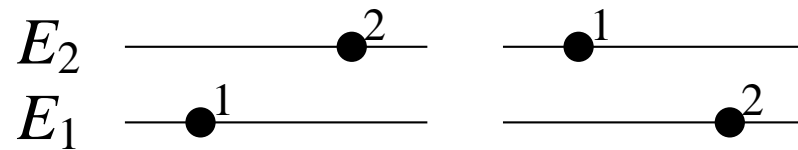
Prilagođavajući izmjerene podatke teorijskim predviđanjima Debyeov modela, moguće je odrediti iznos Debyeove temperature:

Kristal	Θ (K)	Kristal	Θ (K)
Ag	215	Ge	360
Al	394	Li	400
Au	170	Na	150
B	1250	Ne	63
C	1860	Pb	88
Co	385	Ta	225
Cu	315	V	390
Fe	420	W	310

Debyeova temperatura povezana je s brzinom širenja zvučnih valova, odnosno s jačinom sila među atomima u kristalu.

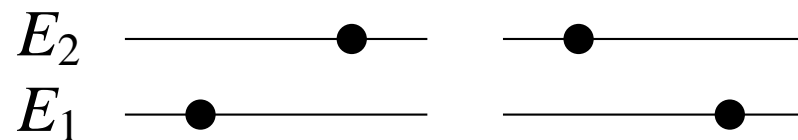
Bozoni i fermioni

- ▷ U klasičnoj fizici sve čestice se mogu razlikovati i onda kada je riječ o istoj vrsti čestica.



Dva različita stanja u klasičnoj fizici

- ▷ U kvantnoj fizici istovrsne čestice nije moguće razlikovati.



Jedno jedino stanje u kvantnoj fizici. Čestice se ne razlikuju.

- ▷ U kvantnoj fizici stanje sustava opisujemo valnom funkcijom:

$$\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2),$$

gdje su \vec{r}_1 i \vec{r}_2 položaji čestica.

- ▷ Što se događa s valnom funkcijom kada se položaji čestica zamijene:

$$\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \xrightarrow{\text{zamjena}} \varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

- ▷ Ako se čestice ne razlikuju, onda zamjena položaja ne dovodi do nikakvih značajnih promjena u sustavu. Valne funkcije prije zamjene i poslije zamjene razlikuju se za **beznačajni** fazni faktor:

$$\varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = e^{i\chi} \cdot \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

- ▷ Ako napravimo dvostruku zamjenu:

$$\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \xrightarrow{\text{zamjena}} \varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = e^{i\chi} \cdot \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$$\varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) \xrightarrow{\text{zamjena}} \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = e^{i\chi} \cdot \varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = e^{2i\chi} \cdot \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

- ▷ Budući da dvostruka zamjena koordinata ništa ne radi na valnoj funkciji, tada mora biti:

$$e^{2i\chi} = 1,$$

odnosno

$$e^{i\chi} = \pm 1.$$

- ▷ Dakle:

$$\varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \pm \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Valna funkcija prilikom zamjene koordinata čestica ostaje **ista** ili joj se **mijenja predznak**.

- ▷ Postoje dvije vrste čestica

- one kod kojih se zamjenom položaja čestica valna funkcija ne mijenja
- i čestice kod kojih zamjena položaja čestica dovodi do promjene predznaka valne funkcije.

- ▷ W. Pauli 1940. je dokazao se valna funkcija ne mijenja kod čestica cjelobrojnog spina, a predznak valne funkcije se mijenja kod čestica polovičnog spina.
- ▷ Čestice cjelobrojnog spina zovemo **bozonima** po Satyendra Nath Boseu, a čestice polovičnog spina zovemo **fermionima** po Enricu Fermiu.

Pretpostavimo da dva fermiona imaju isti položaj

$$\varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)|_{\vec{r}_2=\vec{r}_1} = -\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|_{\vec{r}_2=\vec{r}_1} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_1) = -\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_1) \equiv 0$$

Što može biti zadovoljeno samo ako je valna funkcija jednaka nuli.

