Neprekidnost i limes

Otvoreni i zatvoreni skupovi

U metričkom prostoru (X, d) možemo definirati **otvorenu kuglu** $K(x_0, r)$ sa središtem u točki $x_0 \in X$ i radijusa $r > 0$, na sljedeći način:

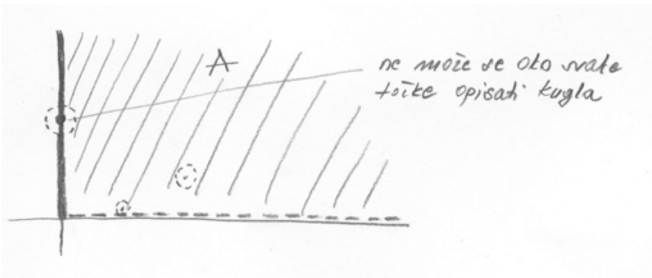
$$K(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\} \subseteq X \tag{1}$$

Definition 1 *Za skup $U \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***otvoren u*** *$\mathbb{R}^n$ ako je on unija neke familije kugala. Odnosno ako se oko svake točke može opisati kugla tj:*

$$U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ je otv ako } (\forall P \in U)\,(\exists r > 0) \;\; t.da \text{ je } K\,(P, r) \subseteq U \tag{2}$$

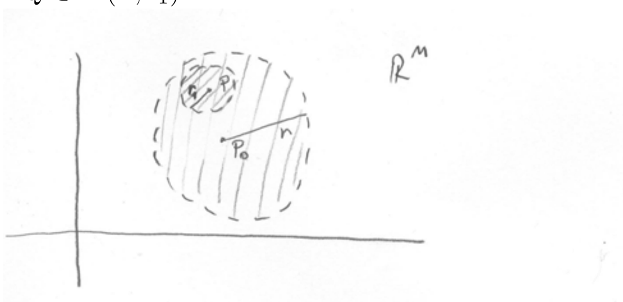
Example 1

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y > 0\}$ *nije otvoren*[1] *u* $\mathbb{R}^2$



- $K\,(P_0, r)\,,\ r > 0,\ P_0 \in \mathbb{R}^n$ (d_2 metrika) - **Kugla** je otvoren skup (u $\mathbb{R}^n$)

Proof. Treba pokazati da se oko svake njene točke može opisati kugla. Uzmimo proizvoljnu $P \in K\,(P_0, r)$. Neka je $r_1 = r - d\,(P_0, P)$. Promatrajmo kuglu $K\,(P_0, r_1)$ (r_1 je dobro definiran tj $r_1 > 0$ jer je $d\,(P_0, P) < r$, $\forall P \in K\,(P_0, P)$). Treba pokazati da je $K\,(P, r_1) \subseteq K\,(P_0, r)$. Relacija "biti podskup" dokazuje se tako da iz $Q \in K\,(P, r_1) \implies Q \in K\,(P_0, r)$ a to će biti $\iff$ je $d\,(P_0, Q) < r$ (jer je $K\,(P_0, r) = \{Q \in \mathbb{R}^n \mid d\,(P_0, Q) < r\}$) . Uzmimo dakle proizvoljnu $Q \in K\,(P, r_1)$.

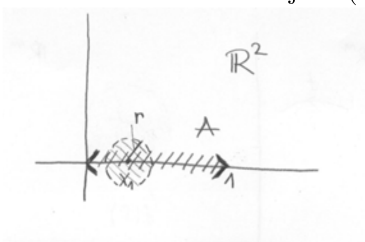


[1] Da je bilo $x > 0,\ y > 0$ bio bi otvoren!

Imamo: $d(Q,P_0) \overset{(M_4)}{\leq} d(Q,P) + d(P,P_0) < {}^2 r_1 + d(P,P_0) = r. \implies Q \in K(P_0,r)$. Dakle kugla je otvoren skup. ■

- Neka je $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. A nije otvoren skup u $\mathbb{R}^2$.

Proof. Pretpostavimo suprotno tj. A je otvoren u $\mathbb{R}^2$. Tada prema 1$\forall P \in A$ $\exists r > 0$ t. da je $K(P,r) \subseteq A$. Odaberimo $P \in A$, $P \equiv (x_1, 0)$, $(0 < x_1 < 1)$. Pošto je A otv to i za P $\exists r > 0$ t. da. je $K(P,r) \subseteq A$.



Promotrimo $K(P,r) = \{Q \equiv (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,Q) < r\}$. $\implies$ $d(P,Q) = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-0)^2} < r$, $\implies$ $(x-x_1)^2 + y^2 < r^2$ a to je krug radijusa r i središta $(x_1,0)$ (vidi sliku), tj $\exists Q \in K(P,r)$ t. da $Q \notin A \implies K(P,r) \nsubseteq A$ sto je $\implies \impliedby$ s Pp da je $K(P,r) \subseteq A$. Dakle Pp da je A otv u $\mathbb{R}^2$ nije točna, nego upravo njena suprotnost : A nije otv u $\mathbb{R}^2$. ■

- No ako je $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} \subseteq \mathbb{R}$ (a ne $\mathbb{R}^2$ kao u gornjem primjeru), tada je A otv (u $\mathbb{R}$)[3].

Remark 1 *Označimo sa* U *familiju svih otvorenih skupova u* $\mathbb{R}^n$. *Tada ona zadovoljava sljedeće svostva:*

$\langle T_1 \rangle$ Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup.

$\langle T_2 \rangle$ Presjek od konačno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup.

$\langle T_3 \rangle$ Cijeli skup $\mathbb{R}^n$ je otvoren (može se prikazati kao unija kugala), i Prazan skup je po def. otvoren skup.

Napomena: Jednotočkovni skupovi u $\mathbb{R}^n$ imaju svojstvo da su im komplementi otvoreni, a oni sami nisu (jer su "pretanki", tj ne obuhvaćaju neku drugu točku).

Definition 2 *Neka je* $P \in \mathbb{R}^n$ *i* $V \subseteq \mathbb{R}^n$. *Kažemo da je skup* V ***okolina točke P*** *ako* $\exists$ *otv skup* U $(\subseteq \mathbb{R}^n)$ *t. da je* $P \in U$ *i* $U \subseteq V$.

Dakle svaki otvoreni skup je okolina svake svoje točke.

[2] $d(Q,P)$ je $< r_1$ jer je $Q \in K(P,r_1)$ koja je upravo $= \{Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) < r_1\}$
[3] Kugle u $\mathbb{R}$ su intervali

Definition 3 *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $P \in \mathbb{R}^n$. Kažemo da je točka P* ***gomilište skupa A*** *ako svaka okolina točke P sadži ∞ mnogo točaka iz A.*

Dakle u otvorenom skupu svaka točka je gomilište.

Proposition 1 *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $P \in \mathbb{R}^n$. P je gomilište skupa $A \iff$ svaka okolina U točke P ima svojstvo $(A \backslash \{P\}) \cap U \neq \emptyset$*

Definition 4 *Za skup $F \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***zatvoren*** *ako je $\mathbb{R}^n \backslash F$ (njegov komplement) otvoren.*

Theorem 2 *Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je zatvoren $\iff A' \subseteq A$ (tj akko sadrži sva svoja gomilišta).*

Definition 5 *Neka su P, $P' \in \mathbb{R}^n$.* ***Segment*** *$[P, P'] \subseteq \mathbb{R}^n$ je skup*

$$[P, P'] = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = a_i + t(b_i - a_i), 1 \leq i \leq n, 0 \leq t \leq 1\} \tag{3}$$

tj $[P, P'] = \{P + t(P' - P) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ (vektorski zapis), ili jedostavno kazemo da je segment najkraća spojnica dviju točaka.

Definition 6 *Za skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***konveksan*** *ako $\forall P, P' \in S$ vrijedi da je $[P, P'] \subseteq S$* [4]

Definition 7 *Neka su P i $P' \subseteq \mathbb{R}^n$.* ***Poligonalna crta od*** *P do P' je skup $\Gamma = \cup_{i=1}^{n-1} [P_i, P_{i+1}] \subseteq \mathbb{R}^n$ pri čemu je $P_1 = P$, $P_n = P'$, $P_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$. Ili jednostavije kazemo da je ˜konačna unija segmenata koja povezuje te dvije točke.*

Remark 2 *Do sada nam otvoreni skupovi nisu morali biti u "jednom komadu" a sad imamo kriterij za definirati skupove u "jednom komadu" - povezane:*

Definition 8 *Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je* ***nepovezan*** *ako $\exists$ (neprazni) otvoreni (vidi def* **??***) skupovi U, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, takvi da je*

$$(A \cap U \neq \emptyset), (\ A \cap V \neq \emptyset), (\ A \subseteq U \cup V),\ (U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset \tag{4}$$

Definition 9 *Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je* ***povezan*** *ako nije nepovezan, (tj ako se ne može dobiti kao disjunktna unija dva nepovezana skupa).*

Sljedeci teorem to malo konkretizira:

Theorem 3 *Otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je* ***povezan*** *$\iff$ se svake dvije točke iz U mogu spojiti poligonalnom crtom (vidi def 7) koja leži u U.*

[4] Segment je konveksan skup i kugle iz $\mathbb{R}^n$*su* konveksni skupovi

Definition 10 *Otvoren (def 1??) , povezan (def 9) skup u* $\mathbb{R}^n$ *naziva se* ***područje.***

Slijede neke karakterizacije otvorenosti i zatvorenosti:

- Skup $U \subseteq X$ je **otvoren u** X ako $\exists\ V \subseteq \mathbb{R}^n$ **otvoreno u** $\mathbb{R}^n$ t. da je $U = V \cap X$ (tj ako se U može nadograditi do otvorenog skupa u $\mathbb{R}^n$). Općenito U ne mora biti otvoren u $\mathbb{R}^n (\supseteq X\ )$ ako je otvoren u X.[5] No ako je X otvoren u $\mathbb{R}^n$, onda je svaki njegov otvoreni podskup ujedno otvoren i u $\mathbb{R}^n$ (jer je prema $\langle T_2 \rangle$ iz **??** presjek (konačan!) dvaju otvorenih skupova - otvoren skup).
- Analogno $F \subseteq X$ je **zatvoren u** X ako $\exists\ G \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren u $\mathbb{R}^n$ takav da je $F = G \cap X$ (tj ako se F može nadograditi do zatvorenog skupa u $\mathbb{R}^{n)}$. Općenito F ne mora biti zatvoren u $\mathbb{R}^n (\supseteq X)$ ako je zatvoren u X.[6] No ako je X zatvoren u $\mathbb{R}^n$ onda je svaki njegov zatvoreni podskup ujedno zatvoren i u $\mathbb{R}^n$ (Pokazimo da je presjek dva zatvorena skupa - zatvoren: (A zatv i B zatv) $\Longrightarrow$ (A^c otv i B^c otv), $(A \cap B)^c = De\ Morgan = (A^c \cup B^c)$ otv - jer je to unija otvorenih skupova $\Longrightarrow$ $(A \cap B)$ zatv prema def 4).

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ sa ovako opisanom topologijom naziva se **potprostor od** $\mathbb{R}^n$, a

ovako opisana topologija - **potprostorna topologija** ili **inducirana topologija.**

Neprekidna preslikavanja

Definition 11 *Neka je* $X \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *i* $P_0 \in X$*. Kažemo da je* f ***neprekidna u točki*** P_0 *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) t.da (\forall P \in X)\ d(P, P_0) < \delta \implies d\left(f\left(P\right), f\left(P_0\right)\right) < \varepsilon \quad (5)$$

Primijetimo da u ovoj def. radijus δ ovisi i o ε i o točki P_0 (za razliku od uniformne neprekidnosti gdje ne ovisi o točki).

- **Identiteta** $id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definirana sa $id_{\mathbb{R}^n}(P) = P$ je neprekidna. (Dovoljno je $\forall \varepsilon$ uzeti bilo koji $\delta \leq \varepsilon$).
- **Konstanta** $c : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definirana sa $c\left(P\right) = Q_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall P \in \mathbb{R}^n$ je neprekidna.($\forall \varepsilon$ mozemo uzeti $\forall \delta$).

Definition 12 *f je* neprekidna *(na X) ako je f neprekidna u svakoj točki* $P_0 \in X$*.*

[5] Što je otvoreno u podskupu ne mora biti otvoreno i u nadskupu!
[6] Što je zatvoreno u podskupu, ne mora biti zatvoreno i u nadskupu

Remark 3 Projekcija na i-tu koordinatu $p_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definirana sa* $p_i(P) = p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ *je neprekidna.*

Proof. Da bismo dokazali neprekidnost p_i dovoljno je pokazati njenu neprekidnost u proizvoljnoj točki $P_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ tj: $\forall \varepsilon > 0$ treba naci $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da $\forall P \in \mathbb{R}^n$ čim je $d(P, P_0) < \delta \implies d(p_i(P), p_i(P_0)) < \varepsilon$.Uzmimo dakle $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tražimo odgovarajući δ! Vidjet cemo kasnije da nam je dovoljno uzeti $\delta = \varepsilon$, stoga pokusajmo odmah dokazati tvrdnju za upravo taj δ. Pokažimo dakle da čim je $P \in K(P_0, \delta) \implies p_i(P) \in K(p_i(P_0), \varepsilon)$. Neka je $P \in K(P_0, \delta = \varepsilon)$.To znači da je $d(P, P_0) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(x_j - x_j^0\right)^2} < \delta = \varepsilon$.Pogledajmo udaljenosti slika $d(p_i(P), p_i(P_0))$ =u $\mathbb{R}$ smo $= |p_i(P) - p_i(P_0)|$ $= \left|x_i - x_i^0\right| =$ svojstvo aps. vrijed. $= \sqrt{\left(x_i - x_i^0\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(x_j - x_j^0\right)^2} = d(P, P_0)$ sto je $< \delta = \varepsilon$, dakle slika proizvoljne točke P iz $\delta - kugle$ oko P, upala je u $\varepsilon-$ kuglu oko $p_i(P_0)$ što znaci da je naš $\delta = \varepsilon$ dobar. Dakle $\forall \varepsilon$ smo pronašli $\delta = \varepsilon$ t da je tvrdnja 5 ispunjena, dakle ˜je neprekidna funkcija. ■

Example 2 *Neka je* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *def sa* $f(x, y) = \left\{\begin{matrix} (x,y) & , & (x,y) \neq (1,-2) \\ (6,1) & , & (x,y) = (1,-2) \end{matrix}\right\}$. f *nije neprekidna tj neprekidna je u svim točkama* $\neq (1, -2)$ *(jer se u njima ponaša kao identiteta koja je nepr. fja), no u točki* $P_0 = (1, -2)$ f *je prekidna. Dokažimo taj prekid:*

Proof. Za dokazati prekidnost fje u nekoj točki korisno je obrnuti kvantifikatore iz izraza 5. tj potrebno je pronaci ε t da $(\forall \delta > 0)$ $\exists P_\delta$ čim je $d(P_\delta, P_0) < \delta \implies d(f(P_0), f(P_\delta)) \geq \varepsilon$,gdje P_δ označava točku P "ovisnu o δ" tj $P(\delta)$. Treba dakle pronaći takav ε. Kasnije će se ispostaviti da će $\varepsilon = 1$ biti dobar, no treba pronaci i P_δ koji će biti u $\delta-$ kugli oko P_0. Opet kasnije će se utvrditi da je $P_\delta = \left(1 - \frac{\delta}{2}, -2 - \frac{\delta}{2}\right)$ dobar. Provjerimo najprije da je ovaj P_δ upao u pomenutu kuglu: $d(P_0, P_\delta) = \sqrt{(1 - (1 - \frac{\delta}{2}))^2 + (-2 - (-2 - \frac{\delta}{2}))^2} = \sqrt{\frac{\delta^2}{2}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$ jest upao je $\forall \delta$. Preostaje još dokazati da je udaljenost slika veća ili jednaka odabranom $\varepsilon = 1$: $d(f(P_\delta), f(P_0)) = d\left(\left(1 - \frac{\delta}{2}, -2 - \frac{\delta}{2}\right), (6, 1)\right) = \sqrt{\left(5 + \frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(3 + \frac{\delta}{2}\right)^2} \geq \sqrt{25 + 3} \geq 1 = \varepsilon$. Dakle pronašli smo $\varepsilon = 1$ takav da $\forall \delta > 0$ moze se naći P_δ iz $\delta-$ okoline točke P_0 koji se neće preslikati u $\varepsilon-$ okolinu točke $f(P_0)$ tj dokazali smo da naša funkcija ima prekid u P_0 tj nije neprekidna. ■

Theorem 4 *Neka je* $X \subseteq \mathbb{R}^m$ *i* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *, vrijedi:*

1. *f je neprekidna u točki* $P_0 \in X \iff \forall$ *okolinu* V *točke* $f(P_0)$, $\exists$ *okolina* U *točke* P_0*, t. da je* $f(U \cap X) \subseteq V$.

2. *f je neprekidna* $\iff$ $\forall$ V *otv* $\subseteq \mathbb{R}^n$ *je skup* $f^{-1}(V)$ *otvoren u* X [7] *tj (prema karakterizacijama zatv i otv u pogl) $\exists U$ otv$\subseteq \mathbb{R}^m$ t. da je* $f^{-1}(V) = U \cap X$.

[7] Svojstvo 1. u terminima otv skupova $\forall$ točku

3. [8] *Ako je X otv u $\mathbb{R}^m$, onda je $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidna $\iff$ $\forall$ skup V otv $\subseteq \mathbb{R}^n$ je $f^{-1}(V)$ otv u $\mathbb{R}^m$.*

Definition 13 *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Kažemo da f **ima Lipschitzovo svojstvo** ako postoji $\Lambda \geq 0$ t.*[9] *da je*

$$d(f(P), f(Q)) \leq \Lambda \cdot d(P, Q), \forall P, Q \in X \tag{6}$$

- Neka je f konstanta - ima Lipš. svojstvo za $\Lambda \geq 0$.
- Projekcija na i-tu koordinatu $p_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ - ima Lipš. svojstvo za $\Lambda \geq 1$.

Theorem 5 *Ako $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ima Lipš. svojstvo onda je f - neprekidna .*

Proof. Neka $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ima Lipš. svojstvo s konstantom $\Lambda \geq 0$. To znači da $\forall P, P' \in X$ je $d(f(P), f(P')) \leq \Lambda \cdot d(P, P')$. (i) $\Lambda = 0 :$ $\Longrightarrow$ $d(f(P), f(P')) \leq 0$, no zbog (M1) $\Longrightarrow$ $d(f(P), f(P')) = 0$ a zbog (M2) $\iff$ $f(P) = f(P') = konst.$ $\Longrightarrow$ f je konstanta! dakle neprekidna. (ii) $\Lambda > 0 :$ Trebamo pokazati neprekidnost od f , tj neprekidnost od f u proizvoljnoj točki P_0 - to znači prema 5 za proizvoljni $\varepsilon > 0$ naći $\delta > 0$ t.da $\forall P \in X$ čim je $d(P_0, P) < \delta$ bude $d(f(P), f(P_0)) < \varepsilon$. Odaberimo proizvoljni $\varepsilon > 0$. Potražimo odgovarajući δ. Kasnije će se ispostaviti da će nam $\delta = \frac{\varepsilon}{\Lambda}$ biti dobar. Pa uzmimo onda točku P t. da je $d(P, P_0) < \delta$. Tada je $d(f(P), f(P_0)) \leq \Lambda \cdot d(P, P_0) < \Lambda \cdot \delta = \Lambda \cdot \frac{\varepsilon}{\Lambda} = \varepsilon$, dakle ispunjen je uvjet neprekidnosti 5 , pa je f neprekidna. ■

Theorem 6 (O neprekidnosti kompozicije u točki) *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}^k$ i $f(X) \subseteq Y$. Ako je f neprekidna u točki $P_0 \in X$, a g neprekidna u točki $Q_0 = f(P_0)$, onda je $gf : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ neprekidna u P_0.*

Corollary 7 *(Općenito neprekidnost u svakoj točki) Neka se dane f-je $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$ i $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ pri čemu je $f(X) \subseteq Y$. Ako se f i g neprekidne f-je onda je i njihova kompozicija neprekidna f-ja.*

Remark 4 *Neka je dana f-ja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Za $m = 1$ - f je skalarna, a ako je $m \geq 2$ - f je vektorska f-ja. Pp. da je $m \geq 2$. Tada je $\forall P \in X$ - $f(P) \in \mathbb{R}^m$, tj $f(P)$ je uređena m-torka pa se može zapisati u obliku:*

$$f(P) = (f_1(P), \ldots, f_m(P)) \tag{7}$$

*gdje su $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ - skalarne f-je koje se nazivaju **koordinatne funkcije.** Primijetimo da f-je f i f_i $(i = 1, \ldots, m)$ imaju istu domenu (X), a kodomene su im različite : $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}$ respektivno. Zato se f-ja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ponekad označava i sa: $f = (f_1, \ldots, f_m)$.*

[8] Poseban slučaj 2.
[9] Isti Λ za sve

Jednostavnije je naravno ispitivati neprekidnost skalarnih nego vektorskih funkcija. Zato je koristan sljedeći teorem koji kazuje da neprekidnost vektorske f-je mozemo ispitati promatranjem neprekidnosti njenih koordinatnih f-ja:

Theorem 8 *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f = (f_1, \dots, f_m) : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$.*

- *Funkcija f je neprekidna u točki $P_0 \in X$* **akko** *su sve koordinatne f-je $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(i = 1, \dots, m)$ neprekidne u P_0.*
- *Funkcija f je neprekidna* **akko** *su neprekidne sve f_i ,$(i = 1, \dots, m)$*

Example 3

Example 4

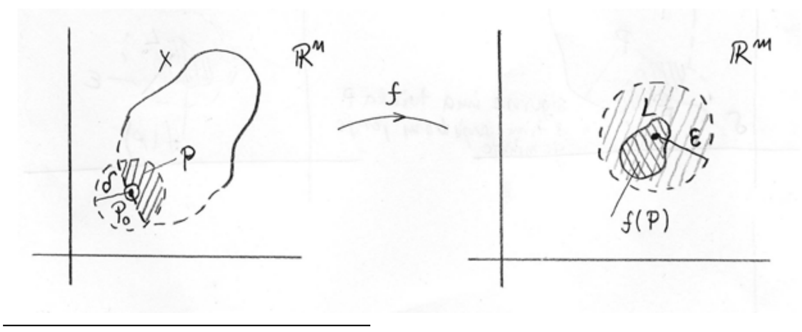
Lemma 9 *(O lokalnoj[10] omedjenosti skalarne funkcije neprekidne u P_0): Neka je $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ funkcija neprekidna u tocki $P_0 \in X$. Tada postoje realni brojevi $\mu > 0, M > 0$ t. da $\forall P \in X$, cim je $d(P, P_0) < \mu$[11] $\Longrightarrow$ $|f(P)| < M$.*

Proof. Po pretpostavci teorema f je neprekidna u tocki P_0, pa prema (5) slijedi da $\forall \varepsilon$, pa i za $\varepsilon = 1$, $\exists \delta = \mu > 0$, t da $\forall P \in X$, cim je $d(P, P_0) < \mu \Longrightarrow d(f(P), f(P_0)) = |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon = 1$. Mi trebamo pokazati da $d(P, P_0) < \mu \Longrightarrow |f(P)| < M$.
Neka je dakle $P \in X$,t. da je $d(P, P_0) < \mu$, pa promotrimo onda $|f(P)|$:
$|f(P)| = |f(P) - f(P_0) + f(P_0)| \overset{M_4}{\leq} |f(P) - f(P_0)| + |f(P_0)| <$ (jer je $d(P, P_0) < \mu$) $< 1 + |f(P_0)|$, pa mozemo uzeti da je $M = 1 + |f(P_0)| \in \mathbb{R}$.
Dakle uz pretpostavke leme doista postoje trazeni $\mu, M > 0$. ■

Limes funkcije

Definition 14 *Neka je dana funkcija $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 \in X'$ (gomilište skupa X). Kažemo da funkcija f ima u P_0* ***limes,*** *ako postoji $L \in \mathbb{R}^m$ takav da*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \forall P \in X \backslash \{P_0\}, d(P, P_0) < \delta \Longrightarrow d(f(P), L) < \varepsilon \qquad (8)$$



[10] Na nekoj kugli oko P_0. (Ne vrijedi globalna omedjenost).
[11] f je dakle omedjena na μ-okolini tocke P_0

Primijetimo da u gornjoj definiciji P_0 ne mora pripadati domeni funkcije jer je gomilište (def 3) $\neq$ od neprekidnosti (def **??**) gdje točka u kojoj ispitujemo nepr. mora pripadati domeni.

Oznaka

$$L = \lim_{P \longrightarrow P_0} f(P) \tag{9}$$

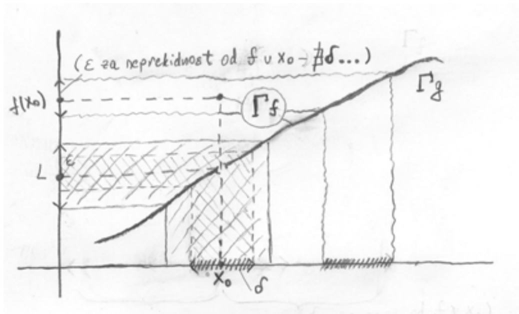
- $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ - f je neprekidna (def **??**) , točka $x = 0$ je gomilište (def3) domene ali f nema limes u $x = 0$.

- $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \{ \begin{smallmatrix} \frac{1}{x} & , & x \neq 0 \\ 0 & , & x=0 \end{smallmatrix}$ - g ima prekid u točki $x = 0$ a u ostalim je točkama neprekidna, no također nema limes u točki $x = 0$ koja je naravno gomilište domene.

Theorem 10 *Neka je* $\dot{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *i* $P_0 \in X'$. *Ako* f *ima u* P_0 *limes, on je **jedinstven.***

Proof. Kontradikcijom: Pretpostavimo suprotno tj da f ima u P_0 dva limesa $L_1 \neq L_2 \in \mathbb{R}^m$.Pa imamo: jer je L_1 limes od f to znaci da za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_1 > 0$ t.da $\forall P \in X \backslash \{P_0\}$ čim je $d(P_0, P) < \delta_1 \implies d(f(P), L_1) < \varepsilon$ a jer je L_2 limes od f to za isti ε postoji $\delta_2 > 0$ t. da $\forall P \in X \backslash \{P_0\}$ čim je $d(P, P_0) < \delta_1 \implies d(f(P), L_2) < \varepsilon$. Ako sad za proizvoljno odabrani ε odaberemo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tada ćemo imati da $\forall P \in X \backslash \{P_0\}$ čim je $d(P, P_0) < \delta$ slijedi da je: $d(f(P), L_1) < \varepsilon$ ali i $d(f(P), L_2) < \varepsilon$. Ove tvrdnje trebale bi vrijediti za svaki ε pa pokušajmo sad pronaci neki ε koji će nas dovesti do kontradikcije. Kasnije će se ispostaviti da će $\varepsilon = \frac{1}{2} d(L_1, L_2)$ biti odgovarajući ($\varepsilon > 0$ jer je $d(L_1, L_2) > 0$ zbog $L_1 \neq L_2$) . Uzmimo onda taj ε i pogledajmo sto bi vrijedilo za proizvoljni $P \in K(P_0, \delta)$: $\mathbf{d}(L_1, L_2) \overset{(M4)}{\leq} d(L_1, f(P)) + d(f(P), L_2) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{1}{2} d(L_1, L_2) + \frac{1}{2} d(L_1, L_2) = \mathbf{d}(L_1, L_2) \implies \impliedby$. Dakle pretpostavka da postoje dva limesa u istoj točki i da su različiti nas je dovela do kontradikcije što znaci da ta pretp. nije točna nego je točna upravo njena suprotnost tj tvrdnja teorema. ■

Example 5 *Pokušajmo usporediti limese i (ne)prekidnost funkcija* f *i* g *sa sljedeće slike,* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *i* $g : \mathbb{R} \backslash \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.



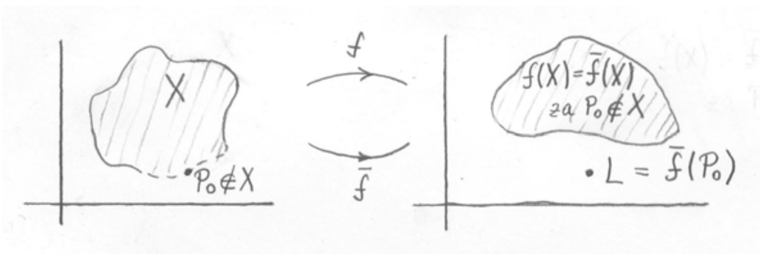
Sa slike vidimo da funkcija f ima prekid u x_0 (jer za odabrani ε ne postoji δ okolina oko x_0 koja bi se cijela, zajedno s x_0, preslikala u ε okolinu oko $f(x_0)$) pa nije neprekidna funkcija, ali f ima limes u x_0 (vidi def 14). Funkcija g je pak neprekidna (vidi def **??** *) ali mada nije definirana u x_0, također ima limes u x_0 (def 14) jer je x_0 gomilište (def 3) domene od g .*

Neka je $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 \in X'$ i $L \in \mathbb{R}^m$. Definirajmo funkciju $\overline{f} : X \cup \{P_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sa

$$\overline{f}(P) = \left\{ \begin{smallmatrix} f(P) & , \; P \neq P_0 \\ L & , \; P = P_0 \end{smallmatrix} \right\} \tag{10}$$

Theorem 11 *Funkcija f ima u gomilištu (def 3) P_0 limes $L \in \mathbb{R}^m$ akko je $\overline{f}$ neprekidna (def* **??** *) u P_0.*

(Dakle problem postojanja limesa f-je f svodi se na ispitivanje neprekidnosti u P_0 f-je $\overline{f}$).



Proof.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je $\lim\limits_{P_0} f = L$. To znači da $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $(\forall P \in X \backslash \{P_0\})$, čim

je $0 < d(P, P_0) < \delta \implies d(f(P), L) < \varepsilon$. No zbog def funkcije $\overline{f}$ to znači da $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, t. da $\forall P \in X \backslash \{P_0\}$ čim je $d(P, P_0) < \delta$ $\implies d\left(\overline{f}(P), \overline{f}(P_0)\right) < \varepsilon$ sto pokazuje da je f-ja $\overline{f}$ neprekidna u svim točkama iz $X\backslash\{P_0\}$. No da bi dokazali neprekidnost f-je $\overline{f}$ (tj. u svim točkama domene $X\cup P_0$) trebamo jos pokazati njenu neprekidnost u točki P_o. Pa imamo za $P = P_0$: $d(P_0, P_0) = 0 < \delta$ (jer je $\delta > 0$), dakle P_0 upada u δ okolinu oko P_0 , no tada je i $d\left(\overline{f}(P_0), \overline{f}(P_0)\right) = 0 < \varepsilon$ (jer je $\varepsilon > 0$), što upravo znači da je f-ja $\overline{f}$ neprekidna i u točki P_0. Sada pak imamo da $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, t. da $\forall P \in X\cup\{P_0\}$ čim je d$(P, P_0) < \delta \implies d\left(\overline{f}(P), \overline{f}(P_0)\right) < \varepsilon$ tj f-ja $\overline{f}$ je neprekidna (u svim točkama domene!).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je $\overline{f}$ neprekidna u P_0 ($\in X'$). Trebamo dokazati da je $\lim\limits_{P_0} f = L = \overline{f}(P_0)$! - Neprekidnost od $\overline{f}$ u P_0 znači da $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, t. da $\forall P \in X\cup\{P_0\}$ čim je $d(P, P_0) < \delta \implies d\left(\overline{f}(P), \overline{f}(P_0)\right) < \varepsilon$. No to posebno vrijedi i $\forall P \in X\backslash\{P_0\}$ (ako je $P_0 \in X$), odnosno $\forall P \in X$ (ako $P_0 \notin X$), tj $\forall P$ za koji je $0 < d(P, P_0) < \delta$ (tj za $P \neq P_0$) tj. vrijedi: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, t.da $\forall P \in X\backslash\{P_0\}$ čim je $0 < d(P, P_0) < \delta \overset{(10)}{\implies} d(f(P), L) < \varepsilon$ no to upravo prema def 14 znači da je $\lim\limits_{P_0} f = L$.

■

Corollary 12 *Neka je* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 \in X\cap X'$ *(tj* P_0 *je gomilište koje pripada domeni). Tada vrijedi:*

$$f \text{ je nepr. (def}\mathbf{??}\text{) u } P_0 \iff f \text{ ima limes u } P_0 \quad \& \lim_{P_0} f = f(P_0) \tag{11}$$

Proof. Uočimo da je uz ovako odabranu točku P_0: $f = \overline{f}$! (jer je sad zbog $P_0 \in X\cap X'$: $X\cup\{P_0\} = X$, tj f i $\overline{f}$ imaju sad istu domenu a domena je bila njihova jedina razlika prije).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je f neprekidna u P_0. Zbog $f = \overline{f}$ to znači da je $\overline{f}$ neprekidna u P_0 a zbog gornjeg teorema $\implies$ f ima limes u P_0 i $\lim\limits_{P_0} f = L$. No zbog (10) je $L = \overline{f}(P_0)$ odnosno zbog $f = \overline{f}$ je i $L = f(P_0)$, pa je $\lim\limits_{P_0} f = f(P_0)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka f ima limes u P_0 i neka je $\lim\limits_{P_0} f = f(P_0)$. Zbog $f = \overline{f}$ i zbog (10) je onda $f(P_0) = \overline{f}(P_0) = L$, odnosno $\lim\limits_{P_0} f = L$. No to su uvjeti gornjeg teorema pa $\implies$ $\overline{f}$ je neprekidna u P_0. Ali zbog $f = \overline{f}$ to znači da je i f neprekidna u P_0.

■

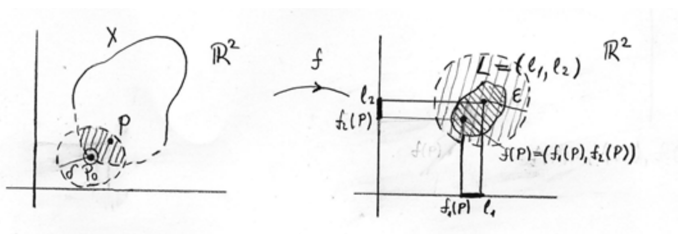
Kao sto smo kod neprekidnosti imali teorem koji nam je "olaksao" ispitivanje neprekidnosti vektorskih funkcija preko koordinatnih f-ja (**??**) (skalarnih) (vidi Tm 8), tako bismo i sad željeli imati sličan teorem koji bi nam omogucio traženje limesa vektorskih funkcija promatranjem nekih skalarnih f-ja.

Pojasnimo to malo na primjeru funkcije (niza) $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Kod nizova je uobičajeno sam niz označiti sa (a_n), a funkcijsku vrijednost $a(n)$ pisati kao a_n, pa pošto je ona ovdje uređena m-torka pišemo $a_n = (x_1^n, \ldots, x_m^n)$. Niz funkcijskih vrijednosti a_n $(n \in \mathbb{N})$ konvergirat će točki $P_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_m^0\right)$ ako svaki od nizova (x_i^n) $(i = 1, \ldots, m)$ (pripadni nizovi na svakoj koordinati) konvergira ka x_i^0 $(\in \mathbb{R})$. Na primjer: Uzmimo niz $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Vrijednosti niza bit će oblika $a_n = \left(x_1^n, x_2^n, x_3^n\right)$ $(n \in \mathbb{N})$. Niz (a_n) konvergirat će k $P_0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$ ako: niz $(x_1^n) \longrightarrow x_1^0$, niz $(x_2^n) \longrightarrow x_2^0$, te niz (x_3^n) konvergira ka x_3^0. Iskažimo napokon željeni teorem:

Theorem 13 *Funkcija (vektorska)* $f = (f_1, \ldots, f_m) : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, *ima u gomilištu (def 3)* $P_0 \in X'$ *limes* $L = (l_1, \ldots, l_m) \in \mathbb{R}^m$ **akko** *svaka koordinatna f-ja (**??**)* $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *(*$i = 1, \ldots, m$*) ima u* P_0 *limes* l_i.

