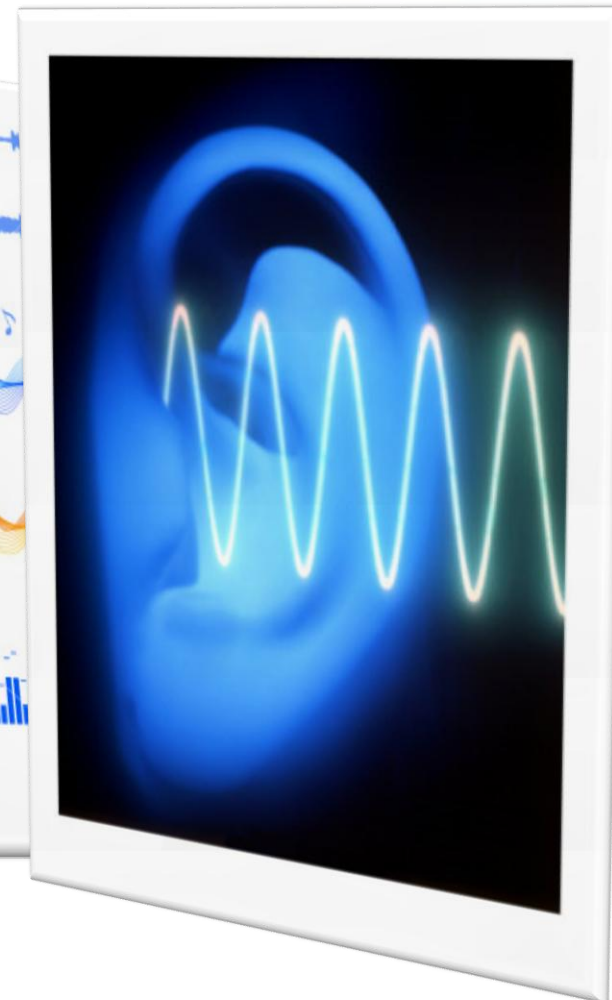
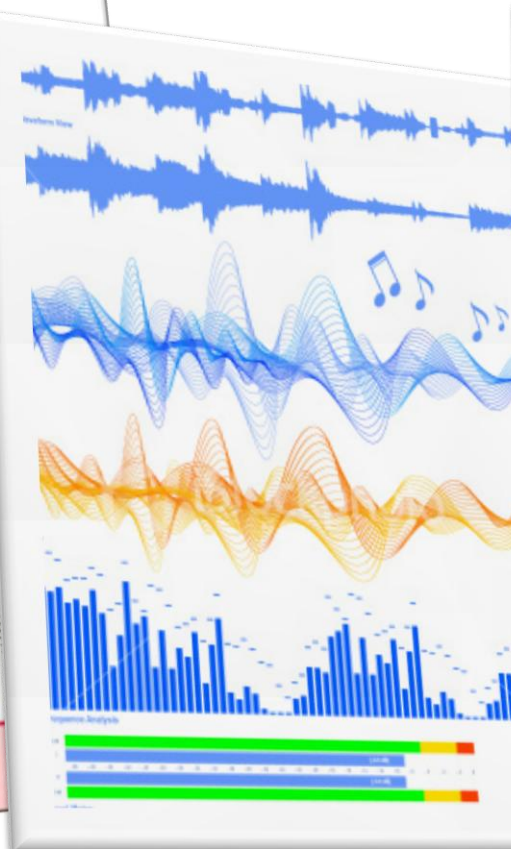
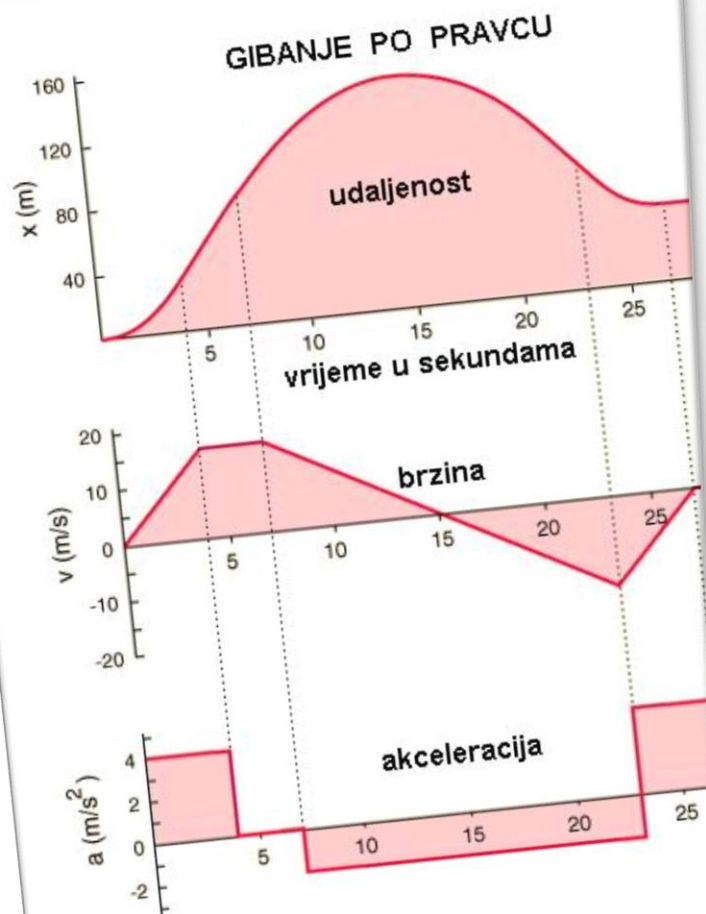