- ▷ Dva fermiona ne mogu se nalaziti u istom kvantnom stanju.
- ▷ Proizvoljno velik broj bozona može se nalaziti u istom kvantnom stanju. (Bozoni *preferiraju* biti u istom kvantnom stanju).
- ▷ Bozoni i fermioni imaju sasvim različite funkcije raspodjele po kvantnim stanjima i energijama.

▷ Bozoni

- fotoni (kvanti pobuđenja EM polja)
- fononi (kvanti pobuđenja titranja kristalne rešetke)
- π -mezoni - prenosnici nuklearnih sila u jezgri
- atomi i jezgre cjelobrojnog spina
- ...

▷ Fermioni

- elektroni
- μ -mezoni (teški elektroni)
- barioni (proton, neutron, ...)
- atomi i jezgre polovičnog spina
- ...

- ▷ Složene čestice (atomi, jezgre, ...) imaju spin koji se dobija zbrajanjem i oduzimanjem spinova jednostavnijih čestica od kojih se sastoje:
 - ${}^3\text{He}$ (2 protona + 1 neutron + 2 elektrona) \Rightarrow fermion
 - ${}^4\text{He}$ (2 protona + 2 neutron + 2 elektrona) \Rightarrow bozon

- ▷ Defekti u pravilnoj rešetci, zbog međudjelovanja mogu biti zasjedenjeni mnoštvom elektrona i imati neki efektivni spin. Tako npr. postoje topološki defekti ili **solitoni** u poliacetilenu (polimer $(\text{CH})_x$) koji imaju polovični spin. (Moguće se postojanje i topoloških defekata s efektivnim spinom $1/3$ ili nekim drugim racionalnim brojem.)

Funkcije raspodjele u kvantnoj fizici

Bose-Einsteinova raspodjela

▷ Promatramo sustav **bozona** u kojem postoji

- g_1 stanja energije E_1
- g_2 stanja energije E_2 (pri tome je $E_2 > E_1$)
- g_3 stanja energije E_3 (pri tome je $E_3 > E_2 > E_1$)
- ...

▷ Neka u sustavu

- N_1 čestica ima energiju E_1
- N_2 čestica ima energiju E_2
- N_3 čestica ima energiju E_3
- ...

▷ Ako se sustav nalazi u termodinamičkoj ravnoteži, čemu su jednaki N_1, N_2, \dots ?

(Ukupna energija je $U = \sum_i N_i E_i$, ukupni broj čestica $N = \sum_i N_i$.)

Ovo je isti problem koji smo imali i prije kod određivanja Boltzmannove funkcije raspodjele *klasičnih čestica* po energijama. Razlika je u tome što se u kvantnoj fizici čestice ne razlikuju.

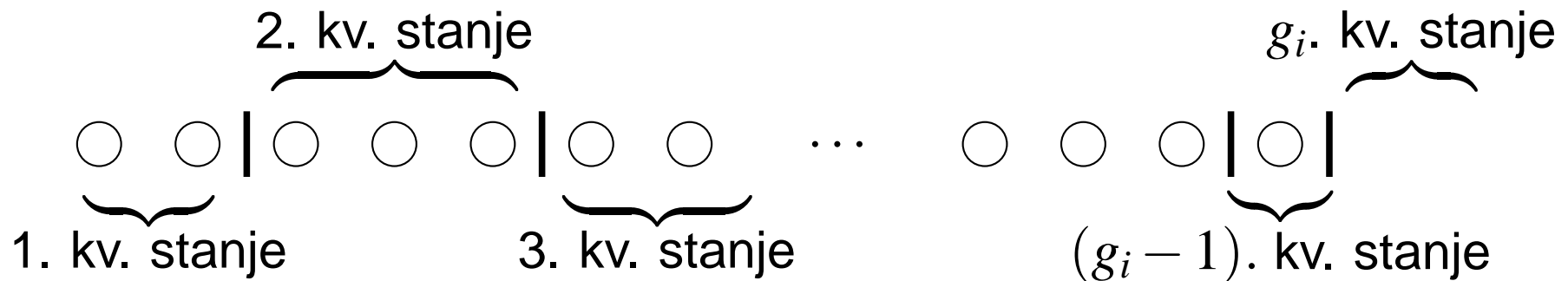
Procedura je ista ona koju smo koristili kod određivanja Boltzmannove funkcije raspodjele.