Proof.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Neka f iz teorema ima u P_0 limes $L = (l_1, \ldots, l_m)$. To znači da $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall P \in X \backslash \{P_0\}$, $0 < d(P, P_0) < \delta \implies d(f(P), L) < \varepsilon$. Trebamo pokazati da svaka koordinatna f-ja ima u P_0 limes l_i, tj da $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall P \in X \backslash \{P_0\}$ čim je $0 < d(P, P_0) < \delta \implies d(f_i(P), l_i) < \varepsilon$, $\forall i$.Doista tada $\forall i = 1, \ldots, m$ vrijedi: ako je $0 < d(P, P_0) < \delta$ (δ za vektorsku f-ju dobar je i za koord. fje) onda je i $d(f_i(P), l_i) = |f_i(P) - l_i| = \sqrt{(f_i(P) - l_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (f_j(p) - l_j)^2} = d(f(P), L) < \varepsilon$ tj. sve koord. fje imaju u P_0 limes jednak l_i. Ilustrirajmo to na primjeru funkcije $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$:



$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je $\lim\limits_{P_0} f_i = l_i$ $\forall i = 1, \ldots, m$. (Trebamo pokazati da f ima u P_0 limes L, tj. da $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall P \in X \backslash \{P_0\}$ čim je $0 < d(P, P_0) < \delta \implies d(f(P), L) < \varepsilon$). Odaberimo onda neki $\varepsilon > 0$.Tada $\forall i$ i proizvoljno odabrani pozitivni broj $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} > 0$ (kasnije će se ispostaviti da je bas u takvom obliku zgodan) $\exists \delta_i > 0$, t. da $\forall P \in X \setminus \{P_0\}$ ako je $d(P, P_0) < \delta_i$ $\Longrightarrow$ $d(f_i(P), l_i) = |f_i(P) - l_i| = \sqrt{(f_i(P) - l_i)^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Kvadriramo li posljednju nejednakost dobijemo da je $\forall i : (f_i(P) - l_i)^2 < \frac{\varepsilon^2}{m}$! No mi trebamo pokazati da f ima u P_0 limes L, pa za već proizvoljno odabrani ε moramo pronaći $\delta > 0$ "dobar" za preostali dio definicije limesa. Uzmemo li najmanji od pomenutih δ_i $(i = 1, \ldots, m)$ moći ćemo iskoristiti gore dobijenu nejednakost $\forall i$, jer će se točka P tada nalaziti u svakoj δ_i -okolini oko P_0. Neka je dakle $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Tada imamo za $0 < d(P, P_0) < \delta \leq \delta_i$ $(\forall i)$ i zbog gornje nejednakosti: $d(f(P), L) =$ $\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i(P) - l_i)^2} < \sqrt{\underbrace{\frac{\varepsilon^2}{m} + \cdots + \frac{\varepsilon^2}{m}}_{m\ -\ puta}} = \sqrt{m\frac{\varepsilon^2}{m}} = |\varepsilon| = \varepsilon$ (jer je bio $\varepsilon > 0$)

čime je tvrdnja teorema dokazana.

■

Remark 5 *Primijetimo da nam prethodna dva teorema pokazuju da se problem limesa vektorskih funkcija može svesti na neprekidnost ili na limes skalarnih funkcija!*

Remark 6 *(Svojstva limesa)*

- *Ako je* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, *neprekidna u* $P_0 \in X' \cap X$, *onda vrijedi:*
  $f(P_0) = \lim_{P \longrightarrow P_0} f(P)$ *(vidi (11)) te*

  $\lim_{P \longrightarrow P_0} f(P) = f\left(\lim_{P \longrightarrow P_0} P\right)$ *tj. neprekidna f-ja komutira s limesom!.*
- *Ako* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, *imaju limes u točki* $P_0 \in X'$[12], *onda i funkcije:* $f + g$, Λf $(\Lambda \in \mathbb{R})$ *i* $f \cdot g$ *imaju u* P_0 *limes i vrijedi:*

  $\lim_{P_0} (f + g) = \lim_{P_0} f + \lim_{P_0} g,$

  $\lim_{P_0} \Lambda f = \Lambda \lim_{P_0} f,$ *te*

  $\lim_{P_0} (f \cdot g) = \lim_{P_0} f \cdot \lim_{P_0} g$

Remark 7 *(O limesu restrikcije)Neka je* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 \in X'$ *i* $\lim_{P \longrightarrow P_0} f(P) = L$. *Neka je nadalje* $T \subseteq X$ *takav da je* $P_0 \in T'$.*Tada postoji* $\lim_{P_0} f|_T$ *i vrijedi* $\lim_{P_0} f|_T = L$ *(jer je* $T' \subseteq X'$, *pa prema def limesa Def 14). Umjesto* $\lim_{P_0} f|_T$ *koristi se i oznaka* $\lim_{\substack{P \longrightarrow P_0 \\ P \in T}} f(P)$.

[12] Usporedi s Kor.12, dakle ovdje se ne zahtijeva "i" $\lim_{P_0} f(P) = f(P_0)$, pa f i g ne moraju biti neprekidne u P_0!!
No dakako svojstva vrijede ako su f i g neprekidne u P_0, jer tada, prema pomenutom Korolaru, slijedi da imaju i limese u P_0.

Diferencijal i derivacija

Diferencijabilnost

U ovom poglavlju opcenito cemo raditi s funkcijama $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. No prisjetimo se najprije pojma diferencijabilnosti iz analize realnih funkcija realne varijable($f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$):

Slucaj $\boxed{n = m = 1}$

Neka je $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, Ω je otvoren i $x_0 \in \Omega$. Kažemo da je f **diferencijabilna u $\mathbf{x_0}$** ako postoji $a \in \mathbb{R}$ sa svojstvom da je $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h} = 0$.

Lemma 14 *Ako je $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$ i ako postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h} = 0$, onda je taj a **jedinstven.***

Proof. Neka je i $b \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-bh}{h} = 0$. Tada vrijedi (zbog svojstva limesa 6) $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h} - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-bh}{h} \right] = 0$, tj. nakon sredjivanja $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{bh-ah}{h} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} (b-a) = b - a = 0$. Iz posljednje jednakosti slijedi da je $b = a$ što dokazuje da je a jedinstven. ■

Example 6 *Neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, i neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ proizvoljna točka. Tada je f diferencijabilna u točki x_0 i vrijedi $a = 0$. Naime je $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-0h}{h} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{c-c-0}{h} = 0$.*

Theorem 15 *Neka je $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.Tada je f diferencijabilna u tocki* **akko** *je f derivabilna u tocki.*

Proof.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$ diferencijabilna u x_0.To po definiciji znači postojanje $a \in \mathbb{R}$ (jedinstven!) sa svojstvom $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h} = 0$. No tada je $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a \right] = 0$, tj vrijedi: $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a = f'(x_0)$, dakle postoji derivacija f.je f u tocki x_0, tj f je derivabilna u toj tocki.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$ derivabilna u x_0, te neka je $f'(x_0) = \left(\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right) = a \in \mathbb{R}$. Tada je $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a = 0$, tj $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h} = 0$ što dokazuje da je f diff. u x_0.

■

Možemo dakle ubuduće smatrati da je $a = f'(x_0)$.

- Ako je $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in\Omega$, diferencijabilna u x_0, onda se funkcija $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(h)=ah$ (a iz definicije diferencijabilnosti. od f u x_0) naziva *diferencijal od f u $\mathbf{x_0}$* i označava: $g=df(x_0):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.
- Primijetimo da je g linearni funkcional: $g(\lambda x+\mu y)=a(\lambda x+\mu y)=\lambda ax+\mu ay=\lambda g(x)+\mu g(y)$.
- Nadalje vrijedi za $df(x_0):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$:

$$df(x_0)(h)=g(h)=ah=f'(x_0)\cdot h \tag{12}$$

Zbog povijesnih razloga ponekad se piše: $df(x_0)(\mathbf{dx})=f'(x_0)\cdot\mathbf{dx}$.

Opcenito definiranje diferencijabilnosti

Definition 15 *Neka je $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ otvoren, $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$, i $P_0\in\Omega$. Kažemo da je f* diferencijabilna u $\mathbf{P_0}$ *ako postoji linearni operator $A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ takav da je*

$$\lim_{H\longrightarrow 0}\frac{f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)}{\|H\|}=(0,\ldots,0)\equiv 0\in\mathbb{R}^m \tag{13}$$

Nadalje kažemo da je f diferencijabilna funkcija *ako je f diff. u svakoj točki $P\in\Omega$.*

Remark 8 *Zahtjev da je funkcija $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $\Omega^{otv}\subseteq\mathbb{R}^n$ diff u $P_0\in\Omega$ ekvivalentan je zahtjevu postojanja linarnog operatora $A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ sa svojstvom da je $\lim\limits_{H\longrightarrow 0}\frac{\|f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)\|}{\|H\|}=0\ (\in\mathbb{R})$. Naime vrijedi:* $\lim\limits_{H\longrightarrow 0}\frac{f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)}{\|H\|}=0\,(\in\mathbb{R}^m)\iff$ [13] $\left\|\lim\limits_{H\longrightarrow 0}\frac{f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)}{\|H\|}\right\|=0\,(\in\mathbb{R})\iff$ [14] $\lim\limits_{H\longrightarrow 0}\left\|\frac{f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)}{\|H\|}\right\|=0\iff$ [15] $\lim\limits_{H\longrightarrow 0}\left|\frac{1}{\|H\|}\right|\|f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)\|=0\iff\lim\limits_{H\longrightarrow 0}\frac{\|f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)\|}{\|H\|}=0.$

Example 7 *Neka je $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $\Omega^{otv}\subseteq\mathbb{R}^n$* ***konstantno presl.*** *definirano sa: $f(P)=Q_0$, $\forall P\in\Omega$, te neka je $P_0\in\Omega$ proizvoljna. Tada je f diferencijabilna u P_0.Naime doista postoji lin. operator $A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ definiran sa: $A(P)=0\ (\in\mathbb{R}^m)$, $\forall P\in\mathbb{R}^n$, koji udovoljava definiciji diferencijabilnosti u točki P_0 tj: $\lim\limits_{H\longrightarrow 0}\frac{f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)}{\|H\|}=\lim\limits_{H\longrightarrow 0}\frac{Q_0-Q_0-0}{\|H\|}=0\,(\in\mathbb{R}^m)$. Upravo smo dokazali :*

- **Konstante** su diferencijabilne u svakoj točki.

[13] "Napanimo" prethodnu jednakost s normom, te odmah uzmimo da je $\|(0,...,0)\|=0\,(\in\mathbb{R})$

[14] Jer je norma neprekidna funkcija, pa prema (6) limes i neprekidna f-ja komutiraju.

[15] jer je: $\|\lambda\cdot z\|=|\lambda|\cdot\|z\|$ ($\lambda\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{R}^m$)

Example 8 *Neka je* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ***linearni operator*** *, **i*** $P_0 \in \mathbb{R}^n$*proizvoljna. Tada je* f *diferncijabilna u* P_0*, i k tome je* $A = f$ *! Naime vrijedi:* $\lim\limits_{H \longrightarrow 0} \frac{f(P_0+H)-f(P_0)-f(H)}{\|H\|} =$ f *je lin op* $= \lim\limits_{H \longrightarrow 0} \frac{f(P_0)+f(H)-f(P_0)-f(H)}{\|H\|} = 0\,(\in \mathbb{R}^m)$ *. Upravo smo pokazali da :*

- **Linearni operatori** su diferencijabilni u svakoj točki i diferencijal lin.op. je on sam!

Lemma 16 *Neka je* $C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *linearni operator sa svojstvom:* $\lim\limits_{H \longrightarrow 0} \frac{C(H)}{\|H\|} = 0\,(\in \mathbb{R}^m)$ *. Tada je* C *nuloperator, tj* $C(H) = 0\,(\in \mathbb{R}^m)\,,\ \forall H \in \mathbb{R}^n$*!*

Proof. Po pretpostavci je dakle $\lim\limits_{H \longrightarrow 0} \frac{C(H)}{\|H\|} = 0$ $(\in \mathbb{R}^m)$. Trebamo pokazati da je $C(H) = 0$, $(\forall H \in \mathbb{R}^n)$: "Napanimo" ovu jednakost s normom, pa kao u izvodu (8) imamo da je $\lim\limits_{H \longrightarrow 0} \frac{\|C(H)\|}{\|H\|} = 0\ (\in \mathbb{R})$.

- Tvrdnja je ispunjena za $\underline{H = 0}$, jer je C lin.op. tj vrijedi $C(0) = 0$.

- Pretpostavimo zato da je $\underline{H \neq 0}$.H je dakle neki vektor iz $\mathbb{R}^n$. Promotrimo (jednodimenzionalni) **potprostor od** $\mathbb{R}^n$ **razapet vektorom** H : svaki element tog potprostora moze se zapisati kao λH, $(\lambda \in \mathbb{R})$. Ako dakle postoji gornji limes za bilo koji $H \in \mathbb{R}^n$ (i ako je jednak 0), to taj limes postoji i za odabrani element "H"$\equiv$ $\lambda H \in \mathbb{R}^n$. No λH je ujedno element i podskupa od $\mathbb{R}^n$ tj pomenutog potprostora (razapetog odabranim fiksnim H), pa se nalazimo u okolnostima slicnima 7 te vrijedi da **limes restrikcije f-je** C **na potprostor** takodjer postoji i jednak je 0 (kao i limes f-je C), tj vrijedi: $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{\|C(\lambda H)\|}{\|\lambda H\|} = 0$[16]. Dalje vrijedi, posto je C lin op: $0 = \lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{\|C(\lambda H)\|}{\|\lambda H\|} = \lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{\|\lambda C(H)\|}{\|\lambda H\|} = \lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{|\lambda|\|C(H)\|}{|\lambda|\|H\|} = \lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{\|C(H)\|}{\|H\|} = \frac{\|C(H)\|}{\|H\|}$. Dobili smo dakle jednakost $\frac{\|C(H)\|}{\|H\|} = 0 \implies \|C(H)\| = 0 \implies C(H) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$, za $0 \neq H \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan.

Prije smo pokazali da vrijedi i za $H = 0$, pa konacno dakle tvrdnja vrijedi $\forall H \in \mathbb{R}^n$, cime smo pokazali da je C **nuloperator.** ■

Lemma 17 *Neka je* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 \in \Omega$. *Ako postoji lin op* $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *takav da je* $\lim\limits_{H \longrightarrow 0} \frac{f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)}{\|H\|} = (0, \ldots, 0)$ *, onda je on **jedinstven.***

Proof. Pp. da postoji lin op B koji udovoljava istom svojstvu tj: $\lim\limits_{H \longrightarrow 0} \frac{f(P_0+H)-f(P_0)-B(H)}{\|H\|} = (0, \ldots, 0)$.

No onda (oduzimajuci te dvije jednakosti) je $\lim\limits_{H \longrightarrow 0} \left[\frac{f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)}{\|H\|} - \frac{f(P_0+H)-f(P_0)-B(H)}{\|H\|} \right] = (0, \ldots, 0) \implies \lim\limits_{H \longrightarrow 0} \frac{B(H)-A(H)}{\|H\|} = 0$. Pošto su A i B lin operatori [17] slijedi

[16] Restrikcija fje C na potprostor razapet vektorom H je (uz fiksni H), funkcija jedne varijable - λ! Posljedica je da u limesu imamo $\lambda H \longrightarrow 0 \implies \lambda \longrightarrow 0$

[17] $(A, B) \in Hom\,(U, V) \implies (A + B)$ je takodjer lin op, i vrijedi: $(A + B)(H) \overset{def}{=} A(H) + B(H)$

$\lim\limits_{H\longrightarrow 0}\frac{(B-A)(H)}{\|H\|}=0$. Kako je i $(A-B):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ lin op, to mozemo primijeniti Lemu16 $\Longrightarrow$ $(B-A)(H)=0\overset{def.lin.op}{\Longrightarrow}B(H)-A(H)=0\Longrightarrow B(H)=A(H)$ tj $B=A$. ■

- Ako je $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $\Omega^{\text{otv}}\subseteq\mathbb{R}^n$ diferencijabilna u $P_0\in\Omega$, onda se lin op $A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ iz definicije diferencijabilnosti naziva *diferencijal funkcije f u P_0*, i oznacava : $A\equiv df(P_0):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$.

Remark 9 *$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $\Omega^{otv}\subseteq\mathbb{R}^n$ je diferencijabilna u $P_0\in\Omega$ **akko** postoje: lin op $A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ i funkcija $r:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$, sa svojstvom da je*

$$f(P)-f(P_0)=A(P-P_0)+r(P-P_0)\ \ \&\lim_{P\longrightarrow P_0}\frac{r(P-P_0)}{\|P-P_0\|}=0 \tag{14}$$

Primijetimo jos da je $\underline{r(0)=0}$.[18]

Slucaj $\boxed{m=1,n>1}$

Promatramo dakle funkciju $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, $\Omega^{\text{otv}}\subseteq\mathbb{R}^n$ i $P_0\in\Omega$. Neka je $\{e_{1,\ldots,}e_n\}$ kanonska baza od $\mathbb{R}^n$, tj $e_i=(0,\ldots,\underset{i\text{-to mj.}}{1},\ldots,0)$; $(i=1,\ldots,n)$. *Parcijalna derivacija f-je f po varijabli x_i u P_0* definira se ovako:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\overset{def}{=}\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(P_0+he_i)-f(P_0)}{h}\equiv D_if(P_0)$$

$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f((x_0,y_0)+h(1,0))-f(x_0,y_0)}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f((x_0,y_0)+(h,0))-f(x_0,y_0)}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ (15)

Pretpostavimo da je f diferencijabilna u P_0. To je (prema (9)): $f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)=r(H)$, gdje je $A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ lin funkcional, $(m=1)$, i vrijedi: $\lim\limits_{H\longrightarrow 0}\frac{r(H)}{\|H\|}=0$ $(r:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R})$

Oznacimo $A\equiv df(P_0)\equiv Df(P_0)$.

Kako je dakle $df(P_0):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ lin funkcional, zatim $\mathbb{R}^n\ni H=(h_1,\ldots,h_n)$,te $H=\sum_{i=1}^n h_ie_i$[19] to vrijedi sljedece: $df(P_0)(H)=df(P_0)\left(\sum_{i=1}^n h_ie_i\right)=$ jer je $df(P_0)$ lin funkcional [20]$=\sum_{i=1}^n h_i\underbrace{[df(P_0)(e_i)]}_{\in\mathbb{R}}$.

Oznacimo li $[df(P_0)(e_i)]=a_i\in\mathbb{R}$, $\forall i=1,\ldots n$, imamo:

$$\mathbb{R}\ni df(P_0)(H)=\sum_{i=1}^n h_ia_i\in\mathbb{R} \tag{16}$$

[18] $P=P_0+H$

[19] Pokazimo to na primjeru $n=2$: Tada je $H=(h_1,h_2)$, $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, pa imamo: $\sum_{i=1}^2 h_ie_i=h_1e_1+h_2e_2=(h_1,0)+(0,h_2)=(h_1,h_2)=H$

[20] Iskoristeno svojstvo lin operatora (uz $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $a_i\in\mathbb{R}^n$): $f\left(\sum_{i=1}^n\alpha_ia_i\right)=\sum_{i=1}^n\alpha_if(a_i)$

Neka je H posebnog oblika: $H = he_j = (0, \ldots, \underset{\text{j-ta koord.}}{h}, \ldots, 0)$[21]. Tada prema (9) vrijedi: $f(P_0 + he_j) - f(P_0) = df(P_0)(he_j) + r(he_j) =$ prema (16)$= ha_j + r(he_j)$. Podijelimo li dobijenu jednakost s $\|H\|$ i potom "napanemo" s $\lim_{H \longrightarrow 0}$ dobijemo[22]: $\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(P_0+he_j)-f(P_0)}{h} = a_j + \underbrace{\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{r(he_j)}{h}}_{=0}$[23]$= a_j =$ prema (15)$=$ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0)$. Dakle dobili smo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) = a_j = df(P_0)(e_j) \tag{17}$$

Konacno dakle imamo: $df(P_0)(H) =$prema (16)$= \sum_{i=1}^n a_i h_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) h_i$

[Odavde odmah slijedi i za $n = 1$ i $P_0 \equiv x_0$: $df(x_0)(h) = f'(x_0)h$ (usporedi (12))].

Conclusion 1 *Ako je $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$, diferencijabilna u tocki $P_0 \in \Omega$, onda* ***postoje***[24] *sve parcijalne derivacije u tocki P_0 i vrijedi:*

$$df(P_0)(H) = \sum_{i=1}^n D_i f(P_0) h_i \tag{18}$$

No obrat ne vrijedi kako to pokazuje sljedeci primjer:

Example 9 □

Neka je $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \Omega^{\text{otv}} \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 \in \Omega$ i f diferencijabilna u P_0.To znaci prema prije pokazanom da je : $df(P_0)(H) = \sum_{i=1}^n D_i f(P_0) h_i$ .Uvedemo li sljedeci vektor:

$$gradf(P_0) = (D_1 f(P_0), \ldots, D_n f(P_0)) \in \mathbb{R}^n \tag{19}$$

to ce uz $H = (h_1, \ldots, h_n)$ vrijediti:

$$df(P_0)(H) = (gradf(P_0) \mid H)^{25} \tag{20}$$

---

[21] Tj. dajmo prirastaj samo jednoj (j-toj) varijabli ($j \in \{1, \ldots, n\}$)

[22] $\|H\| = \|he_j\| = h$; i $H \longrightarrow 0 \iff h \longrightarrow 0$

[23] Zbog pretpostavke da je f diferencijabilna i napomene **??** je onda $\lim_{H \longrightarrow 0} \frac{r(he_j)}{\|H\|} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{r(he_j)}{h} = 0$

[24] Jer postoji $\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(P_0+he_j)-f(P_0)}{h} = a_j$.

[25] $(a \mid b) \equiv$ skalarni produkt dvaju vektora a, $b \in \mathbb{R}^n$; $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, definira se ovako: $(a \mid b) = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$.

Slucaj $\boxed{m>1, n>1}$

Promatrajmo funkciju $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega^{\text{otv}} \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 \in \Omega$. Tada je $f = (f_1,\ldots,f_m):\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, gdje je $\forall i=1,\ldots,m$, $f_i:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ i-ta koordinatna funkcija (7) .

Neka je f diferencijabilna u P_0. To prema 9 znaci da je: $f(P_0+H)-f(P_0) = df(P_0)(H)+r(H)$ pri cemu je $\lim_{H\longrightarrow 0}\frac{r(H)}{\|H\|}=0$. Raspisemo li ovaj izraz po koordinatama $1,\ldots,m$ [26] dobijamo:

$$f_i(P_0+H)-f_i(P_0) = (df(P_0)(H))_i + r_i(H) \tag{21}$$

pri cemu zbog gornjeg limesa i Tm13 mora biti i $\lim_{H\longrightarrow 0}\frac{r_i(H)}{\|H\|}=0$, $(\forall i=1,\ldots,m)$.[27]

U prethodnom slucaju $(m=1)$ pokazali smo da vrijedi relacija (16). No u slucaju $(m>1)$ je $df(P_0)(H)\in\mathbb{R}^m$, tj vektor $\in\mathbb{R}^m$ kojeg mozemo predstaviti matricom stupcem koja ima m-redaka, a mozemo ga dobiti kao umnozak matrice tipa (m,n) s matricom tipa $(n,1)$, dakle nas vektor je matrica tipa $(m,1)$ .tj: $\boxed{df(P_0)(H)=[a_{ij}]\times H}$ Odaberemo li jedno mjesto u toj matrici - neka to bude i-ti redak (i naravno 1. i jedini stupac) tada ce na tom mjestu biti $(df(P_0)(H))_i\in\mathbb{R}$ tj i-ta komponenta vektora $df(P_0)(H)\in\mathbb{R}^m$.Uz tako odabrani **fiksni** i , mozemo $(df(P_0)(H))_i\in\mathbb{R}$ dobiti pomocu relacije (16) uz pravilnu oznaku koeficijenata[28] tj: $(df(P_0)(H))_{i1} = \sum_{j=1}^n a_{ij}h_{j1} =$ promotrimo li i-tu komponentu vektora $df(P_0)(H)$ kao i-tu koord. f-ju od $df(P_0) = (df(P_0))_i(H)$.

Posto su prema relaciji (21) i Napomeni 9, funkcije f_i $(\forall i=1,\ldots,m)$ diferencijabilne to vrijednost $(df(P_0)(H))_i\in\mathbb{R}$ mora biti upravo vrijednost diferencijala funkcije (f_i u P_0) od H zbog jedinstvenosti diferencijala (lema 17) pa uzevsi u obzir posljednju jednakost imamo:

$(df(P_0)(H))_i = (df(P_0))_i(H) = df_i(P_0)(H) =$ prema relaciji (18)$= \sum_{j=1}^n D_jf_i(P_0)h_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P_0)h_j$.

Iz posljednje dvije jednakosti zakljucujemo da je : $\overline{a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P_0) = D_jf_i(P_0)}$.
Kako smo gore imali matricnu jednakost $df(P_0)(H) = \overline{[a_{ij}]\times H}$ to uz uvazavanje potcrtanog znaci da **lin op** $df(P_0)$ **mozemo predstaviti matricom**

$$[D_jf_i(P_0)] =: \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{bmatrix} = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(P_0) \tag{22}$$

---

[26] Oznacimo li $P_0+H\equiv P$, raspisujemo: $(f_1(P),\ldots,f_m(P)) - (f_1(P_0),\ldots,f_m(P_0)) = (df(P_0)(H))_1,\ldots,(df(P_0)(H))_m) + (r_1(H),\ldots,r_m(H))\boxed{\Longleftrightarrow}$
$(f_1(P)-f_1(P_0),\ldots,f_m(P)-f_m(P_0)) = ((df(P_0)(H))_1 + r_1(H),\ldots,(df(P_0)(H))_m + r_m(H))\boxed{\Longleftrightarrow}$
$[f_1(P)-f_1(P_0) = (df(P_0)(H))_1 + r_1(H)]$ & ... & $[f_m(P)-f_m(P_0) = (df(P_0)(H))_m + r_m(H)]$;

[27] Odavde zakljucujemo da su funkcije $f_i:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ diferencijabilne u P_0

[28] U navedenom slucaju mnozenja matrica $(m,n)\times(n,1)=(m,1)$, i-to mjesto u rezultantnoj matrici tj γ_{i1} dobijamo kao:
$\gamma_{i1} = \sum_{j=1}^n a_{ij}h_{j1}$

- *Jakobijeva matrica* fje f u tocki (P_0)

U slucaju $m = n$ determinantu te matrice tj det $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(P_0)$ nazivamo *Jacobijan* fje f u tocki P_0.

Slucaj $\boxed{n = 1, m > 1}$

Radi se dakle o vektorskoj funkciji jedne realne varijable, tj o funkciji: $f = (f_1, \ldots, f_m) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.
Diferencijal u tocki $x_0 \in \Omega$ je linearan operator $df(x_0) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, pa prema gornjemu Slucaju vrijedi za $h \in \mathbb{R}$:
$df(x_0)(h) = (df_1(x_0)(h), \ldots, df_m(x_0)(h))$.
Kako su f_i realne funkcije realne varijable to prema Slucaju ($m = 1$, $n = 1$) je $df_i(x_0)(h) = f_i^{'}(x_0) \cdot h$, $i = 1, \ldots, m$.
Stoga je
$df(x_0)(h) = (f_1'(x_0)(h), \ldots, f_m'(x_0)(h)) = (f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)) \cdot h$.
Vektor $f'(x_0) := (f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)) \in \mathbb{R}^m$, cije su komponente derivacije koordinatnih funkcija, zove se *derivacija vektorske* funkcije f *u tocki* x_0.
Dakle i za vektorske funkcije realne varijable, diferencijabilnost je ekvivalentna postojanju derivacije i vrijedi:

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h \tag{23}$$

Neka svojstva diferencijala i diferencijabilnih f-ja

Criterion 1 *Neka je* $f : \Omega \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ *diferencijabilna funkcija u tcki* $P_0 \in \Omega$. *Neka je* $p_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *projekcija na i-tu koordinatu (vidi Nap.3)* , $i = 1, \ldots, n$. *Za svaki* $i = 1, \ldots, n$ *je* $p_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *linearni funkcional*[29], *pa je prema Primjeru8* p_i ***diferencijabilna f-ja,*** *i vrijedi:*

$$(dp_i)(P_0) = p_i, \forall P_0 \in \mathbb{R}^n \tag{24}$$

Vrijedi:
$(df(P_0))(H)$ =prema(18)= $\sum_{i=1}^n D_i f(P_0) h_i = \sum_{i=1}^n D_i f(P_0) p_i(H) =$
$= \sum_{i=1}^n \underbrace{D_i f(P_0)}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{((dp_i)(P_0))}_{lin.op} \underbrace{(H)}_{\in\mathbb{R}^n} =^{30} (\sum_{i=1}^n D_i f(P_0) dp_i(P_0))(H)$.

Mozemo dakle zapisati:

$$(df(P_0)) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(P_0) dp_i(P_0) \tag{25}$$

[29] To se lako pokaze. Uz def: $p_i(H) = p_i(h_1, \ldots h_n) = h_i$, $(H \in \mathbb{R}^n)$, imamo za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{R}^n$: $p_i(\alpha a + \beta b) = p_i(\alpha a_1 + \beta b_1, \ldots, \alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a_i + \beta b_i = \alpha p_i(a) + \beta p_i(b)$, tj p_i je lin.funkcional.

[30] Zbog definicija zbroja i produkta lin op: $(\lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n; f, g\ lin.op.)$, 1)$\lambda f(a) = (\lambda f)(a)$; 2)$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$.
Ili oba svojstva odjednom $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n)$: $\alpha f(a) + \beta g(a) = (\alpha f)(a) + (\beta g)(a) = (\alpha f + \beta g)(a)$; Odnosno opcenito: $\sum_i \alpha_i f_i(a) = \sum_i (\alpha_i f_i)(a) = \left(\sum_i \alpha_i f_i\right)(a)$

Tradicionalno je uvedena oznaka: $dp_i(P_0) = dx_i$, pa imamo i sljedeci zapis:

$$(df(P_0)) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(P_0)\, dx_i \tag{26}$$

.

Criterion 2 *Neka su $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, diferencijabilne funkcije u tocki $P_0 \in \Omega$. Tada je i $f+g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferencijabilno u P_0 i vrijedi:*

$$d(f+g)(P_0) = df(P_0) + dg(P_0) \tag{27}$$

Proof. Zbog diferencijabilnosti od f i g, prema Nap.9 slijedi da postoje lin.op. $A, B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$[31] , i funkcije $r_1, r_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ takve da vrijedi:
$f(P_0+H) - f(P_0) = A(H) + r_1(H)$, pri cemu je $\lim_{H \longrightarrow 0(\in \mathbb{R}^n)} \frac{r_1(H)}{\|H\|} = 0$, i
$g(P_0+H) - g(P_0) = B(H) + r_2(H)$, pri cemu je $\lim_{H \longrightarrow (0 \in \mathbb{R}^n)} \frac{r_2(H)}{\|H\|} = 0$.

Trebamo pokazati da je
$(f+g)(P_0+H) - (f+g)(P_0) = lin.op.(H) + funkcija(H)$, pri cemu treba biti $\lim_{H \longrightarrow 0} \frac{funkcija(H)}{\|H\|} = 0$,a $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ domene i kodomene lin.op i funkcije. Primijenjujuci $(f+g)(x) \stackrel{def}{=} f(x) + g(x)$, imamo:
$(f+g)(P_0+H) - (f+g)(P_0) = \underbrace{f(P_0+H)}_{\in \mathbb{R}^m} + \underbrace{g(P_0+H)}_{\in \mathbb{R}^m} - \underbrace{f(P_0)}_{\in \mathbb{R}^m} - \underbrace{g(P_0)}_{\in \mathbb{R}^m} =$ jer je $\mathbb{R}^m$ vektorski prostor, a time i abelova grupa, pa vrijede komutativnost i asocijativnost $= [f(P_0+H) - f(P_0)] + [g(P_0+H) - g(P_0)] =$ zbog diferencijabilnosti od f i g $= A(H) + r_1(H) + B(H) + r_2(H) =$ opet su to elementi iz abelove grupe $\mathbb{R}^m$[32] $= [A(H) + B(H)] + [r_1(H) + r_2(H)] = \underbrace{(A+B)}_{lin.op.}(H) + \underbrace{(r_1+r_2)}_{funkcija}(H)$[33].

No trebamo jos provjeriti zadovoljava li funkcija $(r_1 + r_2)$ uvjet $\lim_{H \longrightarrow 0} \frac{(r_1+r_2)(H)}{\|H\|} = 0$?. Imamo:
$\lim_{H \longrightarrow 0} \frac{(r_1+r_2)(H)}{\|H\|} = \lim_{H \longrightarrow 0} \frac{r_1(H)+r_2(H)}{\|H\|} =$ prema svojstvu limesa Nap.6$=$ $\lim_{H \longrightarrow 0} \frac{r_1(H)}{\|H\|} + \lim_{H \longrightarrow 0} \frac{r_2(H)}{\|H\|} =$ zbog diferencijabilnosti od f i $g = 0 + 0 = 0$, dakle ispunjen je trazeni zahtjev.

Iz pokazanog, prema Nap.9 slijedi da je doista $f+g$ diferenicijabilna u P_0, a zbog jedinstvenosti diferencijala (Lema17), prema istoj napomeni, primjenjenoj na posljednju jednakost, mora biti i $d(f+g)(P_0) = A + B = df(P_0) + dg(P_0)$, cime smo u potpunosti dokazali tvrdnju. ∎

[31] Pri cemu je $A = df(P_0)$, $B = dg(P_0)$.

[32] Jer su prema Nap. 9: $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i $r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

[33] Kako je prostor linearnih operatora $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ je lin.op.}\}$ abelova grupa u odnosu da zbrajanje lin.operatora, imamo da je i $A+B$ lin.operator, jer su A i B linearni operatori

Criterion 3 *Neka je* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ *diferencijabilna u* $P_0 \in \Omega$ *te* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Tada je i* $\lambda f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ [34] *diferencijabilna u* P_0 *i vrijedi:*

$$d(\lambda f)(P_0) = \lambda df(P_0) \tag{28}$$

Proof. Dokazujemo analogno kao u prethodnom slucaju: Kako je f diferencijabilna to prema Nap.9 postoji lin.op.$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, i funkcija $r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tako da vrijedi:
$f(P_0 + P) - f(P_0) = A(H) + r(H)$, pri cemu je $\lim_{H \longrightarrow 0} \frac{r(H)}{\|H\|} = 0$.

