Sveučilište u Splitu
Fakultet prirodoslovno-matematičkih znanosti i odgojnih područja
Zavod za fiziku

Pripremni tečaj za studente prve godine

INTEGRALI

Sastavio: Ante Bilušić

Split, rujan 2004.

1 Neodređeni integrali

1.1 Uvod

Primitivna funkcija neke funkcije $f(x)$ je ona funkcija $F(x)$ čija je prva derivacija jednaka $f(x)$:

$$F'(x) = f(x).$$

Problemom pronalaženja primitivnih funkcija se bavi *integralni račun.* Iz same je gornje definicije primitivne funkcije jasno da neka funkcija $f(x)$ ima beskonačno mnogo primitivnih funkcija $F(x)$ koje se međusobno razlikuju do na konstantu. Drugim riječima, ako je neka funkcija $F(x)$ primitivna funkciji $f(x)$, tada je toj istoj funkciji primitivna i funkcija $F(x) + C$, gdje je C konstanta[1].

Prilikom pronalaženja primitivnih funkcija, treba na umu imati ova četiri osnovna svojstva integrala:

$$\int df(x) = f(x) + C, \tag{1}$$

$$d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x), \tag{2}$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \text{ i} \tag{3}$$

$$\int \Big[f(x) \pm g(x)\Big]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx. \tag{4}$$

[1] To slijedi iz činjenice da je derivacija brojčane konstante C jednaka nuli.

1.2 Tablica osnovnih integrala

Dolje navedeni integrali su osnovni i predstavljaju abecedu integralnog računa. Upamtite ih!

- integrali potencija:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \tag{5}$$

$$\int x^{-1} = \ln|x| + C, \tag{6}$$

- integral eksponencijalne funkcije:

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \tag{7}$$

- integrali trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \tag{8}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{ctg}\,x + C, \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}\,x + C, \tag{11}$$

$$\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C, \tag{12}$$

$$\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\,dx = -\mathrm{cth}\,x + C, \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\,dx = \mathrm{th}\,x + C, \tag{15}$$

- integrali racionalnih razlomaka:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C, \tag{16}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar\,th} x + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \qquad ;\text{ za } |x|<1, \tag{17}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{Ar\,cth} x + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \qquad ;\text{ za } |x|>1, \tag{18}$$

- integrali iracionalnih razlomaka:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x + C, \tag{19}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Ar\,sh} x + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C, \tag{20}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Ar\,ch} x + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C. \tag{21}$$

1.3 Računanje integrala neposrednim integriranjem

Pri računanju integrala neposrednim integriranjem koriste se osnovna svojstva (1) - (4) i osnovni integrali, navedeni jednadžbama (5) - (21). Riješimo nekoliko primjera!

1. Riješite integral:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx.$$

Rješenje:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arc\,tg} x + C$$

2. Riješite integral:

$$\int \frac{x^3+x-2}{x^2+1}\,dx.$$

Riješenje:

$$\int \frac{x^3+x-2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x\left(x^2+1\right)-2}{x^2+1}\,dx = \int \left(x - \frac{2}{x^2+1}\right)dx =$$
$$= \int x\,dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - 2\,\mathrm{arc\ tg}\,x + C$$

3. Riješite integral:

$$\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx.$$

Riješenje:

$$\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1+1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$
$$= \int dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = x + \mathrm{arc\ tg}\,x + C$$

4. Riješite integral:

$$\int \left(x-1\right)^2 dx.$$

Riješenje:

$$\int \left(x-1\right)^2 dx = \int \left(x^2-2x+1\right)^2 =$$
$$= \int x^2\,dx - 2\int x\,dx + \int dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + C$$

5. Riješite integral:

$$\int \mathrm{tg}^{\,2} x\,dx.$$

Rješenje:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \\ = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

6. Riješite integral:

$$\int \operatorname{th}^2 x\,dx.$$

Rješenje:

$$\int \operatorname{th}^2 x\,dx = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \\ = \int dx - \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = x - \operatorname{th} x + C$$

7. Riješite integral:

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx.$$

Rješenje:

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{\sin^2 x + cos^2 x - 2\sin x\cos x}\,dx = \\ = \int \sqrt{\big(\sin x - \cos x\big)^2}\,dx = \int \big|\sin x - \cos x\big|\,dx$$

Ovisno o predznaku funkcije unutar apsolutnih zagrada, postoje dva slučaja:

$i)$ $\sin x - \cos x > 0 \Rightarrow \big|\sin x - \cos x\big| = \sin x - \cos x$ te