1. Funkcije



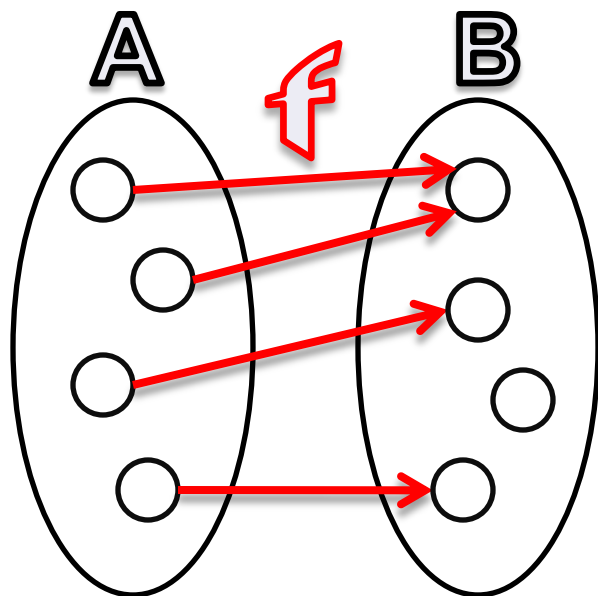
definicija, svojstva, kompozicja,
inverzna...

Motivacija

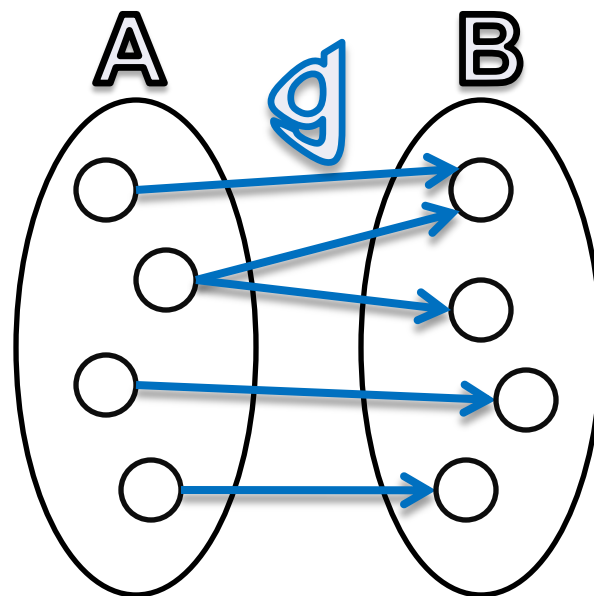


Definicija

- Neka su A i B dva neprazna skupa. Ako je **svakom** elementu skupa A pridružen **jedan** element skupa B , onda kažemo da je zadana **funkcija** sa skupa A u skup B .
- Pišemo: $f: A \rightarrow B$, $f(a) = b$, $a \in A$, $b \in B$



$f: A \rightarrow B$ je funkcija
 $g: A \rightarrow B$ nije funkcija



Nazivi



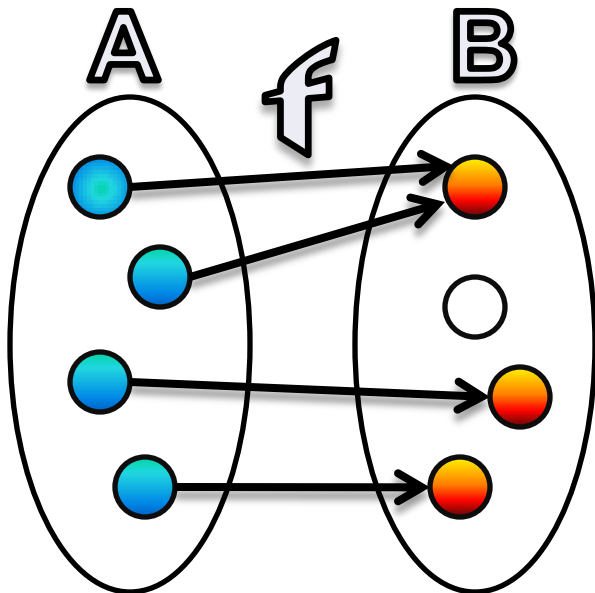
- Kaže se da je $f(x)$ vrijednost funkcije f na elementu x

x	$f(x)$
original(praslika) od $f(x)$	slika od x
nezavisna varijabla	zavisna varijabla
argument funkcije	vrijednost funkcije u x

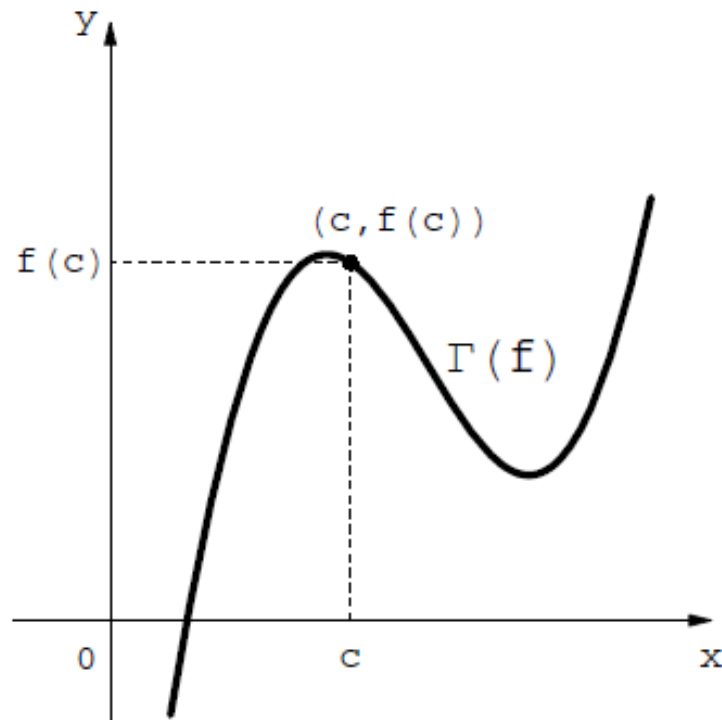
skup A	skup B
područje definicije	područje vrijednosti
domena	kodomena
$\mathcal{D}(f)$	$\mathcal{K}(f)$