Trebamo pokazati da je onda i λf diferencijabilna tj, prema istoj Napomeni, da vrijedi:
$(\lambda f)(P_0 + P) - (\lambda f)(P_0) = lin.op(H) + funkcija(H)$, pri cemu treba biti $\lim_{H \longrightarrow 0} \frac{funkcija(H)}{\|H\|} = 0$,a $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ domene i kodomene lin.op i funkcije. Primjenjujuci $(\lambda f)(x) \overset{def}{=} \lambda f(x)$ imamo:
$(\lambda f)(P_0 + P) - (\lambda f)(P_0) = \lambda \underbrace{f(P_0 + P)}_{\in \mathbb{R}^m} - \lambda \underbrace{f(P_0)}_{\in \mathbb{R}^m} =$ zbog distributivnosti vanjskog mnozenja prema zbrajanju vektora u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^m = \lambda(f(P_0 + P) - f(P_0)) =$ $\lambda(A(H) + r(H))$ =ponovo zbog distributivnosti= $\lambda A(H) + \lambda r(H) = \underbrace{(\lambda A)}_{lin.op}(H) +$ $(\lambda r)(H)$[35]
Pokazimo jos da je i gornji limes jednak nuli: $\lim_{H \longrightarrow 0} \frac{(\lambda r)(H)}{\|H\|} = \lim_{H \longrightarrow 0} \frac{\lambda r(H)}{\|H\|} =$ svojstvo limesa (Nap.6)= $\lambda \lim_{H \longrightarrow 0} \frac{r(H)}{\|H\|} = \lambda \cdot 0 = 0$[36].

Iz pokazanog doista prema Nap.9 slijedi da je λf diferencijabilna u P_0, a zbog jedinstvenosti linearnog operatora (Lema17), prema istoj napomeni, primjenjenoj na posljednju jednakost, mora biti i $d(\lambda f)(P_0) = \lambda A = \lambda df(P_0)$, cime smo u potpunosti dokazali tvrdnju. ■

Summary 1 *Prethodna dva svojstva pokazuju da je skup (oznacimo ga* X*) svih diferecijabilnih funkcija* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ *u* $P_0 \in \Omega$, ***vektorski prostor nad poljem*** $\mathbb{R}$[37], *a* diferencijal *je funkcija* $d : X \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *koja svakoj funkciji iz* X *tj svakoj funkciji koja je diferencijabilna u* P_0*, pridruzi linearni operator* ***diferencijal funkcije*** f ***u*** P_0 *tj*
$d(f) = \underbrace{(df)(P_0)}_{lin.op}$.

Pokazimo da je i d linearni operator[38]: Neka su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $f, g \in X$ (vektorski prostor funkcija diferencijabilnih u P_0). Imamo:

---

[34] Gdje je λf definirano sa $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

[35] Kako je A linearni operator, a $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, to je prema definiciji vanjskog mnozenja $(h : \mathbb{R} \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ i $\lambda f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, tj λf je linearni operator.

[36] Podsjetimo jos jednom da istu oznaku nula (0) koristimo i kad se radi o $0 \in \mathbb{R}$, i kao skraceni zapis nul-vektora $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$

[37] Vidi Linearna algebra 8.6.Tm4. (i Propozicije 1-3)

[38] Neka su U, V vektorski prostori. $f : U \longrightarrow V$ je lin.op. **akko** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall a, b \in U$ vrijedi: $f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$.

$d(\lambda f+\mu g)=(d(\lambda f+\mu g))(P_0)=$ zbog Svojstva2$=d(\lambda f)(P_0)+d(\mu g)(P_0)=$ zbog Svojstva3$=\lambda(df)(P_0)+\mu(dg)(P_0)=\lambda d(f)+\mu d(g)$, dakle d je doista linearni operator.

Criterion 4 *Neka su dane f-je* $f,g:\Omega\longrightarrow\boxed{\mathbb{R}}$, $\Omega^{otv}\subseteq\mathbb{R}^n$ *, i neka su diferencijabilne u* $P_0\in\Omega$*. Tada je i* $(f\cdot g):\Omega\longrightarrow\boxed{\mathbb{R}}$ [39] *diferencijabilna u* P_0 *i vrijedi*

$$d(f\cdot g)(P_0)=g(P_0)\cdot df(P_0)+f(P_0)\cdot dg(P_0) \tag{29}$$

Proof. Zbog diferencijabilnosti od f i g, prema Nap.9 slijedi da postoje lin.op. $A,B:\mathbb{R}^n\longrightarrow\boxed{\mathbb{R}}$, i funkcije $r_1,r_2:\mathbb{R}^n\longrightarrow\boxed{\mathbb{R}}$ takve da vrijedi:
$f(P_0+H)-f(P_0)=A(H)+r_1(H)$, pri cemu je $\lim_{H\longrightarrow 0(\in\mathbb{R}^n)}\frac{r_1(H)}{\|H\|}=0(\in\mathbb{R})$, i
$g(P_0+H)-g(P_0)=B(H)+r_2(H)$, pri cemu je $\lim_{H\longrightarrow(0\in\mathbb{R}^n)}\frac{r_2(H)}{\|H\|}=0(\in\mathbb{R})$, te da je $A=df(P_0)$, i $B=dg(P_0)$.

Trebamo pokazati da je $f\cdot g$ diferencijabilna, tj prema Nap.9 da je $(f\cdot g)(P_0+H)-(f\cdot g)(P_0+H)=lin.op(H)+"ostatak"(=r(H))$, pri cemu "ostatak" u limesu tezi nuli. Imamo:
$(f\cdot g)(P_0+H)-(f\cdot g)(P_0+H)=$
$=f(P_0+H)\cdot g(P_0+H)-f(P_0)\cdot g(P_0)=\ .\ .\ .$
[zelimo od lijeve strane dobiti lin.op. plus ostatak, pa bi bilo zgodno kad bismo ju nekako preuredili, tako da dobijemo razlike $f(P_0+H)-f(P_0)$ i $g(P_0+H)-g(P_0)$ koje bi onda zamijenili s desnim stranama gornjih jednakosti, no ovaj put to nije jednostavno, pa smo prisiljeni u tu svrhu posljednjoj crti dodati i oduzeti iste sumande: $g(P_0)f(P_0)$; $g(P_0)f(P_0+H)$; $f(P_0)g(P_0+H)$, no treba paziti da nam faktor koji ce mnoziti te razlike bude konstatan realan broj, tj ili $f(P_0)$ ili $g(P_0)$, jer cemo tada moci iskoristiti da je umnozak konstante i lin.operatora opet linearni operator sto i zelimo dobiti, (u protivnom ne bismo dobili cist lin.operator kao sumand na kraju). (Preporucujem pogledati najprije kraj izvoda :))]:
$.\ .\ .=f(P_0+H)\cdot g(P_0+H)-\underline{f(P_0)\cdot g(P_0)}+$
$+\underline{g(P_0)f(P_0+H)}-g(P_0)f(P_0\overline{+H)}+$
$+\underbrace{\overline{f(P_0)g(P_0+H)}}-f(P_0)g(P_0+H)+$
$+g(P_0)f(P_0)-\underbrace{g(P_0)f(P_0)}=$ grupiranjem odgovarajuce (ne)potcrtanih i izlucivanjem zajednickog faktora $=$
$=g(P_0)(f(P_0+H)-f(P_0))+f(P_0)(g(P_0+H)-g(P_0))+$
$+(f(P_0+H)-f(P_0))\cdot(g(P_0+H)-g(P_0))=$ zamijenimo$=$
$=g(P_0)(A(H)+r_1(H))+f(P_0)(B(H)+r_2(H))+$
$+(A(H)+r_1(H))\cdot(B(H)+r_2(H))=$izmnozimo kako bi dobili lin.operatore kao posebne sumande$=$
$=\underbrace{g(P_0)A(H)+f(P_0)B(H)}_{lin.op.(funkcional)(H)}+$

[39] Produkt dviju funkcija f i g definiran je sa $(f\cdot g)(P)=f(P)\cdot g(P)$

$$+\underbrace{f(P_0)\, r_2(H) + g(P_0)\, r_1(H) + (A(H) + r_1(H)) \cdot (B(H) + r_2(H))}_{\text{"}ostatak\text{"}(r(H))}{}^{40}.$$

Preostaje nam jos ispitati je li $\lim_{H \longrightarrow 0} \frac{r(H)}{\|H\|} = 0$.
Prema svojstvu limesa (Nap.6) imamo:
$\lim_{H \longrightarrow 0} \frac{r(H)}{\|H\|} = \lim_{H \longrightarrow 0} \frac{f(P_0) r_2(H)}{\|H\|} + \lim_{H \longrightarrow 0} \frac{g(P_0) r_1(H)}{\|H\|} +$
$+ \lim_{H \longrightarrow 0} \frac{(A(H)+r_1(H)) \cdot (B(H)+r_2(H))}{\|H\|} = \underbrace{f(P_0)}_{\in \mathbb{R}} \lim_{H \longrightarrow 0} \frac{r_2(H)}{\|H\|} + \underbrace{g(P_0)}_{\in \mathbb{R}} \lim_{H \longrightarrow 0} \frac{r_2(H)}{\|H\|} +$
$+ \lim_{H \longrightarrow 0} \frac{(A(H)+r_1(H)) \cdot (B(H)+r_2(H))}{\|H\|} = 0 + 0 + \underline{\lim_{H \longrightarrow 0} \frac{(A(H)+r_1(H)) \cdot (B(H)+r_2(H))}{\|H\|}}$ [41].
Za ovaj limes ne mozemo tek tako reci da je jednak nuli, no moci cemo ako pokazemo da vrijedi: $0 \leq \lim_{H \longrightarrow 0} \frac{(A(H)+r_1(H)) \cdot (B(H)+r_2(H))}{\|H\|} \leq 0$[42].U tu svrhu cemo izraz pod limesom pokusati "ocijeniti" tj omedjiti odozgor s izrazom za koji znamo da mu je limes jednak nuli. Kako je norma uvijek nenegativan realan broj, to cemo izraz pod limesom staviti pod normu pa imamo:
$0 \leq \left\| \frac{(A(H)+r_1(H)) \cdot (B(H)+r_2(H))}{\|H\|} \right\| =$ domena od A i r je $\mathbb{R}$, tj.cijeli izraz pod normom je realan broj, pa je norma (u dimenziji 1) jednaka apsolutnoj vrijednosti $=$
$\left| \frac{(A(H)+r_1(H)) \cdot (B(H)+r_2(H))}{\|H\|} \right| = \frac{|A(H)+r_1(H)| \cdot |B(H)+r_2(H)|}{|\|H\||} \leq^{43} \frac{(|A(H)|+|r_1(H)|) \cdot (|B(H)|+|r_2(H)|)}{\|H\|}$.
Imamo dakle:
(i) $0 \leq \left\| \frac{(A(H)+r_1(H)) \cdot (B(H)+r_2(H))}{\|H\|} \right\| \leq \frac{(|A(H)|+|r_1(H)|) \cdot (|B(H)|+|r_2(H)|)}{\|H\|}$.
Kako nas interesira limes izraza u sredini, onda "napanimo" ovu nejednakost s $\lim_{H \longrightarrow 0}$. Dobijemo (uz koju preskocenu crtu):
(ii) $0 \leq \lim_{H \longrightarrow 0} \left\| \frac{(A(H)+r_1(H)) \cdot (B(H)+r_2(H))}{\|H\|} \right\| \leq$
$\leq \lim_{H \longrightarrow 0} \left[\left(\frac{|A(H)|}{\|H\|} + \frac{|r_1(H)|}{\|H\|} \right) \cdot \left(\frac{|B(H)|}{\|H\|} + \frac{|r_2(H)|}{\|H\|} \right) \cdot \|H\| \right]$.
Sada ocito ne mozemo odmah iskoristiti svojstva limesa (vidi Nap.6) jer ne znamo da li postoje limesi svih sumanada u zagradama (zapravo znamo za druge clanove u zagradama, ali ne znamo za prve). U tu svrhu, kako smo rekli "ocijenimo" , tj omedjimo odozgor nas izraz pod limesom. Tomu ce nam pomoci sljedeca Lema:

Lemma 18 *Neka je $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linearni operator. Tada postoji $M > 0$ t. da je*

$$\|A(H)\| \leq M \|H\|, \forall H \in \mathbb{R}^n \tag{30}$$

(tj svaki linearni operator je omedjen)

[40] Imamo: $g(P_0), f(P_0) \in \mathbb{R}$ - skalar; $A, B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$) pa je umnozak skalara i lin.op. ponovo lin.op., odnosno zbroj dva operatora je operator: (Npr. $\underbrace{g(P_0)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{A}_{lin.op.} (H) = \underbrace{(g(P_0) \cdot A)}_{lin.op.}(H)$; te $(g(P_0) A)(H) + (f(P_0) B)(H) = \underbrace{(g(P_0) A + f(P_0) B)}_{lin.op}(H)$)
[41] Ostatak dokaza se sav sastoji od pokazivanja da je potcrtani limes jednak nuli!
[42] $a \leq b \leq c$ & $a = c \implies a = b = c$.
[43] a)$|\|H\|| =$ (jerje$0 \leq \|H\| \in \mathbb{R}) = \|H\|$ b)$|a+b| \leq |a| + |b|$

Proof. *Najprije neka je* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *standardna kanonska baza u* $\mathbb{R}^n$[44] *pa imamo za proizvoljni* $H \in \mathbb{R}^n$*:* $A(H) = A(h_1, \ldots, h_n) = A\left(\sum_{i=1}^n h_i e_i\right) =$[45] *(jer su* h_i *konstante* $\in \mathbb{R}$*)=* $\sum_{i=1}^n h_i A(e_i)$*. Pogledajmo sada ono sto se tvrdi u Lemi za* $A(H)$*:*

$\|A(H)\| = \|\sum_{i=1}^n h_i A(e_i)\| \overset{\langle M_4 \rangle}{\leq} \sum_{i=1}^n \|h_i A(e_i)\|$ *= prema svojstvu norme=* $\sum_{i=1}^n |h_i| \, \|A(e_i)\| \leq$[46] $\sum_{i=1}^n \|H\| \, \|A(e_i)\|$ *=zbog distributivnosti mnozenja prema zbrajanju u* $\mathbb{R}^n$ *je* $= \|H\| \cdot \sum_{i=1}^n \|A(e_i)\|$.

Pogledamo li sad u nejednakost iz Leme vidimo da trazeni $M \in \mathbb{R}$ *treba biti jednak* $\sum_{i=1}^n \|A(e_i)\|$ *ili veci od tog zbroja, no zbog cisto prakticnih razloga kod trazenja* M*-a za svaki* H*, mozemo za* M *uzeti najveci od svih* $\|A(e_i)\|$*-ova pomnozen brojem njihovih komada (n), tj.* $\underline{M = n \cdot \max\{\|A(e_i)\| \mid i = 1, \ldots, n\}}$*, i svakako je takav* $M > 0$ *(po definiciji norme).*
Kako dakle vrijedi $\sum_{i=1}^n \|A(e_i)\| \leq n \cdot \max\{\|A(e_i)\| \mid i = 1, \ldots, n\} = M$*, to imamo konacno:* $\|A(H)\| \leq M \|H\|$*, za svaki* $H \in \mathbb{R}^n$ *(jer smo uzeli proizvoljan).* ■

Lemma 19 *Svaki linearni operator* $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *ima Lipshitzovo svojstvo (Def.13)* [47]
Proof. *Prema (6) trebamo dakle, za proizvoljni lin operator* A*, pokazati da* $\forall H, H' \in \mathbb{R}^n$ *postoji realan broj* (λ) *veci od nule takav da vrijedi:* $d(A(H), A(H')) \leq \lambda \cdot d(H, H')$*. Imamo:*
$d(A(H), A(H')) = \|A(H) - A(H')\|$ *=svojstvo aditivnosti lin op=* $\|A(H - H')\|$.
Kako je $(H - H') \in \mathbb{R}^n$ *(jer je* $\mathbb{R}^n$ *aditivna grupa, pa vrijedi zatvorenost), to mozemo na njega primijeniti Lemu19 pa dakle postoji* $M > 0$ *takav da je* $\|A(H - H')\| \leq M \cdot \|H - H'\| = M \cdot d(H, H')$*.*
Dakle tvrdnja u Lemi je istitnita za svaki linearni operator, a Lipshitzova konstanta je $\lambda = M$ *(gdje je* M *takav da je* $\|A(H)\| \leq M \|H\|$*, iz prethodne Leme).*
■

Corollary 20 *Svaki linearni operator* $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *je neprekidna funkcija.*
Proof. *Kako prema prethodnoj Lemi svaki lin.op. ima Lipshitzovo svojsvo, to prema Tm.5 slijedi da je svaki lin. op. i neprekidna funkcija.* ■

Vratimo se sad na dokaz, tj na nejednakost oznacenu s (i). Promotrimo desnu stranu te jednakosti, imamo nakon malo sredjivanja i mnozenja s $\frac{\|H\|}{\|H\|}$:
$\frac{(|A(H)|+|r_1(H)|)\cdot(|B(H)|+|r_2(H)|)}{\|H\|} = \left(\frac{|A(H)|}{\|H\|} + \frac{|r_1(H)|}{\|H\|}\right) \cdot \left(\frac{|B(H)|}{\|H\|} + \frac{|r_2(H)|}{\|H\|}\right) \cdot \|H\| \leq$
primijenimo Lemu18 na linearne operatore A i B [48] $\leq \left(\frac{M_1 \|H\|}{\|H\|} + \frac{|r_1(H)|}{\|H\|}\right) \cdot$

[44] $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 1)$.
[45] Djelovanje lin. op. na lin kombinaciju (opisano u prethodnim footnotama)
[46] Jer je svaki $\underline{|h_i|} = \sqrt{(h_i)^2} \boxed{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^n (h_i)^2} = \underline{\|H\|}$
[47] Nikako da prokljuvim zasto nam treba ova Lema tj korolar koji ju slijedi, u ovom dokazu!?
[48] Naravno kako je domena obaju operatora skup $\mathbb{R}$ to je npr. za A: $|A(H)| = \|A(H)\|$, odnosno primjenjujuci Lemu, postoje $M_1, M_2 > 0$ takvi da je $|A(H)| \leq M_1 \|H\|$, te $|B(H)| \leq M_2 \|H\|$

$\left(\frac{M_2\|H\|}{\|H\|}+\frac{|r_2(H)|}{\|H\|}\right)\cdot\|H\|=$
$=\left(M_1+\frac{|r_1(H)|}{\|H\|}\right)\cdot\left(M_2+\frac{|r_2(H)|}{\|H\|}\right)\cdot\|H\|.$

Nejednakost (i) sada ovako izgleda:
$0\leq\left\|\frac{(A(H)+r_1(H))\cdot(B(H)+r_2(H))}{\|H\|}\right\|\leq\left(M_1+\frac{|r_1(H)|}{\|H\|}\right)\cdot\left(M_2+\frac{|r_2(H)|}{\|H\|}\right)\cdot\|H\|$, pa "napanemo" li je limesom, ovaj put cemo moci primijeniti svojstva limesa (Nap.6) jer znamo da postoje limesi funkcija u zagradama [49], pa nejednakost (ii) sada izleda ovako:
$0\leq\left\|\lim_{H\longrightarrow0}\frac{(A(H)+r_1(H))\cdot(B(H)+r_2(H))}{\|H\|}\right\|$[50]$\leq$
$\leq\lim_{H\longrightarrow0}\left(M_1+\frac{|r_1(H)|}{\|H\|}\right)\cdot\lim_{H\longrightarrow0}\left(M_2+\frac{|r_2(H)|}{\|H\|}\right)\cdot\lim_{H\longrightarrow0}\|H\|=$
$=\left(\lim_{H\longrightarrow0}M_1+\lim_{H\longrightarrow0}\frac{|r_1(H)|}{\|H\|}\right)\cdot\left(\lim_{H\longrightarrow0}M_2+\lim_{H\longrightarrow0}\frac{|r_2(H)|}{\|H\|}\right)\cdot\lim_{H\longrightarrow0}\|H\|=$
$=(M_1+0)\cdot(M_2+0)\cdot0=0.$

Dakle iz cijele nejednakosti slijedi:
$\left\|\lim_{H\longrightarrow0}\frac{(A(H)+r_1(H))\cdot(B(H)+r_2(H))}{\|H\|}\right\|=0$, no prema definiciji norme to je **akko** je $\lim_{H\longrightarrow0}\frac{(A(H)+r_1(H))\cdot(B(H)+r_2(H))}{\|H\|}=0$ sto smo i trebali jos pokazati.

Pokazali smo dakle da uz pretpostavljenu diferencijabilnost od f i g vrijedi: $(f\cdot g)(P_0+H)-(f\cdot g)(P_0+H)=\underbrace{g(P_0)A(H)+f(P_0)B(H)}_{lin.op.(funkcional)}+r(H)$ pri cemu je $\lim_{H\longrightarrow0}\frac{r(H)}{\|H\|}=0$, sto prema Nap.9 znaci da je funkcija $(f\cdot g)$ diferencijabilna u P_0, i prema istoj Napomeni vrijedi:
$d(f\cdot g)(P_0)=g(P_0)A+f(P_0)B=g(P_0)\cdot df(P_0)+f(P_0)\cdot dg(P_0)$ cime smo tvrdnju u potpunosti dokazali. ■

Criterion 5 *Neka su* $f,g:\Omega\longrightarrow\boxed{\mathbb{R}}$, $\Omega^{otv}\subseteq\mathbb{R}^n$ *diferencijabilne u* $P_0\in\Omega$ *i* $g(P_0)\neq0$. *Tada je* $\frac{f}{g}$ *diferencijabilna u* P_0 *i vrijedi:*

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(P_0)=\frac{df(P_0)\,g(P_0)-f(P_0)\,dg(P_0)}{(g(P_0))^2}\tag{31}$$

Proof. Kako mozemo pisati $\frac{f}{g}=\frac{1}{g}\cdot f$, to je prema prethodnom teoremu dovoljno pokazati da je funkcija $\frac{1}{g}$ diferencijabilna. ■

Theorem 21 *Neka je* $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $\Omega^{otv}\subseteq\mathbb{R}^n$ *diferencijabilna u* $P_0\in\Omega$. *Tada je* f *i neprekidna u* P_0.

Proof. Treba dakle pokazati da je f neprekidna u P_0 sto prema Kor.12 znaci da trebamo pokazati da postoji $\lim_{P\longrightarrow P_0}f(P)$ i da je $\boxed{\lim_{P\longrightarrow P_0}f(P)=f(P_0)}$[51].

[49] M_1,M_2 su konstantne funkcije, a one su neprekidne (u svakoj tocki), pa zbog Kor.12 imaju limese i u proizvoljnoj tocki H, dok otprije znamo da postoje limesi drugih clanova zagrada

[50] Primijenili smo Nap.6 da neprekidna funkcija (norma) i limes komutiraju.

[51] Uvjet iz Kor.12 da tocka P_0 bude gomiliste iz domene je ispunjen jer je domena skup Ω^{otv} (otvoren), a prema Definicijama 1., 2., 3. u otvorenom skupu svaka tocka je gomiliste (nema

f je diferencijabilna u P_0 pa prema Nap.9 vrijedi: $f\left(P_0+H\right)=f\left(P_0\right)+A\left(H\right)+r\left(H\right)$ i $\lim_{H\longrightarrow 0}\frac{r(H)}{\|H\|}=0\left(\in\mathbb{R}^m\right).$
Kako nas zanima limes lijeve strane, onda "napanimo" posljednju jednakost s limesom:
(a) $\lim_{H\longrightarrow 0}f\left(P_0+H\right)=\lim_{H\longrightarrow 0}\left(f\left(P_0\right)+A\left(H\right)+r\left(H\right)\right).$
Da bismo na lijevoj strani mogli iskoristiti svojstva limesa (vidi Nap.6) moraju fukcije $f\left(P_0\right)$, A i r imati limese u $0\in\mathbb{R}^n$:

(i) Prema Def.11 konstanta $f\left(P_0\right)$ je neprekidna u svakoj tocki, pa i u $0\in\mathbb{R}^n$, pa prema Kor.12 slijedi da ima i limes u $0\in\mathbb{R}^n$, i on je jednak $f\left(P_0\right).$

(ii) Nadalje trebamo pokazati da postoji $\lim_{H\longrightarrow 0}A\left(H\right).$ Prema Kor.12 dovoljno je da A bude neprekidno u $0\in\mathbb{R}^n$, a kako je A lin.op., to i jeste prema Kor.20, no onda prema Kor.12 vrijedi: $\lim_{H\longrightarrow 0}A\left(H\right)=A\left(0\right)$, tj postoji trazeni limes.

(iii) Preostaje pokazati da postoji i $\lim_{H\longrightarrow 0}r\left(H\right).$ Ponovo prema Kor.12 je dovoljno pokazati da je r neprekidno u $0\in\mathbb{R}^n$, tj prema Def.11 da
(b) $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta'>0$, $d\left(P,0\right)<\delta'\implies d\left(r\left(P_0\right),r\left(0\right)\right)<\varepsilon.$
Iskoristimo uvjet da je $\lim_{H\longrightarrow 0}\frac{r(H)}{\|H\|}=0\left(\in\mathbb{R}^m\right).$ Tj da funkcija $\frac{1}{\|H\|}r$ ima limes u tocki $0\left(\in\mathbb{R}^n\right)$koji je jednak $0\left(\in\mathbb{R}^m\right)$, sto prema Def.14 znaci da $\forall\varepsilon>0$, $\underline{\exists\delta>0}$, t. da $\forall H\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}, d\left(H,0\right)=\|H-0\|<\delta\implies d\left(\frac{r(H)}{\|H\|},0\right)=\left\|\frac{r(H)}{\|H\|}-0\right\|=^{52}\frac{\|r(H)\|}{\|H\|}<\varepsilon$. Vrijedi dakle:
(c) $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, takav da $\forall H\neq 0$, cim je $\|H-0\|=\|H\|<\delta\implies\underline{\|r\left(H\right)\|<\varepsilon\|H\|}$.
Vratimo se sad pokazivanju neprekidnosti u $0\in\mathbb{R}^n$ funkcije $r\left(H\right)$:
Primijetimo najprije da je uvijek $r\left(0\right)=0$ (vidi Nap.9). Trebamo dakle $\forall\varepsilon>0$ pronaci $\delta>0$ takav da vrijedi (b) tj. da $\|H\|<\delta\implies\|r\left(H\right)-r\left(0\right)\|=\|r\left(H\right)-0\|=\underline{\|r\left(H\right)\|<\varepsilon}$. Kako vec imamo gore (prvu) potcrtanu nejednakost iz (c) to bi ocito nasa zadnja potcrtana bila ispunjena kada bi bilo $\|H\|<1$, jer bi tada vrijedilo $\varepsilon\|H\|<\varepsilon$, dakle za dani $\varepsilon>0$, za trazeni $\delta'>0$ mozemo uzeti $\delta'=\min\{\delta,\frac{1}{2}\}$.Tada imamo prema (b):
za $d\left(H,0\right)=\|H-0\|=\|H\|<\delta'\left(\leq\delta\right)\implies d\left(r\left(H\right),r\left(0\right)\right)=\|r\left(H\right)-r\left(0\right)\|=\|r\left(H\right)-0\|=\|r\left(H\right)\|<$zbog (c) $<\varepsilon\|H\|<\varepsilon\cdot\delta'\leq\varepsilon\cdot\frac{1}{2}<\varepsilon$, tj funkcija r je neprekidna u $0\in\mathbb{R}^n$, pa prema Kor.12 slijedi da postoji $\lim_{H\longrightarrow 0}r\left(H\right).$

Pokazali smo dakle da funkcije $f\left(P_0\right)$, A i r imaju limese u $0\in\mathbb{R}^n$, pa mozemo prema Nap.6 jednakost (a) pisati ovako:
$\lim_{H\longrightarrow 0}f\left(P_0+H\right)=\lim_{H\longrightarrow 0}f\left(P_0\right)+\lim_{H\longrightarrow 0}A\left(H\right)+\lim_{H\longrightarrow 0}r\left(H\right).$
Izracunajmo sad te limese:
Kako smo vec rekli u (i) : $\lim_{H\longrightarrow 0}f\left(P_0\right)=f\left(P_0\right).$
Nadalje, rekli smo takodjer u (ii) da je A neprekidno u $0\in\mathbb{R}^n$ pa prema Kor.12

izoliranih).

[52] Kako je $r\left(H\right)\in\mathbb{R}^m$, a $\|H\|\in\mathbb{R}$, vrijedi: $\left\|\frac{1}{\|H\|}r\left(H\right)\right\|$ =prema svojstvu norme= $\left|\frac{1}{\|H\|}\right|\|r\left(H\right)\|=\frac{\|r(H)\|}{\|H\|}$

vrijedi $\lim_{H\longrightarrow 0} A(H) = A(0) = 0$ jer je A linearni operator[53].
No pokazali smo u (iii) da je i r neprekidno u $0 \in \mathbb{R}^n$ pa ponovo prema Kor.12 vrijedi $\lim_{H\longrightarrow 0} r(H) = r(0) =$ kako smo vec rekli $= 0$.

Konacno prema jednakosti (a) imamo: $\lim_{H\longrightarrow 0} f(P_0 + H) = f(P_0) + 0 + 0 = f(P_0)$ tj postoji (drugacije zapisano) $\lim_{P\longrightarrow P_0} f(P)$ i vrijedi $\lim_{P\longrightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$, pa je prema Kor.12 funkcija f neprekidna u P_0 sto smo i trebali dokazati. ■

Theorem 22 *(O diferencijabilnosti kompozicije): Neka je* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$, $g : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\Omega'^{otv} \subseteq \mathbb{R}^m$, *te* $f(\Omega) \subseteq \Omega'$[54]*. Ako je* f *diferencijabilna u* $P_0 \in \Omega$ *, i* g *diferencijabilna u* $f(P_0) = Q_0 \in \Omega'$*, onda je* $g \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *diferencijabilna u* P_0*, i vrijedi:*

$$d(g \circ f)(P_0) = dg(f(P_0)) \circ df(P_0) \tag{32}$$

Proof. Treba pokazati da je $g \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ diferencijabilna u P_0, tj. prema Nap.9 da vrijedi:
(1) $(g \circ f)(P) - (g \circ f)(P_0) = lin.op.(P - P_0) +$ "*ostatak*" $(\equiv r(P - P_0))$
pri cemu treba biti jos $\lim_{P\longrightarrow P_0} \frac{r(P-P_0)}{\|P-P_0\|} = 0\,(\in \mathbb{R}^p)$.

Kako su f i g diferencijabilne u P_0 i $f(P_0) = Q_0$, to prema Nap.9 vrijedi:
(2) $f(P) - f(P_0) = A(P - P_0) + r_1(P - P_0)$, pri cemu je $\lim_{P\longrightarrow P_0} \frac{r_1(P-P_0)}{\|P-P_0\|} = 0\,(\in \mathbb{R}^m)$, te
(3) $g(Q) - g(Q_0) = B(Q - Q_0) + r_2(Q - Q_0)$, pri cemu je $\lim_{Q\longrightarrow Q_0} \frac{r_2(Q-Q_0)}{\|Q-Q_0\|} = 0\,(\in \mathbb{R}^p)$.

Imamo prema (1):
$(g \circ f)(P) - (g \circ f)(P_0) = g(f(P)) - g(f(P_0)) = g(Q) - g(Q_0) =$
$= B(Q - Q_0) + r_2(Q - Q_0) = B(f(P) - f(P_0)) + r_2(f(P) - f(P_0)) =$
$= B(A(P - P_0) + r_1(P - P_0)) + r_2(f(P) - f(P_0)) =$ jer je B lin. op.[55]$=$
$= B(A(P - P_0)) + B(r_1(P - P_0)) + r_2(f(P) - f(P_0)) =$
$= \underbrace{(B \circ A)}_{lin.op}{}^{56}(P - P_0) + \underbrace{(B \circ r_1)(P - P_0) + r_2(f(P) - f(P_0))}_{\text{"}ostatak\text{"}(\equiv\, r(P-P_0))}.$

Prema (1) diferencijabilnost kompozicije ce biti dokazana ako jos pokazemo da je $\lim_{P\longrightarrow P_0} \frac{r(P-P_0)}{\|P-P_0\|} = 0\,(\in \mathbb{R}^p)$.
Pa imamo: $\lim_{P\longrightarrow P_0} \frac{r(P-P_0)}{\|P-P_0\|} = \lim_{P\longrightarrow P_0} \left[\frac{(B\circ r_1)(P-P_0)}{\|P-P_0\|} + \frac{r_2(f(P)-f(P_0))}{\|P-P_0\|}\right]$. Da bismo mogli primijeniti svojstvo limesa prema Nap.6 moraju postojati limesi prvog i drugog clana u zagradi. Pokazimo da postoje i usput ih izracunajmo:

a) $\lim_{P\longrightarrow P_0} \frac{(B\circ r_1)(P-P_0)}{\|P-P_0\|} = \lim_{P\longrightarrow P_0} \frac{B(r_1(P-P_0))}{\|P-P_0\|} =$
$= \lim_{P\longrightarrow P_0} \frac{1}{\|P-P_0\|} B(r_1(P - P_0)) =^{57} \lim_{P\longrightarrow P_0} B\left(\frac{r_1(P-P_0)}{\|P-P_0\|}\right) =$ prema Kor.20

[53] Svaki linearni operator f je ujedno i homomorfizam aditivnih grupa vekt. prostora (u nasem slucaju $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$), pa vrijedi $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$.
[54] Uvjeti za postojanje kompozicije.
[55] $A(P - P_0)$, $r_1(P - P_0)$ su elementi iz $\mathbb{R}^m$.
[56] Vrijedi teorem: kompozicija linearnih operatora je linearni operator.
[57] ($\frac{1}{\|P-P_0\|} \in \mathbb{R}$, a B je lin.op.) pa primijenimo svojstvo lin.op. (za $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$): $\lambda B(a) = B(\lambda a)$.

B je neprekidan, prema Nap.6 neprekidna funkcija i limes komutiraju $=$
$= B\left[\lim_{P\longrightarrow P_0}\frac{r_1(P-P_0)}{\|P-P_0\|}\right]$ = prema (2)= $B(0)$ = jer je B lin.op.= 0. Dakle pokazali smo da postoji limes prvog clana (i vise - da je jednak nuli).

b) Treba pokazati da postoji $\lim_{P\longrightarrow P_0}\frac{r_2(f(P)-f(P_0))}{\|P-P_0\|}$ i da je jednak $0\in\mathbb{R}^p$. Za ovaj limes ne mozemo tek tako zakljuciti da je jednak nuli, ali moci cemo ako ga omedjimo odozdo i odozgo s nulom (slicno kao u dokazu Svojstva4) tj ako pokazemo da vrijedi:
(#) $0\leq\lim_{P\longrightarrow P_0}\frac{r_2(f(P)-f(P_0))}{\|P-P_0\|}<$ "*po volji malena velicina*". Krenimo opet od norme lizraza pod limesom:
(4) $0\leq\left\|\frac{r_2(f(P)-f(P_0))}{\|P-P_0\|}\right\|=\frac{\|r_2(f(P)-f(P_0))\|}{\|P-P_0\|}$
i pokusajmo je omedjiti s desne strane:

Imamo najprije zbog (3): $\lim_{Q\longrightarrow Q_0}\frac{r_2(Q-Q_0)}{\|Q-Q_0\|}=0\,(\in\mathbb{R}^p)$ sto znaci da $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, t da $\forall Q\neq Q_0$
$0<d(Q,Q_0)=\|Q-Q_0\|<\delta\implies d\left(\frac{r_2(Q-Q_0)}{\|Q-Q_0\|},0\right)=\left\|\frac{r_2(Q-Q_0)}{\|Q-Q_0\|}-0\right\|=\left\|\frac{r_2(Q-Q_0)}{\|Q-Q_0\|}\right\|<\varepsilon$ tj da tada vrijedi
(5) $\underline{\|r_2(Q-Q_0)\|<\varepsilon\|Q-Q_0\|}$.
No Q, i Q_0 nisu bilo kakve tocke nego $f(P)$ i $f(P_0)$, pa kako je f diferencijabilna u P_0, to je po Tm.21 f i neprekidna u P_0 sto prema Def.11 znaci da za svaku realnu malu velicnu, pa i za $\delta>0$, $\exists\delta'>0$, t da $\forall P\in\Omega$:
(6) $d(P\,P_0)=\|P-P_0\|<\delta'\implies d(f(P),f(P_0))=\underline{\|f(P)-f(P_0)\|<\delta}$.