$ii)$ $\sin x - \cos x < 0 \Rightarrow \big|\sin x - \cos x\big| = -\sin x + \cos x.$

Slučaj i): $\displaystyle\int \big|\sin x - \cos x\big|\, dx = \int \big(\sin x - \cos x\big)\, dx = \int \sin x\, dx - \int \cos x\, dx =$

$= -\cos x - \sin x + C$

Slučaj ii): $\displaystyle\int \big|\sin x - \cos x\big|\, dx = \int \big(-\sin x + \cos x\big)\, dx = -\int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx =$

$= \cos x + \sin x + C$

Rješenje nejednadžbe $\sin x - \cos x > 0$ je: $x \in < \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi >; k \in \mathbb{Z}$ te je:

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx = \begin{cases} -\cos x - \sin x + C & \text{za } x \in < \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi >; k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x + \sin x + C & \text{za } x \in < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{9\pi}{4} + 2k\pi >; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

1.4 Računanje integrala metodom supstitucije

Pri računanju integrala metodom supstitucije (zamjene) uvodi se nova varijabla čime se integral nastoji svesti na tablični. Proučimo tu metodu na nekoliko primjera!

8. Riješite integral:

$$\int \big(5 - 2x\big)^9\, dx.$$

Rješenje:

$$\int \big(5 - 2x\big)^9\, dx = \left| \begin{array}{rl} \text{S:} & t = 5 - 2x \\ & dt = d\,(5 - 2x) \\ & dt = -2\, dx \end{array} \right| = -\int t^9 \frac{dt}{2} = -\frac{1}{2} \int t^9\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} t^{10} + C = -\frac{1}{20} \big(5 - 2x\big)^{10} + C$$

Dakle, uvedena je nova varijabla t, čime je integral sveden na tablični.

9. Riješite integral:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}.$$

Rješenje:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right]} = \left| \begin{array}{ll} \text{S:} & t = \frac{x}{a} \\ & dt = \frac{dx}{a} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot a \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\ tg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arc\ tg} \frac{x}{a} + C$$

10. Riješite integral:

$$\int a^x \, dx.$$

Rješenje:

$$\int a^x \, dx = \int \mathrm{e}^{\ln a^x} \, dx = \int \mathrm{e}^{x \ln a} \, dx = \left| \begin{array}{ll} \text{S:} & t = x \ln a \\ & dt = \ln a \, dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \int \mathrm{e}^t \, dt = \frac{1}{\ln a} \mathrm{e}^t + C = \frac{1}{\ln a} \mathrm{e}^{x \ln a} + C =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \mathrm{e}^{\ln a^x} + C = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

11. Riješite integral:

$$\int \sin\big(2x+3\big) \, dx.$$

Rješenje:

$$\int \sin\big(2x+3\big) \, dx = \left| \begin{array}{ll} \text{S:} & t = 2x+3 \\ & dt = 2 \, dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \sin t \, dt = -\frac{1}{2} \cos t + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos\big(2x+3\big) + C$$

12. Riješite integral:
$$\int \frac{dx}{1+\cos x}.$$

Rješenje:

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \begin{vmatrix} \cos x & = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ 1 & = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \end{vmatrix} = \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} =$$
$$= \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \begin{vmatrix} \text{S:} & t = \frac{x}{2} \\ & dt = \frac{dx}{2} \end{vmatrix} = \int \frac{2\,dt}{2\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

13. Riješite integral:
$$\int \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

Rješenje:

$$\int \mathrm{e}^{-x}\,dx = \begin{vmatrix} \text{S:} & t = -x \\ & dt = -\,dx \end{vmatrix} = -\int \mathrm{e}^{t}\,dt = -\mathrm{e}^{t} + C = -\mathrm{e}^{-x} + C$$

14. Riješite integral:
$$\int \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}+1}}\,dx.$$

Rješenje:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}+1}}\,dx = \begin{vmatrix} \text{S:} & t = \mathrm{e}^{x}+1 \\ & dt = \mathrm{e}^{x}\,dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^{1/2}} = \int t^{-1/2}\,dt =$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}\,t^{1/2} + C = 2\sqrt{\mathrm{e}^{x}+1} + C$$

15. Riješite integral:

$$\int x^2\sqrt{x^3-9}\,dx.$$

Rješenje:

$$\int x^2\sqrt{x^3-9}\,dx = \left|\begin{matrix}\text{S:} & t = x^3-9 \\ & dt = 3x^2\,dx\end{matrix}\right| = \frac{1}{3}\int t^{1/2}\,dt = \frac{2}{3}\,t^{3/2}+C =$$
$$= \frac{2}{3}\left(x^3-9\right)^{3/2}+C$$