Slika i graf funkcije

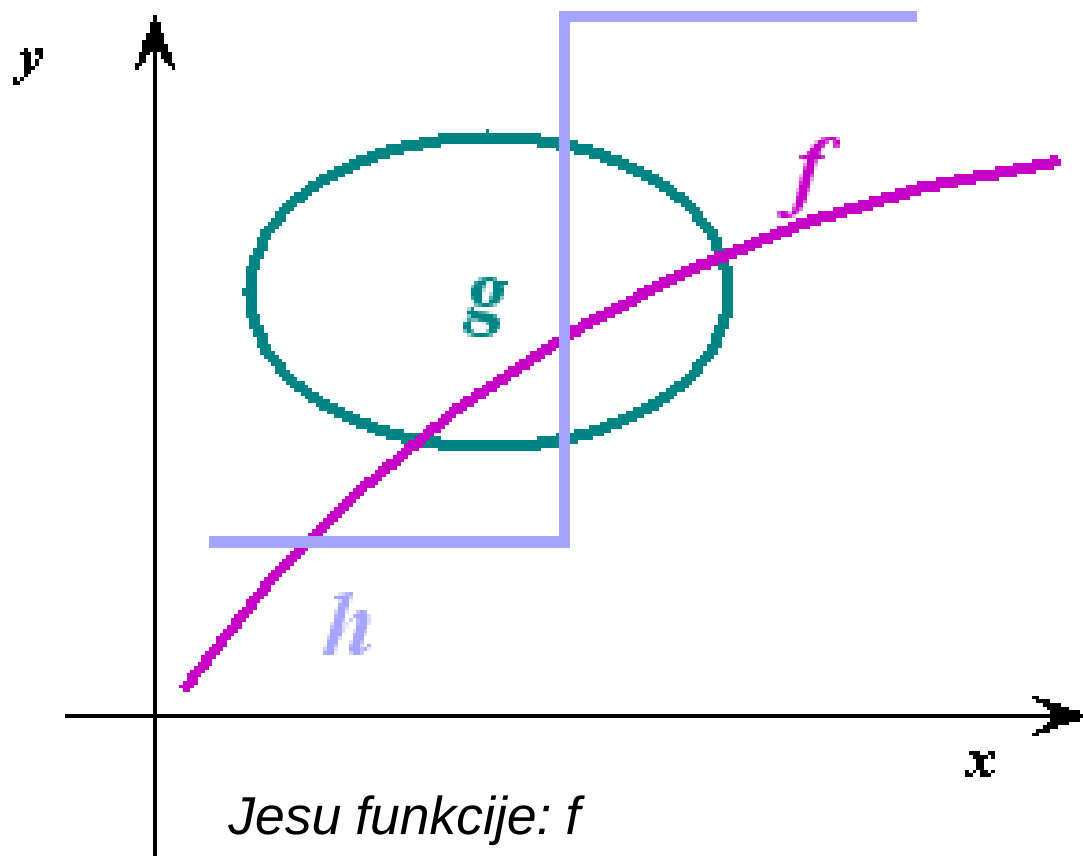
- Slika funkcije f je skup
 $\mathcal{R}(f) = \{f(x) \in B : x \in A\}$
 $\mathcal{R}(f) = f(A)$



- Graf funkcije f je skup
 $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\}$
 $\Gamma(f) \subseteq A \times B$



Koji od nacrtanih grafova predstavlja funkciju ?



Jesu funkcije: f
Nisu funkcije: g i h

Svaki pravac paralelan sa y osi mora sijeći graf funkcije u najviše jednoj točki.

Realne funkcije realne varijable



- Za funkciju f kažemo da je **funkcija realne varijable** ako je njena domena podskup realnih brojeva, $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$.
- Za funkciju f kažemo da je **realna** ako je njezina kodomena podskup realnih brojeva, $\mathcal{K}(f) \subseteq \mathbb{R}$.
- **Prirodno područje definicije** (**prirodna domena**) za realne funkcije realne varijable zadane formulom sastoji se od svih brojeva za koje je izraz definiran.

Jednakost funkcija



- Neka su zadane funkcije $f: A \rightarrow B$ i $g: C \rightarrow D$.
Kažemo da je funkcija f jednaka funkciji g i pišemo $f = g$ ako je:
 1. $A = C$;
 2. $B = D$;
 3. $(\forall x \in A) (f(x) = g(x))$.
čitamo: “za svaki x iz A vrijedi $f(x) = g(x)$ ”
- Npr. funkcije $g(x) = x/x$ i $f(x) = 1$
nisu jednake jer im nisu jednake domene,
 $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zadaci

1. Odredite prirodnu domenu funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{x(x-1)}{(x^2+1)(x+2)(x-3)}$

Proširenje i restrikcija funkcije



- Funkciju g nazivamo **proširenjem** funkcije $f : A \rightarrow B$ ako je ispunjeno:
 1. $\mathcal{D}(g) \supset \mathcal{D}(f)$.
 2. $g(x) = f(x) \quad (\forall x \in \mathcal{D}(f))$
- Funkciju f zovemo **restrikcija** od g .

Zadaci

2. Jesu li jednake funkcije f i g , definirane na prirodnoj domeni:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} - 3$, $g(x) = x-2$

c) $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{2x+1}$, $g(x) = \sqrt{2x^2-x-1}$

d) $f(x) = 2x$, $g(x) = |x-1| + |x+1|$

Algebra funkcija



- Neka su zadane funkcije $f, g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Definiramo $f+g$, $f-g$, cf , fg , f/g :
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(cf)(x) = c \cdot f(x), \quad c \in \mathbf{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