Sada iz (5) i (6) imamo: $\forall P\in\Omega$, $\|P-P_0\|<\delta'\implies\|r_2(f(P)-f(P_0))\|<\varepsilon\|f(P)-f(P_0)\|$, pa mozemo, ukoliko je $\|P-P_0\|<\delta'$, nejednakost (4) omedjiti i s desna. Imamo:
$0\leq\frac{\|r_2(f(P)-f(P_0))\|}{\|P-P_0\|}<\frac{\varepsilon\|f(P)-f(P_0)\|}{\|P-P_0\|}$ = prema (2)= $\frac{\varepsilon\|A(P-P_0)+r_1(P-P_0)\|}{\|P-P_0\|}\leq$ prema svojstvu norme $\leq\varepsilon\frac{\|A(P-P_0)\|+\|r_1(P-P_0)\|}{\|P-P_0\|}=\varepsilon\left[\frac{\|A(P-P_0)\|}{\|P-P_0\|}+\frac{\|r_1(P-P_0)\|}{\|P-P_0\|}\right]\leq$...
[Prema Lemi 18 $\forall P$ postoji $M>0$ t. da je $\|A(P-P_0)\|\leq M\|P-P_0\|$] ...
$\leq\varepsilon\left(M+\frac{\|r_1(P-P_0)\|}{\|P-P_0\|}\right)$.

Dobili smo dakle sljedecu nejednakost:
$0\leq\left\|\frac{r_2(f(P)-f(P_0))}{\|P-P_0\|}\right\|<\varepsilon\left(M+\frac{\|r_1(P-P_0)\|}{\|P-P_0\|}\right)$
Kako nas zanima limes izraza u sredini, "napanimo" nejednakost s $\lim_{P\longrightarrow P_0}$:
$\lim_{P\longrightarrow P_0}0\leq\lim_{P\longrightarrow P_0}\left\|\frac{r_2(f(P)-f(P_0))}{\|P-P_0\|}\right\|<\lim_{P\longrightarrow P_0}\varepsilon\left(M+\frac{\|r_1(P-P_0)\|}{\|P-P_0\|}\right)$.
Kako prema (1) postoji limes drugog clana u zagradi, (i dakako postoji limes konstante M jer je ona neprekidna funkcija, pa prema Kor.12) to mozemo primijeniti svojstva limesa (Nap.6), a kako ε mozemo uciniti po volji malenim, to onda cijeli limes desne strane koji je jednak εM mozemo uciniti po volji malenim. Dakle prema (#) dobili smo da je $\lim_{P\longrightarrow P_0}\left\|\frac{r_2(f(P)-f(P_0))}{\|P-P_0\|}\right\|=0$, a jer norma i limes komutiraju (Nap.6) to je onda i $\left\|\lim_{P\longrightarrow P_0}\frac{r_2(f(P)-f(P_0))}{\|P-P_0\|}\right\|=0$ a to je prema svojstvu norme ispunjeno ako je $\lim_{P\longrightarrow P_0}\frac{r_2(f(P)-f(P_0))}{\|P-P_0\|}=0$ sto smo i trebali pokazati.

Ovim je dokazano da je $g \circ f$ diferencijabilna u P_0 i da vrijedi:
$d(g \circ f)(P_0) = B \circ A =$ zbog jedinstvenosti diferencijala $= dg(f(P_0)) \circ df(P_0)$.
■

Pogledajmo sada kako se to odrazava na parcijalne derivacije kompozicije. Neka su f i g diferencijabilne kao u prethodnom teoremu. Kako smo vidjeli u (22) diferencijalima tih funkcija mozemo pridruziti Jakobijeve matrice:

$$A = df(P_0) \longleftrightarrow \frac{\delta(f_1,\ldots,f_m)}{\delta(x_1,\ldots,x_n)}(P_0) = \left[\underbrace{\frac{\delta f_i}{\delta x_j}(P_0)}_{a_{ij}}\right] = \bar{A}$$

$$B = dg(f(P_0)) \longleftrightarrow \frac{\delta(g_1,\ldots,g_p)}{\delta(y_1,\ldots,y_m)}(f(P_0)) = \left[\underbrace{\frac{\delta g_k}{\delta y_l}(f(P_0))}_{b_{ki}}\right] = \bar{B}$$

Kompoziciji linearnih operatora pridruzujemo produkt njihovih matrica:
$d(g \circ f)(P_0) = B \circ A \longleftrightarrow \frac{\delta(g_1,\ldots,g_p)}{\delta(y_1,\ldots,y_m)}(f(P_0)) \cdot \frac{\delta(f_1,\ldots,f_m)}{\delta(x_1,\ldots,x_n)}(P_0) =$
$= \left[\frac{\delta g_k}{\delta y_l}(f(P_0))\right] \cdot \left[\frac{\delta f_i}{\delta x_j}(P_0)\right] =$[58] $\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\delta g_k}{\delta yi}(f(P_0)) \cdot \frac{\delta f_i}{\delta x_j}(P_0)\right] = \bar{B} \cdot \bar{A} = \bar{C}$ (gdje je $\bar{C}$ matrica tipa (p,n)), tj. na mjestu kj matrice $\bar{C}$ se nalazi clan
$\frac{\delta(g \circ f)_k}{\delta x_j}(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta g_k}{\delta yi}(f(P_0)) \cdot \frac{\delta f_i}{\delta x_j}(P_0)$

Ispisimo sad i neke posebne slucajeve:

1. $p = 1$
   Tada se radi o kompoziciji $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, tj kompozicija je skalarna funkcija, pa je matrica $\bar{C}$ tipa $(1,n)$, tj diferencijal je uredjena n - torka, u kojoj se na j -tom mjestu nalazi clan:
   $\frac{\delta(g \circ f)}{\delta x_j}(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta g}{\delta yi}(f(P_0)) \cdot \frac{\delta f_i}{\delta x_j}(P_0)$
2. $p = n = 1$
   Tada se radi o kompoziciji $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, tj domena i kodomena kompozicije je skup $\mathbb{R}$, pa je diferencijal u stvari derivacija (matrica tipa $(1,1)$):
   $\frac{d(g \circ f)}{dx}(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta g}{\delta yi}(f(x_0)) \cdot \frac{\delta f_i}{\delta x}(x_0)$[59]
3. $m = n = p = 1$
   Radi se o kompoziciji $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, isto kao i pod 2. samo ovdje nema parcijalnih derivacija, sve su obicne derivacije:
   $\frac{d(g \circ f)}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dy}(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx}(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Corollary 23
inverzne funkcije): Neka su Ω i Ω' otvoreni podskupovi u $\mathbb{R}^m$, i $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$

[58] $[b_{ki}] \cdot [a_{ij}] = [\gamma_{kj}] = \left[\sum_{i=1}^{m} b_{ki} \cdot a_{ij}\right]$
[59] $\frac{\delta f_i}{\delta x}(x_0) = f_i'(x_0)$

bijekcija. *Ako je f diferencijabilno u $P_0 \in \Omega$, a $f^{-1} : \Omega' \longrightarrow \Omega$ diferencijabilno u $f(P_0)$, onda je $df(P_0) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$* regularan operator[60] *i vrijedi:*

$$(df(P_0))^{-1} = df^{-1}(f(P_0))^{61} \tag{33}$$

Proof. Da bismo pokazali da je operator $df(P_0) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ regularan, treba pokazati da postoji operator $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ takav da vrijedi:
$df(P_0) \circ F = 1_{\mathbb{R}^m}$ & $F \circ df(P_0) = 1_{\mathbb{R}^m}$,
tj operator F je inverz operatora $df(P_0)$.

Kako je f diferencijabilno u P_0, i f^{-1} diferencijabilno u $f(P_0)$, prema Tm.22 su diferencijabilne i kompozicije: $f \circ f^{-1} : \Omega' \longrightarrow \Omega'$ i $f^{-1} \circ f : \Omega \longrightarrow \Omega$, i vrijedi prema istom Teoremu:
a) $d\left(f^{-1} \circ f\right)(P_0) = df^{-1}(f(P_0)) \circ df(P_0)$
b) $d\left(f \circ f^{-1}\right)(f(P_0)) = df\left[f^{-1}(f(P_0))\right] \circ df^{-1}(f(P_0)) = df(P_0) \circ df^{-1}(f(P_0))$
No kako je $f \circ f^{-1} = 1_{\Omega'}$, te $f^{-1} \circ f = 1_{\Omega}$, to je onda i:
a') $d\left(f^{-1} \circ f\right)(P_0) = d1_{\Omega}(P_0) =$ jer je identiteta lin. op., pa je prema Primjeru8 njen diferencijal ona sama $= 1_{\mathbb{R}^m}$[62]
b') $d\left(f \circ f^{-1}\right)(f(P_0)) = d1_{\Omega'}(f(P_0)) =$ isto $= 1_{\mathbb{R}^m}$.
izjednacimo li a) i a'), te b) i b'), imamo:
$df^{-1}(f(P_0)) \circ df(P_0) = 1_{\mathbb{R}^m}$,
$df(P_0) \circ df^{-1}(f(P_0)) = 1_{\mathbb{R}^m}$,
sto znaci da je $df(P_0)$ regularan operator, a inverz mu je ocito $F = (df(P_0))^{-1} = df^{-1}(f(P_0))$ sto je i trebalo pokazati. ■

Neprekidno diferencijabilne funkcije

Neka je $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ diferencijabilna u **svakoj tocki** iz Ω, tj $\forall P \in \Omega, \exists \underline{df(P) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m}$. Kako je $df(P) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, to je dobro definirana funkcija: $\underline{df : \Omega \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$. Nadalje prostori $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ i M_{mn}[63] su izomorfni[64], ali matricu tipa (m, n) mozemo zapisati i drugacije:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}.$$

Dakle isti izomorfizam se moze uspostaviti i izmedju vektorskog prostora $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ i topoloskog prostora $\mathbb{R}^{mn}$, a uz ovaj izomorfizam mozemo df shvatiti kao funkciju: $\underline{df : \Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{mn}}$, pa ima smisla govoriti o neprekidnosti[65] pres-

[60] Tj. za njega postoji inverzni operator.
[61] Tj. inverz diferencijala funkcije f u P_0, jednak je diferencijalu inverzne funkcije f^{-1} u $f(P_0)$
[62] Napisali smo $1_{\mathbb{R}^m}$ a ne 1_{Ω} jer prema Def.15, mada je prvotna funkcija definirana samo na nekom podskupu od $\mathbb{R}^n$,diferencijal je funkcija iz $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$,
[63] M_{mn} - prostor matrica tipa (m, n)
[64] Izomorfizam je $\Phi : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longrightarrow M_{mn}$, definiran sa $\Phi(f) = F$, gdje je F matricni zapis operatora f u danim bazama
[65] Imalo je smisla govoriti o neprekidnosti i gore kad je kodomena bila $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, jer u prostoru linearnih operatora postoji norma (definirana sa: $\|A\| := \sup\{\|A(P)\| \mid \|P\| = 1,\ P \in \mathbb{R}^n\}$.

likavanja df [66].

Definition 16 *Neka je* $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m,\quad \Omega^{otv}\subseteq\mathbb{R}^n$ *preslikavanje. Kazemo da je* f neprekidno diferencijabilno *ili da je* klase C^1na Ω, *ako je:*
- f *diferencijabilno na* Ω *(tj u svakoj tocki iz* Ω*)*
- *preslikavanje* $df:\Omega\longrightarrow L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ *je neprekidno.*

Kako smo vidjeli (Zakljucak1) diferencijabilnost povlaci postojanje parcijalnih derivacija, ali obrat ne vrijedi, ali svakako bi bilo dobro kad bismo mogli nesto reci o diferencijabilnosti preko poznavanja parcijalnih derivacija, jer su lakse za promatrati:

Theorem 24 *(Dovoljan uvjet za diferencijabilnost): Neka je* $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $\Omega^{otv}\subseteq\mathbb{R}^n$ *preslikavanje za koje* ***postoje parcijalne derivacije*** $\delta_i f_j$ $(\forall i=1,\ldots,n;\forall j=1,\ldots,m)$ *na* Ω[67]*. Ako su* ***sve*** *parcijalne derivacije* $\delta_i f_j$ ***neprekidne u tocki*** $P_0\in\Omega$, *onda je* f *diferencijabilno u* P_0*.*

Proof. Prema Nap.4 mozemo pisati $f=(f_1,\ldots,f_m):\quad\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ gdje je $f_i:\Omega\longrightarrow\mathbb{R},\ \forall i$. Za dokazati diferencijabilnost (vektorske) funkcije f, prema (21)[68], dovoljno je pokazati diferencijabilnost (skalarnih) funkcija f_i (sto je lakse naravno). Dovoljno je dokazati diferencijabilnost samo jedne f_i te cemo u dokazu radi prakticnosti nju nazivati funkcijom f, dakle - dokazujemo diferencijabilnost funkcije$f_i\equiv f$: $\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$

Zelimo dakle, prema Nap.9, pokazati da vrijedi:
$f(P_0+H)-f(P_0)=lin.op(H)+\text{"}ostatak\text{"}(H)\,(\equiv r(H))$ te $\lim_{H\longrightarrow 0} r(H)=0$.

Ekskurs: U dokazu cemo iskoristiti Lagrangeov torem za realne funkcije realne varijable, pa prisjetimo ga se:
Ako je $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ neprekidna na nekom segmentu $[a,b]$ i derivabilna na intervalu $\langle a,b\rangle$, tada postoji tocka $c\in\langle a,b\rangle$ takva da je $g(b)-g(a)=g'(c)\cdot(b-a)$. Ovaj izraz mozemo zapisati i na jos jedan nacin oznacimo li tocku $c\in\langle a,b\rangle$ pomocu $0<\theta<1$, tj $\theta=\frac{c-a}{b-a}\implies c=a+\theta(b-a)$, pa ako je jos $a=x$ i $b=x+h$, mozemo pisati $\boxed{g(x+h)-g(x)=g'(x+\theta h)\cdot h}$.

Kako je jedna od pretpostavki u teoremu postojanje parcijalnih derivacija na cijelom skupu Ω, tj u svakoj tocki iz Ω, i kako naravno zelimo iskoristiti tu pretpostavku, to nam H treba biti takav da za $P_0\in\Omega$, i $P=P_0+H$ opet bude iz Ω, a takvu tocku mozemo naci za svaki P_0 upravo jer je Ω otvoren: Dakle

[66] Od svih preslikavanja koja mogu djelovati medju nekim strukturama (grupama,poljima, prostorima...), za pojedinu su naravno najvaznija ona koja postivaju njihovu strukturu: medju grupama to su homomorfizmi grupa, medju vekt.prostorima to su lin.operatori, a medju metrickim i topoloskim prostorima to su neprekidna preslikavanja!

[67] Tj. u svakoj tocki iz Ω.

[68] Nismo imali kao teorem, ali vrijedi: Ako je f diferencijabilno, onda su takve i sve f_i, i obratno!

zbog otvorenosti od Ω prema Def.1, $\exists r > 0$ t. da je $K(P_0, r) \subseteq \Omega$, pa odaberimo proizvoljni H iz te kugle tj $\|H\| < r$, tj $H \in K(P_0, r)$, te $H = (h_1, \ldots, h_n)$.

Predjimo konacno na sam dokaz: Imamo (uz $P_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$:
$f(P_0 + H) - f(P_0) = f\left(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) =$ [69]
$=$ dodajmo i oduzmimo $=$
$= \left[f\left(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h_n\right)\right] +$
$+ \left[f\left(x_1^0, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + h_3, \ldots, x_n^0 + h_n\right)\right] +$
$+ \left[f\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + h_3, \ldots, x_n^0 + h_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0 + h_4 \ldots, x_n^0 + h_n\right)\right] +$
$+ \cdots +$
$+ \left[f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0 + h_n\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)\right] \boxed{=} \ldots$
Pogledamo li sad dobijene razlike vidimo da se razlikuju samo u jednoj varijabli. Zelimo sad na te funkcije jedne varijable primijeniti Lagrangeov teorem. Definirajmo $(\forall i = 1, \ldots, n)$ (uz $h_i > 0$)[70]:
$g_i : [x_i, x_i + h_i] \longrightarrow \mathbb{R}$, sa $g_i(x) = f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0 + h_{i+1}, \ldots, x_n^0 + h_n\right)$
$\ldots \boxed{=} \left[g_1\left(x_1^0 + h_1\right) - g_1\left(x_1^0\right)\right] + \cdots + \left[g_n\left(x_n^0 + h_n\right) - g_n\left(x_n^0\right)\right] \boxed{=}$

Ekskurs: Ocito je g funkcija jedne varijable, pa kako zelimo na nju primijeniti Lagrangeov tm, moramo pokazati da ona udovoljava njegovim uvjetima, (tj da je neprekidna na segmentu i derivabilna na intervalu), a to cemo pokazati ako pokazemo da postoji derivacija u svim tockama segmenta, (tj da je derivabilna na segmentu), a to povlaci da je i neprekidna na segmentu, a posebno i derivabilna na intervalu. Potrazimo onda derivaciju u nekoj tocki domene x_0:
$g_i'(x_0) =$ prema def.$= \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{g_i(x) - g_i(x_0)}{x - x_0} =$
$= \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0 + h_{i+1}, \ldots, x_n^0 + h_n\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_0, x_{i+1}^0 + h_{i+1}, \ldots, x_n^0 + h_n\right)}{x - x_0} =$
$=$prema (15) $=$
$= \frac{\delta f}{\delta x_i}\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_0, x_{i+1}^0 + h_{i+1}, \ldots, x_n^0 + h_n\right)$,
no kako je $\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_0, x_{i+1}^0 + h_{i+1}, \ldots, x_n^0 + h_n\right) \in K(P_0, r) \subseteq \Omega$, to onda posljednja parcijalna derivacija postoji, (jer je uvjet teorema upravo da postoje parcijalne derivacije od f u svim tockama iz Ω). Dakle g_i su derivabilne na segmentu tj prema prije recenom, mozemo na njih primijeniti Lagrangeov tm.]

$\boxed{=}\ g_1'\left(x_1^0 + \theta h_1\right) \cdot h_1 + \cdots + g_n'\left(x_n^0 + \theta h_n\right) \cdot h_n =$
$=$ prema ekskursu $= \frac{\delta f}{\delta x_1}\left(x_1^0 + \theta h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h_n\right) \cdot h_1 +$
$+ \cdots + \frac{\delta f}{\delta x_n}\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0 + \theta h_n\right) \cdot h_n =$
$=$ dodajmo i oduzmimo $=$
$= \frac{\delta f}{\delta x_1}\left(x_1^0 + \theta h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h_n\right) \cdot h_1 +$
$\underline{+ \frac{\delta f}{\delta x_1}\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \cdot h_1 - \frac{\delta f}{\delta x_1}\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)} \cdot h_1 +$
$+ \cdots +$
$+ \frac{\delta f}{\delta x_n}\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0 + \theta h_n\right) \cdot h_n +$

[69] Sad dolazi jedan kompliciraniji dio kojem se ne da ukratko izreci svrha, osim naseg pravog cilja da dobijemo lin.op. plus ostatak.
[70] Za $h_i < 0$, domena od g biila $[x_i^0 + h_i, x_i^0]$

$+\underline{\frac{\delta f}{\delta x_n}\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)\cdot h_n} - \frac{\delta f}{\delta x_n}\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)\cdot h_n =$
$=$ zbrojimo li posebno potcrtane clanove, a posebno ostale $=$
$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta f}{\delta x_i}(P_0)\cdot h_i + \sum_{i=1}^{n} s_i(H)\cdot h_i$
gdje je $s_i(H) = \frac{\delta f}{\delta x_i}\left(x_i^0,\ldots,x_{i-1}^0, x_i^0+\theta h_i, x_{i+1}^0+h_{i+1},\ldots,x_n^0+h_n\right) - \frac{\delta f}{\delta x_i}\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$.
Kako je prvi clan upravo vrijednost jednog linearnog operatora $\boxed{?}$ na vektoru H, preostaje dokazati da je $\lim_{H\longrightarrow 0}\frac{s_i(H)h_i}{\|H\|} = 0$, $\forall i = 1,\ldots,n$:
$\lim_{H\longrightarrow 0}\frac{s_i(H)h_i}{\|H\|} = \lim_{H\longrightarrow 0} s_i(H)\cdot\frac{h_i}{\|H\|}$.
$h_i = \sqrt{(h_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(h_i)^2} = \|H\|$, pa je kvocijent $\frac{h_i}{\|H\|}$ omedjen s -1 i 1, i ne utjece $\boxed{?}$ na ukupni limes, pa preostaje pokazati da je $\lim_{H\longrightarrow 0} s_i(H) = 0$:
$\lim_{H\longrightarrow 0} s_i(H) = \lim_{H\longrightarrow 0}\left[\frac{\delta f}{\delta x_i}\left(x_i^0,\ldots,x_{i-1}^0, x_i^0+\theta h_i, x_{i+1}^0+h_{i+1},\ldots,x_n^0+h_n\right) - \frac{\delta f}{\delta x_i}\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)\right] =$
kako drugi clan uopce ne ovisi o $H = \lim_{H\longrightarrow 0}\frac{\delta f}{\delta x_i}\left(x_i^0,\ldots,x_{i-1}^0, x_i^0+\theta h_i, x_{i+1}^0+h_{i+1},\ldots,x_n^0+h_n\right) - \frac{\delta f}{\delta x_i}\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right) =$ jer su po Pp teorema $\frac{\delta f}{\delta x_i}$ neprekidne funkcije, pa zbog Kor.12 $=$
$= \frac{\delta f}{\delta x_i}\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right) - \frac{\delta f}{\delta x_i}\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right) = \frac{\delta f}{\delta x_i}(P_0) - \frac{\delta f}{\delta x_i}(P_0) = 0,$
dakle $\exists \lim_{H\longrightarrow 0}\frac{s_i(H)h_i}{\|H\|} = \lim_{H\longrightarrow 0} s_i(H)\cdot\frac{h_i}{\|H\|} = 0.$

Pokazali smo konacno da su $f_i \equiv f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije, a kako su to koordinatne funkcije nase pocetne vektorske funkcije f, to je i ona diferencijabilna, cime je teorem u potpunosti dokazan. ■

Corollary 25 *Preslikavanje* $f : \Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *je* klase C^1 na Ω ***akko*** *sve parcijalne derivacije od* f $\frac{\delta f_i}{\delta x_j} \equiv \delta_j f_i \equiv D_j f_i$, $(i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n)$ *postoje i neprekidne su na* Ω

Proof.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je f klase C^1 na Ω. To prema Def.16 znaci da je f diferencijabilna na Ω i da je $df : \Omega \longrightarrow L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ neprekidna funkcija. Trebamo pokazati da postoje sve parcijalne derivacije i da su neprekidne na Ω :

Spomenuli smo prije da postoji izomorfizam izmedju $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ i $\mathbb{R}^{nm}$ (vidi pocetak ove sekcije), dakle svakom operatoru i $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ mozemo pridruziti vektor iz $\mathbb{R}^{mn}$. Kako je vrijednost funkcije *df* upravo element iz $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, to svakom operatoru (tj diferencijalu funkcije f u tocki P) $df(P) \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, mozemo pridruziti vektor iz $\mathbb{R}^{mn}$, pa imamo prema (22):
(i) $df(P) = (\delta_1 f_1(P),\ldots,\delta_{mn} f_{mn}(P)) \in \mathbb{R}^{mn}$,
No mozemo i drugacije interpretirati: svakoj funkcijskoj vrijednosti $df(P) \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ pridruzimo vektor iz $\mathbb{R}^{mn}$, gdje se na pojedinim koordinatama tog vektora nalaze koordinatne funkcije od *df*:
(ii) $df(P) = ((df)_1(P),\ldots,(df)_{mn}(P)) \in \mathbb{R}^{mn}$.

Sada iz (i) i (ii) zakljucujemo da su koordinatne funkcije od *df* u stvari parcijalne derivacije koordinatnih funkcija od f. No kako je *df* neprekidna funkcija (tj neprekidna u svakoj tocki iz Ω), to su onda prema 8 i sve njene koordinatne funkcije neprekidne (u svakoj tocki iz Ω) na Ω.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka sve parcijalne derivacije $\delta_j f_i$ postoje, i neka su neprekidne na Ω (u svakoj tocki iz Ω). Trebamo pokazati da je f klase C^1 na Ω, tj prema Def.16 da je f diferencijabilna (u svakoj tocki iz Ω) i da je $df : \Omega \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ neprekidna:

Kako postoje sve parc. derivacije i kako su neprekidne u svakoj tocki iz Ω, to prema Tm.24 slijedi da je f diferencijabilna u svakoj tocki iz Ω.
To znaci da je dobro definirana funkcija $df : \Omega \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (jer kako rekosmo u svakoj tocki postoji diferencijal, a on je element iz $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$).
No kako su koordinatne funkcije od df u stvari parcijalne derivacije (vidi (i) i (ii)) od f, koje postoje prema Pp teorema, i pri tom su i neprekidne (u svakoj tocki iz Ω), to je ponovo prema Tm.8 i df neprekidno (u svakoj tocki iz Ω) na Ω.
Dakle prema Def.16 f je klase C^1 na Ω.

■

Visi diferencijali

Neka je $f : \Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferencijabilna funkcija na Ω.

- To prema Def.15 znaci da $\forall P \in \Omega$ postoji lin. op.
  $df(P) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (gdje je $df(P) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$),
  pa je dobro definirana funkcija: $df : \Omega \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{mn}$.

Sada imamo funkciju $df : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{mn}$, pa se ima smisla pitati je li funkcija (df) diferencijabilna u nekoj tocki $P_0 \in \Omega$.

- Ako jeste, to opet prema istoj definiciji znaci da $\exists$ lin.op.
  $d(df)(P_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{mn}$ (gdje je $d(df)(P_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{mn}) \cong L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$),
  a ako je (df) diferencijabilna u svakoj tocki $P_0 \in \Omega$, mozemo definirati funkcijů:
  $d(df) : \Omega \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{mn}) \cong L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ i oznaciti je s $d(df) \equiv d^2 f$, koja se naziva *drugi diferencijal* ili *diferencijal drugog reda* funkcije f.
  Primijetimo da je $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{mn}) \cong \mathbb{R}^{mn^2}$.

Conclusion 2 *Ako je(df) diferencijabilan u svakoj tocki $P_0 \in \Omega$, i $d^2 f$ neprekidna funkcija, onda kazemo da je f* klase C^2 na Ω *(usp. Def.16).*

Skup svih takvih funkcija oznacava se $C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, odnosno $C^2(\Omega)$ ako je $m = 1$.

Analogno se definira $d^p f$, $\forall p \geq 2$, i $C^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (tj. f je klase C^p - $\exists p$-ti diferencijal , i on je neprekidna funkcija)

Ako sa $C^0(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (tj $\exists$ "nulti" diferencijal $= f$, a f je neprekidna) oznacimo skup svih neprekidnih funkcija sa $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$, onda vrijedi:

$$C^0(\Omega) \supsetneqq C^1(\Omega) \supsetneqq C^2(\Omega) \supsetneqq \cdots \supsetneqq C^p(\Omega) \supsetneqq C^{p+1}(\Omega) \supsetneqq \cdots \supsetneqq C^\infty(\Omega) \quad (34)$$

- Opisimo na drugi nacin drugi diferencijal d^2f i to u specijalnom slucaju $m=1$: $f:\Omega^{otv}\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\boxed{\mathbb{R}}$. Prisjetimo se da je $d^2f:\Omega\longrightarrow L(\mathbb{R}^n,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))$.
Vektorski prostor $L(\mathbb{R}^n,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))$ svih linearnih operatora sa $\mathbb{R}^n$ u $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ je prirodno izomorfan vektorskom prostoru *bilinearnih funkcionala* $BL(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, tj prostoru preslikavanja $B:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ koja su linearna u svakoj varijabli[71]. Taj izomorfizam $\beta:L(\mathbb{R}^n,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))\longrightarrow BL(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ ostvaruje se na sljedeci nacin: linearnom operatoru $b\in L(\mathbb{R}^n,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))$ pridruzen je bilinearni funkcional $\beta(b)=B\in BL(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ definiran s:
$B(H,K):=\underbrace{(b(H))}_{\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}(K)\ ,\ H,K\in\mathbb{R}^n$[72]
Uz ovaj izomorfizam mozemo identificirati $L(\mathbb{R}^n,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))\cong BL(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, pa mozemo drugi diferencijal $\underline{d^2f(P_0)\in L(\mathbb{R}^n,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))}$ interpretirati kao bilinearni funkcional $\beta\left(d^2f(P_0)\right)\in BL(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Uobicajeno je i taj bilinearni funkcional $\beta\left(d^2f(P_0)\right)$ oznacavati istom oznakom $d^2f(P_0)$ i takodjer zvati "drugi diferencijal od f u tocki P_0 ", tj. $\underline{d^2f(P_0)\in BL(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$
Pokazimo jos kako to izgleda u koordinatama:
Promatramo skalarnu funkciju $f:\Omega^{otv}\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\boxed{\mathbb{R}}$, koja je diferencijabilna na Ω ...

Ekskurs: Neka je $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ vektorski prostor linearnih funkcionala na $\mathbb{R}^n$, dakle **dualni prostor** od $\mathbb{R}^n$. Svaki vekt. prostor ima bazu, pa neka su $dx_1,\ldots,dx_n\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ vektori (lin funkcionali) **dualne baze** s obzirom na standardnu bazu $e_1,\ldots,e_n$. Dakle $dx_i(H)=h_i$ za svaku tocku $H=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathbb{R}^n$. Tada za diferencijal $df(P_0)$ funkcije $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ u tocki P_0 imamo:
$df(P_0)(H)=$ prema $18=\sum_{i=1}^n\delta_if(P_0)h_i=\sum_{i=1}^n\delta_if(P_0)dx_i(H)$ $\forall H\in\mathbb{R}^n$, pa je (vidi (26):

$$df(P_0)=\sum_{i=1}^n\delta_if(P_0)dx_i \tag{35}$$

prikaz diferencijala $df(P_0)$ u standardnoj bazi prostora $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.
Oznake $dx_1,\ldots,dx_n$ za vektore dualne baze, u kontekstu diferencijabilnih funkcija su uobicajene. To dolazi od cinjenice da dx_i mozemo intrepretirati kao diferencijal funkcije $(x_1,\ldots,x_n)\longmapsto x_i$, tj i-te projekcije $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ (vidi Svojstvo1)

...Dakle imamo da je $df(P_0)=\sum_{i=1}^n\delta_if(P_0)dx_i$ $[:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}]$
Tada je $\underline{d^2f(P_0)}=d(df)(P_0)=\sum_{j=1}^n\delta_j\left(\sum_{i=1}^n\delta_if(P_0)dx_i\right)dx_j=$

[71] Tj. za sve $H,H_1,H_2,K,K_1,K_2\in\mathbb{R}^n$, i $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$, vrijedi:
$B(\lambda_1H_1+\lambda_2H_2,K)=\lambda_1B(H_1,K)+\lambda_2B(H_2,K)$,
$B(H,\mu_1K_1+\mu_2K_2)=\mu_1B(H,K_1)+\mu_2B(H,K_2)$.
[72] $b:\mathbb{R}^n\longrightarrow L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$; $B:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$.

$= \underline{\sum_{i,j=1}^{n} \delta_j \delta_i f(P_0)\, dx_i dx_j} \left(\equiv \sum_{i,j=1}^{n} D_j D_i f(P_0)\, dx_i dx_j\right) \boxed{?}.$
Brojevi $D_j D_i f(P_0) = \delta_j \delta_i f(P_0)$ nazivaju se *parcijalne derivacije drugog reda po varijablama* i, j *u tocki* P_0.

Pogledajmo jos samo djelovanje na vektor:
$d^2 f(P_0) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ pa je za $H \in \mathbb{R}^n$, $d^2 f(P_0)(H) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,
i
$d^2 f(P_0)(H) = d(df(P_0))(H) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i f(P_0)\, dx_i\right)(H)\, dx_j =$
$= \sum_{j=1}^{n} \delta_j \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i f(P_0)\, h_i\right) dx_j \; [\in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})]$
no onda je za $K \in \mathbb{R}^n$:
$\left(d^2 f(P_0)(H)\right)(K) = \left(\sum_{j=1}^{n} \delta_j \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i f(P_0)\, h_i\right) dx_j\right)(K) = \boxed{?}$
odnosno, jer smo gore rekli da $d^2 f(P_0)$ mozemo interpretirati kao $d^2 f(P_0)$ $\in BL(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,pa je $= \left(d^2 f(P_0)\right)(H, K) = \boxed{?}$

Corollary 26 *(O egzistenciji drugog diferencijala): Ako parcijalne derivacije drugog reda funkcije* $f : \Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ***postoje na*** Ω, *i* ***neprekidne*** *su u tocki* P_0, *onda* $\exists$ ***drugi diferencijal*** $d^2 f(P_0)$.

Conclusion 3 *Ako parcijalne derivacije drugog reda funkcije* f ***postoje na*** Ω, *i* ***neprekidne*** *su* ***na*** Ω, *onda je funkcija* f *klase* $C^2(\Omega)$ *(vidi Zaklj.2)*

Corollary 27 *Funkcija* $f : \Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *je* klase $C^p(\Omega)$ ***akko*** *sve parcijalne derivacije p-tog reda* ***postoje*** *i* ***neprekidne su na*** Ω[73]

Theorem 28 *Neka je* $f : \Omega \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ *funkcija klase* C^2*na* Ω[74]. *Tada je* $\forall i, j = 1, \ldots, n; \forall P \in \Omega$

$$\delta_i \delta_j f(P) = \delta_j \delta_i f(P) \tag{36}$$

Proof. ■

Corollary 29 *(Za* dim p *generalno): Ako je* $f \in C^p(\Omega)$ *onda su parc. derivacije p-tog reda po istim varijablama* ***jednake*** *bez obzira o redoslijedu deriviranja.*

Teorem o srednjoj vrijednosti

Vec smo spominjali teorem o srednjoj vrijednosti (Lagrangeov) za realne funkcije realne varijable (vidi Ekskurs u dokazu Tm.24).

Poopcimo ga sad najprije na sve skalarne funkcije ($\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$), a potom cemo dati njegovo pravo poopcenje na funkcije $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

[73] Mozemo reci i ovako: $f : \Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je klase C^p **akko** su sve parcijalne derivacije od f , funkcije klase C^{p-1}.
[74] Tj. postoje sve parcijalne derivacije drugog reda na Ω i neprekidne su.

Theorem 30 *(O srednjoj vrijednosti, za skalarne funkcije): Neka je* $f : \Omega \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ *diferencijabilna na* Ω[75]*, i neka je segment* $[P_0, P] \subseteq \Omega$*. Tada* $\exists \theta \in \langle 0, 1 \rangle$ *takvo da je*

$$f(P) - f(P_0) = df\underbrace{(P_0 + \theta (P - P_0))}_{ozn.\ P_\theta}(P - P_0) \tag{37}$$

Proof. Trebamo pokazati da postoji $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ za koji vrijedi (37). U tu svrhu uvest cemo jos jedno preslikavanje $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, pa ga komponirati s $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Tako ce kompozicija biti preslikavanje $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, pa cemo na nju primijeniti Lagrangeov tm za realne funkcije realne varijable:

Definirajmo $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \Omega$ fomulom $\varphi(t) = P_0 + t(P - P_0)$. Kako su polinomi prvog stupnja klase C^∞ to su i klase C^1, odnosno prema Def.16 su diferencijabilni, a prema tome i neprekidni $\boxed{?}$.
Sada je dobro definirana kompozicija $g = f \circ \varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, koja je takodjer neprekidna na $[0, 1]$ i diferencijabilna na $\langle 0, 1 \rangle$ (jer je kompozicija takvih funkcija), pa na g mozemo primijeniti Lagrangeov teorem srednje vrijednosti:
Dakle $\underline{\exists c} \in [0, 1]$, $c = 0 + \theta (1 - 0) = \theta$,($\underline{c = \theta}$, pa dakle $\underline{\exists \theta}$) takva da je $g(1) - g(0) = g'(\theta) \cdot (1 - 0)$.
Tj. $g(1) - g(0) = (dg(\theta))(1) = (d(f \circ \varphi)(\theta))(1) =$ prema Svojstvu4 $= (df(\varphi(\theta)) \circ d\varphi(\theta))(1) = (df(\varphi(\theta)))(d\varphi(\theta))(1)$.

