PRIPREMNI TEČAJ

FUNKCIJE

Bilješke s predavanja   05. 09. 2005.

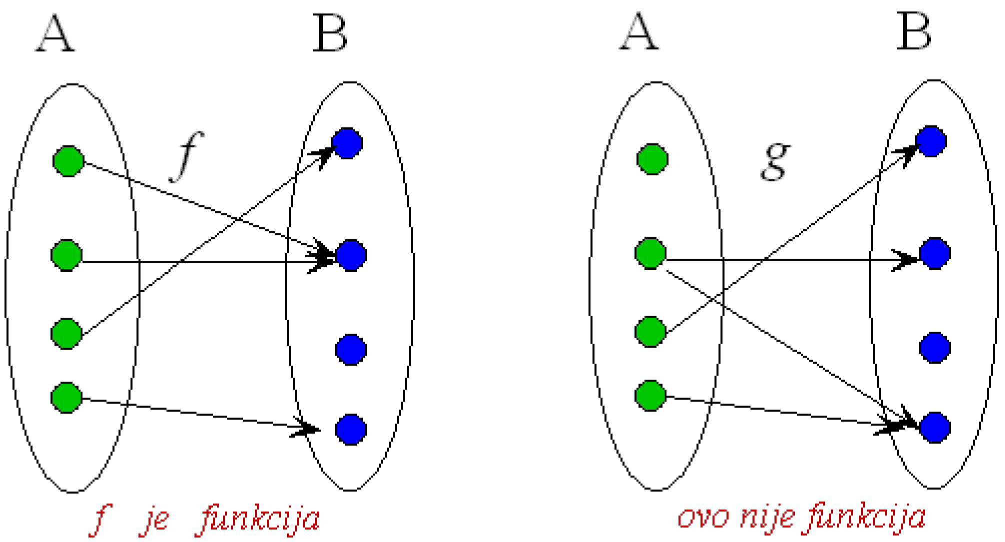
Sastavila: Leandra Vranješ

FUNKCIJE

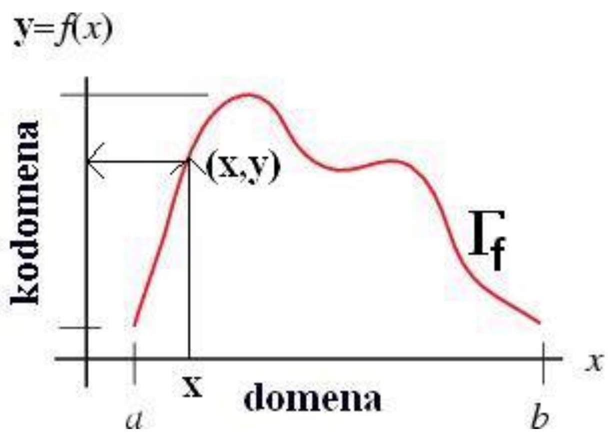
Def:
Neka su *A* i *B* dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu skupa *A* pridružen jedan element skupa *B*, onda kažemo da je zadana **funkcija** sa skupa *A* **u** skup *B*.

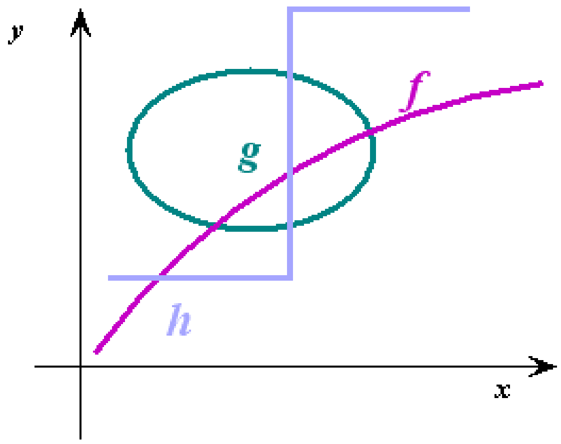
$$f : A \to B, \quad f(a) = , a \in A, \; b \in B$$

Kaže se da je *f(x)* vrijednost funkcije *f* na elementu *x*; *f(x)* se zove slika od *x*, a *x* original (praslika) of *f(x)*; *x* se zove nezavisna, a *f(x)* zavisna promjenjiva (varijabla).