- ▷ Izračunati termodinamičku vjerojatnost B za dane vrijednosti broja čestica N_i .
- ▷ Izračunati entropiju S ($\sim \ln B$).
- ▷ Odrediti za kakve vrijednosti broja čestica N_i entropija ima maksimalnu vrijednost. Pri tome voditi računa da je ukupna energija sustava U i ukupni broj čestica N fiksiran.

1. korak:

Na koliko je načina moguće raspodjeliti N_i identičnih čestica, koje sve imaju istu energiju E_i , u g_i kvantnih stanja?

Jedan mogući raspored je:



Postoji g_i kvantnih stanja energije E_i .

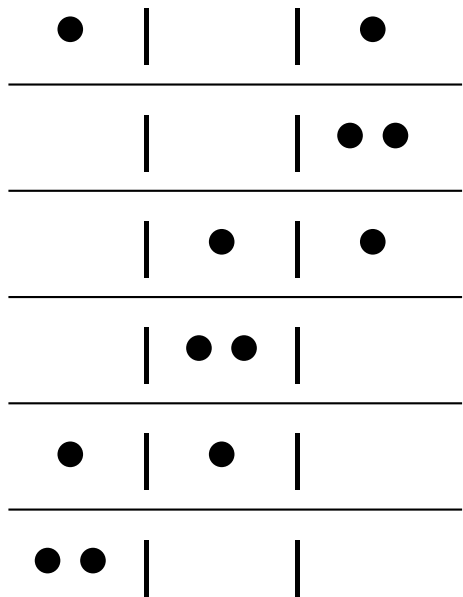
- ▷ U 1. kvantnom stanju nalaze se dvije čestice
- ▷ U 2. kvantnom stanju nalaze se 3 čestice
- ▷ ...
- ▷ U g_i -tom kvantnom stanju nema čestica.

- ▷ Raspored čestica po kvantnim stanjima energije E_i određuju prepreke (vertikalne crtice) kojih ima $(g_i - 1)$.
- ▷ Različita mikroskopska stanjima dobivamo permutirajući čestice i pregrade, pri čemu permutacija samo čestica ne dovodi do novog stanja (jer su sve čestice iste), a niti permutiranja samo pregrada ne dovodi do novog mikroskopskog stanja. Ukupni broj različitih mikroskopskih stanja:

$$B_i = \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!(g_i - 1)!}.$$

$(N_i + g_i - 1)!$ je ukupni broj svih permutacija, čestica i pregrada, $N_i!$ je broj permutacija samo čestica, a $(g_i - 1)!$ je broj permutacija samo pregrada.

Primjer: Neka je $N_i = 2$ a $g_i = 3$:

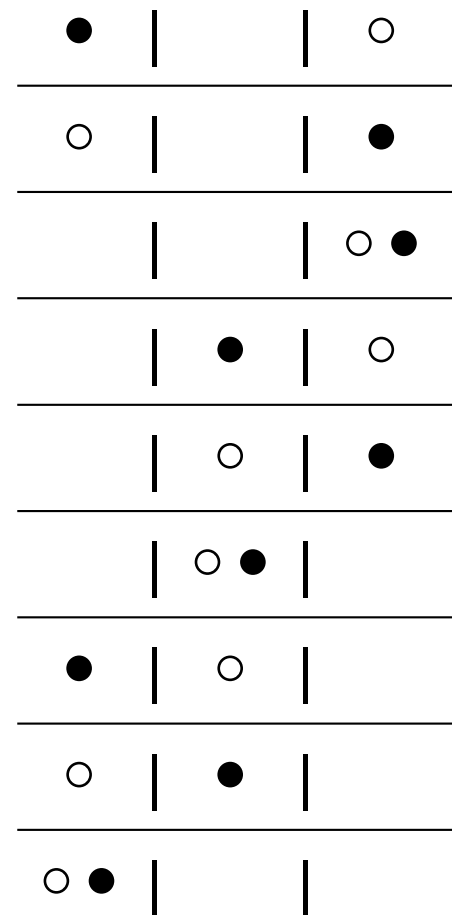


Ukupni broj mogućih stanja je 6, što odgovara izvedenoj formuli:

$$B = \frac{(2 + 3 - 1)!}{2!(3 - 1)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

U klasičnoj statističkoj fizici gdje se čestice mogu razlikovati broj različitih mikroskopskih stanja je 9, što odgovara formuli dobivenoj kod izvoda Boltzmannove raspodjele:

$$B = g_i^{N_i} = 3^2 = 9$$



2. korak:

- ▷ Ukupni broj mogućih mikroskopskih stanja dobiva se kao produkt broja različitih mikroskopskih stanja različitih energija:

$$B = B_1 \cdot B_2 \dots B_i \dots = \prod_i \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!}$$

- ▷ Entropija:

$$S \sim \ln B \approx \sum_i [(N_i + g_i) \ln (N_i + g_i) - N_i \ln N_i - g_i \ln g_i]$$

u granici velikih g_i i N_i kada je moguće primjeniti Stirlingovu formulu:

$$\ln N! \approx N \ln N - N.$$

3. korak:

Tražimo za koje vrijednost brojeva čestica N_i entropija ima maksimum, ali uz uvjet da je ukupni broj čestica konstantan, i da je ukupna energija konstantna (metoda Lagrangeovih multiplikatora):

$$\frac{d}{dN_i} [\ln B - \alpha N - \beta U] = 0$$

$$\sum_i \frac{d}{dN_i} [(N_i + g_i) \ln (N_i + g_i) - N_i \ln N_i - g_i \ln g_i - \alpha N_i - \beta E_i N_i] = 0$$

$$\ln \frac{N_i + g_i}{N_i} - \alpha - \beta E_i = 0$$

odnosno

$$\rho_i = \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\alpha + \beta E_i} - 1}$$

Izvedeni izraz zove se **Bose-Einsteinova raspodjela**. Ona vrijedi za bozone - čestice cjelobrojnog spina.

- ▷ Da bi funkcija raspodjele bila konačna pozitivna funkcija potrebno je da vrijedi:

$$\alpha + \beta E_i > 0 \quad \forall E_i.$$

To će sigurno biti zadovoljeno, ako vrijedi za najnižu energiju:

$$\alpha + \beta E_{min} > 0$$

- ▷ Za slobodne čestice koje imaju energiju:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

ovaj uvjet se svodi na:

$$\alpha > 0.$$

- ▷ Ako na nekoj temperaturi α postane nula, sustav doživljava fazni prelaz poznat kao Bose-Einsteinova kondenzacija.

- ▷ Ako nema ograničenja na broj čestica, tako da ih može biti proizvoljno mnogo, tada nije potrebno nametati uvjet da je ukupni broj čestica konstantan. Tada vrijedi:

$$\alpha = 0.$$

To je točno situacija koja postoji kod fotona i kod fonona. Funkcija raspodjele je

$$\rho_i = \frac{1}{e^{\beta E_i} - 1} = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{uvrštavanjem izraz za} \\ \text{energiju fotona/fonona} \end{array} \right\}$$

u kojoj prepoznamo izraz za srednju vrijednost broja fotona/fonona, odnosno srednja vrijednost kvantnog broja HO.

- ▷ Kao i u Boltzmannove raspodjele koeficijent β može se identificirati kao inverzna temperatura, a koeficijent α kao kemijski potencijal:

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad \alpha = -\frac{\mu}{k_B T}$$