- No imamo: $g(1) - g(0) = (f \circ \varphi)(1) - (f \circ \varphi)(0) =$
  $= f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)) = f(P_0 + 1(P - P_0)) - f(P_0 + 0(P - P_0)) =$
  $= f(P) - f(P_0)$
- Izracunajmo jos $d\varphi(\theta)(1)$:
  Kako je φ diferencijabilna u svakoj tocki domene, (pa i u proizvoljnoj tocki $t \in \langle 0, 1 \rangle$) to prema (23) za $h \in \mathbb{R}$ imamo:
  $d\varphi(t)(h) = \varphi'(t) \cdot h = (P - P_0) \cdot h$, pa je
  $d\varphi(\theta)(1) = (P - P_0)$.

Pa imamo: $g(1) - g(0) =$
$= f(P) - f(P_0) =$
$= (df(\varphi(\theta)))(P - P_0) =$ jer je $\varphi(\theta) = P_0 + \theta(P - P_0)$, to je $=$
$= df(P_0 + \theta(P - P_0))(P - P_0)$
cime je teorem dokazan. ■

Corollary 31 *Neka je* $f : \Omega \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ *funkcija sa svojstvom da postoje* $\delta_i f(P), \forall P \in \Omega, \forall i = 1, \ldots, n$*, i da su* $\delta_i f$ *neprekidne na* Ω[76]*. Ako je* $[P_0, P] \subseteq \Omega$*, onda* $\exists \theta \in [0, 1]$ *t. da je*

$$f(P) - f(P_0) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(P_\theta)\left(x_i - x_i^0\right) \tag{38}$$

[75] Tj. u svakoj tocki $P \in \Omega$ postoji diff $df(P) : \Omega \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
[76] Iz ovih uvjeta slijedi :
Prema Tm.24 da je f diferencijabilna na Ω,
a prema Kor.25 slijedi da je f klase $C^1(\Omega)$.

gdje je $P = (x_1, \ldots, x_n)$, $P_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$, *te* $P_\theta = (P_0 + \theta (P - P_0)) \in [P_0, P] \subseteq \Omega$.

Proof. Iz uvjeta teorema, prema Tm.24, slijedi da je f diferencijabilna na Ω, pa na $[P_0, P] \subseteq \Omega$ mozemo primijeniti Tm.30, pa vrijedi:
$f(P) - f(P_0) = df(P_\theta)(P - P_0) =$ pa, jer je f skalarna funkcija, prema (18) $=$
$= \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(P_\theta)\left(x_i - x_i^0\right)$, jer je $P - P_0 = \left(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0\right)$ ■

Corollary 32 *Neka vrijede pretpostavke Tm.30, i neka jos vrijedi da* $\exists M > 0$ *t. da je* $\|gradf(Q)\| \leq M$, *za sve tocke* $Q \in [P_0, P_0 + H]$. *Tada je*

$$\|f(P) - f(P_0)\| = |f(P) - f(P_0)| \leq M \cdot \|P - P_0\| \tag{39}$$

Proof. Kako vrijede pretpostavke Tm.30, to $\exists \theta \in [0, 1]$ t da vrijedi:
$f(P) - f(P_0) = df(P_\theta)(P - P_0)$. No kako je f skalarna funkcija to prema (25) slijedi:
$f(P) - f(P_0) = (gradf(P_\theta) \mid P - P_0)$.
Ocijenimo sad tu razliku funkcijskih vrijednosti:
$\|f(P) - f(P_0)\| = |f(P) - f(P_0)| =$
$= \|(gradf(P_\theta) \mid P - P_0)\| =$ jer je skalarni produkt $\in \mathbb{R}$,pa $|(gradf(P_\theta) \mid P - P_0)|$.
No prema Couchyevoj nejednakosti: $|(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, mozemo pisati:
$|(gradf(P_\theta) \mid P - P_0)| \leq \|gradf(P_\theta)\| \cdot \|P - P_0\| \leq$
$\leq M \cdot \|P - P_0\|$. ■

Remark 10 *Neka je* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$ *i* $f \in C^1(\Omega)$. *Tada za sve* $Q \in [P_0, P_0 + H] \subseteq \Omega$ *postoji* $M > 0$, *t. da je* $M \geq \|gradf(Q)\|$.

Proof. Kako je $f \in C^1(\Omega)$, to prema Def.16 znaci da je f diferencijabilna na Ω i da je $df : \Omega \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ neprekidno na Ω.
Funkcija $\|gradf\|$ je zapravo kompozicija funkcija $gradf$ i $\|\|$, tj $\|gradf(Q)\| = (\|\| \circ gradf)(Q)$.

Prema definiciji gradijenta (19) je $gradf = (\delta_1 f, \ldots, \delta_n f)$, pa parcijalne derivacije $\delta_i f$ $(i = 1, \ldots, n)$ mozemo promatrati kao funkcije $\delta_i f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tj koordinatne funkcije (vidi Nap.4)od $gradf$. No prema Kor.25 su sve parcijalne derivacije $\delta_i f$ $(i = 1, \ldots, n)$ neprekidne na Ω, tj sve koordinatne funkcije od $gradf$ su neprekidne na Ω, pa prema Tm.8 slijedi da je i funkcija $gradf$ neprekidna na Ω.

Otprije znamo da je $\|\|$ neprekidna funkcija, pa je i funkcija $\|gradf\| = (\|\| \circ gradf)$ takodjer neprekidna kao kompozicija dviju neprekidnih funkcija (vidi Kor.7).

Kako je $Q \in [P_0, P_0 + H] \subseteq \Omega$, to je domena nase kompozicije $\|gradf\|$ upravo segment $[P_0, P_0 + H]$, tj $\|gradf\| : [P_0, P_0 + H] \longrightarrow \mathbb{R}$, pa prema Lemi9 za svaku tocku $Q \in [P_0, P_0 + H]$, postoji $M \in \mathbb{R}$ t. da je $|\|gradf(Q)\|| = \|gradf(Q)\| < M$. ■

Remark 11 *Iako iskaz Tm.30 ima smisla i za vektorske funkcije* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, *ipak za njih ne vrijedi, kao sto pokazuje sljedeci primjer:*

Example 10 *Neka je dana funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$[77] *diferencijabilna n segmentu* $[t_0, t_0 + h] \subseteq \Omega$. *Tada je prema (23) za svaki* $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$
$df(t)(h) = f'(t) \cdot h = h(-\sin t, \cos t)$.

Pretpostavimo da vrijedi generalizacija Teorema srednje vrijednosti za funkciju f*: To znaci da za dane* $t_0, h \in \mathbb{R}$ *postoji* $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ *takav da je*
$f(t_0 + h) - f(t_0) = df(t_0 + \theta h)(h)$ *tj.*
$(\cos(t_0 + h), \sin(t_0 + h)) - (\cos t_0, \sin t_0) = h(-\sin(t_0 + \theta h), \cos(t_0 + \theta h))$.
"Napanemo" li s normom obje strane gornje jednakosti imat cemo:
- $\|(\cos(t_0 + h), \sin(t_0 + h)) - (\cos t_0, \sin t_0)\| =$
$= \sqrt{(\cos(t_0 + h) - \cos t_0)^2 + (\sin(t_0 + h) - \sin t_0)^2} \leq \sqrt{2^2 + 2^2} \leq \underline{2\sqrt{2}}$
- $\|h(-\sin(t_0 + \theta h), \cos(t_0 + \theta h))\| = |h| \, \|(-\sin(t_0 + \theta h), \cos(t_0 + \theta h))\| =$
$= |h| \sqrt{(-\sin(t_0 + \theta h))^2 + \cos^2(t_0 + \theta h)} = |h| \cdot 1 = \underline{|h|}$

Dakle norma lijeve strane je $\leq 2\sqrt{2}$, *dok je norma desne jednaka* $|h|$. *Stoga, ako je* $h > 2\sqrt{2}$ *ne moze postojati* θ *za koji bi vrijedio Tm.30.*

Theorem 33 *(Tm. srednje vrijednosti za vektorske funkcije)*[78]*: Neka je* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ *diferencijabilna na* Ω *i* $[P_0, P] \subseteq \Omega$. *Ako* $\exists M \geq 0$ *t. da je* $\forall Q \in [P_0, P], \forall H \in \mathbb{R}$, $\|df(Q)(H)\| \leq M \cdot \|H\|$, *onda je*

$$\|f(P) - f(P_0)\| \leq M \cdot \|P - P_0\|^{79} \tag{40}$$

Proof. Ako je $f(P) = f(P_0)$ onda je $\|f(P) - f(P_0)\| = 0 \leq M \cdot \|P - P_0\|$, pa teorem vrijedi.

Neka je dakle $f(P) \neq f(P_0)$, i neka $\exists M \geq 0$ t. da je $\forall Q \in [P_0, P], \forall H \in \mathbb{R}$, $\|df(Q)(H)\| \leq M \cdot \|H\|$. Zelimo pokazati da je tada $\|f(P) - f(P_0)\| \leq M \cdot \|P - P_0\|$.
Ocito cemo u dokazu iskoristiti da je $\|df(Q)(H)\| \leq M \cdot \|H\|$, stoga trebamo nekako dovesti u vezu $\|df(Q)(H)\|$ i $\|f(P) - f(P_0)\|$:

Definirajmo najprije vektor $S = \frac{f(P) - f(P_0)}{\|f(P) - f(P_0)\|}$. Ocito je $\|S\| = 1$[80] i vrijedi:
(i) $\underline{\|f(P) - f(P_0)\|} =^{81} \left(f(P) - f(P_0) \mid \frac{f(P) - f(P_0)}{\|f(P) - f(P_0)\|} \right) =$

---

[77] "Namatanje pravca na kruznicu"
[78] Generalizacija Kor.32.
[79] $P - P_0 = H$
[80] Neka je za $a \in \mathbb{R}^n, x = \frac{a}{\|a\|}$. Ocito je i $x \in \mathbb{R}^n$ jer je $\|a\| \in \mathbb{R}$, pa u stvari imamo $x = \frac{1}{\|a\|} \cdot a$ tj mnozenje vektora a skalarom $\frac{1}{\|a\|}$. Tvrdimo da je $\|x\| = 1$. Naime $\|x\| = \left\| \frac{1}{\|a\|} \cdot a \right\| =$ prema svojstvu norme $= \left| \frac{1}{\|a\|} \right| \cdot \|a\| = \frac{1}{\|a\|} \cdot \|a\| = 1$.
Dakle $\forall a \in \mathbb{R}^n$ je $\frac{a}{\|a\|}$ jedinicni vektor, tj vektor cija je norma jednaka 1.
[81] Pokazimo da za $a \in \mathbb{R}^n$ vrijedi: $\|a\| = \left(a \mid \frac{a}{\|a\|} \right)$. Naime definira se $\|a\| = \sqrt{(a \mid a)}$,

$= (f(P) - f(P_0) \mid S) =$ zbog distributivnosti skalarnog produkta $= \underline{(f(P) \mid S) - (f(P_0) \mid S)}$
.

Pokusajmo sad potcrtano dovesti u vezu s $\|df(Q)(H)\|$:
Definirajmo u tu svrhu dvije funkcije:
- $\varphi : [0,1] \longrightarrow [P_0, P] \subseteq \Omega$ formulom: $\varphi(t) = P_0 + t(P - P_0)$, te
- $s : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, formulom: $s(K) = (K \mid S), \forall K \in \mathbb{R}^m$.

Napravimo sad kompoziciju $g = s \circ f \circ \varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Ovo je realna funkcija realne varijable, pa bi zeljeli na nju primijeniti Lagrangeov tm. Provjerimo da li udovoljava uvjetima L'g tm-a , tj je li neprekidna na segmentu $[0,1]$ i diferencijabilna, tj derivabilna na intervalu $\langle 0,1 \rangle$:
Kompozicija g ce biti takva ako su takve s, f, i φ (vidi. Kor.7 i Tm.22). Pa idemo redom:
- f je prema uvjetima ovog teorema diferencijabilna na cijelom Ω, pa je prema Tm.21 i neprekidna u svakoj tocki iz Ω (pa posebno i u svakoj tocki segmenta $[P_0, P] \subseteq \Omega$).
- φ je polinom jedne varijable, pa je i neprekidno i diferencijabilno (u svakoj tocki domene).
- Pokazimo da je s diferencijabilno:

(-) Tvrdimo da je s linearni funkcional: Dokazimo to:
Da bi s bilo lin.funkc. treba za $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, te za $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^m$ vrijediti $s(\lambda K_1 + \mu K_2) = \lambda s(K_1) + \mu s(K_2)$.
Imamo: $s(\lambda K_1 + \mu K_2) = (\lambda K_1 + \mu K_2 \mid S) =$
$= (\lambda K_1 \mid S) + (\mu K_2 \mid S) =$ zbog distributivnosti skalarnog produkta$=$ $\lambda (K_1 \mid S) + \mu (K_2 \mid S) =$
$= \lambda s(K_1) + \mu s(K_2)$.

Dakle s je lin. funkcional, pa je prema 8 diferencijabilno u svakoj tocki domene, (i diferencijal u tocki je on sam tj za neki $K \in \mathbb{R}^m$, je $ds(K) = s$) odnosno prema Tm.21 je i neprekidno (u svakoj tocki domene).

Dakle g doista udovoljava uvjetima L'g tm-a, pa postoji $\theta \in [0,1]$ takva da je
$g(1) - g(0) = g'(\theta) \cdot (1 - 0)$, tj
$g(1) - g(0) = dg(\theta)(1)$.
Raspisimo desnu stranu gornje jednakosti:

(-) $\underline{dg(\theta)(1)} = d(s \circ f \circ \varphi)(\theta)(1) =$ prema Tm.22 $=$
$= [d(s \circ f)(\varphi(\theta)) \circ d\varphi(\theta)](1) =$
$= [ds(f(\varphi(\theta))) \circ df(\varphi(\theta)) \circ d\varphi(\theta)](1) =$
$= [ds(f(\varphi(\theta))) \circ df(\varphi(\theta))](d\varphi(\theta)(1)) =$
$= \underbrace{ds(f(\varphi(\theta)))}_{diff.od\ s\ u\ f(\varphi(\theta))} \underbrace{(df(\varphi(\theta))(d\varphi(\theta)(1)))}_{\in \mathbb{R}^m} = *$

odakle slijedi $(a \mid a) = \|a\|^2$.
Prema svojstvima norme imamo: $\left(a \mid \frac{a}{\|a\|}\right) = \left(\frac{1}{\|a\|} a \mid a\right) = \frac{1}{\|a\|}(a \mid a) = \frac{1}{\|a\|}\|a\|^2 = \|a\|$

φ je vektorska funkcija realne varijable, pa je prema (23):
$d\varphi(\theta)(1) = \varphi'(\theta)\cdot 1 = (P - P_0)\cdot 1 = (P - P_0)$,
ali kako je s lin.funkc., to je za neki $K \in \mathbb{R}^m, ds(K) = s$, pa imamo:
$* = s(df(\varphi(\theta))(P - P_0)) =$
jer je $[P_0, P] \ni \varphi(\theta) = P_0 + \theta(P - P_0) \equiv Q \in [P_0, P]$,
$= s(df(Q)(P - P_0)) =$
$=\underline{(df(Q)(P - P_0) \mid S)}$

Pa imamo:
$g(1) - g(0) = (df(Q)(P - P_0) \mid S)$.
No izracunamo li sad $g(1)$ i $g(0)$:

(-) $g(1) = (s \circ f \circ \varphi)(1) = (s \circ f)(\varphi(1)) = s(f(P)) = (f(P) \mid S)$
$g(0) = (s \circ f \circ \varphi)(0) = (s \circ f)(\varphi(0)) = s(f(P_0)) = (f(P_0) \mid S)$

dobijemo: $g(1) - g(0) = (f(P) \mid S) - (f(P_0) \mid S)$. Pa je
$\underline{(f(P) \mid S) - (f(P_0) \mid S)} = (df(Q)(P - P_0) \mid S)$.
Sada je konacno prema jednakosti (i):
(ii) $\|f(P) - f(P_0)\| = (df(Q)(P - P_0) \mid S)$,
napokon smo dakle pronasli trazenu vezu.
Prisjetimo se, trebamo pokazati: $\|f(P) - f(P_0)\| \leq M \cdot \|P - P_0\|$, uz uvjet da $\exists M > 0$, t. da je $\|df(Q)(H)\| \leq M \cdot \|H\|$.
Pa imamo: $(df(Q)(P - P_0) \mid S) \leq$ prema Couchyevoj nejednakosti $\leq$
$\leq \|df(Q)(P - P_0)\| \cdot \|S\| = \|df(Q)(H)\| \cdot 1 = \|df(Q)(H)\|$.

I konacno je prema (ii):
$\|f(P) - f(P_0)\| \leq \|df(Q)(H)\| \leq M \cdot \|P - P_0\|$, cime je teorem dokazan.
■

Istaknimo jos jednom da se u slucaju $m = 1$, prethodni teorem svodi na Kor.32.

Pitamo se postoje li takve funkcije da zadovoljavaju uvjete prethodnog teorema, tj da $\exists M \geq 0$ t. da je $\forall Q \in [P_0, P], \forall H \in \mathbb{R}, \ \|df(Q)(H)\| \leq M \cdot \|H\|$:

Remark 12 *Ako je $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, onda $M \geq 0$ koji ce zadovoljiti trazeni uvjet iz prethodnog teorema, sigurno postoji.*

Proof. Ako je $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, to prema Kor.25 postoje sve parcijalne derivacije $\delta_j f_i$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ i one su neprekidne funkcije. Prema (22) imamo:
$\|df(Q)(H)\| = \left\|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(Q) \times H\right\| =^{82} \left\|\left(\sum_{j=1}^n \delta_j f_1(Q)\cdot h_j, \ldots, \sum_{j=1}^n \delta_j f_m(Q)\cdot h_j\right)\right\| \boxed{?}$
■

[82] Radi se o umnosku matrice tipa (m, n) i matrice tipa $(n, 1)$, pa je produkt matrica tipa $(m, 1)$, tj vektor iz $\mathbb{R}^m$.

Corollary 34 *Neka je* $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$, *povezan skup*[83], *i neka je* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, *diferencijabilno preslikavanje sa svojstvom da je* $df(P) =$ *nuloperator* , $\forall P \in \Omega$. *Tada je* f *konstantno preslikavanje.*

Proof. Treba pokazati da je za proizvoljne tocke $P, P_0 \in \Omega$, vrijedi: $f(P) = f(P_0)$.

Kako smo u kontekstu teorema o srednjoj vrijednosti, bilo bi njazgodnije kad bismo pokazali da postoji $M \geq 0$, takav da je, za $Q \in [P_0, P]$, $\|df(Q)(H)\| \leq M \cdot \|H\|$, pa bismo mogli primijeniti Tm.33, i jos kad bi bilo $M = 0$, imali bi: $0 \leq^{84} \|f(P) - f(P_0)\| \leq M \cdot \|H\| = 0$, pa bi lako zakljucili da je $f(P) = f(P_0)$.

Medjutim, vazan uvjet Tm.33 jeste da je segment $[P_0, P]$ **podskup** od Ω. Stoga moramo voditi racuna i o tom jos jedino preostalom uvjetu, jer nista nam ne garantira da ce proizvoljni P, P_0 biti takvi da je citav segment $[P_0, P] \subseteq \Omega$, tj da su sve tocke tog segmenta (vidi Def.5), unutar Ω.

No kako je Ω povezan, to prema Tm.3 znaci da se P i P_0 mogu spojiti poligonalnom crtom tj. unijom segmenata (vidi Def.7), od kojih svaki lezi unutar Ω.

Pokaze li se da svaki taj segment ispunjava uvjete Tm.33, moci cemo taj teorem primijeniti na svaki od njih posebno, te cemo tada uz $M = 0$ moci zakljuciti tvrdnju teorema. Napravimo to:

Dakle jer je Ω povezan, to se proizvoljne P, P_0, mogu spojiti unijom segmenata koja lezi u Ω tj:
$[P_0, P_1] \cup [P_1, P_2] \cup \cdots \cup [P_{n-1}, P] \subseteq \Omega$.
Odavde slijedi da je $\forall i = 0, \ldots, n-1$, segment $[P_i, P_{i+1}] \subseteq \Omega$.
Uzmemo li sad iz svakog segmenta proizvoljnu tocku Q, jer je diferencijal nuloperator, vrijedit ce za svaki segment:
$\|df(Q)(H)\| = \|0\| = 0 \leq 0 \cdot \|H\|$, pa $M = 0$ udovoljava uvjetu Tm.33 (za svaki segment).

Dakle sad za svaki segment imamo ispunjene uvjete Tm.33 pa primijenimo ga onda na svaki segment posebno:
Imamo za proizvoljni:
$0 \leq \|f(P_{i+1}) - f(P_i)\| \leq 0 \cdot \|P_{i+1} - P_i\| = 0$
iz cega slijedi: $f(P_{i+1}) - f(P_i) = 0$, odnosno : $f(P_{i+1}) = f(P_i)$, $\forall i = 0, \ldots, n-1$.

Dakle $f(P_0) = f(P_1) = \cdots = f(P_{n-1}) = f(P)$, tj f je konstatno preslikavanje. ■

Funkcije zadane implicitno

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Pitamo se da le jednadzba $F(x, y) = 0$ ima rjesenje, tj postoji li $(x, y) \in D$ t. da je $F(x, y) = 0$.

Ako postoji $S \subseteq \mathbb{R}$ t da $\forall x \in S$, $\exists! y \in \mathbb{R}$ t. da je $F(x, y) = 0$, onda se funkcija $x \longmapsto y = f(x)$ naziva funkcija *zadana implicitno* funkcijom F.

[83] Prema Def.10 je onda Ω **podrucje.** (Kod funkcija $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, Ω je bio segment - povezan skup)
[84] Svojstvo norme (1): $\|a\| \geq 0$.

Example 11 *Neka je* $D = \mathbb{R}^2$*, Promotrimo* $F(x,y) = x^2 - y^2$ *tj. jednadzbu:* $F(x,y) = x^2 - y^2 = 0$.

Ocito funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $f(x) = x$ *zadovoljava tu jednadzbu. No i funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $g(x) = -x$ *takodjer ju zadovoljava. Isto tako i funkcije:* $h, k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $h(x) = |x|$*,* $k(x) = -|x|$ *zadovoljavaju. Ali i* $l : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $l(x) = \{ {}^{x, x \in \mathbb{Q}}_{-x, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ *zadovoljava tu jednadzbu, i ocito mnogo drugih funkcija.*

U klasi funkcija koje zadovoljavaju nasu jednadzbu jedino su funkcije f, g, h, k neprekidne na cijelom $\mathbb{R}$, a medju njima jedino f i g svuda diferencijabilne. Da bismo dobili jedinstveno rjesenje, morat cemo, i u diferencijabilnom slucaju imati neke dodatne pretpostavke:

Theorem 35 *(O implicitno zadanoj funkciji, skalarni slucaj):*

(i) Neka je $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*, i* $F : \Omega \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$ *funkcija* $\underline{\text{klase } C^1(\Omega)}$*,*

(ii) $Q_0 = (P_0, y_0) = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0\right) \in \Omega$*, tocka sa svojstvom da je* $\underline{F(Q_0) = 0}$*, i* $\underline{\delta_{n+1} F(Q_0) \neq 0}$.

Tada $\boxed{\exists}$ *okolina* $U^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ *oko tocke* P_0*, te* $\boxed{\exists}$ *okolina* $V^{otv} \subseteq \mathbb{R}$ *oko tocke* y_0*, takve da je* $U \times V \subseteq \Omega$*,*

i $\boxed{\exists!}$ $f : U \longrightarrow V$ $\underline{\text{klase } C^1(U)}$*, takva da je* $\underline{F(P, f(P)) = 0}$*,* $\forall P \in U$*, pri cemu je jos*

$$\delta_i f(P) = -\frac{\delta_i F(P, f(P))}{\delta_{n+1} F(P, f(P))}^{85} (i = 1, \ldots, n), P \in U.. \tag{41}$$

Proof. U dokazu ce nam od presudne vaznosti biti sljedeca lema, stoga najprije:

Lemma 36 *(O kontrakciji): Neka je* $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [\alpha, \beta] (\subseteq \mathbb{R})$*, funkcija sa svojstvom da* $\underline{\exists \kappa}$*,* $0 \leq \kappa < 1$*, t. da je* $|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq \kappa |t - s|$*,* $\forall s, t \in [\alpha, \beta]$*. (Funkcija s takvim svojstvom naziva se* kontrakcija*). Tada* $\boxed{\exists!}$ $t^* \in [\alpha, \beta]$ *sa svojstvom da je* $\varphi(t^*) = t^*$*. (Tocka s ovim svojstvom zove se* fiksna tocka*).*[86]

Proof. *Neka je* φ *kontrakcija. Trebamo pronaci tocku koju* φ *preslika u nju samu, a potom dokazati njenu jedinstvenost. U tu svrhu cemo definirati funkciju* $\psi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *,* $\psi(t) = t - \varphi(t)$*, pokazati da je neprekidna, te da je predznak funkcijskih vrijednosti krajeva segmenta* $[\alpha, \beta]$ *razlicit, sto zbog neprekidnosti znaci da* <u>*postoji*</u> *tocka unutar segmenta u kojoj je* $\psi(t) = 0$*, odnosno* $t = \varphi(t)$ *:*

Obzirom na vrijednost funkcije φ *u krajevima intervala moguci su slucajevi:* $\varphi(\alpha) = \alpha$ *ili* $\varphi(\beta) = \beta$ *ili* $\alpha < \varphi(\alpha)$ & $\varphi(\beta) < \beta$.

Ukoliko se radi o prvom ili drugom slucaju, onda smo vec pronasli fiksnu tocku, pa je dokaz gotov.

Razmotrimo stoga najopcenitiji treci slucaj:

---

[85] Relacija daje nacin za izracunavanje svih parcijalnih derivacija implicitno zadane funkcije f pomocu deriviranja funkcije F, (sto znaci da ne moramo prethodno explicitno izraziti f (sto moze biti jako tezak problem) da bismo izracunali njene parcijalne derivacije).

[86] Lemom se dakle tvrdi: Svaka kontrakcija ima jedinstvenu fiksnu tocku

Pokazimo najprije da je fukcija ψ neprekidna: Ocito ce ona biti neprekidna ukoliko je φ neprekidna jer onda ψ mozemo shvatiti kao sumu (tj razliku) dviju neprekidnih funkcija (konstante t i φ).
Pokazimo onda da je φ neprekidna: Naime, po pretpostavci u lemi postoji $\kappa \in [0,1\rangle$,(tj. $\kappa \geq 0$) t. da je $|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq \kappa |t-s|$, $\forall t, s \in [\alpha, \beta]$, sto prema Def.13 znaci da φ ima Lipshitzovo svojstvo, a to pak prema Tm.5 znaci da je φ neprekidna.

Pogledajmo sad vrijednosti funkcije ψ u krajnjim tockama domene: Imamo:
$\psi(\alpha) = \alpha - \varphi(\alpha)$, *a kako je* $\alpha < \varphi(\alpha)$, *to je* $\underline{\psi(\alpha) < 0}$. *te*
$\psi(\beta) = \beta - \varphi(\beta)$, *a kako je* $\varphi(\beta) < \beta$, *to je* $\underline{\psi(\beta) > 0}$.
Dakle dobili smo da su vrijednosti neprekidne funkcije (ψ) definirane na segmentu, u krajnjim tockama domene razlicitog predznaka, pa mora postojati $t^* \in [\alpha, \beta]$ [87] (barem jedno) t. da je $\psi(t^*) = 0$, tj:
$\psi(t^*) = t^* - \varphi(t^*) = 0 \implies \varphi(t^*) = t^*$, *odnosno postoji (barem jedna) fiksna tocka fukcije φ.*

Pokazimo jos jedinstvenost:
Pretpostavimo da su $t^*, s^* \in [\alpha, \beta]$ fiksne tocke preslikavanja φ, i neka je $t^* \neq s^*$.To znaci:
$0 < |t^* - s^*| = |\varphi(t^*) - \varphi(s^*)| \leq$ *jer je φ kontrakcija* $\leq \kappa |t^* - s^*| <$ *jer je* $0 \leq \kappa \boxed{<} 1$, *pa je* $< |t^* - s^*|$, *tj dobili smo da je* $|t^* - s^*| < |t^* - s^*| \, (\in \mathbb{R})$ *sto je kontradikcija, dakle ne vrijedi pretpostavka da je $t^* \neq s^*$, nego njena suprotnost tj $t^* = s^*$, cime je dokazana i jedinstvenost fiksne tocke funkcije φ.* ■

Sada mozemo dokazati teorem:
Neka vrijede uvjeti teorema. Trebamo napraviti dosta toga:
Pronaci $U^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ oko P_0, i $V^{otv} \subseteq \mathbb{R}$ oko y_0, t da je $U \times V \subseteq \Omega$,
da bi pronasli, tj, definirali funkciju f: $U \longrightarrow V$, klase $C^1(U)$, za koju ce $\forall P \in U$, biti $F(P, f(P)) = 0$,
i jos pokazati da se svaka parcijalna derivacija fukcije f moze izracunati pomocu parcijalnih derivacija funkcije F, (tj po formuli navedenoj u teoremu).

Trazenu (implicitno zadanu) funkciju $f : U \longrightarrow V$ definirat cemo pomocu funkcije $\varphi_P : V \longrightarrow \mathbb{R}, (P \in U)$, koju cemo posebno definirati i analizirajuci njena svojstva utvrditi da je pogodna za definiranje funkcije f, te na kraju jos pokazati da je tako definirano f funkcija klase $C^1(U)$ u sklopu cega cemo pokazati da vrijedi formula za racunanje parcijalnih derivacija f-je f navedena u teoremu.

Zelimo dakle definirati funkciju φ_P, no ocito prije toga moramo opisati skupove U i V. No ipak najprije istaknimo nekoliko posljedica uvjeta teorema, koje cemo koristiti tijekom cijelog dokaza, tj za definiranje skupova U i V te funkcija φ_P i f kao i njihovih svojstava:

Promotrimo najprije funkcije: $\delta_i F$, $(i = 1, \ldots, n)$, te funkciju $\frac{1}{\delta_{n+1} F}$. Sve ove funkcije su neprekidne u tocki $Q_0 = (P_0, y_0) \in \Omega$, (jer je F klase $C^1(\Omega)$

[87] Teorem iz analize realnih funkcija realne varijable: Neka je f neprekidna na segmentu $[a, b]$, i neka je $f(a) < 0$ & $f(b) > 0$ (ili obrnuto), tada postoji barem jedno $c \in \langle a, b \rangle$ takvo da je $f(c) = 0$.

pa zbog Kor.25)[88]. No zbog Leme9 sve te funkcije su omedjene, tj za svaku od njih postoje $\mu_i' > 0$ i $M_i > 0$ iz Leme, $(i = 1, \ldots, n+1)$, pa uzmemo li $\min \mu_i' = \mu'$, te $\max M_i = M$, oni ce vrijediti za sve te funkcije, pa prema Lemi, zbog neprekidnosti od F u Q_0, mozemo pisati:
(i) $\forall Q \in k(Q_0, \mu')$: $|\delta_i F(Q)| \leq M$, $(i = 1, \ldots, n)$ i $\frac{1}{|\delta_{n+1} F(Q)|} \leq M$.
Nadalje, oznacimo li $\mathbb{R} \ni \gamma \equiv \frac{1}{\delta_{n+1} F(Q_0)} \neq 0$ (uvjet teorema), tada zbog neprekidnosti od $\delta_{n+1} F$, sigurno postoji $\lim_{Q \longrightarrow Q_0} (\gamma \cdot \delta_{n+1} F(Q)) = 1$[89]. No prema Def.14 to znaci da:
$\forall \varepsilon > 0$ (pa i za $\varepsilon = \frac{1}{4}$), $\exists \mu \leq \mu' \boxed{?}$, takav da $\forall Q \in k(Q_0, \mu)$ vrijedi:
(ii) $|\gamma \delta_{n+1} F(Q) - 1| < \frac{1}{4}$

Opisimo sad skupove U i V:
Odaberimo $a, b \in \mathbb{R}^+$, tako da je
$\langle x_1^0 - a, x_1^0 + a \rangle \times \cdots \times \langle x_n^0 - a, x_n^0 + a \rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle \boxed{\subseteq k(Q_0, \mu)}$ [90]
i neka nam bude $a \leq \frac{b}{2\mu M |\gamma|}$. Sad oznacimo:
$U = \langle x_1^0 - a, x_1^0 + a \rangle \times \cdots \times \langle x_n^0 - a, x_n^0 + a \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$, $(P_0 \in U)$
$V = \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle \subseteq \mathbb{R}$, $(y_0 \in V)$
U je otvoren, V je otvoren, i $\boxed{U \times V \subseteq k(Q_0, \mu) \text{ je konveksan skup}}$

Definirajmo sad funkciju φ_P:
$\boxed{\forall P \in U}$ definiramo: $\varphi_P : V \longrightarrow \mathbb{R}$, sa $\varphi_P(y) = y - \gamma F(P, y)$
Rekli smo da cemo nasu trazenu implicitno zadanu funkciju $f : U \longrightarrow V$ definirati pomocu funkcije φ_P. Ucinit cemo to na sljedeci nacin:
Pokazat cemo najprije da za sve funkcije φ_P vrijedi: $\varphi_P(V) \subseteq V$, a potom i da je svaka φ_P kontrakcija, sto prema Lemi36 znaci da $\exists!$ fiksna tocka t_P^* za svako preslikavanje φ_P ($\forall P$ imamo preslikavanje φ_P), pa je
$\varphi_P(t_P^*) = t_P^*$. No prema definiciji funkcije φ_P je
$\varphi_P(t_P^*) = t_P^* - \gamma F(P, t_P^*)$, pa iz tih jednakosti slijedi:
$\gamma F(P, t_P^*) = 0 \implies$ jer je $\gamma \neq 0 \implies \boxed{F(P, t_P^*) = 0}$ $(\forall P \in U)$.
Kako to vrijedi $\forall P \in U$, bit ce dobro definirana funkcija $f : U \longrightarrow V$, sa

$$f(P) = \varphi_P(t_P^*) = t_P^* \tag{42}$$

i dakako vrijedit ce: $F(P, f(P)) = 0$.
Pokazemo li jos da je t_P^* jedinstvena tocka s tim svojstvom, tada ce f biti **jedina** funkcija s tim svojstvom, tj nasa trazena funkcija implicitno zadana funkcijom F.