Skup *A* zovemo **područje definicije** ili **domena** funkcije *f* i često ga označavamo s $\Delta(f)$.
Skup B zovemo **kodomena** od *f* .
Skup svih slika, tj. skup $\{ f(x) \in B : x \in A\}$ je podskup od B i naziva se slika od *f* i označava sa P(*f*) ili *f*(A).
Skup uređenih parova realnih brojeva $\{(x,f(x)) : x \in \Delta \}$ nazivamo grafom funkcije *f* i označavamo s Γ_f





f je funkcija, a *g* i *h* nisu.

Jednakost funkcija:

Neka su zadane funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$. Kažemo da je funkcija *f* jednaka funkciji *g* i pišemo *f* = *g* ako je:
1. A = C
2. B = D
3. f(x) =g (x) $\forall$ x $\in$ A, (A=C)

Npr. g(x) = x/x
f(x) = 1 $\forall x \in \mathbf{R}$

- f i g nisu jednake jer im domene nisu jednake ($\Delta(f) = \mathbb{R}$, a $\Delta(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Realne funkcije realne varijable:

Za funkciju *f* kažemo da je **funkcija realne varijable** ako je njena domena podskup realnih brojeva, $\Delta(f) \subseteq$ P. Za funkciju *f* kažemo da je **realna** ako je njezina kodomena podskup realnih brojeva.

Funkcije zadane formulom

Npr. $f(x)=x^2 - x + 7$, $x \in$ P

Ovdje se često područje definicije potpuno ne specificira već se smatra da se područje definicije sastoji od svih realnih brojeva $x \in$ P za koje formula ima smisla (za koje se kao rezultat dobije realan broj) i koji zadovoljavaju eventualno postavljene uvjete.
Za funkciju zadanu formulom treba najprije odrediti područje definicije.

Primjeri:

1. f(x) = 1/x D(f) = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

2. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow D(f) = [-1,1]$

3. $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{(x^2+1)(x+2)(x-3)}$

$(x^2+1)(x+2)(x-3)\neq 0$

(x^2+1) je uvijek $\neq 0$ pa mora vrijediti

$(x+2)(x-3)\neq 0 \quad \Rightarrow D(f)=\mathbf{R}\setminus\{-2,3\}$

4. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

$g(x)=\dfrac{1}{x-1}$; $f\neq g$ jer im domene nisu jednake ; kažemo da je g proširenje od f

Proširenje i restrikcija funkcije:

Svaku funkciju g nazivamo **proširenjem** funkcije $f\colon A\to B$ ako je:
1. $\Delta(g)\supset\Delta(f)$.
2. $g(x)=f(x) \quad \forall x\in\Delta(f)$

f je restrikcija od g.

Zadatak:

1. Da li su jednake funkcije f i g , definirane na prirodnoj domeni?

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}-3,\quad g(x)=x-2$

b) $f(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{2x+1},\quad g(x)=\sqrt{2x^2-x-1}$;

c) $f(x)=2x,\quad g(x)=|x-1|+|x+1|$;

Algebra funkcija

Neka su zadane funkcije f i $g\colon\Delta\to$ P. Definiramo $f+g$, $f-g$, cf, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$.