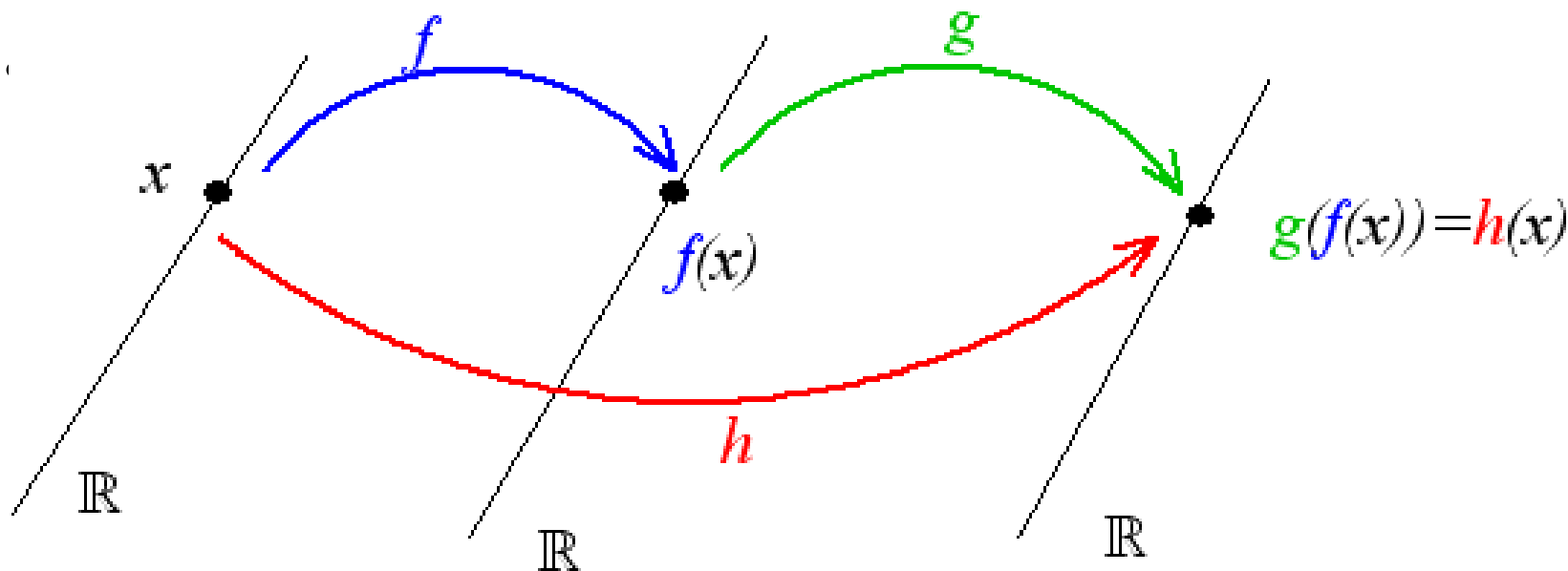
- Domena funkcija $f+g$, $f-g$, cf , fg je $\mathcal{D}$, a domena funkcije f/g je podskup od $\mathcal{D}$, odnosno skup

$$\{x \in \mathcal{D} : g(x) \neq 0\}$$

Kompozicija funkcija

- Neka su $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ i $g:B \rightarrow \mathbb{R}$ te $A, B \subseteq \mathbb{R}$.
- Ako je $f(A) \subseteq B$ tada možemo definirati funkciju $h:A \rightarrow \mathbb{R}$, odnosno kompoziciju funkcija f i g

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Zadaci

3. Jesu li dobro definirane kompozicije fog i gof ako su:

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^3$

4. Ako su $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x + 1}$, odredite

a) $f(g(x))$

d) $g(1/f(x))$

b) $g(f(x))$

e) $f(g(f(x)))$

c) $f(g(x)) - f(x)$

Bijekcija



Funkcija $f: A \rightarrow B$ je **bijekcija** ako vrijedi:

1. f je **injekcija** ili injektivno preslikavanje, tj. svaki element iz skupa A preslika u različit element skupa B

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\{ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \}$$

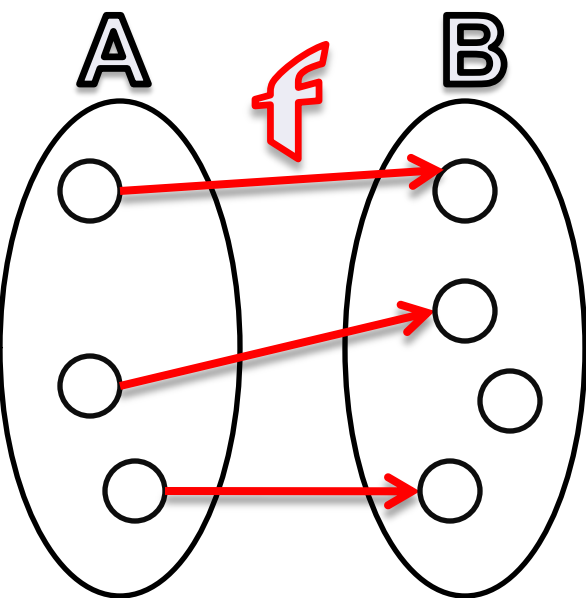
2. f je **surjekcija** ili surjektivno preslikavanje, tj. svaki element iz B je slika nekog elementa iz A , $f(A)=B$.

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$$

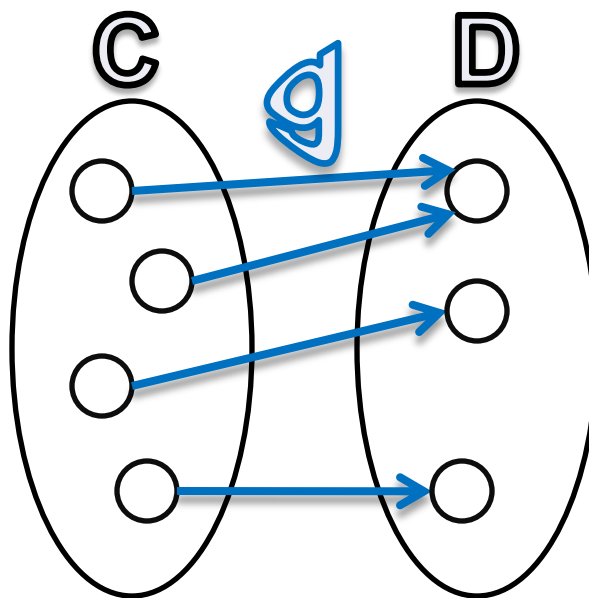
“za svaki y iz B postoji x iz A takav da vrijedi $f(x)=y$ ”

Odnosno, funkcija je bijekcija ako svakom elementu iz B odgovara točno jedan element iz A .