- Pokazimo dakle da vrijedi gore potcrtano:
  Tvrdnja $\varphi_P(V) \subseteq V$ ce ocito biti ispunjena ako se pokaze da $\forall y \in V$ vrijedi:

[88] Funkcija $\frac{1}{\delta_{n+1} F}$ dakako je neprekidna jer je kvocijent dvaju neprekidnih.
[89] Jer postoje $\lim_{Q \longrightarrow Q_0} \gamma$ i $\lim_{Q \longrightarrow Q_0} \delta_{n+1} F(Q)$, pa zbog svojstva limesa (Nap.6) postoji i limes njihova produkta. (Jer je $\delta_{n+1} F$ neprekidna, zbog Kor.12 $\lim_{Q \longrightarrow Q_0} \delta_{n+1} F(Q)$ postoji i jednak je $\delta_{n+1} F(Q_0)$).
[90] U svaku kuglu se moze upisati n-kvadar

$|\varphi_P(y) - y_0| < b$, pa imamo:

$$\varphi_P(y) - y_0 = y - \gamma F(P,y) - y_0 = y - y_0 - \gamma \left(F(P,y) - \underbrace{F(P_0,y_0)}_{=0} \right) = *$$

Sada bismo zeljeli primijeniti Tm.30 na funkciju F[91]: Postoji dakle $Q_\theta \in [Q_0, Q]$ t da je $F(P,y) - F(P_0,y_0) = dF(Q_\theta)(Q - Q_0) =$ Kor.31 $= \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i F(Q_\theta)\left(x_i - x_i^0\right)$

$* = (y - y_0) - \gamma \left[\sum_{i=1}^{n} \delta_i F(Q_\theta)\left(x_i - x_i^0\right) + \delta_{n+1} F(Q_\theta)(y - y_0)\right] =$

$= (y - y_0)(1 - \gamma\delta_{n+1} F(Q_\theta)) - \gamma \sum_{i=1}^{n} \delta_i F(Q_\theta)\left(x_i - x_i^0\right)$.

Pogledajmo sad apsolutnu vrijednost:

$|\varphi_P(y) - y_0| \leq$

$\leq |(y - y_0)(1 - \gamma\delta_{n+1} F(Q_\theta))| - \left|\gamma \sum_{i=1}^{n} \delta_i F(Q_\theta)\left(x_i - x_i^0\right)\right| \leq$

$\leq |y - y_0| \, |1 - \gamma\delta_{n+1} F(Q_\theta)| + |\gamma| \sum_{i=1}^{n} |\delta_i F(Q_\theta)| \left|x_i - x_i^0\right| \leq^{92}$

$\leq b \cdot \frac{1}{4} + |\gamma| \cdot n \cdot M \cdot a \leq b \cdot \frac{1}{4} + |\gamma| \cdot n \cdot M \cdot \frac{b}{2 \cdot n \cdot M \cdot |\gamma|} = \frac{b}{4} + \frac{b}{2} = \frac{3}{4} b < b$

Dobili smo dakle $|\varphi_P(y) - y_0| < b$ stavise da je $|\varphi_P(y) - y_0| \leq \frac{3}{4} b$, $\forall y \in V$, sto znaci da je

$\varphi_P(V) \subseteq \left[y_0 - \frac{3}{4}b, y_0 + \frac{3}{4}b\right] \subseteq V$, ukratko: $\underline{\varphi_P(V) \subseteq V}$, sto smo i zeljeli.

- Pokazimo sad da je φ_P kontrakcija:
  Zapravo ne mozemo pokazati da je bas φ_P kontrakcija, jer prema Lemi36 kontrakcija mora biti definirana na segmentu i poprimati vrijednosti u istom segmentu, dok kodomena od φ_P nije jednaka domeni V, no maloprije smo pokazali da vrijedi $\varphi_P(V) \subseteq V$, pa je u stvari slika domene od φ_P podskup skupa $V\,(\subseteq \mathbb{R})$, stavise pokazali smo da je slika domene od φ_P zapravo podskup segmenta $I \equiv \left[y_0 - \frac{3}{4}b, y_0 + \frac{3}{4}b\right] (\subseteq V)$. No napravimo li restrikciju funkcije φ_P na I, imat cemo ispunjen uvjet iz Leme tj. $\underline{\varphi_P |_I : I \longrightarrow I}$.
  Pokazimo onda da je restrikcija $\varphi_P |_I$ kontrakcija:
  Odaberimo proizvoljne $t, s \in I$. Prema Lemi zelimo pokazati da
  $\underline{\exists \kappa}$, $0 \leq \kappa < 1$, t. da je $|\varphi_P |_I(t) - \varphi_P |_I(s)| \leq \kappa |t - s|$, $\forall s, t \in I$.
  Imamo: $|\varphi_P |_I(t) - \varphi_P |_I(s)| =$
  $= |t - \gamma \cdot F(P,t) - (s - \gamma F(P,s))| =$
  $= |(t - s) - \gamma \cdot [F(P,t) - F(P,s)]| = *$
  Zelimo sad na F primijeniti Tm.30[93] Postoji dakle tocka $(P, \tau) \in [(P,t), (P\,s)]$, $(\tau \in \langle s, t\rangle)$, takva da je

[91] Funkcija F udovoljava uvjetima Tm.30 jer je klase $C^1(\Omega)$, tj prema Def.16 F je diferencijabilna na Ω. Kako je $P \in U$, $y \in V$ to je $(P,y) \equiv Q \in U \times V \subseteq \Omega$, pa posto je $U \times V$ konveksan skup to je $[Q_0, Q] \subseteq U \times V \subseteq \Omega$. Dakle ispunjeni su svi uvjeti za primjenu Tm.30

[92] Iz definicije skupa V ocito $\forall y \in V$ vrijedi: $|y - y_0| < b$;
Zatim jer je $Q_\theta \in U \times V \subseteq k(Q_0, \mu)$ pa vrijedi relacija od prije $|1 - \gamma\delta_{n+1} F(Q_\theta)| < \frac{1}{4}$.
Isto tako imali smo prije: $|\delta_i F(Q)| \leq M, (\forall Q \in k(Q_0, \mu')), (i = 1, \ldots, n)$, pa ta relacija vrijedi i za $Q_\theta \in U \times V \subseteq k(Q_0, \mu) \subseteq k(Q_0, \mu')$.
I napokon iz definicije skupa U je ocito da za svaki $i = 1, \ldots, n$, je $\left|x_i - x_i^0\right| < a$

[93] Funkcija F kako rekosmo vec udovoljava uvjetima Tm.30 jer je klase $C^1(\Omega)$, tj prema Def.16 F je diferencijabilna na Ω.
Kako je $P \in U$, $t, s \in V$ to su $(P,t), (P,s) \in U \times V \subseteq \Omega$, pa posto je $U \times V$ konveksan skup to je $[(P,t), (P\,s)] \subseteq U \times V \subseteq \Omega$. Dakle ispunjeni su svi uvjeti za primjenu Tm.30

$F(P,t) - F(P,s) = dF(P,\tau)(t-s) =$Kor.31$= \sum_{i=1}^{n} \delta_i F(P,\tau)(x_i - x_i) +$
$\delta_{n+1} F(P,\tau)(t-s) = \delta_{n+1} F(P,\tau)(t-s)$.
$* = |(t-s) - \gamma \cdot \delta_{n+1} F(P,\tau)(t-s)| =$
$= |(t-s)[1 - \gamma \cdot \delta_{n+1} F(P,\tau)]| =$
$= |t-s| \cdot |1 - \gamma \cdot \delta_{n+1} F(P,\tau)| \leq^{94} \frac{1}{4}|t-s|$.
Dobili smo dakle da $\forall s,t \in I$ vrijedi:
$|\varphi_P|_I(t) - \varphi_P|_I(s)| \leq \frac{1}{4}|t-s|$
sto prema Lemi znaci da je $\varphi_P|_I$ kontrakcija.

Dakle relacijom (42) je dobro definirana funkcija f, i vrijedi:
$F(P, f(P)) = F(P, \varphi_P(t_P^*)) = F(P, t_P^*) = 0$.

- Pokazimo jos da je f jedina funkcija $: U \longrightarrow V$, s tim svojstvom:
  Pretpostavimo da za neki $y \in V$ takodjer vrijedi: $F(P,y) = 0$.
  Tada je: $\varphi_P(y) = y - \gamma \cdot F(P,y) = y - \gamma \cdot 0 = y$
  No kako je $\varphi_P(V) \subseteq I \subseteq V$, to mora biti $y \in I$, pa je y fiksna tocka kontrakcije $\varphi_P|_I$, ali onda zbog jedinstvenosti fiksne tocke (Lema36) mora biti $y = t_P^*$. Dakle t_P^* je jedino rjesenje jednadzbe $F(P,y) = 0$.

Dosad smo pokazali da $\exists$ okolina $U^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ oko tocke P_0, i da $\exists$ okolina $V^{otv} \subseteq \mathbb{R}$ oko tocke y_0, takve da je $U \times V \subseteq \Omega$,i $\exists!\ f : U \longrightarrow V$, takva da je $F(P, f(P)) = 0$, $\forall P \in U$.

Pokazimo na kraju jos da je f klase $C^1(U)$:
Prema Kor.25 treba pokazati da postoje sve parcijalne derivacije od f i da su neprekidne.
Kako je F klase $C^1(\Omega)$ dovoljno je pokazati da vrijedi jednakost iz iskaza teorema:
$\delta_i f(P) = -\frac{\delta_i F(P,f(P))}{\delta_{n+1} F(P,f(P))}$.
Naime kako je F klase $C^1(\Omega)$ to prema Kor.25 znaci da postoje $\delta_i F, (\forall i = 1,\ldots,n+1)$ pa ce onda postojati i sve $\delta_j f, (j = 1,\ldots,n)$, kao njihovi kvocijenti.
Isto tako prema Kor.25 su sve parcijalne derivacije od F i neprekidne, pa ce onda biti neprekidne i sve parc.deriv. od f, kao kvocijenti neprekidnih funkcija (tj.parcijalnih derivacija od F).

- Do trazene jednakosti dolazimo na sljedeci nacin:
  Odaberimo $Q, Q' \in k(Q_0,\mu)$, $Q = (P,y)$, $Q' = (P',y')$. Zbog konveksnosti kugle je $[Q,Q'] \in k(Q_0,\mu)$, pa kako je F klase $C^1(\Omega)$ odnosno diferencijabilna u svakoj tocki iz Ω, to mozemo primijeniti Kor.31, pa postoji $Q_\theta \in [Q,Q'] \subseteq k(Q_0,\mu)$ sa svojstvom da je:
  $F(Q') - F(Q) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i F(Q_\theta)(x_i' - x_i) + \delta_{n+1} F(Q_\theta)(y'-y)$.
  Specijalno za $P, P' \in U$, te $y = f(P)$, $y' = f(P')$,bit ce $Q = (P, f(P))$, $Q' = (P', f(P'))$, pa ce vrijediti:
  $F(P', f(P')) - F(P, f(P)) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i F(Q_\theta)(x_i' - x_i) + \delta_{n+1} F(Q_\theta)(f(P') - f(P))$,

[94] Kako je $(P,t) \in U \times V \subseteq k(Q_0,\mu)$, to i za nju vrijedi nejednakost od prije: $|\gamma \delta_{n+1} F(Q) - 1| < \frac{1}{4}$ koja vrijedi za sve $Q \in k(Q_0,\mu)$.

odnosno[95]:
$0=\sum_{i=1}^{n}\delta_i F\left(Q_\theta\right)\left(x_i'-x_i\right)+\delta_{n+1}F\left(Q_\theta\right)\left(f\left(P'\right)-f\left(P\right)\right)$
Podijelimo li posljednju jednakost s $\delta_{n+1}F\left(Q_\theta\right)$ $\Big(\neq 0$, posljedica neprekidnosti $\boxed{?}\Big)$ dobijemo:
(iii) $f\left(P'\right)-f\left(P\right)=-\frac{1}{\delta_{n+1}F(Q_\theta)}\sum_{i=1}^{n}\delta_i F\left(Q_\theta\right)\left(x_i'-x_i\right)$

Dosad su nam se tocke P i P' mogle razlikovati na svim koordinatama, a sad pogledajmo takve $P,P'\in U$ koje se razlikuju u samo jednoj koordinati tj neka je:
$P=\left(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n\right)$, a $P'=\left(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j',x_{j+1},\ldots,x_n\right)$
Sada je $Q_\theta\equiv Q_{\theta_j}=\left(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+\theta\left(x_j'-x_j\right),x_{j+1},\ldots,x_n\right)$ $(\theta\in\langle 0,1\rangle)$.
Ocito ce sad u (iii) na desnoj strani ostati samo clan s parcijalnom derivacijom po j-toj varijabli, pa ce (iii) sada izledati ovako:
$f\left(P'\right)-f\left(P\right)=-\frac{1}{\delta_{n+1}F\left(Q_{\theta_j}\right)}\delta_j F\left(Q_{\theta_j}\right)\left(x_j'-x_j\right)$, odnosno:
(iv) $\quad \frac{f\left(P'\right)-f(P)}{x_j'-x_j}=-\frac{\delta_j F\left(Q_{\theta_j}\right)}{\delta_{n+1}F\left(Q_{\theta_j}\right)}$

Preostaje jos samo pokazati da postoji limes kvocijenta na lijevoj strani. U tu svrhu pokazimo najprije da je f neprekidna:
Funkcija f ce biti neprekidna ako pokazemo da ima Lipshitzovo svojstvo (vidi Tm.5), tj prema Def.13 treba pokazati da postoji $\lambda\geq 0$, t.da $\forall P,P'\in U$ vrijedi: $\left|f\left(P'\right)-f\left(P\right)\right|\leq\lambda\left\|P'-P\right\|$.
Kako su u relaciji (iii) upravo $P,P'\in U$ proizvoljne, iskoristimo li je imat cemo:
$\left|f\left(P'\right)-f\left(P\right)\right|\leq^{96}\frac{1}{\left|\delta_{n+1}F(Q_\theta)\right|}\sum_{i=1}^{n}\left|\delta_i F\left(Q_\theta\right)\right|\left|x_i'-x_i\right|$.
Kako je $Q_\theta\in k\left(Q_0,\mu\right)\subseteq k\left(Q_0,\mu'\right)$ to prema (i) je $\frac{1}{\left|\delta_{n+1}F(Q_\theta)\right|}\leq M$ i $\left|\delta_i F\left(Q_\theta\right)\right|\leq M$ $(\forall i=1,\ldots,n)$ i naravno $\left|x_i'-x_i\right|\leq^{97}\left\|P'-P\right\|$, pa vrijedi:
$\left|f\left(P'\right)-f\left(P\right)\right|\leq\underbrace{M\cdot n\cdot M}_{\equiv\lambda}\cdot\left\|P'-P\right\|$, tj postoji $\lambda=M\cdot n\cdot M$ takav da je $\left|f\left(P'\right)-f\left(P\right)\right|\leq\lambda\left\|P'-P\right\|$ tj f ima Lipshitzovo svojstvo pa je neprekidna.

Limes lijeve strane relacije (iv) postojat ce ako postoji limes kvocijenta na desnoj strani:
Kako je $F\in C^1\left(\Omega\right)$ to su prema Kor.25 sve njene parcijalne derivacije neprekidne, pa postoje limesi brojnika i nazivnika desne strane rel. (iv)[98], pa prema svojstvu limesa (Nap.6) imamo:

[95] jer je $F\left(P,f\left(P\right)\right)=0,\ \forall P\in U$
[96] Jer npr.: $\left|\lambda\cdot\sum_{i=1}^{2}a_ib_i\right|=\left|\lambda\right|\left|\sum_{i=1}^{2}a_ib_i\right|=\left|\lambda\right|\left|a_1b_1+a_2b_2\right|\leq$
$\leq\left|\lambda\right|\left(\left|a_1b_1\right|+\left|a_2b_2\right|\right)=\left|\lambda\right|\sum_{i=1}^{2}\left|a_ib_i\right|=\left|\lambda\right|\sum_{i=1}^{2}\left|a_i\right|\left|b_i\right|$
[97] Jer je $\left|x_i'-x_i\right|=\sqrt{\left(x_i'-x_i\right)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i'-x_i\right)^2}=\left\|P'-P\right\|$
[98] Zbog neprekidnosti parcijalnih derivacija od F imamo prema (11):
$\lim_{x_j'\longrightarrow x_j}\delta_j F\left(Q_{\theta_j}\right)=\delta_j F\left(Q\right)=\delta_j F\left(P,f\left(P\right)\right)$;
$\lim_{x_j'\longrightarrow x_j}\delta_{n+1}F\left(Q_{\theta_j}\right)=\delta_{n+1}F\left(Q\right)=\delta_{n+1}F\left(P,f\left(P\right)\right)$.

$$\lim_{x'_j \longrightarrow x_j} \left[-\frac{\delta_j F(Q_{\theta_j})}{\delta_{n+1} F(Q_{\theta_j})} \right] = -\frac{\lim_{x'_j \longrightarrow x_j} \delta_j F(Q_{\theta_j})}{\lim_{x'_j \longrightarrow x_j} \delta_{n+1} F(Q_{\theta_j})} = -\frac{\delta_j F(P,f(P))}{\delta_{n+1} F(P,f(P))}.$$

Postoji dakle $\lim_{x'_j \longrightarrow x_j} \frac{f(P')-f(P)}{x'_j - x_j} = \delta_j f(P) = -\frac{\delta_j F(P,f(P))}{\delta_{n+1} F(P,f(P))}$, pa jednakost iz iskaza teorema doista vrijedi $(\forall j = 1, \ldots, n)$.

Dakle jer, zbog $F \in C^1(\Omega)$, postoje sve $\delta_i F, (\forall i = 1, \ldots, n+1)$, to postoje i sve parcijalne derivacije funkcije f . I rekli smo vec, prema Kor.25 su sve parcijalne derivacije od F i neprekidne, pa su onda neprekidne i sve parc.deriv. od f, kao kvocijenti neprekidnih funkcija (tj.parcijalnih derivacija od F).

Konacno, prema Kor.25 f je doista klase $C^1(U)$ sto smo i trebali dokazati, cime je teorem u potpunosti dokazan. ■

Problem 1 *Neka je dano* $F : \Omega \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}^m}$,$(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m})$[99]
(i)$F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = (F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m))$[100].
I neka je $F(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$.
Pitamo se pod kojim uvjetima postoje funkcije $f_1, \ldots, f_m : U \longrightarrow \mathbb{R}$, *gdje je* U *neka otvorena okolina tocke* $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, *t da je*
(ii) $F(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$[101]$= (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$, *odnosno:*
(iii) $F_i(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0 \, (\in \mathbb{R})$
$(\forall (x_1, \ldots, x_n) \in U$, $\forall i = 1, \ldots, m$)
Zelimo doci do nuznog uvjeta, naravno preko skalarnog slucaja koji smo vec apsolvirali:

Example 12 $\boxed{n = 1,\, m = 2}$
Neka je dakle (vidi(i),(ii) i (iii)) $F : \mathbb{R}^{1+2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *i :*
$F(x, y_1, y_2) = (F_1(x, y_1, y_2), F_2(x, y_1, y_2)) = (0, 0)$,
sto mozemo prikazati sustavom jednadzbi:
$F_1(x, y_1, y_2) = 0$
$F_2(x, y_1, y_2) = 0$,
i neka su $F_1, F_2 : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcije klase* $C^1(\Omega)$,
te neka vrijedi: $F(x_0, y_1^0, y_2^0) = (0, 0)$, *tj neka taj sustav ima barem jedno rjesenje:* $(x_0, y_1^0, y_2^0) \in \Omega$*:*
$F_1(x_0, y_1^0, y_2^0) = 0$
$F_2(x_0, y_1^0, y_2^0) = 0$

Pitamo se mogu li se y_1 *i* y_2 *(zadnje dvije varijable) izraziti kao funkcije od* x [102] *(na nekoj* U *okolini od* x_0*), tj postoje li* $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$, *klase* $C^1(U)$, *takve da* $\forall x \in U$ *vrijedi* $F(x, f(x), g(x)) = (0, 0)$, *odnosno:*

[99] U prethodnom teoremu imali smo $m = 1$.
[100] Za $i = 1, \ldots, m$, $F_i : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$, tj slucaj iz prethodnog teorema.
[101] U prethodnom teoremu smo zadnju koordinatu opisivali preko prethodnih, ovdje pomocu prethodnih opisujemo m-zadnjih..
[102] Ovdje dakle funkcije y_1, y_2 igraju ulogu funkcija f iz gornjih relacija (ii) i (iii).

$F_1(x, f(x), g(x)) = 0$
$F_2(x, f(x), g(x)) = 0$[103].

- *Pogledajmo skalarnu funkciju F_1. Zelimo na nju primijeniti Tm.35 ali nam nedostaje uvjet iz teorema za posljednju (u nasem slucaju trecu) varijablu, pa pretpostavimo da je i taj uvjet zadovoljen, tj da vrijedi* $\boxed{\delta_3 F_1\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) \neq 0}$.
  Sada primjenom teorema izlazi da $\exists$ okolina $U_1 \left(\subseteq \mathbb{R}^2\right)$ oko tocke $\left(x_0, y_1^0\right)$, i $\exists!$ funkcija $h : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ klase $C^1(U_1)$[104]*, za koju vrijedi:*
  (iv) $F_1(x, y_1, h(x, y_1)) = 0$, $\forall (x, y_1) \in U_1$,(Dakako i za $\left(x_0, y_1^0\right) \in U_1$, pa je: $h\left(x_0, y_1^0\right) = y_2^0$)

  No $y_2 = h(x, y_1)$ mora zadovoljavati i drugu jednadzbu sustava, tj mora biti:
  (v) $F_2(x, y_1, h(x, y_1)) = 0$.
  Ocito je sada F_2 funkcija samo prvih dviju varijabli, pa definirajmo novu funkciju $H : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ sa: $H(x, y_1) := F_2(x, y_1, h(x, y_1))$. Sada ce vrijediti:
  $H\left(x_0, y_1^0\right) = F_2\left(x_0, y_1^0, h\left(x_0, y_1^0\right)\right) = F_2\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) = 0$.
  Ovako definirano H je klase $C^1(U_1)$ (kompozicija funkcija (h i F_2)klase C^1 je klase C^1).
  Pretpostavimo li jos da je $\boxed{\delta_2 H\left(x_0, y_1^0\right) \neq 0}$ *($\delta_2 H$ - parc. derivacija po zadnjoj varijabli), mozemo jos jednom primijeniti Tm.35, ovaj put na funkciju H:*
  Dakle $\exists$ okolina $U (\subseteq \mathbb{R})$ oko tocke x_0 i $\exists!$ funkcija $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ klase $C^1(U)$, takva da vrijedi:
  $H(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in U$, (Dakako i za $x_0 \in U$, pa je $f(x_0) = y_1^0$).

  Dobili smo da se y_1 moze prikazati kao funkcija prve varijable (x), pa nam preostaje jos i y_2 izraziti preko x:
  Najprije sada mozemo funkciju dviju varijabli $h = h(x, y_1)$, prikazati kao funkciju jedne varijable (x) tj sada je $h = h(x, f(x))$ pa mozemo definirati novu funkciju jedne varijable (x) $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sa: $g(x) = h(x, f(x))$.
  Funkcija g je klase C^1 jer je kompozicija funkcija f i h, koje su klase C^1.
  Dakle i y_2 smo prikazali kao funkciju prve varijable.

  I na kraju, $\forall x \in U$[105]*, vrijedi:*
  $F_1(x, f(x), g(x)) = F_1(x, f(x), h(x, f(x))) \overset{(iv)}{=} 0$, *te*

[103] Kod rjesavanja linearnih sustava npr. dviju jednadzbi s tri nepoznanice, ocekujemo da npr. zadnje dvije varijable izrazimo pomocu prve, drugim rijecima da zadnje dvije prikazemo kao funkcije prve.
[104] Ovdje h igra ulogu funkcije f iz Tm.35.
[105] Ono sto je vrijedilo na $U_1 \subseteq \mathbb{R}^2$, pogotovo vrijedi za $U \subseteq \mathbb{R}$ $\boxed{?}$

$F_2(x, f(x), g(x)) = F_2(x, f(x), h(x, f(x))) \overset{(v)}{=} 0.$
Dakle odgovor na nase pitanje je potvrdan, tj doista, na U okolini od x_0*, postoje* $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *, klase* $C^1(U)$*, takve da* $\forall x \in U$ *vrijedi* $F(x, f(x), g(x)) = (0,0)$.

Promotrimo sad malo bolje pretpostavke koje smo trebali (uokvireno):
$\delta_3 F_1\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) \neq 0$ i
$\delta_2 H\left(x_0, y_1^0\right) \neq 0$.

Ova dva uvjeta su nam omogucila dvostruku primjenu Tm.35 i osigurala egzistenciju implicitno zadanih funkcija f i g. Pogledajmo sad mozemo li ta dva uvjeta prikazati u nekom drugom obliku, pogotovo drugi uvjet, jer se u njemu radi o novoj funkciji H, dok mi naravno zelimo uvjete prikazati u terminima nasih funkcija F_1 i F_2:

- Krenimo od uvjeta $\delta_2 H\left(x_0, y_1^0\right) \neq 0$:
  Imali smo prije da je $H(x, y_1) = F_2(x, y_1, h(x, y_1))$, pa sad imamo:
  $\underline{\delta_2 H\left(x_0, y_1^0\right)} = \frac{\delta H}{\delta y_1}\left(x_0, y_1^0\right) =$
  $= \frac{\delta F_2}{\delta y_1}\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) + \frac{\delta F_2}{\delta y_2}\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) \cdot \frac{\delta h}{\delta y_1}\left(x_0, y_1^0\right) =$
  = jer je h funkcija implicitno zadana funkcijom F_1, pa prema formuli iz Tm.35=
  $= \frac{\delta F_2}{\delta y_1}\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) + \frac{\delta F_2}{\delta y_2}\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) \cdot \left(-\frac{\frac{\delta F_1}{\delta y_1}\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right)}{\frac{\delta F_1}{\delta y_2}\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right)}\right) =$
  $= \left[-\frac{1}{\frac{\delta F_1}{\delta y_2}}\left(\frac{\delta F_2}{\delta y_2}\frac{\delta F_1}{\delta y_1} - \frac{\delta F_2}{\delta y_1}\frac{\delta F_1}{\delta y_2}\right)\right]\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right)^{106} =$
  $= \left[-\frac{1}{\frac{\delta F_1}{\delta y_2}}\begin{vmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta y_1} & \frac{\delta F_1}{\delta y_2} \\ \frac{\delta F_2}{\delta y_1} & \frac{\delta F_2}{\delta y_2} \end{vmatrix}\right]\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) =$
  $= -\frac{1}{\frac{\delta F_1}{\delta y_2}\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right)} \cdot \det \frac{\delta(F_1, F_2)}{\delta(y_1, y_2)}\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) \underline{\neq 0}.$

Dobili smo dakle da je za egzistenciju implicitno zadanih funkcija f i g dovoljno da Jakobijeva matrica $\frac{\delta(F_1, F_2)}{\delta(y_1, y_2)}\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right)$ bude regularna (tj det $\neq 0$).
Naime uvjet $\delta_3 F_1\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) \neq 0$ vise nije nuzan, jer u slucaju da je
$\delta_3 F_1\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) = 0 \;\;\&\;\; \det \frac{\delta(F_1, F_2)}{\delta(y_1, y_2)}\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) \neq 0,$
zbog ovog zadnjeg, mora nuzno biti $\delta_3 F_2\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) \neq 0$, pa smo od pocetka samo trebali krenuti od F_2.

Conclusion 4 *Dakle esencijalni uvjet za postojanje implicitno zadanih funkcija* f *i* g *(odnosno za dvostruku primjenu Tm.35) je*

$$\det \frac{\delta(F_1, F_2)}{\delta(y_1, y_2)}\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) \neq 0 \tag{43}$$

jer on osigurava da je barem jedna parcijalna derivacija po posljednjoj varijabli bude $\neq 0$*, pa ce ovaj uvjet u Tm.35 zamijeniti zahtjev:* $\delta_{n+1} F(Q_0) \neq 0$.

[106] Simbolicki zapis - oznacava da vrijednost svih parcijalnih derivacija (funkcija) treba racunati u tocki $\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right)$.

Preostaje nam jos pronaci nacin izracunavanja derivacija $\frac{df}{dx}$ i $\frac{dg}{dx}$, implicitno zadanih funkcija f i g, pomocu parcijalnih derivacija od F_1 i F_2:

- Odredimo najprije $\frac{df}{dx}$:
  Prisjetimo se - egizistenciju funkcije f smo dobili tako sto smo primijenili Tm.35 na funkciju H. Primijenimo li na nju relaciju (85) iz Teorema imat cemo:
  $(*) \quad \frac{df}{dx}(x) = -\frac{\frac{\delta H}{\delta x}(x,f(x))}{\frac{\delta H}{\delta y_1}(x,f(x))}$
  Zeljeli bismo sada brojnik i nazivnik gornje jednakosti izraziti preko parc.deriv.funkcija F_1 i F_2. Kako je $H(x,y_1) = F_2(x,y_1,h(x,y_1))$,imamo (bez pisanja varijabli):
  $\frac{\delta H}{\delta x} = \frac{\delta F_2}{\delta x} + \frac{\delta F_2}{\delta y_2}\cdot\frac{\delta h}{\delta x} = \frac{\delta F_2}{\delta x} + \frac{\delta F_2}{\delta y_2}\cdot\left[-\frac{\frac{\delta F_1}{\delta x}}{\frac{\delta F_1}{\delta y_2}}\right] =$
  $= \frac{\frac{\delta F_2}{\delta x}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta y_2} - \frac{\delta F_2}{\delta y_2}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta x}}{\frac{\delta F_1}{\delta y_2}}$, i
  $\frac{\delta H}{\delta y_1} = \frac{\delta F_2}{\delta y_1} + \frac{\delta F_2}{\delta y_2}\cdot\frac{\delta h}{\delta y_1} = \frac{\delta F_2}{\delta y_1} + \frac{\delta F_2}{\delta y_2}\cdot\left[-\frac{\frac{\delta F_1}{\delta y_1}}{\frac{\delta F_1}{\delta y_2}}\right] =$
  $= \frac{\frac{\delta F_2}{\delta y_1}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta y_2} - \frac{\delta F_2}{\delta y_2}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta y_1}}{\frac{\delta F_1}{\delta y_2}}$
  Uvrstimo li to u $(*)$ konacno dobijemo:
  $\frac{df}{dx} = -\frac{\frac{\delta F_2}{\delta x}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta y_2} - \frac{\delta F_2}{\delta y_2}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta x}}{\frac{\delta F_2}{\delta y_1}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta y_2} - \frac{\delta F_2}{\delta y_2}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta y_1}} = -\frac{\det\frac{\delta(F_1,F_2)}{\delta(x,y_2)}}{\det\frac{\delta(F_1,F_2)}{\delta(y_1,y_2)}}$[107].

- Odredimo $\frac{dg}{dx}$:
  Prisjetimo se - funkciju g smo definirali sa $g(x) = h(x,f(x))$. Zelimo sad, kao i kod f-je f, $\frac{dg}{dx}$ izraziti preko parcijalnih derivacija funkcija F_1 i F_2. Imamo (bez pisanja varijabli):
  $\frac{dg}{dx} = \frac{\delta h}{\delta x} + \frac{\delta h}{\delta y_1}\cdot\frac{df}{dx} =$
  $= \left[-\frac{\frac{\delta F_1}{\delta x}}{\frac{\delta F_1}{\delta y_2}}\right] + \left[-\frac{\frac{\delta F_1}{\delta y_1}}{\frac{\delta F_1}{\delta y_2}}\right]\cdot\left[-\frac{\frac{\delta F_2}{\delta x}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta y_2} - \frac{\delta F_2}{\delta y_2}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta x}}{\frac{\delta F_2}{\delta y_1}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta y_2} - \frac{\delta F_2}{\delta y_2}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta y_1}}\right] =$
  $= \cdots = -\frac{\frac{\delta F_2}{\delta y_1}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta x} - \frac{\delta F_2}{\delta x}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta y_1}}{\frac{\delta F_2}{\delta y_1}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta y_2} - \frac{\delta F_2}{\delta y_2}\cdot\frac{\delta F_1}{\delta y_1}} = -\frac{\det\frac{\delta(F_1,F_2)}{\delta(x,y_1)}}{\det\frac{\delta(F_1,F_2)}{\delta(y_1,y_2)}}$[108]

Theorem 37 *(O implicitno zadanim funkcijama, vektorski slucaj):*

(i) Neka je $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, *i* $F = (F_1,\ldots,F_m) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *preslikavanje klase* $C^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$

(ii) $Q_0 = \left(x_1^0,\ldots x_n^0, y_1^0,\ldots,y_m^0\right) \equiv (P_0,N_0) \in \Omega$, *tocka sa svojstvom:* $F(Q_0) = 0$ & $\det\frac{\delta(F_1,\ldots,F_m)}{\delta(y_1,\ldots y_m)}(Q_0) \neq 0$.

Tada $\boxed{\exists}$ *okolina* $U^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ *oko tocke* $P_0 = \left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$, *te* $\boxed{\exists}$ *okolina* $V^{otv} \subseteq \mathbb{R}^m$ *oko tocke* $N_0 = (y_1,\ldots,y_m)$, *t. da je* $U \times V \subseteq \Omega$, *te* $\boxed{\exists!}$ *preslikavanje* $f = (f_1,\ldots,f_m) : U \longrightarrow V$, *t. da je* $\underline{F(P,f(P)) = 0}$, $\forall P \in U$, *i f je klase C^1 na U.*

[107] Nazivnik $\det\frac{\delta(F_1,F_2)}{\delta(y_1,y_2)}$ je razlicit od nule, jer je to upravo i osnovni uvjet za postojanje funkcija f i g (vidi rel.(43)

[108] Isto kao u prethodnom

Remark 13 *Parcijalne derivacije f-je $f : U \longrightarrow V$ iz prethodnog Teorema imaju oblik:*

$$\frac{\delta f_i}{\delta x_j}(P) = -\frac{\det \frac{\delta(F_1,\dots,F_m)}{\delta(y_1,\dots,y_{i-1},x_j,y_{i+1},\dots,y_m)}(P, f(P))}{\det \frac{\delta(F_1,\dots,F_m)}{\delta(y_1,\dots,y_m)}(P, f(P))} \tag{44}$$

gdje je $P \in U$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$.

Remark 14 *Primijenimo gornje zakljucke na slucaj kad je $m = 1$:*

Kljucna pretpostavka u Tm.37 bila je: $\det \frac{\delta(F_1,\dots,F_m)}{\delta(y_1,\dots y_m)}(P_0, N_0) \neq 0$. *U slucaju $m = 1$ imat cemo:*
$y_m = y_1 \equiv x_{n+1}$, *pa se gornji uvjet svodi na:*
$\det \frac{\delta F}{\delta x_{n+1}}(P_0, y_0) \neq 0$ *tj.* $\delta_{n+1} F(P_0, y_0) \neq 0$.
Dakle uvjet iz Tm.35 je zapravo uvjet iz Tm.37 za $m = 1$.

Analogno za parcijalne derivacije $\frac{\delta f}{\delta x_j}$[109] *prema gornjoj Napomeni imamo:*

$\frac{\delta f}{\delta x_j}(P) = -\frac{\det \frac{\delta F}{\delta x_j}(P, f(P))}{\det \frac{\delta F}{\delta x_{n+1}}(P, f(P))}$, *odnosno:* $\delta_j f(P) = \frac{\delta_j F(P, f(P))}{\delta_{n+1} F(P, f(P))}$ *kao i u Tm.35*

Jasno, jer Tm.35 nije drugo do specijalan slucaj Tm.37 za $m = 1$.