Domena funkcija $f+g$, $f-g$, cf, $f\cdot g$ je Δ

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$(cf)(x)=c\cdot f(x), \qquad c\in\square$,

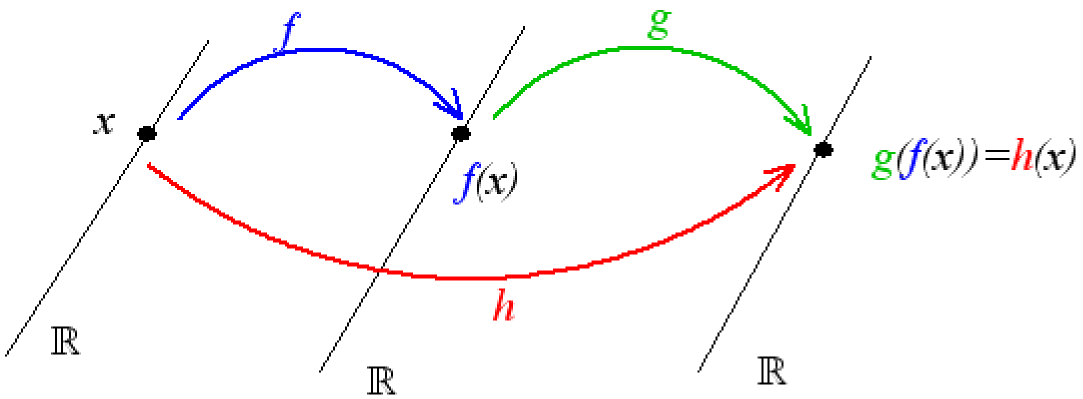
$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

a domena funkcije $\dfrac{f}{g}$ je podskup od Δ tj. $\{x\in\Delta : g(x)\neq 0\}$ i

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

<u>Kompozicija funkcija</u>

Neka je f*: A* $\rightarrow$P i *g: B* $\rightarrow$ P, *A, B* $\subseteq$ P. Ako je *f(A)*$\subseteq$*B* tada možemo definirati funkciju *h: A* $\rightarrow$P na sljedeći način $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$. Funkciju $h=g\circ f$ nazivamo kompozicijom funkcija *f* i *g*.



Primjer:

$f(x)=x^2$ $g(x)=\sin(x)$

1. $(g\circ f)(x)=g(x^2)=\sin(x^2)$

   $(f\circ g)(x)=f(\sin(x))=(\sin x)^2$

2. $(g\circ f)(x)=g(\sqrt{x})=\left(\sqrt{x}\right)^3=x^{3/2}$

   $(f\circ g)(x)=f(x^3)=\sqrt{x^3}\rightarrow$ ova kompozicija nije dobro definirana jer je slika od g ℝ, a domena funkcije f je $\mathbb{R}^+$.

3. Ako je $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x+1}$ odredite:

a) $f(g(x))$
b) $g(f(x))$
c) $f(g(x)-f(x))$
d) $g\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$
e) $f(g(f(x)))$

<u>Bijekcija</u>

Funkcija $f: A\rightarrow B$ je **bijekcija** ako vrijedi:

1. *f* je **injekcija** ili injektivno preslikavanje tj. ako je:

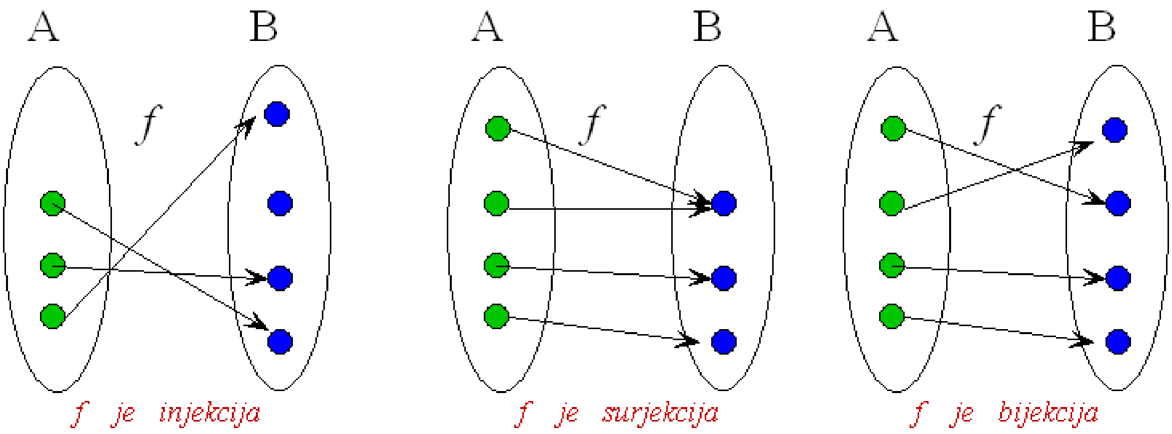
   $x_1\neq x_2$, onda je $f(x_1)\neq f(x_2)$.