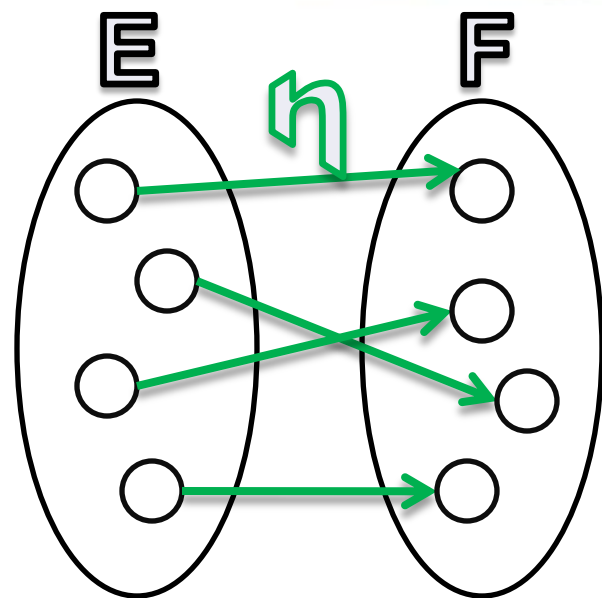
Injekcija, surjekcija, bijekcija



INJEKCIJA

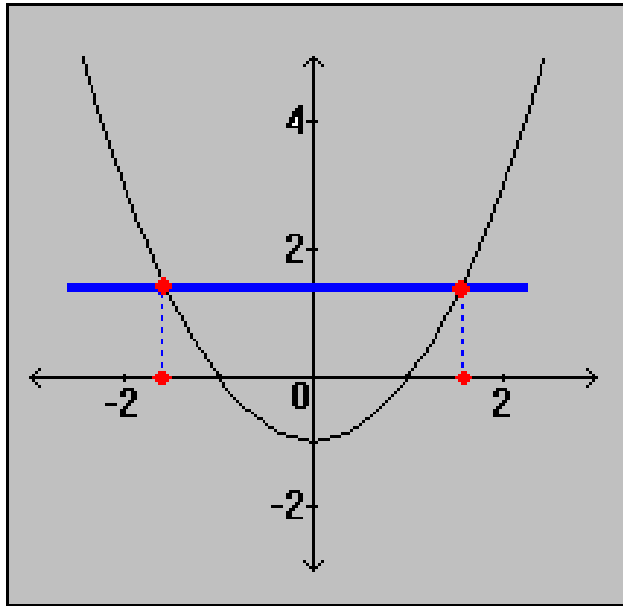


SURJEKCIJA

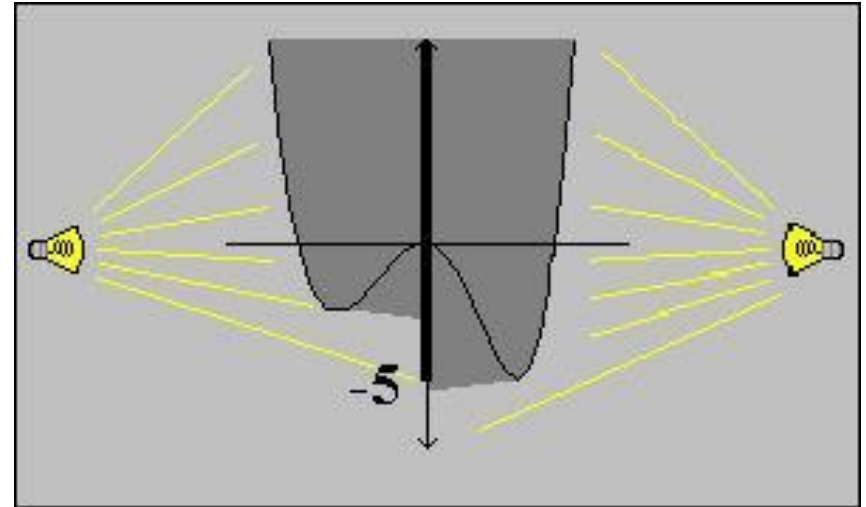


BIJEKCIJA

Kako možemo iz grafa odrediti da li je funkcija injekcija ili surjekcija?

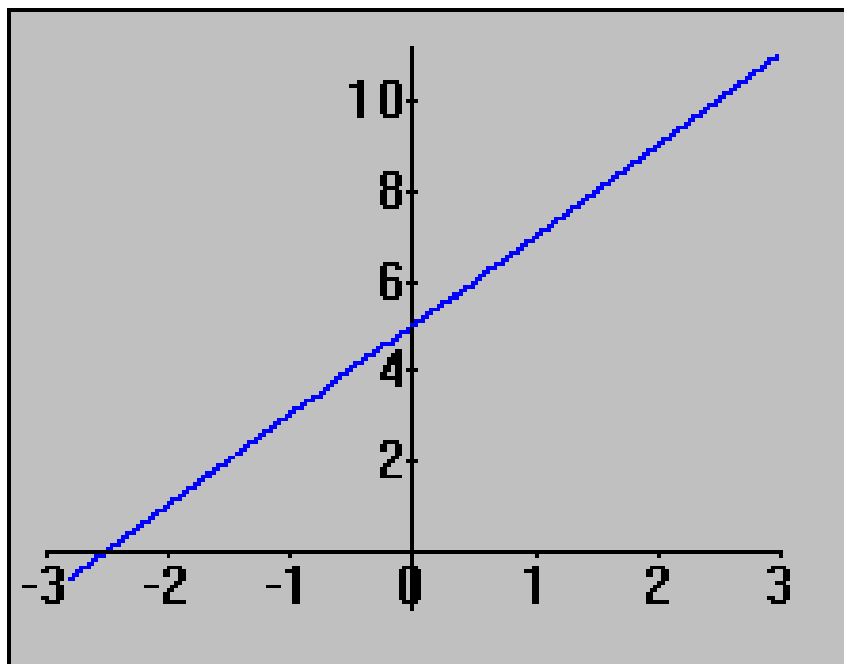


Test horizontalnog pravca:
ako pravac siječe graf na
više od jednog mjesta
funkcija nije injekcija