Teorem o inverznom preslikavanju

Theorem 38 *Neka je $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$, i $f : \Omega \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}^n}$ preslikavanje klase $C^1(\Omega)$, i neka je $df(P_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$* ***regularan operator***[110]*.*

Tada $\boxed{\exists}$ okolina U od P_0 i $\boxed{\exists}$ okolina V od $f(P_0) \equiv Q_0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$ u $\mathbb{R}^n$, i preslikavanje $\dot{g} : V \longrightarrow U$, klase $C^1(V)$, koje je ***inverzno preslikavanje*** *preslikavanja $f|_U : U \longrightarrow V$, i vrijedi:*

$$dg(f(P_0)) = (df(P_0))^{-1} \tag{45}$$

Proof. Neka je $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$, i $f : \Omega \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}^n}$ preslikavanje klase $C^1(\Omega)$, i neka je $df(P_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **regularan operator**, te $f(P_0) = Q_0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$. Trebamo pronaci preslikavanje g koje ce biti inverzno preslikavanje restrikcije $f|_U : U \longrightarrow V$, i pokazati da vrijedi: $dg(f(P_0)) = (df(P_0))^{-1}$.

Da bismo pronasli preslikavanje g s navedenim svojstvima, trebat cemo definirati novu funkciju $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, na koju cemo moci primijeniti Tm.37, a kako g treba biti inverz, to cemo morati pokazati da je $g : U \longrightarrow V$ bijekcija, i da je dakle $(f|_U)^{-1} = g$, a to ce vrijediti ako pokazemo da vrijedi: $f \circ g = id_V$. Naposljetku cemo jos pokazati da vrijedi i $dg(f(P_0)) = (df(P_0))^{-1}$:

Krenimo redom:
Definirajmo najprije nove funkcije $F_1, \dots, F_n : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$ na sljedeci nacin:

[109] Samo jedna funkcija f, jer je $m = 1$.
[110] Tj. za njega postoji inverzni operator, odnosno matrica tog operatora je regularna, tj det $\neq 0$.

$F_i(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = f_i(x_1,\ldots,x_n) - y_i$.
Pokazimo sad da ovako definirane F_i udovoljavaju uvjetima Tm.37:
(i) $\forall i = 1,\ldots,n$ je $\underline{F_i \text{ klase } C^1}$(jer je zbroj dviju funkcija klase C^1)
(ii) $F_i\left(x_1^0,\ldots,x_n^0,y_1^0,\ldots,y_n^0\right) = \underline{F_i(P_0,Q_0)} = f_i\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right) - y_1^0 \underline{= 0}$[111]
(iii) $\underline{\det \frac{\delta(F_1,\ldots,F_n)}{\delta(x_1,\ldots,x_n)}(P_0,Q_0)} =$[112]$\det \frac{\delta(f_1,\ldots,f_n)}{\delta(x_1,\ldots,x_n)}(P_0) \underline{\neq 0}$ jer je $df(P_0)$ regularan operator, tj determinanta Jakobijeve matrice tog operatora (vidi (22)) je razlicita od nule.

Dakle u uvjetima smo Tm.37[113], pa postoji okolina $V_1^{otv}(\subseteq \mathbb{R}^n)$ oko tocke Q_0, i postoji okolina $U_1^{otv}(\subseteq \mathbb{R}^n)$ oko tocke P_0 i jedinstvena funkcija $h = (h_1,\ldots,h_n) : V_1 \longrightarrow U_1$ klase $C^1(V_1)$ t da je $\forall i = 1,\ldots,n$:
$F_i(h_1(y_1,\ldots,y_n),\ldots,h_n(y_1,\ldots,y_n),y_1,\ldots,y_n) = 0, \forall(y_1,\ldots,y_n) \in V_1$, i vrijedi $h(Q_0) = P_0$.
No onda je prema definiciji funkcija F_i :
$f_i(h_1(y_1,\ldots,y_n),\ldots,h_n(y_1,\ldots,y_n)) - y_i = 0$ tj:
$f_i(h(y_1,\ldots,y_n)) = y_i$ odnosno: $f_i(h(Q)) = y_i$, $\forall i = 1,\ldots,n; \forall Q \in V_1$, pa slijedi: $f(h(Q)) = Q$, tj
$(*)$ $\underline{f \circ h = id_{V_1}}$

Iz posljednje jednakosti, prema Tm.22 imamo:
$d(f \circ h)(Q_0) = d(id_{V_1})(Q_0) \implies$
$\implies df(h(Q_0)) \circ dh(Q_0) = df(P_0) \circ dh(Q_0) =$[114]$id_{\mathbb{R}^n}(Q_0)$.
Jer je $df(P_0)$ regularan operator, tj postoji inverz $(df(P_0))^{-1}$, mozemo gornju jednakost "napasti" s njim, pa dobijemo:
$(**)$ $\underline{dh(Q_0) = (df(P_0))^{-1}}$.

Sada vidimo da je i $dh(Q_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regularan operator (inverz reg. op. je reg. op.), a kako je $h : V_1 \longrightarrow U_1$ klase $C^1(V_1)$, to sad imamo analogne uvjete za h, kao sto imamo u iskazu teorema za f, pa mozemo na h analogno primijeniti pocetni dio dokaza koji smo bili primijenili na f (f je takodjer bio klase C^1 i $df(P_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je bio regularan operator u svakoj tocki domene):

Ukratko: definiramo $\forall i$ funkcije: $F_i(P,Q) = h_i(Q) - x_i$, za koje vrijedi
(i) klase su C^1
(ii) $F_i(P_0,Q_0) = 0$
(iii) $\det \frac{\delta(F_1,\ldots,F_n)}{\delta(y_1,\ldots,y_n)}(P_0,Q_0) = \det \frac{\delta(h_1,\ldots,h_n)}{\delta(y_1,\ldots,y_n)}(Q_0) \neq 0$,
dakle opet smo u uvjetima Tm.37, pa slijedi da postoji okolina $U^{otv} \subseteq U_1$ oko tocke P_0 i okolina $V'^{otv} \subseteq V_1$ oko tocke Q_0, i jedinstveno preslikavanje $\varphi : U \longrightarrow V'$ klase $C^1(U)$ t da je $\forall(x_1,\ldots,x_n) \in U$:
$F_i(x_1,\ldots,x_n,\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_n(x_1,\ldots,x_n)) = 0$ odnosno:
$h_i(\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_n(x_1,\ldots,x_n)) - x_i = 0 \implies$
$\implies h_i(\varphi(P)) = x_i \implies h(\varphi(P)) = P \implies (h \circ \varphi)(P) = P$, $\forall P \in U$, tj:

[111]Jer je $f\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right) = \left(y_1^0,\ldots,y_n^0\right)$, tj. $\left(f_1\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right),\ldots,f_n\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)\right) = \left(y_1^0,\ldots,y_n^0\right)$, iz cega slijedi: $f_i\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right) = y_i^0$
[112]Svaka od parcijalnih derivacija $\frac{\delta F_i}{\delta x_j}$ je jednaka $\frac{\delta f_i}{\delta x_j}$, $(i,j = 1,\ldots,n)$, (Imamo bez pisanja varijabli: $\frac{\delta F_i}{\delta x_j} = \frac{\delta f_i}{\delta x_j} - \frac{\delta y_i}{\delta x_j} = \frac{\delta f_i}{\delta x_j} - 0 = \frac{\delta f_i}{\delta x_j}$)
[113]Primijetimo kako ovdje, za razliku od prikaza u Tm.37, zelimo "prvih" n varijabli prikazati kao funkcije preostalih.
[114]Jer je Identiteta lin. operator, a prema Primjeru 8 diferencijal lin operatora je on sam.

$\underline{h \circ \varphi = id_U}$.

Prisjetimo se: trebamo pronaci $\underline{\text{bijekciju}}$ g koja ce biti inverz restrikcije $f|_U : U \longrightarrow V$, i pokazati da vrijedi: $dg(f(P_0)) = (df(P_0))^{-1}$. Definirajmo:
$V = h^{-1}(U)$[115]$\subseteq V_1$
V je otvoren skup, jer je praslika otvorenog skupa po neprekidnom preslikavanju h (vidi Tm. 4, (2.))[116].
Zbog definicije skupa V je preslikavanje $h|_V : V \longrightarrow U$ $\underline{\text{surjekcija}}$, a zbog $(*)$ je h injekcija[117] pa je $h|_V$ takodjer $\underline{\text{injekcija}}$ kao njena restrikcija, dakle $h|_V$ je $\underline{\text{bijekcija}}$.

Dosli smo napokon do bijekcije : $V \longrightarrow U$, sad jos samo moramo vidjeti da je to upravo bijekcija g koju mi trazimo, tj treba vidjeti da je $h|_V = (f|_U)^{-1}$:
Kako je dakle $h|_V : V \longrightarrow U$ bijekcija to postoji inverz:
$(h|_V)^{-1} : U \longrightarrow V$,
a kako je prema $(*)$: $f \circ h = id_{V_1}$ to je $\underline{f \circ h|_V = id_V}$ [118] pa posljednju jednakost mozemo "napasti s desna" inverzom $(h|_V)^{-1}$, pa dobijemo da je
$f|_U = (h|_V)^{-1}$[119], iz cega slijedi
$(f|_U)^{-1} = h|_V$
Dakle doista preslikavanje $\underline{h|_V \equiv g}$ je nasa trazena bijekcija.

Pokazimo jos da vrijedi $dg(f(P_0)) = (df(P_0))^{-1}$:
No najprije:

Remark 15 *Neka su $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ takve da postoji okolina $U^{otv} \subseteq \Omega$ oko tocke P_0, takva da je $f|_U = g|_U$. Ako je f diferencijabilna u P_0 onda je i g diferencijabilna u P_0 i vrijedi:*
$dg(P_0) = df(P_0)$.
Proof. *Neka je f diferencijabilna u P_0. Prema Def.15 slijedi*
$\lim\limits_{H \longrightarrow 0} \frac{f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)}{\|H\|} = (0,\ldots,0)$ =*jer se na okolini od P_0 podudaraju f i g* =
$= \lim\limits_{H \longrightarrow 0} \frac{g(P_0+H)-g(P_0)-A(H)}{\|H\|}$, *tj i g je diferencijabilno u P_0 i ocito je*
$df(P_0) = A(H) = dg(P_0)$ ■

Imali smo prema $(**)$: $dh(Q_0) = (df(P_0))^{-1}$. Kako je h klase $C^1(V_1)$ tj prema Def.16 i diferencijabilno u $Q_0 \in V_1$, i kako se funkcije h i $h|_V = g$ podudaraju na V okolini tocke Q_0 to prema Nap.15 slijedi da je i g diferencijabilna u Q_0 i vrijedi:

[115] $h^{-1}(U)$ nije inverzna funkcija nego oznaka **praslike skupa** U preslikavanja h.
[116] h je klase C^1, tj prema Def.16 je diferencijabilno, pa prema Tm.21 i neprekidno.
[117] $(*) : f \circ h = id_{V_1} \implies$ jer je identiteta bijekcija, tj i injekcija, to je i kompozicija $f \circ h$ injekcija, a iz teorije funkcija vrijedi Teorem: Ako je kompozicija $f \circ h$ injekcija onda je h injekcija.
[118] Jer je domena od h skup V_1, a domena od $h|_V$ skup V.
[119] Kako je $(h|_V)^{-1} : U \longrightarrow V$ to nakon "napadanja" jednakosti s $(h|_V)^{-1}$ imamo zbog asocijativnosti kompozicije: $f \circ \left(h|_V \circ (h|_V)^{-1}\right) = id_V \circ (h|_V)^{-1} \implies f \circ id_U = (h|_V)^{-1} \implies$ jer dvije funkcije moraju imati jednaku domenu $\implies f|_U = (h|_V)^{-1}$.

$dh(Q_0) = dg(Q_0)$, no onda je zbog $Q_0 = f(P_0)$,prema (**):
$dg(f(P_0)) = (df(P_0))^{-1}$ cime je dokaz gotov. ■

Remark 16 *Za slucaj $n \geq 2$, Tm.38 ima samo lokalni karakter, tj f opcenito* ***nema globalni inverz****. Drugim rijecima, moguce je da je $df(P_0)$ regularan operator u svakoj tocki ali da f nema globalni inverz.*

To pokazuje sljedeci primjer:

Example 13 *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definirano s $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Ocito je f klase C^∞ (jer su mu koordinatne f-je $f_1(x,y) = e^x \cos y$, te $f_2(x,y) = e^x \sin y$, - trigonometrijske f-je, a one su klase C^∞). Jakobijan u proizvoljnoj tocki je:*
$\frac{\delta(f_1,f_2)}{\delta(x,y)} = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$, *dok je determinanta u proizvoljnoj tocki (x,y):*
$\det \frac{\delta(f_1,f_2)}{\delta(x,y)}(x,y) = e^{2x} \neq 0$, *pa je diferencijal regularan operator u svakoj tocki. Ipak f nema globalni inverz jer bi f trebala biti globalno bijektivna, specijalno i injektivna, medjutim u ovom slucaju f je periodicna funkcija tj $f(x, y + 2k\pi) = f(x,y)$, $k \in \mathbb{Z}$, pa globalno nije injektivna, pa nije ni bijekcija na cijeloj domeni. No ipak to jeste na nekoj okolini proizvoljne tocke.*

Primijetimo jos i to da diferencijabilnost preslikavanja f^{-1} ne slijedi iz same diferencijabilnosti preslikavanja f (cak niti ako je f^{-1} neprekidno). To pokazuje sljedeci primjer:

Example 14 *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dano s $f(x,y) = \left(x^3, y - x\right)$. Ocito je f bijekcija klase C^∞ (na koordinatama su polinomi, a oni su klase C^∞) i lako se provjeri da f ima inverz $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dan s $f^{-1}(u,v) = (\sqrt[3]{u}, v + \sqrt[3]{u})$, i k tome je f^{-1} i neprekidno. Medjutim f^{-1} nije u svakoj tocki diferencijabilno, konkretno u tocki $(0,0)$, (ne udovoljava uvjetima Tm.38 tj nije klase C^1 $\boxed{?}$).*

Definition 17 *Neka su Ω i Ω' otvoreni podskupovi u $\mathbb{R}^n$. Za preslikavanje $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ kazemo da je* difeomorfizam, *ako je f bijekcija i f i f^{-1} su diferencijalna preslikavanja klase C^1 na Ω i Ω' respektivno.*

Remark 17 *Tm.38 kaze da je, uz navedene uvjete, f* ***lokalni difeomorfizam.***

Taylorov teorem srednje vrijednosti

Za proucavanje lokalnih svojstava funkcije cesto nije dovoljna linearna aproksimacija (npr. Lgrangeov teorem srednje vrijednosti- aproksimira funkciju linearno - polinomom prvog stupnja), vec trebaju neka bolja, finija sredstva - cilj nam je dakle aproximirati funkciju polinomom sto veceg stupnja, te pri tom imati i mogucnost kontrole odstupanja. O tome govori sljedeci teorem:

Theorem 39 *(Taylorov, srednje vrijednosti): Neka je* $f:\Omega\longrightarrow\boxed{\mathbb{R}}$, $\Omega^{otv}\subseteq\mathbb{R}^n$ *funkcija klase* C^{p+1} *na* Ω, *te* $P_0=\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ *i* $P=P_0+H=\left(x_1^0+h_1,\ldots,x_n^0+h_n\right)$ *tocke sa svojstvom da je segment* $[P_0,P]\subseteq\Omega$.

Tada postoji $0<\theta<1$ *t da je*

$$f(P)-f(P_0)=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}d^jf(P_0)(h_1,\ldots,h_n)^j+R_p(P_0,H) \tag{46}$$

gdje je $R_p(P_0,H)=\frac{1}{(p+1)!}d^{p+1}f(P_0+\theta(P-P_0))(h_1,\ldots,h_n)^{p+1}$ - ostatak.

Napomena koja slijedi pojasnjava oznake:

Remark 18 *Neka je* $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $\Omega^{otv}\subseteq\mathbb{R}^n$ *diferencijabilna u* $P_0\in\Omega$. *To znaci da postoji lin. op:*
$df(P_0):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$, *[gdje je* $df(P_0)\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ *]*
No ako je f diferencijabilna u <u>*svakoj*</u> *tocki iz* Ω *onda je dobro definirano preslikavanje*
$df:\Omega\longrightarrow L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\cong\mathbb{R}^{nm}$ *(vidi potpogl: Visi diferencijali)*

Sada imamo funkciju $df:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^{mn}$, *pa ako je funkcija* (df) *diferencijabilna u nekoj tocki* $P_0\in\Omega$, *onda* $\exists$ *lin.op:*
$d(df)(P_0)\equiv d^2f(P_0):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{mn}$ *[gdje je dakle* $d^2f(P_0)\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{mn})\cong\underline{L(\mathbb{R}^n,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))}$*],*

Prema potcrtanome slijedi da, kada $d^2f(P_0)$ *djeluje na neki vektor* $H\in\mathbb{R}^n$, *da je to opet lin.op. iz* $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, *tj* $\left(d^2f(P_0)\right)(H)$ *je lin.op:*
$\left(d^2f(P_0)\right)(H):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$,
i ocito je sada za neki $K\in\mathbb{R}^n$*:* $\left[\left(d^2f(P_0)\right)(H)\right](K)\in\mathbb{R}^m$.

Rekli smo vec u potpoglavlju Visi diferencijali, kako je vektorski prostor $L(\mathbb{R}^n,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))$ *prirodno izomorfan vektorskom prostoru* bilinearnih funkcionala $BL(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, *tj prostoru preslikavanja* $B:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, *pa prema posljednjim relacijama ocito je da* $d^2f(P_0)$ *mozemo promatrati kao bilinearni operator:*
$d^2f(P_0):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$.

Analogno je onda:
$d^3f(P_0):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ *trilinearan operator, i opcenito je onda:*
$d^jf(P_0):\underbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}_{j-puta}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ *multilinearan.*

Tada oznacavamo:
$\left[\left(d^2f(P_0)\right)(H)\right](H)\equiv\left(d^2f(P_0)\right)(H,H)\equiv\left(d^2f(P_0)\right)H^2$, *te opcenito:*
$\left(d^jf(P_0)\right)\underbrace{(H,\ldots,H)}_{j-puta}\equiv d^jf(P_0)H^j=$

Ekstremi

Definition 18 *Neka je* $f:\Omega\longrightarrow\boxed{\mathbb{R}}$, $\Omega^{otv}\subseteq\mathbb{R}^n$, *i* $P_0\in\Omega$. *Kazemo da f ima u* P_0 lokalni minimum (maksimum), *ako postoji* $\mu>0$, *t da je* $\forall P\in k(P_0,\mu)$ *ispunjeno*
$f(P)\geq f(P_0)$, $(f(P)\leq f(P_0))$.

Kazemo da f ima u P_0 strogi *lokalni minimum (maksimum) ako je $\forall P \in k(P_0,\mu) \backslash \{P_0\}$:*
$f(P) > f(P_0)$, $(f(P) < f(P_0))$.

Definition 19 *Neka je $f : \Omega \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ diferencijabilna u $P_0 \in \Omega$. Kazemo da je P_0* stacionarna tocka *f-je f ako je $\boxed{df(P_0) = 0}$*[120]*, tj prema (18), ako je $\delta_i f(P_0) = 0$ $(\forall i = 1, \ldots, n)$.*

Theorem 40 *(Nuzni uvjet za postojanje lokalnog ekstrema): Neka je $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ klase $C^1(\Omega)$. Ako je $P_0 \in \Omega$ tocka lokalnog ekstrema f-je f onda je P_0* ***stacionarna tocka.***

Proof. Za dokaz ovog teorema trebamo se podsjetiti nekih cinjenica iz Analize realnih funkcija realne varijable

Ekskurs: Theorem 41 ***(Fermatov):*** *Neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i neka f na intervalu $\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}$ ima (lokalni) ekstrem u tocki $c \in \langle a, b\rangle$. Ako postoji derivacija funkcije f u tocki c, onda je $f'(c) = 0$.*

Proof. *Dokazimo za slucaj kad f ima maksimum u tocki $c \in \langle a, b\rangle$, tj $\forall x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \leq f(c)$:*
Neka postoji derivacija funkcije f u tocki c. Trebamo pokazati da je tada $f'(c) = 0$.

Kako derivacija u c postoji, to znaci da postoje derivacije s lijeva i s desna i jednake su, tj:
$f'(c-) = \lim_{x \longrightarrow c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \left(\frac{-}{-}\right) \geq 0$
$f'(c+) = \lim_{x \longrightarrow c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \left(\frac{-}{+}\right) \leq 0$
Kako mora biti $f'(c-) = f'(c+) = f'(c)$, to imamo:
$0 \leq f'(c) \leq 0$, *odakle pak slijedi:* $f'(c) = 0$. ■

Ekskurs: Definition 20 *(**Parcijalne derivacije**): Neka je $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, i $P_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \in \Omega$.*

Oznacimo li $\forall i = 1, \ldots, n$: $\Omega_i^0 = \{P \in \Omega \mid P = \left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right), x \in \mathbb{R}\}$[121]*, tada se restrikcija $f\mid_{\Omega_i^0} \equiv \varphi_i$ moze shvatiti kao funkcija (samo) jedne varijable, i ocito je $\varphi_i(x) = f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$.*

Postoji li $\varphi_i'\left(x_i^0\right)$ (derivacija funkcije φ_i u tocki $x = x_i^0$), tada kazemo da f ima parcijalnu derivaciju, po varijabli x_i, u tocki P_0, *i vrijedi:* $\underline{\varphi_i'\left(x_i^0\right) = \delta_i f(P_0)}$.

Vratimo se sad na dokaz i to pokazimo za slucaj da f ima minimum u tocki $P_0 \in \Omega$:

[120] Tj. ako je diferencijal nul-operator! $df(P_0) = 0$ je samo kratka oznaka, a znaci da je $\forall$ vektor $H \in \Omega$, $df(P_0)(H) = 0\ (\in \mathbb{R}^m)$.
[121] Skup $\Omega_i^0 \subseteq \mathbb{R}$ je ocito otvoren, tj otvoren interval.

Tada $\exists\mu > 0$, t da je $\forall P \in k(P_0,\mu)$, $f(P) \geq f(P_0)$.No tada i restrikcija $\varphi_i \equiv f\mid_{\Omega_i^0}$ ima minimum u tocki x_i^0, tj $\forall x \in \Omega_i^0$ je $\varphi_i(x) \geq \varphi_i\left(x_i^0\right)$. Naime vrijedi:
$\varphi_i\left(x_i^0\right) = f\left(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i^0,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0\right) = f\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right) = f(P_0)$, te
$\varphi_i(x) = f\left(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0\right)(\in k(P_0,\mu)) \geq f(P_0) = \varphi_i\left(x_i^0\right)$.

Kako je dakle φ_i funkcija jedne varijable koja na otvorenom intervalu Ω_i^0 ima ekstrem u tocki $x = x_i^0$, to nam za primjenu Fermatovog teorema nedostaje jos jedino pretpostavka da φ_i ima derivaciju u x_i^0.
Medjutim tvrdnja naseg teorema je da je f klase $C^1(\Omega)$ sto prema Kor.25 znaci da postoje sve parcijalne derivacije $\delta_i f$ u svakoj tocki iz Ω pa i u tocki $P_0 \in \Omega$, tj postoji $\delta_i f(P_0)$, $\forall i = 1,\ldots,n$. No kako je prema gornjoj Definiciji $\varphi_i'\left(x_i^0\right) = \delta_i f(P_0)$, to znaci da postoji i derivacija funkcije φ_i u tocki x_i^0, sto znaci da su ispunjeni svi uvjeti Fermatovog teorema pa ga mozemo primijeniti na funkciju φ_i:

Vrijedi dakle: $\varphi_i'\left(x_i^0\right) = 0$, $\forall i = 1,\ldots,n$.
Sad pak, zbog $\varphi_i'\left(x_i^0\right) = \delta_i f(P_0)$, slijedi da je
$\forall i = 1,\ldots,n$: $\delta_i f(P_0) = 0$.
Prisjetimo li se izraza za diferencijal realne funkcije: $df(P_0)(H) = \sum_{i=1}^n \delta_i f(P_0)\, h_i$ (18), imamo konacno $\forall H \in \mathbb{R}^n$, $df(P_0)(H) = 0\,(\in \mathbb{R}^m)$, tj $df(P_0)$ je nul-operator, odnosno prema Def.19 P_0 je stacionarna tocka funkcije f. ■

Kao i kod realnih funkcija jedne varijable, ni u visim dimenzijama stacionarnost preslikavanja f nije i dovoljna za postojanje ekstrema. Potrebno je promatrati i drugi diferencijal:

Prije nego fomuliramo dovoljne uvjete za postojanje ekstrema prisjetimo se kako izgleda $d^2 f(P_0)$:
$\left(d^2 f(P_0)\right)(H,H) = \left(d^2 f(P_0)\right)(H)^2 = \sum_{i,j=1}^n \delta_i\delta_j f(P_0)\, h_i h_j = \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 f}{\delta_i\delta_j}(P_0)\, h_i h_j =$
prema Schwartzovu teoremu (Tm.28) je $\frac{\delta^2 f}{\delta_i\delta_j} = \frac{\delta^2 f}{\delta_j\delta_i}$ pa je $= \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 f}{\delta_j\delta_i}(P_0)\, h_i h_j$,
tj drugi diferencijal ima simetricnu matricu [122].

Ekskurs: Definition 21 *Neka je dana funkcija* $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *formulom* $g(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} t_i t_j$, *gdje je* a_{ij} *- **simetricna matrica tipa*** (n,n) , *tj* $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall ij$. *Tada funkciju* g *nazivamo* kvadratna forma u n varijabli[123]

Ocito je da se drugi diferencijal funkcije f moze interpretirati kao **kvadratna forma** gdje je $a_{ij} = a_{ji} = \frac{\delta^2 f}{\delta_j\delta_i}$.

Definition 22 *Neka je* $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$ ***kvadratna forma*** *u* n *varijabli. Kazemo da je:*

(i) g *pozitivno (negativno)* semidefinitna *ako je*
$g(t_1,\ldots,t_n) \geq 0$, $(g(t_1,\ldots,t_n) \leq 0)$, $\forall (t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$.

[122] U terminima bilinearnih funkcionala rekli bismo da je drugi diferencijal funkcije f *simetrican bilinearni funkcional,* tj vrijedi: $\left(d^2 f(P_0)\right)(H,K) = \left(d^2 f(P_0)\right)(K,H)$

[123] Drugim rijecima receno g je simetricni polinom drugog stupnja u n varijabli (s koeficijentima a_{ij}).

(ii) g pozitivno (negativno) definitna *ako je g poz. (neg.) semidefinitna* & $g(t_1, \ldots, t_n) = 0 \iff t_1 = \cdots = t_n = 0$

(iii) g indefinitna *ako nije semidefinitna (niti poz. niti neg.) tj. (ako negiramo tvrdnju (i)) ako* $\exists (t_1, \ldots, t_n), (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ *t da je* $g(t_1, \ldots, t_n) > 0$ & $g(s_1, \ldots, s_n) < 0$

Theorem 42 *(Dovoljni uvjeti za postojanje lokalnog ekstrema): Neka je* $f : \Omega \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$, $\Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n$ *funkcija klase* $C^2(\Omega)$, *i* $P_0 \in \Omega$ - ***stacionarna tocka***[124] *funkcije f.*

(i) Ako je $d^2 f(P_0)$ ***pozitivno definitan****, tada f ima u* P_0 *strogi lokalni* ***minimum.***

(ii) Ako je $d^2 f(P_0)$ ***negativno definitan****, onda f ima u* P_0 *strogi lokalni* ***maksimum.***

(iii) Ako je $d^2 f(P_0)$ ***indefinitan*** *onda f u* P_0 ***nema*** *lokalnog ekstrema.*

Proof. Kako u sva tri slucaja trebamo pokazati da postoje (ili ne postoje) lokalni minimumi ili maksimumi u tocki P_0 to cemo ocito uvijek ispitivati razliku $f(P) - f(P_0)$, za sve P iz neke okoline tocke P_0. U tu svrhu bi bilo zgodno primijeniti Taylorov teorem (Tm.39), jer su ispunjeni svi uvjeti za njegovu primjenu (f je realna funkcija, klase $C^2(\Omega)$ (tj u teoremu $p+1=2$)). Neka je dakle $[P_0, P] \subseteq \Omega$, tada postoji $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ takav da je $[P_0, P] \ni P_\theta = P_0 + \theta(P - P_0)$, i vrijedi:
$f(P) - f(P_0) = df(P_0)(P - P_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(P_\theta)(P - P_0)^2$.
Kako je P_0 stacionarna tocka funkcije f to prema Def.19 znaci da je $df(P_0)$ nuloperator tj prvi clan je $df(P_0)(P - P_0) = 0$. Onda ce gornja relacija malo raspisana izgledati ovako:
$(*)\ f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(P_\theta)\left(x_i - x_i^0\right)\left(x_j - x_j^0\right),$
pri cemu smo oznacili $P = (x_1, \ldots, x_n)$, $P_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$.

Uvedimo sljedece oznake:
$a_{ij} \equiv \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(P_0)\,(= a_{ji})$
$r_{ij}(P) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(P_\theta) - \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(P_0)$.
Za $P \neq P_0$ oznacimo: $y_i = \frac{x_i - x_i^0}{\|P - P_0\|}, \forall i = 1, \ldots, n.$

- Primijetimo da postoji $\lim_{P \longrightarrow P_0} r_{ij}(P)$. Naime kako je f klase C^2 to prema Zaklj.3 sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije f $\left(\text{pa i } \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}\right)$postoje i neprekidne su u svakoj tocki domene. Pa zbog neprekidnosti, prema Kor.12 vrijedi za prvi clan: $\lim_{P_\theta \longrightarrow P_0} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(P_\theta) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(P_0) = a_{ij}$.
  Kako dakle postoje limesi od oba clana u izrazu za $r_{ij}(P)$, to prema svojstvu limesa (Nap.6) postoji limes i $r_{ij}(P)$, i jednak je nuli tj:
  $\lim_{P \longrightarrow P_0} r_{ij}(P) = a_{ij} - a_{ij} = 0.$

[124] Tj. $df(P_0)$ je nul-operator.

- Nadalje ocito je $|y_i| \leq 1$ (jer je brojnk uvijek manji ili jednak od nazivnika), te $\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2 = 1$[125]

Uvrstimo ove oznake u $(*)$, imamo:

$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} + r_{ij}(P)) \|P - P_0\| y_i \cdot \|P - P_0\| y_j$

$f(P) - f(P_0) = \frac{\|P-P_0\|^2}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} + r_{ij}(P)) y_i y_j$, te napokon[126]:

$(**)\ f(P) - f(P_0) = \frac{\|P-P_0\|^2}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j + \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(P) y_i y_j\right]$

Razmotrimo sad posebno svaki slucaj:

(i) Neka je $d^2 f(P_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tj funkcija $(y_1, \ldots, y_n) \longmapsto \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j$ pozitivno definitna kvadratna forma. To znaci da je $\forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $d^2 f(P_0)(y_1, \ldots, y_n) \geq 0$ & $d^2 f(P_0)(y_1, \ldots, y_n) = 0 \Longleftrightarrow (y_1, \ldots, y_n) = (0, \ldots, 0)$.
Trebamo pokazati da tada f ima na nekoj okolini U od P_0 strogi minimum u P_0 tj da je $\forall P \neq P_0$, $P \in U$, $f(P) - f(P_0) > 0$.
Imamo: Rekli smo vec da je kvadratna forma $d^2 f(P_0)$ zapravo simetricni polinom, a polinomi su neprekidne funkcije, dakle $d^2 f(P_0)$ je neprekidna funkcija, pa na skupu $\{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} (y_i)^2 = 1\} = S^{n-1}$[127] koji je **omedjen** (vidi Lemu9) **i zatvoren,** poprima minimum (vidi $\boxed{?}$). No onda je, zbog pozitivne definitnosti od $d^2 f(P_0)$, taj minimum strogo veci od nule[128], tj.
$\varepsilon \equiv \min\{d^2 f(P_0)(y_1, \ldots, y_n) \mid \sum_{i=1}^{n} (y_i)^2 = 1\} > 0$
Nadalje kako je $\lim_{P \longrightarrow P_0} r_{ij}(P) = 0$ to prema definiciji limesa (Def.14) znaci da za $\frac{\varepsilon}{n^2} > 0$, $\exists$ okolina U tocke P_0 takva da je $\forall P \in U \backslash \{P_0\}$, $|r_{ij}(P) - 0| = |r_{ij}(P)| < \frac{\varepsilon}{n^2}$.
Po konstrukciji je $|y_i| \leq 1$, $\forall i = 1, \ldots, n$, pa je
$\left|\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(P) y_i y_j\right| \leq^{129} \sum_{i,j=1}^{n} |r_{ij}(P) y_i y_j| = \sum_{i,j=1}^{n} |r_{ij}(P)| |y_i| |y_j| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |r_{ij}(P)| <$ (jer je $|r_{ij}(P)| < \frac{\varepsilon}{n^2}$ za sve kombinacije i i j (kojih ima n^2)) $\boxed{<} n^2 \cdot \frac{\varepsilon}{n^2} = \varepsilon$.
Vratimo se sad na relaciju $(**)$:
Ocito je $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j \geq \varepsilon$[130].

---

[125] Naime: $\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - x_i^0}{\|P-P_0\|}\right)^2 = \frac{1}{\|P-P_0\|^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 =$
$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2\right)^2}} = 1$

[126] Ovdje smo primijenili svojstvo sume (npr. za $n = 2$): $\sum_{i=1}^{2} (a_i + r_i) y_i = (a_1 + r_1) y_1 + (a_2 + r_2) y_2 = a_1 y_1 + r_1 y_1 + a_2 y_2 + r_2 y_2 = \sum_{i=1}^{2} a_i y_i + \sum_{i=1}^{2} r_i y_i$

[127] Jedinicna sfera, npr. za $n = 2 : \sum_{i=1}^{2} (y_i)^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$, prepoznajemo jednadzbu centralne kruznice radijusa 1.

[128] Naime jer je $d^2 f(P_0)$pozitivno definitna to znaci i da je pozitivno semidefinitna, tj njena vrijednost u svakoj tocki iz skupa S^{n-1}je ≥ 0 a jednaka je nuli samo u nul-vektoru iz skupa S^{n-1}. No $(0, \ldots, 0) \notin S^{n-1}$, pa je $d^2 f(P_0)(y_1, \ldots, y_n) > 0$, $\forall (y_1, \ldots, y_n) \in S^{n-1}$, pa je posebno i minimum $\varepsilon > 0$.

[129] $|a + b| \leq |a| + |b|$

[130] Jer je $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j = d^2 f(P_0)(y_1, \ldots, y_n)$, a $\varepsilon = \min\{d^2 f(P_0)(y_1, \ldots, y_n) \mid \sum_{i=1}^{n} (y_i)^2 = 1\}$.

No zbog $\left|\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(P)\, y_i y_j\right| < \varepsilon$ vrijedi i: $-\varepsilon < \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(P)\, y_i y_j < \varepsilon$, pa je izraz u zagradi u relaciji $(**)$ veci od nule tj.
$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j + \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(P)\, y_i y_j > 0$.
No onda $\underline{\forall P \in U}$ vrijedi:
$f(P) - f(P_0) = \frac{\|P-P_0\|^2}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j + \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(P)\, y_i y_j\right] > 0$, sto dokazuje da je P_0 tocka lokalnog minimuma.

(ii) Neka je $d^2 f(P_0)$ negativno definitno. Treba pokazati da tada na nekoj okolini tocke P_0, f ima strogi maksimum u P_0.
Kako je $d^2 f(P_0)$ negativno definitno to je sigurno $-d^2 f(P_0)$ pozitivno definitno preslikavanje. No prema Svojstvu3 imamo:
$-d^2 f(P_0) = -d(df)(P_0) = d(-df)(P_0) = d(d(-f))(P_0) = d^2(-f)(P_0)$,
pa je $d^2(-f)(P_0)$ pozitivno definitno. No onda prema (i) izlazi da funkcija $-f$ ima u P_0 lokalni minimum, sto znaci da funkcija f ima u P_0 lokalni maksimum.