   (Alternativna definicija: *f* je **injekcija** ili injektivno preslikavanje ako

   $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$)

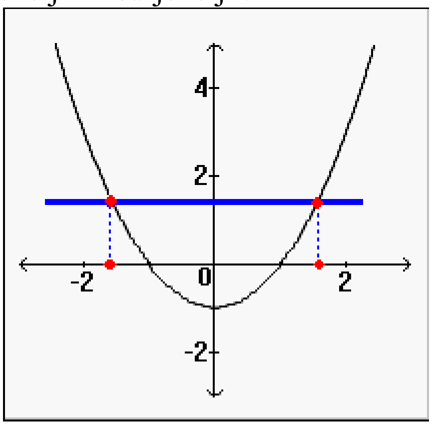
2. *f* je **surjekcija** ili surjektivno preslikavanje, tj. svaki element iz *B* je slika nekog elementa iz *A*, *f(A)=B.*

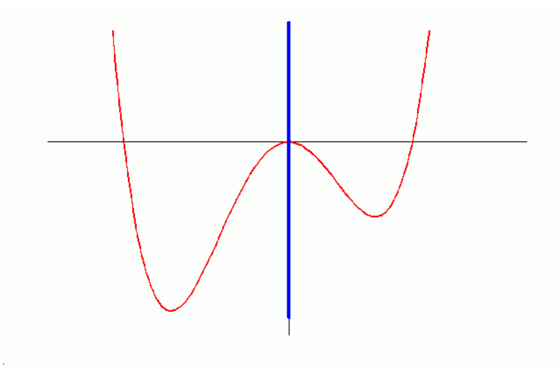
Odnosno, funkcija je bijekcija ako *svakom* elementu iz B odgovara *točno jedan* element iz A.



Kako možemo iz grafa odrediti da li je funkcija injekcija ili surjekcija?

Test horizontalnog pravca: ako pravac siječe graf na više od jednog mjesta funkcija nije injekcija





Ako projekcija na y-os pokriva cijelu kodomenu, tada je funkcija surjekcija.

Zadaci:

1. Dokaži da je funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3$ bijekcija.

$f(x_1)=f(x_2)$

$x_1^3=x_2^3 \quad /\sqrt[3]{\ }$

$\Rightarrow x_1=x_2 \quad \Rightarrow f \quad je\ injekcija$

$\forall y\in\mathbb{R} \quad \exists x\in\mathbb{R} \quad t.d.\ f(x)=y$

$x=\sqrt[3]{y}$

$y=\left(\sqrt[3]{y}\right)^3 \quad \Rightarrow f(x)\ je\ surjekcija$

2. Koje su od ovih funkcija injektivne:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$;

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

c) $f(x)=2^{1-x}$

d) $f(x)=\dfrac{2x}{|x-3|}$

Inverzna funkcija

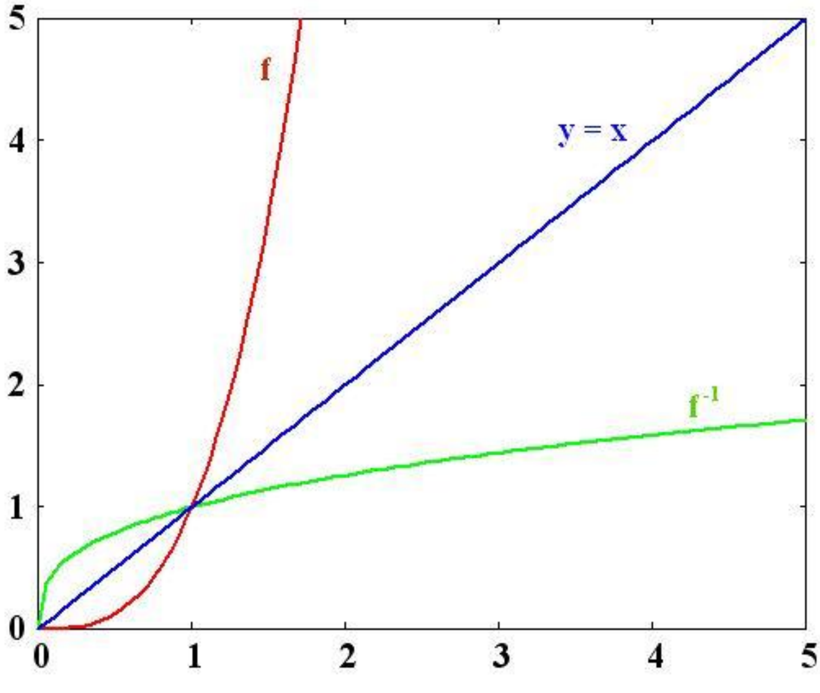
Ako je f bijekcija s A na B onda se može definirati funkcija $g : B \to A$ tako da vrijedi:

$$f(g(y))=y \quad \forall y\in B$$
$$g(f(x))=x \quad \forall x\in A$$

Funkciju g nazivamo **inverznom** funkcije f i označavamo sa f^{-1}.

$$f\circ f^{-1}=1_B \qquad f^{-1}\circ f=1_A$$

Graf inverzne funkcije je simetričan grafu funkcije f s obzirom na pravac y=x, tj. ako je $(x,y)\in\Gamma_f$, onda je $(y,x)\in\Gamma_f^{-1}$.



Pr 1:

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \qquad f(x)=2x+3 \quad f \text{ je bijekcija}$$
$$f(f^{-1}(y))=y$$
$$2f^{-1}(y)+3=y$$
$$f^{-1}(y)=\frac{y-3}{2}$$

Inverznu funkciju je praktično računati sljedećim postupkom:

1) Jednadžbu $y = f(x)$ riješimo po nepoznanici x
2) Ako postoji jedinstveno rješenje te jednadžbe tada funkcija ima inverznu funkciju, $x = f^{-1}(y)$
3) Zamijenimo nepoznanice y i x da bismo dobili zapis $y = f^{-1}(x)$.