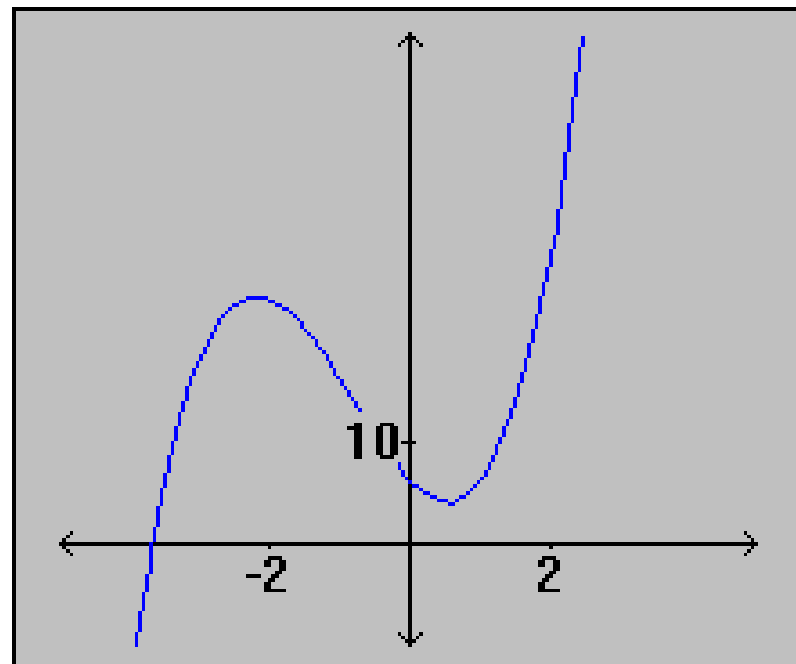


Ako projekcija na y-os pokriva
cijelu kodomenu, tada je funkcija
surjekcija.
Funkcija s desne strane nije
surjekcija na $\mathbb{R}$, ali je surjekcija na
 $[-5, +\infty)$.

Primjeri

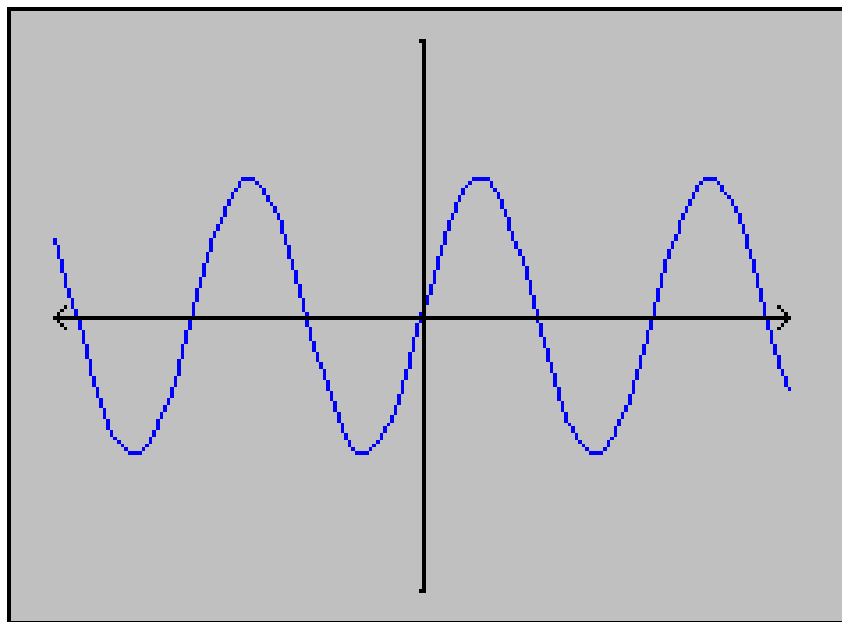


$f(x)=2x+5$ je bijekcija

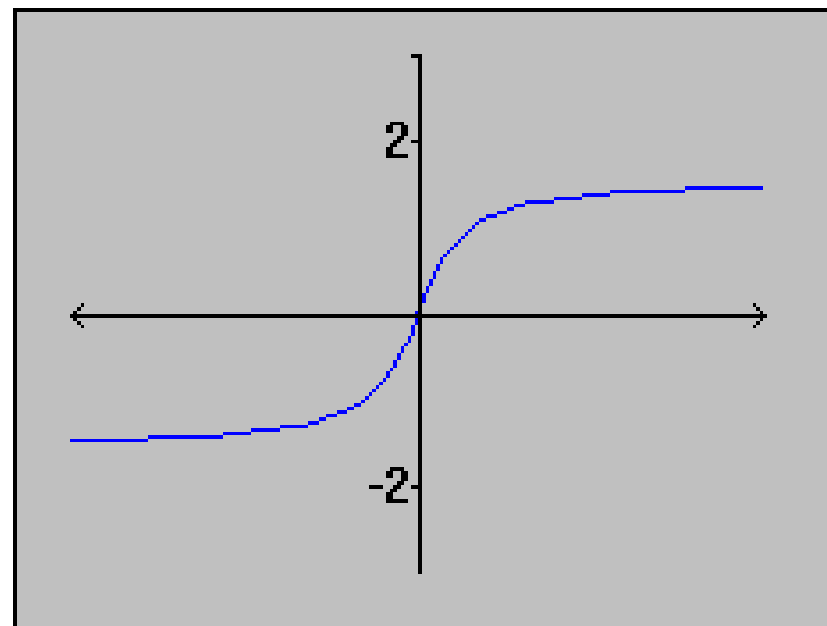


$f(x)= 2x^3 + 5x^2 - 7x + 6$ je
surjekcija, ali nije injekcija

Primjeri



$f(x)$ nije ni injekcija ni surjekcija na $\mathbb{R}$



f je injekcija, ali nije surjekcija na $\mathbb{R}$

Zadaci

4. Dokažite da je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ bijekcija.

5. Koje su od ovih funkcija injektivne:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $f(x) = 2^{1-x}$

d) $f(x) = \frac{2x}{|x-3|}$

Inverzna funkcija

- Ako je $f : A \rightarrow B$ bijekcija onda se može definirati funkcija $g : B \rightarrow A$ tako da vrijedi:

$$f(g(y)) = y \quad \forall y \in B$$

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$

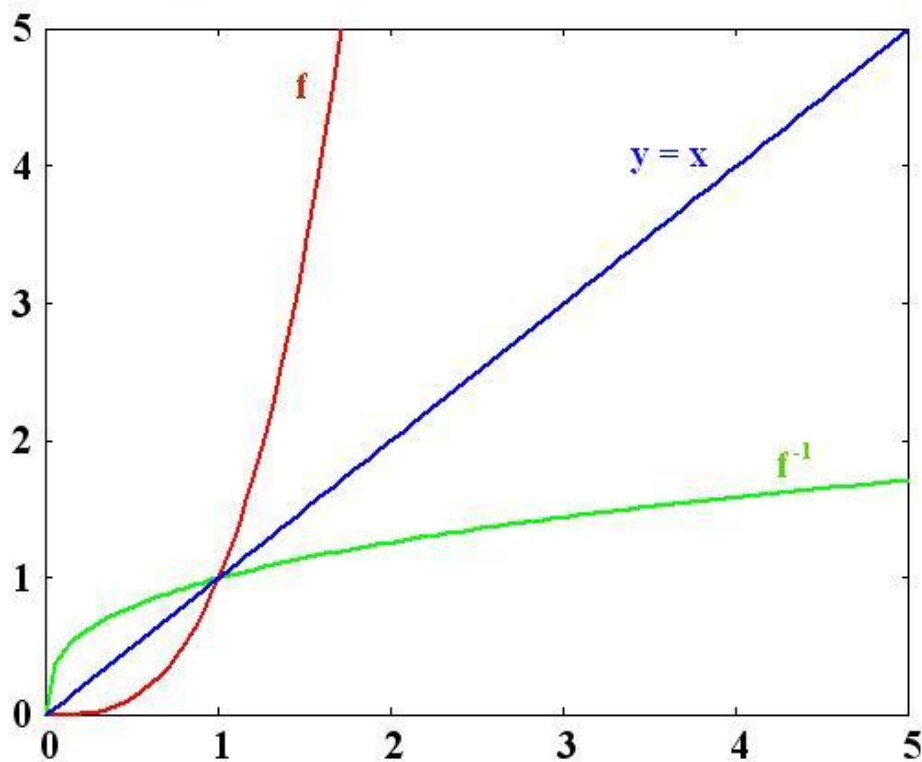
- Funkciju g nazivamo **inverznom** funkcije f i označavamo sa f^{-1}

$$f \circ f^{-1} = 1_B \quad f^{-1} \circ f = 1_A$$

identitete: $1_B : B \rightarrow B$, $1_B(b)=b$ ($\forall b \in B$)

$1_A : A \rightarrow A$, $1_A(a)=a$ ($\forall a \in A$)

Grafička analiza inverzne funkcije



Graf inverzne funkcije je simetričan grafu funkcije f s obzirom na pravac $y=x$, tj. ako je $(x,y) \in \Gamma_f$, onda je $(y,x) \in \Gamma_{f^{-1}}$.

Određivanje inverzne funkcije



Inverznu funkciju je praktično računati sljedećim postupkom:

- 1) Jednadžbu $y = f(x)$ riješimo po nepoznatici x
- 2) Ako postoji jedinstveno rješenje te jednadžbe tada funkcija ima inverznu funkciju, $x = f^{-1}(y)$
- 3) Zamijenimo nepoznanice y i x da bismo dobili zapis $y = f^{-1}(x)$.

6. zadatak: Za funkciju $f(x)$ izračunajte inverznu funkciju odredite njenu domenu ako su:

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

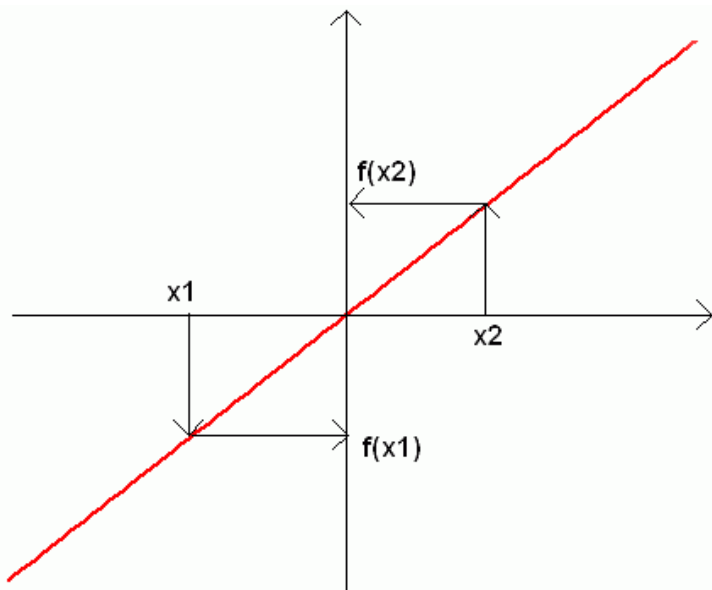
Monotone funkcije

- Neka je $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$. Ako $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ vrijedi:

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))$$

kažemo funkcija

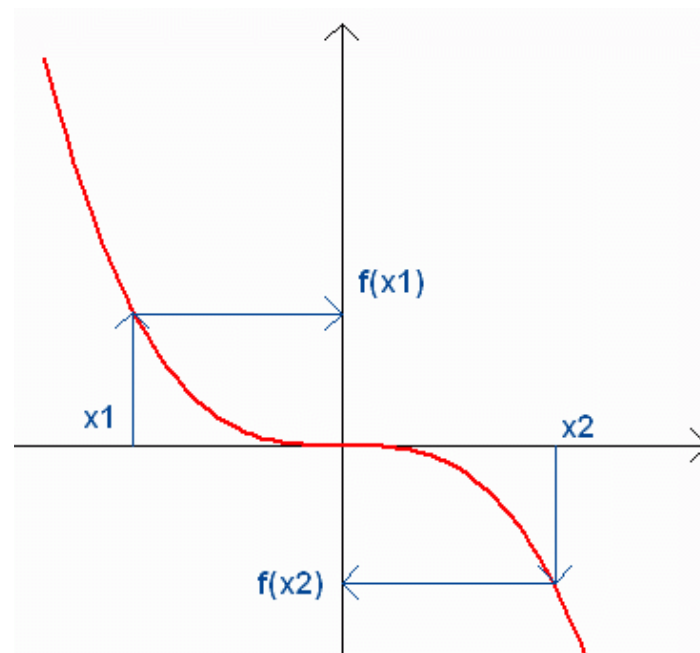
monotono raste



$$(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))$$

kažemo funkcija

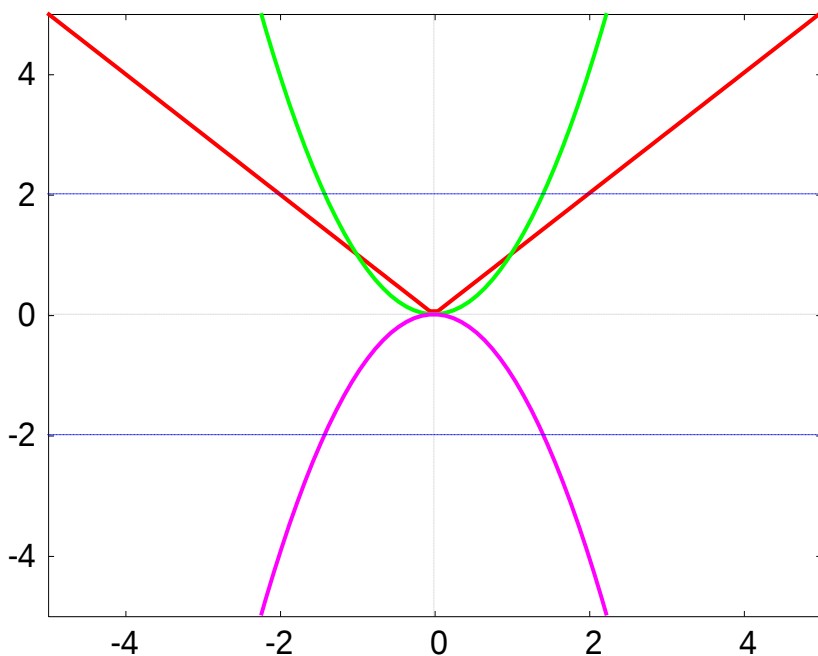
monotono pada.



Parnost funkcija

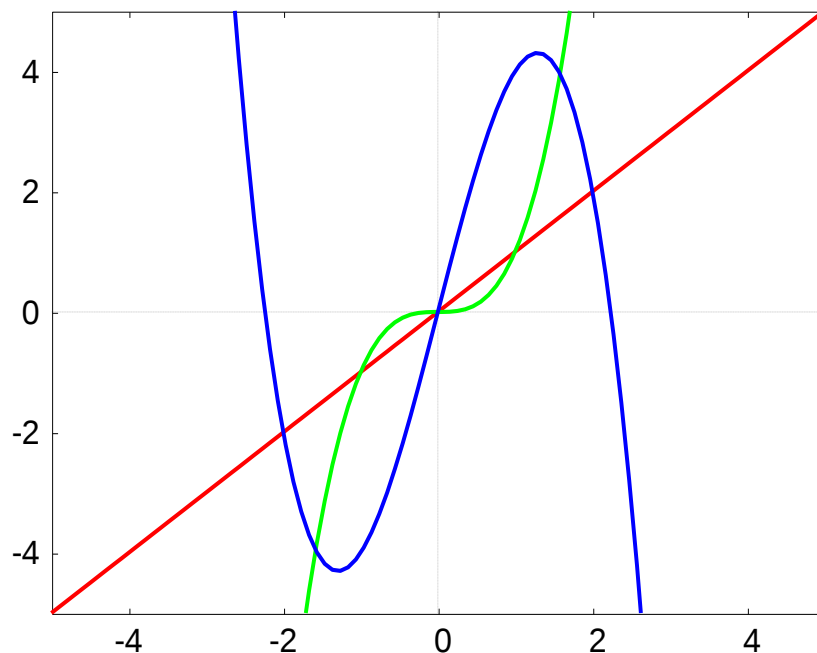
- Neka je $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, zadana na simetričnom skupu $\mathcal{D}$ ($x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$). Ako $\forall x \in \mathcal{D}$ vrijedi:

$f(-x) = f(x)$ f je *parna*.



graf simetričan s obzirom na y os

$f(-x) = -f(x)$ f je *neparna*.



graf simetričan s obzirom na ishodište

Zadaci

7. Koje su od sljedećih funkcija parne, a koje nepare:

$$a) f(x) = x + x^2$$

$$d) f(x) = x |x|$$

$$b) f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$e) f(x) = \sqrt[3]{x - x^3}$$

$$c) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$f) f(x) = \frac{x - 1}{|x - 1|}$$