(iii) Neka je $d^2 f(P_0)$ indefinitno preslikavanje. Treba pokazati da tada f u P_0 nema lokalnog ekstrema, tj da u <u>svakoj</u> okolini tocke P_0 postoje tocke P' i P'' takve da je $f(P') - f(P_0) \overline{> 0}$ & $f(P'') - f(P_0) < 0$.
Kako je $d^2 f(P_0)$ indefinitno, to postoje $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$, $\alpha'' = (\alpha''_1, \ldots, \alpha''_n) \in \mathbb{R}^n$, takve da je
$d^2 f(P_0)(\alpha') = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \alpha'_i \alpha'_j > 0$ i
$d^2 f(P_0)(\alpha'') = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \alpha''_i \alpha''_j < 0$.
Neka je: $P' = (x'_1, \ldots, x'_n)$, $P'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$,
te stavimo za $t \in \mathbb{R}$: $x'_i = x_i^0 + t\alpha'_i$ i $x''_i = x_i^0 + t\alpha''_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.
Tada je $P' = P_0 + t\alpha'$, i $P'' = P_0 + t\alpha''$, pa je
$\|P' - P_0\| = \|t\alpha'\| = |t|\,\|\alpha'\|$.
Uz oznake od prije onda je $y'_i = \frac{x'_i - x_i^0}{\|P'-P_0\|} = \frac{t\alpha'_i}{|t|\|\alpha'\|}$, pa je
$y'_i y'_j = \frac{t^2 \alpha'_i \alpha'_j}{|t|^2 \|\alpha'\|^2} = \frac{\alpha'_i \alpha'_j}{\|\alpha'\|^2}$.
Uvrstimo li u $(**)$ imamo:
$f(P') - f(P_0) = \frac{t^2\|\alpha'\|^2}{2\|\alpha'\|^2}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \alpha'_i \alpha'_j + \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(P')\, \alpha'_i \alpha'_j\right]$.
Kako je $\lim_{P' \longrightarrow P_0} r_{ij}(P') = 0$, to je za dovoljno malene t, drugi clan u zagradi po apsolutnoj vrijednosti manji od prvog (koji je pozitivan realan broj neovisan od t), pa je izraz u zagradi <u>pozitivan</u>, pa je $\underline{f(P') > f(P_0)}$. Kako se za svaku okolinu U tocke P_0 moze uzeti t tako malen da je $P' \in U$, zakljucujemo da f u P_0 ne moze imati lokalni maksimum.
Analogno, primjenjuci opisani postupak na P'', dobili bismo da u svakoj okolini tocke P_0 postoji tocka P'' takva da je $\underline{f(P'') < f(P_0)}$ tj f u P_0 ne moze imati ni lokalni minimum.
Iz posljednje dvije tvrdnje zakljucujemo da P_0 ne moze biti tocka lokalnog ekstrema.

■

Da bi se pethodni Teorem mogao efektivno upotrijebiti potrebno je imati kriterij po kojem se moze ustanoviti kakva je, s obzirom na definitnost, zadana kvadratna forma:

Theorem 43 *(Sylvesterov kriterij): Neka je* $g:\mathbb{R}^n \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$, $g(t_1,\dots,t_n) = \sum_{i'j=1}^{n} a_{ij}t_it_j$ *(simetricna) kvadratna forma. Oznacimo redom determinante:*

$A_1 = a_{11}$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(i) g je pozitivno definitna ***akko*** *je* $A_i > 0$, $\forall i = 1,\dots,n$.

(ii) g je negativno definitna ***akko*** *je* $A_1 < 0$ & $A_2 > 0$ & $A_3 < 0$ & $A_4 > 0$ & $\cdots$, *(tj ako* A_i *alterniraju uz uvjet* $A_1 < 0$*).*

Za ostale slucajeve Sylvesterov kriterij ne daje odgovor, no imamo nesto precizniji kriterij o svojstvima kvadratne forme:

Remark 19 *Kako je matrica* $[a_{ij}]$ *simetricna to su sve njene svojstvene vrijednosti realne:*

(i) g je pozitivno definitna ako su sve svojstvene vrijednosti ***pozitivne.***

(ii) g je negativno definitna ako su sve svojstvene vrijednosti ***negativne.***

(iii)g je indefinitna ako $\exists$ *barem dvije svojstvene vrijednosti razlicitog predznaka*

(iv)g je semidefinitna ako su sve svojstvene vrijednosti istog predznaka od kojih neke mogu biti i nula, (tj g je pozitivno semidifinitna ako su sve ≥ 0, *a neg. semidefinitna ako su sve* ≤ 0*).*

Nizovi i kompaktnost

Nizovi u $\mathbb{R}^n$

Definition 23 *Niz u* $\mathbb{R}^n$ *je svaka funkcija* $p:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

U praksi je uvrijezeno (naravno pogresno) izjednacavati niz (tj funkciju) p sa skupom njegovih (njenih) vrijednosti $p(\mathbb{N}) = \{P_n \in \mathbb{R}^n \mid P_n = p(n), n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^n$, pa se onda govori o "nizu" (P_n).

Definition 24 *Kazemo da niz* (P_n) *u* $\mathbb{R}^n$ konvergira (tezi) tocki $P_0 \in \mathbb{R}^n$ *i pisemo* $\lim_n P_n = P_0$ [131] *,(ili* $(P_n) \longrightarrow P_0$*), ako*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, d(P_n, P_0) < \varepsilon \tag{47}$$

tj ako svaka ε *- okolina tocke* P_0 *sadrzava* ***gotovo sve*** *clanove niza* (P_n) *(tj osim njih konacno mnogo).*

Kazemo da <u>*niz* (P_n) *u* $\mathbb{R}^n$</u> konvergira *ako* $\exists \boxed{P_0 \in \mathbb{R}^n}$ *tako da vrijedi (47).*

Proposition 44 *Ako niz* (P_k) *u* $\mathbb{R}^n$[132] *konvergira onda je njegov limes* ***jedinstven.***

Proof. Pretpostavimo suprotno tj da niz (P_k) konvergira ali da mu limes nije jedinstven, tj da postoje $P_0 \neq P_1$ takvi da vrijedi: $\lim P_k = P_0$ & $\lim P_k = P_1$. Tada prema Def.24 slijedi da za proizvoljno odabrani ε vrijedi:
(i) $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ t da $\forall k > k_0$ je $d(P_k, P_0) < \varepsilon$, i
(ii) $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ t da$\forall k > k_1$ je $d(P_k, P_1) < \varepsilon$.

Neka je $k' \geq k_0, k_1$. Tada imamo:

$$d(P_0, P_1) \overset{\langle M4 \rangle}{\leq} \underbrace{d(P_0, P_{k'})}_{<\varepsilon, jer\ k' \geq k_0} + \underbrace{d(P_{k'}, P_1)}_{<\varepsilon, jer\ k' \geq k_1} < 2\varepsilon.$$

Kako je ε proizvoljan, vidimo da cemo, ukoliko uzmemo $\varepsilon = \frac{1}{2} d(P_0, P_1)$, dobiti kontradikciju tj da je $d(P_0, P_1) < d(P_0, P_1)$. Dakle $P_0 = P_1$, tj ako niz konvergira, njegov limes je jedinstven. ■

Kao sto smo ranije imali tvrdnju kojom smo pojednostavnili ispitivanje neprekidnosti vektorskih funkcija tako da smo ga sveli na ispitivanje skalarnih koordinatnih funkcija (vidi Tm.8), odnosno kad smo ispitivali limes vektorskih funkcija pomocu limesa koordinatnih (vidi Tm.13), tako bismo zeljeli nesto slicno imati i ovdje:

Proposition 45 *Niz* $P_k = \left(x_1^k, \ldots, x_n^k\right)$ *u* $\mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$, *konvergira tocki* $P_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \in \mathbb{R}^n$ ***akko*** *svaki niz realnih brojeva* $\left(x_i^k\right)$, $(i = 1, \ldots, n)$ *konvergira prema* x_i^0.

Proof.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Neka niz (P_k) konvergira prema P_0, tj neka je $\lim_k P_k = P_0$. Tada prema Def.24 za proizvoljni $\varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, t da $\forall k \geq k_0$ je $d(P_k, P_0) = \|P_k - P_0\| < \varepsilon$.

Trebamo pokazati da svaki od nizova $\left(x_i^k\right)$, $(i = 1, \ldots, n)$ konvergira prema x_i^0, tj da je $\lim_k x_i^k = x_i^0$, ili, prema Def.24, da $\forall i$, $\exists k_0' \in \mathbb{N}$,t da cim je $k \geq k_0' : d\left(x_i^k, x_i^0\right) = \left|x_i^k - x_i^0\right| < \varepsilon$ [133].

Kako tvrdnju treba pokazati $\forall i$, odaberimo proizvoljni i pa imamo:

---

[131] $\lim P_n = P_0$ ili $\lim_n P_n = P_0$ je skraceni zapis od $\lim_{n \longrightarrow \infty} P_n = P_0$

[132] Tvrdnja vrijedi i za sve metricke prostore

[133] Jer u Definiciji se ovo tvrdi za svaki $\varepsilon > 0$, pa onda mora vrijediti i za nas proizvoljno odabrani maloprije.

$\left|x_i^k - x_i^0\right| = \sqrt{\left(x_i^k - x_i^0\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(x_i^k - x_i^0\right)^2} = \|P_k - P_0\| < \varepsilon.$
Dobili smo dakle da je za proizvoljni i: $\underline{\left|x_i^k - x_i^0\right| < \varepsilon}$, no ova nejednakost vrijedi samo pod uvjetom da je $\|P_k - P_0\| < \varepsilon$, a uvjet za nju (time i uvjet za podvucenu) je bio $k \geq k_0$.
Sumirajmo: uzeli smo proizvoljni $\varepsilon > 0$, dobili da za njega postoji $k_0' = k_0 \in \mathbb{N}$[134], t da $\forall k \geq k_0$ vrijedi: $\left|x_i^k - x_i^0\right| = d\left(x_i^k, x_i^0\right) < \varepsilon$, sto prema Def.24 znaci da je $\lim_k x_i^k = x_i^0$, pa kako je i bio proizvoljan slijedi da tvrdnja vrijedi $\forall i$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je $\lim_k x_i^k = x_i^0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Trebamo pokazati da $(P_k) \longrightarrow P_0$,tj prema Def.24 da za proizvoljno odabrani $\varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ t da $\forall k \geq k_0$ je $d\left(P_k, P_0\right) < \varepsilon$.
Odaberimo dakle $\varepsilon > 0$. Kako je $\forall i \lim_k x_i^k = x_i^0$, to prema Def.24 znaci da za proizvoljni ε' i za svaki $i = 1, \ldots, n$ postoji $k_0\left(i\right)$[135] t da $\forall k \geq k_0\left(i\right)$ je $d\left(x_i^k, x_i^0\right) = \left|x_i^k - x_i^0\right| < \varepsilon'$.
Uzmemo li sad najveci od svih $k_0\left(i\right)$ moci cemo dobiti neke relacije koje ce vrijediti $\forall i$:
Neka je dakle $k_0 = \max\{k_0\left(i\right), \ i = 1, \ldots, n\}$. Tada ce $\forall k \geq k_0$ vrijediti $\underline{\left|x_i^k - x_i^0\right| < \varepsilon'}$, $\left(\forall i = 1, \ldots, n\right)$. Pa imamo:
$d\left(P_k, P_0\right) = \|P_k - P_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(x_i^k - x_i^0\right)^2}$, a kako iz podvucene nejednakosti slijedi $\left(x_i^k - x_i^0\right)^2 < \left(\varepsilon'\right)^2$,to je $\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(x_i^k - x_i^0\right)^2} < \sqrt{n \cdot \left(\varepsilon'\right)^2}$.
Kako mi zelimo da za nas proizvoljno odabrani ε vrijedi $d\left(P_k, P_0\right) < \varepsilon$, to cemo i dobiti ako stavimo da je $\sqrt{n \cdot \left(\varepsilon'\right)^2} = \varepsilon$, iz cega slijedi relacija: $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Dakle $\lim_k P_k = P_0$.

■

Example 15 • *Niz* $P_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{k-1}{k+1}, k\right)$ *ne konvergira jer ne kovergiraju svi nizovi na koordinatama.*

- *Niz* $P_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{k-1}{k+1}, 0\right)$ *konvergira i to tocki* $\left(0, 1, 0\right)$, *jer kooordinatni nizovi niza* $\left(P_k\right)$ *konvergiraju odgovarajucim vrijednostima uredjene trojke* $\left(0, 1, 0\right)$.

Definition 25 *(i) Za **skup** $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kazemo da je* omedjen (ogranicen) *ako* $\exists P_0 \in X$, *i* $\exists r > 0$ *t da je* $X \subseteq k\left(P_0, r\right)$.

*(ii) **Funkcija** $f : T \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je* omedjena *ako je skup* $f\left(T\right) = \{f\left(t\right) \mid t \in T\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *omedjen*

*(iii)Posebno, **niz** $\left(P_k\right)$ u $\mathbb{R}^n$ je* omedjen *ako je omedjen skup njegovih vrijednosti* $\{P_k \mid k \in \mathbb{N}\}$

[134] Dakle k_0 koji je postojao za konvergenciju vektorskog niza, "dobar" je i za konvergenciju koordinatnih nizova.
[135] $k_0\left(i\right)$ znaci da za svaki i imamo razliciti k_0.

Remark 20 *(i) Podskup $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je omedjen* ***akko*** *za svaku tocku $P_0 \in X$ postoji broj $r > 0$ takav da je $X \subseteq k(P_0, r)$*

(ii) Unija konacno mnogo ogranicenih skupova je opet ogranicen skup

(iii) Svaki podskup ogranicenog skupa je i sam ogranicen

Example 16

- *Niz (P_k): $P_k = (k, 0)$ nije omedjen u $\mathbb{R}^2$ jer se ne postoji r takav da skup njegovih vrijednosti bude podskup $k(0, r)$.*
- *Niz (P_k): $\{ {}^{P_{2k} = \left(\frac{1}{k}, 0\right)}_{P_{2k+1} = \left(\frac{k}{k+1}, 1\right)}$ jeste omedjen jer je za npr. $r = 2$, skup njegovih vrijednosti podskup od $k(0, r)$.(pokazati graficki). No iako svaki od nizova (P_{2k}) i (P_{2k+1}) kovergiraju (tockama $(0, 0)$ i $(1, 1)$ respektivno) ipak niz (P_k), mada je omedjen, nije konvergentan*[136]*.*

Definition 26 *Neka je $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ niz u $\mathbb{R}^n$, a $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$* ***strogo uzlazna funkcija****. Tada se* ***kompozicija*** *$p \circ k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ naziva* podniz *(je takodjer niz) niza p*[137]*.*

Kao sto smo niz p (tj niz njegovih vrijednosti $p(k)$) krace oznacavali s (P_k), tako sad za podniz (kompoziciju $p \circ k$) imamo: $(p \circ k)(j) = p(k(j)) = p(k_j) = \left(P_{k_j}\right)$, tj $j \overset{pok}{\longmapsto} P_{k_j} = P_{k(j)}$.

Primijetimo kako je zbog stroge uzlaznosti od $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ uvijek $k(j) \geq j$[138]

Proposition 46 *Ako niz (P_k) u $\mathbb{R}^n$ konvergira prema $P_0 \in \mathbb{R}^n$ onda i* ***svaki podniz*** *niza (P_k) takodjer kovergira prema P_0.*

Proof. Neka je $\left(P_{k(j)}\right)$ neki podniz niza (P_k). Za dokazati konvergenciju podniza treba odabrati $\varepsilon > 0$.
Kako je $\lim_k P_k = P_0$ to prema Def.24 slijedi da $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ t da je $\forall k \geq k_0$ $d(P_k, P_0) < \varepsilon$.
Neka je $\left(P_{k(j)}\right)$ proizvoljan podniz niza (P_k). Tada za $j \geq k_0$ vrijedi $k(j) \geq j \geq k_0$, pa je onda prema prethodnom $d\left(P_{k(j)}, P_0\right) < \varepsilon$ a to prema Def.24 znaci da je $\lim_j P_{k_j} = P_0$, tj svaki podniz niza (P_k) kovergira takodjer prema P_0. ■

Remark 21 *Obrat prethodne tvrdnje ne vrijedi tj: Ako svi podnizovi nekog niza konvergiraju, ne mora konvergirati i niz (vidi Primjer16)*

No u slucaju da podnizovi konvergiraju a niz ne, tada imamo gomilista:

Definition 27 *Za tocku $P_0 \in \mathbb{R}^n$ kazemo da je* gomiliste niza (P_k) *ako $\exists$* ***podniz*** *$\left(P_{k_j}\right)$ tog niza koji konvergira prema P_0.*

---

[136] Jer da bi bio konvergentan trebaju svi clanovi niza konvergirati jednoj tocki.

[137] Prosto receno - podniz nekog niza dobijemo tako da biramo neke clanove tog niza i to samo po indeksu vece (uzlaznost) i pravimo od njih novi niz (podniz). (Dakle nije podniz npr: $P_{100}, P_{27}, P_{36}, \ldots$)

[138] Naime ne moze biti $\forall j$ $k(j) < j$ jer bi onda bilo i $k(j-1) < j-1, \ldots$ dosli bi do $k(1) < 1$, a to je nemoguce jer mora biti $k(1) \in \mathbb{N}$.

Example 17 • *Postoji niz koji ima samo jedno gomiliste ali ipak nije konvergentan:*

niz $X_n = \{ {\frac{1}{n},\ n=2k \atop n,\ n=2k+1}$ *ima samo jedno gomiliste* (0) *ali ipak nije konvergentan, jer postoji beskonacno mnogo clanova niza izvan svake okoline gomislita* 0.

- *Niz* $X_n = \{ {0,\ n=2n \atop 1,\ n=2n+1}$ *ima dva gomilista* (0 *i* 1)

Iz dosad recenoga mozemo zakljuciti: Ako je (P_k) konvergentan niz, onda je njegov limes ujedno i **jedino** gomiliste.

Theorem 47 *(Bolzano-Weierstrass)Svaki ogranicen niz* (P_k) *u* $\mathbb{R}^n$ *ima barem jedan konvergentan*[139] *podniz (tj prema Def.27 ima gomiliste).*

Proof. Iskazimo najprije jednu definiciju i dvije Leme koje cemo trebati :

Definition 28 *Za niz realnih brojeva kazemo da je* monoton *ako je ili* $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq \cdots$, *ili* $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq \cdots$.

Lemma 48 *Svaki niz realnih brojeva ima monoton podniz.*

Lemma 49 *Svaki omedjen, monoton, niz realnih brojeva konvergira.*

Kako se u teoremu navedeno tvrdi za svaki $\mathbb{R}^n$, tj za svaki $n \in \mathbb{N}$, dokaz cemo provesti indukcijom po dimenziji n prostora $\mathbb{R}^n$:

Za $n = 1$ neka je $\left(x_1^k\right)$ ogranicen niz[140] u $\mathbb{R}$. Prema Lemi48 taj niz ima **monoton** podniz $\left(x_1^{k_j}\right)$, koji je takodjer **ogranicen** [141](vdidi Nap.20 (iii)), pa je prema Lemi49 konvergentan, [odnosno, prema Def.24 postoji tocka kojoj konvergira, pa je ta tocka prema Def.27 gomiliste niza $\left(x_1^k\right)$, tj niz $\left(x_1^k\right)$ ima gomiliste], tj niz $\left(x_1^k\right)$ ima konvergentan podniz.

Pretpostavimo induktivno da teorem vrijedi u $\mathbb{R}^n$, tj da svaki ogranicen niz (P_k) u $\mathbb{R}^n$ ima konvergentan podniz (tj ima gomiliste).

Dokazimo da tada vrijedi i u $\mathbb{R}^{n+1}$:
Odaberimo proizvoljni ograniceni niz (Q_k), $Q_k = \left(x_1^k, \ldots, x_n^k, x_{n+1}^k\right)$ u $\mathbb{R}^{n+1}$. Kako je ovaj niz ogranicen onda je ogranicen i niz (P_k), $P_k = \left(x_1^k, \ldots, x_n^k\right)$ u $\mathbb{R}^n$(vidi Nap.20 (iii)), koji po Pretpostavci indukcije ima konvergentan podniz $\left(P_{k_j}\right)$.
Pogledajmo sad niz $\left(x_{n+1}^k\right)$. To je ogranicen niz realnih brojeva, pa prema

[139]Kad kazemo da je neki niz u X "konvergentan", pod tim, (prema Def.24) podrazumijevamo da konvergira prema tocki "iz X".

[140]Malo odstupamo od dogovorenih oznaka. Naime dosljedno bi (oznacimo li najprije prvu koordinatu $x_1 \equiv x$) ovaj niz trebali oznaciti sa (x_k). Isto tako bi niz na drugoj koordinati (ozn: $x_2 \equiv y$) oznacili sa: (y_k). No kako ovdje ne radimo s malim dimenzijama, koordinate ne mozemo oznacavati s $x, y, z, \ldots$, nego $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, ali bi bilo nespretno pripadne nizove oznaciti sa: (x_{1k}) ili (x_{2k}) itd .. pa umjesto toga stoji $\left(x_1^k\right)$, $\left(x_2^k\right)$, itd.

[141]Naravno-svaki podniz ogranicenog niza je ogranicen, jer su clanovi podniza samo birani elementi polaznog niza.

Lemi48 ima monoton podniz $\left(x_{n+1}^{k_j}\right)$, koji je takodjer ogranicen[142], pa je prema Lemi49 konvergentan.

Kako podniz $\left(P_{k_j}\right)$ konvergira to prema Propoz.45 znaci da svaki koordinatni niz $\left(x_i^{k_j}\right)$, $\forall i = 1, \ldots, n$, konvergira, pa kako konvergira i $\left(x_{n+1}^{k_j}\right)$, prema istoj Propoziciji zakljucujemo da je $Q_{k_j} = \left(x_1^{k_j}, \ldots, x_n^{k_j}, x_{n+1}^{k_j}\right)$ kovergentan podniz niza (Q_k). ■

U praksi kod dokzivanja konvergencije nekog niza preko njene definicije, treba se na bilokoji nacin domoci limesa P_0. Medjutim to najcecsce nije lako. No ponekad je dovoljno znati da promatrani niz konvergira, a da nas sam limes ne zanima. U tu svrhu cesto se koriste svojstva koja slijede:

Definition 29 *Za niz (P_k) u $\mathbb{R}^n$ kazemo da je* Cauchyjev *ili krace da je* C - niz *ako*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k, m \geq k_0,\ d(P_k, P_m) < \varepsilon \tag{48}$$

Proposition 50 *(i) Svaki konvergentan niz je C - niz*[143]
(ii) Svaki C - niz je ogranicen

Proof. (i) Neka je (P_k) konvergentan niz u $\mathbb{R}^n$, i neka je $P_0 = \lim_k P_k$. Odaberimo $\varepsilon > 0$. Zbog konvergencije niza (P_k), prema Def.24 $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, t da $\forall k \geq k_0$ je $d(P_k, P_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Neka su $k, m \geq k_0$ proizvoljni. Tada je $d(P_k, P_m) \overset{\langle M4 \rangle}{\leq} d(P_k, P_0) + d(P_0, P_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dakle niz (P_k) je C-niz.

(ii) Neka je (P_k) C-niz. Trebamo pokazati da je niz (P_k) ogranicen, tj prema (iii) iz Def.25, da je skup $\{P_k \in \mathbb{R}^n \mid k \in \mathbb{N}\}$ ogranicen, odnosno (prema istoj Def.(i)) da postoji $P_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$, za koji je $\{P_k \in \mathbb{R}^n \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq k(P_0, r)$.

Jer je (P_k) C-niz, prema Def.29 za $\varepsilon = 1$ postoji k_0 takav da $\forall m \geq k_0$ vrijedi $d(P_m, P_{k_0}) < 1$. [Dakle ogranicili smo sve clanove s indeksom $\geq k_0$. Preostaje nam jos ograniciti clanove s indeksom $< k_0$] Uzmimo najprije $r' = \max\{d(P_i, P_{k_0}) \mid i = 1, \ldots, k_0\}$. Ocito za jednu od tocaka P_i (ozn. $\equiv P_0$) (cija je udaljenost od P_{k_0} maksimalna) vrijedi da je skup $\{P_i \mid i = 1, \ldots, k_0\} \subseteq k(P_0, r')$. Oznacimo li sad $r = r' + 1$ imat cemo da je cijeli skup $\{P_k \in \mathbb{R}^n \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq k(P_0, r)$, tj C-niz je ogranicen. ■

Remark 22 *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Promatrajmo nizove (P_k), gdje je $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_k \in A$. U tom slucaju kazemo da je (P_k)* ***niz u*** *A. Ako je (P_k) C-niz u A, onda opcenito on ne mora biti kovergentan u A, tj. ako limes i postoji, ne mora biti u A.*

Example 18
- *Neka je $A = \langle 0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Promatrajmo niz (x_n), $x_n = \frac{1}{n}$ u A.*
  (x_n) je C-niz u A, ali nije konvergentan u A (jer konvergira prema $0 \notin A$),

[142] Jer je ogranicen vektorski niz Q_k, a clanovi ovog su samo birane tocke na posljednjem koordinatnom nizu.
[143] Obrat ne vrijedi.

No taj niz je kovergentan u $\mathbb{R}$. Isto tako je (x_n) konvergentni C-niz u $B = [0,1]$

- *Neka je $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Promatrajmo niz racionalnih brojeva:* $1,4; 1,41; 1,414; \ldots$. *To je C-niz u $\mathbb{Q}$, ali nije kovergentan u $\mathbb{Q}$, ali jeste konvergentan u $\mathbb{R}$ i limes mu je $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.*

Definition 30 *Za metricki prostor (X, d) u kome svaki C-niz konvergira prema nekoj tocki $x_0 \in X$, kazemo da je* potpun *metricki prostor.*

Example 19 *Prema prethodnim primjerima $\langle 0, 1]$ nije dakle potpun, ni $\mathbb{Q}$ nije potpun. $\mathbb{R}$ je potpun metricki prostor.*

Theorem 51 *$\mathbb{R}^n$ je potpun metricki prostor.*

Proof. Da bismo pokazali da je neki metricki prostor potpun, trebamo, prema Def.30 pokazati da svaki C-niz iz tog prostora kovergira prema tocki iz tog prostora:

Neka je (P_k) proizvoljni C-niz u $\mathbb{R}^n$. Prema (ii) iz Propoz.50 je niz (P_k) ogranicen, a prema Tm.47 slijedi da ima konvergentan podniz $\left(P_{k_j}\right)$, sto znaci da postoji tocka $P_0 \in \mathbb{R}^n$ takva da je $P_0 = \lim_j P_{k_j}$.

Tvrdimo: $P_0 = \lim_k P_k$.
Da bismo to pokazali, treba prema Def.24, $\forall \varepsilon > 0$, pronaci $k_0' \in \mathbb{N}$, t da $\forall k \geq k_0'$ je $d(P_k, P_0) < \varepsilon$. To cemo pokazati koristeci dvije cinjenice: da je niz (P_k) C-niz, i da je $P_0 = \lim_j P_{k_j}$.

Odaberimo najprije $\varepsilon > 0$.
Kako je (P_k) C-niz to prema Def.29 $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ t da:
(i) $\forall k, m \geq k_0$, je $d(P_k, P_m) < \frac{\varepsilon}{2}$
Nadalje, kako je $P_0 = \lim_j P_{k_j}$, to prema Def.24 $\exists j_0 \in \mathbb{N}$, t da:
(ii) $\forall j \geq j_0$, je $d\left(P_{k_j}, P_0\right) < \frac{\varepsilon}{2}$[144]

Ocito nam sad treba egzistencija nekog $k_0' \in \mathbb{N}$, t da ce svi brojevi veci od k_0' biti veci i od k_0 i od j_0, pa bi na njih mogli primijeniti obje tvrdnje (i) i (ii).
Naime uvijek vrijedi:
(iii) $d(P_k, P_0) \overset{\langle M4 \rangle}{\leq} d\left(P_k, P_{k_j}\right) + d\left(P_{k_j}, P_0\right)$,
pa da bi ovaj zbroj bio $< \varepsilon$, trebaju nam takvi k i k_j na koje cemo moci primijeniti (i) i (ii):

Neka je $k_0' = \max\{k_0, j_0\}$.
Tada za $\underline{k, j \geq k_0'}$ imamo:
Kako je $k_j \geq j \geq k_0' \geq j_0$, to prema (ii) slijedi $d\left(P_{k_j}, P_0\right) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Kako je $k \geq k_0' \geq k_0$, i $k_j \geq j \geq k_0' \geq k_0$, to prema (i) slijedi $d\left(P_k, P_{k_j}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ubacimo li posljednje dvije nejednakosti u (iii) imat cemo:
$d(P_k, P_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, tj dokazali smo da vrijedi Tvrdnja: $P_0 = \lim_k P_k$, a kako je $P_0 \in \mathbb{R}^n$, to smo konacno dokazali da svaki C-niz iz $\mathbb{R}^n$ ima limes iz $\mathbb{R}^n$. ■

[144] Prije smo ustvrdili da je uvijek $k_j \geq j$ (vidi Def.26 i retke nakon), pa tako sada kako je $j \geq j_0$ & $k_j \geq j \implies k_j \geq j_0$.

Pomocu konvergentih nizova mogu se karakterizirati zatvoreni skupovi, naime vrijedi:

Theorem 52 *Skup* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *je* zatvoren ***akko*** *svaki niz* (P_k) *iz* S *koji konvergira u* $\mathbb{R}^n$ *ima limes u* S.[145]

Npr. neka je $S = \langle 0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ i niz (P_k), $P_k = \frac{1}{k}$. Otprije znamo da S nije zatvoren (vidi Def.1). No to potvrdjuje i teorem: naime, niz (P_k) je niz iz S koji konvergira u $\mathbb{R}$ (limes mu je 0), ali $0 \notin S$, tj limes mu nije u S, pa S nije zatvoren.

Proof.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren. Neka je (P_k) niz iz S koji konvergira prema tocki $P_0 \in \mathbb{R}^n$. Trebamo pokazati da je $P_0 \in S$.
Pp suprotno, tj neka je $P_0 \notin S \implies P_0 \in \mathbb{R}^n \backslash S$. Kako je S zatvoren, to je njegov komplement $\mathbb{R}^n \backslash S$ otvoren (vidi Def.4), sto prema Def.1 znaci da se oko tocke $P_0 \in \mathbb{R}^n \backslash S$ moze opisati kugla koja je unutar $\mathbb{R}^n \backslash S$. Postoji dakle $r > 0$ t da je $k(P_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash S$.
No kako je $P_0 = \lim_k P_k$ to prema Def.24 znaci da i za nas $r > 0, \forall k_0 \in \mathbb{N}$, t da $\forall k \geq k_0$ je $d(P_k, P_0) < r$, odnosno da je $\forall k \geq k_0$ tocka P_k unutar kugle $k(P_0, r)$ koja je podskup od $\mathbb{R}^n \backslash S$, tj $\forall k \geq k_0$ je $P_k \in \mathbb{R}^n \backslash S \implies P_k \notin S$, sto je u kontradikciji s cinjenicom da je (P_k) niz u S.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka svaki niz iz S koji konvergira u $\mathbb{R}^n$ ima svojstvo **da mu je limes u** S.
Trebamo dokazati da je tada S zatvoren podskup od $\mathbb{R}^n$:

Ako je $S = \mathbb{R}^n$ tada je tvrdnja teorema istinita jer je $\mathbb{R}^n$ zatvoren.

Pretopostavimo stoga da je $S \neq \mathbb{R}^n$ tj da je S pravi podskup od $\mathbb{R}^n$. Pokazimo da je S zatvoren:
Prema Def.4 to je isto kao i pokazati da je $\mathbb{R}^n \backslash S$ otvoren tj da
$(\forall P_0 \in \mathbb{R}^n \backslash S), (\exists r > 0)$ t da je $k(P_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash S$:

Pp. suprotno, tj (negiramo li gornju tvrdnju)[146] da
(i) $\left(\exists \underline{P_0 \in \mathbb{R}^n \backslash S}\right), (\forall r > 0)$ je $k(P_0, r) \nsubseteq \mathbb{R}^n \backslash S \iff \underline{k(P_0, r) \cap S \neq \emptyset}$.
[Nasa polazna pretpostavka bila je da "svaki niz iz S koji konvergira u $\mathbb{R}^n$ ima svojstvo **da mu je limes u** S". Pretpostavili smo suprotno tj da tada S nije zatvoren i pokazali da je to ekvivalentno tvrdnji (i). Zelimo li dobiti kontradikciju, dovoljno je koristeci (i) pronaci "niz iz S koji konvergira u $\mathbb{R}^n$" ali koji nema svojstvo da mu je limes u S]
Pa imamo:
Prema (i) specijalno slijedi da $\forall k \in \mathbb{N}$, postoji tocka $P_k \in k\left(P_0, \frac{1}{k}\right) \cap S$.

[145] Teorem vrijedi i u svakom metrickom prostoru (vidi dokaz).
[146] "Gornja tvrdnja" je karakterizacija otvorenosti skupa $\mathbb{R}^n \backslash S$, tj zatvorenosti skupa S, pa je njena negacija (i) tvrdnja da $\mathbb{R}^n \backslash S$ nije otvoren, tj da S **nije zatvoren.**

Konstruiramo li sad od tih tocaka niz, taj niz (P_k) ce svakako biti niz u S (jer je svaka tocka element presjeka s S), i bit ce $P_0 = \lim_k P_k$[147]$\in \mathbb{R}^n \backslash S$.

Dakle pronasli smo niz u S, koji konvergira u $\mathbb{R}^n$ (tocnije prema tocki $P_0 \in \mathbb{R}^n \backslash S$), pa prema polaznom svojstvu mora vrijediti $P_0 \in S$, sto je u kontradikciji s Pp da je $P_0 \in \mathbb{R}^n \backslash S$, dakle petpostavka da S nije zatvoren nij eistinita, pa slijedi da je S zatvoren podskup od $\mathbb{R}^n$.

■

Corollary 53 *Svaki zatvoreni podskup od $\mathbb{R}^n$ je potpun.*

Proof. Neka je S zatvoreni podskup od $\mathbb{R}^n$, tj $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Trebamo pokazati da je tada S potun metricki prostor. Prema Def.30 to znaci da treba pokazati da svaki C-niz iz S ima limes u S:

Neka je dakle (P_k) C-niz u S. Tada je naravno (P_k) i C-niz u $\mathbb{R}^n$. No jer je $\mathbb{R}^n$ potpun (Tm.51), to prema Def.30 znaci da (P_k) konvergira u $\mathbb{R}^n$, tj prema Def.24 da $\exists P_0 \in \mathbb{R}^n$ t da je $P_0 = \lim_k P_k$. Ali kako je S zatvoren, to prema Tm.52 slijedi da je $P_0 \in S$.

Dakle C-niz (P_k) iz S konvergira u S, pa je prema Def.30 S potpun metricki prostor. ■

[147] Pokazimo da je $P_0 = \lim_k P_k$: Odaberimo $\varepsilon > 0$, Tada $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ t da je $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$. Neka je $k \geq k_0$. Tada iz $P_k \in k\left(P_0, \frac{1}{k}\right)$ slijedi da je $d\left(P_0, P_k\right) < \frac{1}{k}$, a kako je tada i $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0}$, to dakle $\left(\exists k_0 \in \mathbb{N}\right), \forall k \geq k_0,\ d\left(P_0, P_k\right) < \varepsilon$, pa je prema Def.24 doista $P_0 = \lim_k P_k$.