1. Za funkciju $f(x)$ izračunajte inverznu funkciju i odredite njeno područje definicije, ako je

a) $f(x)=x^2-1$

b) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$

c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

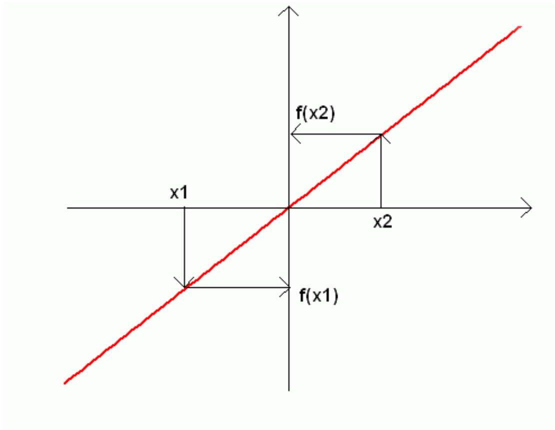
<u>Monotone funkcije</u>

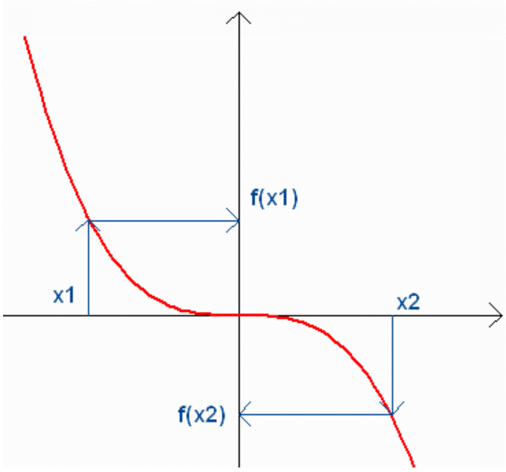
Ako je $f: \Delta \to P$, $\Delta \subseteq P$ kažemo da monotono raste ako $\forall\, x_1, x_2 \in \Delta$ vrijedi

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow (\ f(x_1) \leq f(x_2)\ ).$$

Analogno, funkcija monotono pada ako

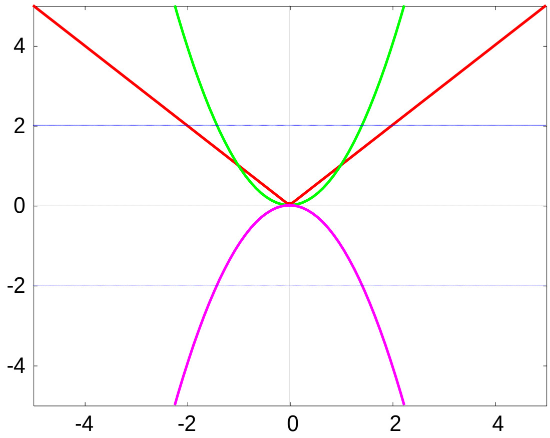
$$(x_1 < x_2) \Rightarrow (\ f(x_1) \geq f(x_2)\ ).$$



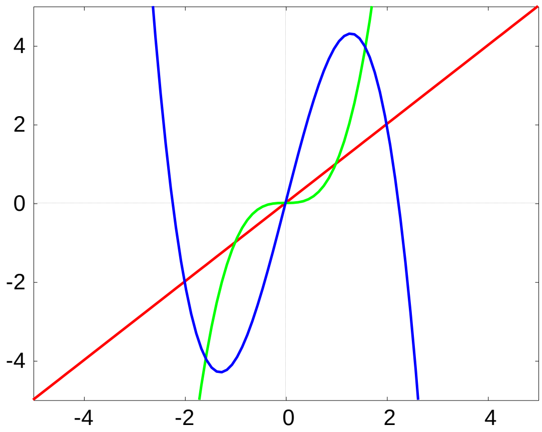


Parne i neparne funkcije

Ako je f: $\Delta \to P$, zadana na simetričnom skupu Δ $(x \in \Delta \Rightarrow -x \in \Delta)$ i ako vrijedi $f(-x)=f(x)$ $\forall x \in \Delta$ onda f nazivamo parnom funkcijom. Ako vrijedi $f(-x)=-f(x)$ tada f nazivamo neparnom funkcijom.



Crt. 1 Parne funkcije $|x|$, x^2, $-x^2$



Crt. 2 Neparne funkcije x, x^3, $-x^3+5x$

Zadatak:

Koje su od sljedećih funkcija parne, koje neparne, a koje nisu ni parne ni neparne?

$a)\ f(x) = x + x^2$

$b)\ f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$c)\ f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

$d)\ f(x) = x|x|$

$e)\ f(x) = \sqrt[3]{x-x^3}$

$f)\ f(x) = \dfrac{x-1}{|x-1|}$