16. Riješite integral:

$$\int x^3\sqrt[3]{x^2+1}\,dx.$$

Rješenje:

$$\int x^3\sqrt[3]{x^2+1}\,dx = \left|\begin{matrix}\text{S:} & t = x^2+1 \\ & dt = 2x\,dx\end{matrix}\right| = \int x^2\cdot\sqrt[3]{x^2+1}\cdot x\,dx =$$
$$= \int (t-1)\cdot t^{1/3}\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{4/3}\,dt - \frac{1}{2}\int t^{1/3}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{7}{3}}\,t^{7/3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}}\,t^{4/3}+C =$$
$$= \frac{3}{14}\left(x^2+1\right)^{7/3} - \frac{3}{8}\left(x^2+1\right)^{4/3}+C$$

17. Riješite integral:

$$\int\frac{dx}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$$

Rješenje:

$$\int\frac{dx}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \int\frac{dx}{\mathrm{e}^{-x}\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)} = \int\frac{\mathrm{e}^x}{1+e^{2x}}\,dx =$$
$$= \left|\begin{matrix}\text{S:} & t = \mathrm{e}^x \\ & dt = \mathrm{e}^x\,dx\end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t + C =$$
$$= \operatorname{arc\,tg}\mathrm{e}^x + C$$

18. Riješite integral:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx.$$

Rješenje:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \left| \begin{array}{ll} \text{S:} & t = \cos x \\ & dt = -\sin x \, dx \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

19. Riješite integral:

$$\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = & \left| \begin{array}{lll} \text{S:} & t & = \sin^2 x \\ & dt & = 2 \sin x \cos x \, dx \end{array} \right| = \\ & = \frac{1}{2} \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot 2 \sin x \cos x \, dx = \\ & = \frac{1}{2} \int t \cdot (1-t) \cdot dt = \frac{1}{2} \int \left(t - t^2\right) dt = \\ & = \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{6} t^3 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + C \end{aligned}$$

20. Riješite integral:

$$\int \frac{dx}{\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^x}.$$

Rješenje:

$$\int \frac{dx}{\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^x} = \int \frac{dx}{\mathrm{e}^{x/2}\left(1 + \mathrm{e}^{x/2}\right)}$$

Gornja podintegralna funkcija se može napisati kao zbroj dviju funkcija:

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{x/2}\left(1 + \mathrm{e}^{x/2}\right)} = \frac{A}{\mathrm{e}^{x/2}} + \frac{B}{1 + \mathrm{e}^{x/2}}$$

Sada je potrebno izračunati koeficijente A i B:

$$\frac{1}{e^{x/2}\big(1+e^{x/2}\big)} = \frac{A}{e^{x/2}} + \frac{B}{1+e^{x/2}} = \frac{A\big(1+e^{x/2}\big) + Be^{x/2}}{e^{x/2}\big(1+e^{x/2}\big)} = \frac{A + (A+B)e^{x/2}}{e^{x/2}\big(1+e^{x/2}\big)}$$

$$\Rightarrow A = 1 \text{ i } (A+B) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 1 \text{ i } B = -1$$

Dakle, vrijedi sljedeće:

$$\int \frac{dx}{e^{x/2} + e^{x}} = \int \frac{dx}{e^{x/2}\big(1+e^{x/2}\big)} = \int \frac{dx}{e^{x/2}} - \int \frac{dx}{e^{x/2}+1}$$

Riješimo najprije prvi integral

$$\int \frac{dx}{e^{x/2}} = \int e^{-x/2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} \text{S:} & t = -\frac{x}{2} \\ & dt = -\frac{dx}{2} \end{array} \right| = -2 \int e^{t}\,dt = -2\,e^{-x/2} + C_1$$

Rješenje drugog integrala je:

$$\int \frac{dx}{e^{x/2}+1} = \left| \begin{array}{ll} \text{S:} & t = e^{x/2} + 1 \\ & dt = \frac{1}{2}\,e^{x/2}\,dx \end{array} \right| = 2 \int \frac{dt}{e^{x/2} \cdot t} = 2 \int \frac{dt}{(t-1) \cdot t}$$

Podintegralnu funkciju ponovno možemo napisati kao zbroj dviju funkcija:

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{D}{t} + \frac{E}{t-1} = \frac{D(t-1) + Et}{t(t-1)} = \frac{-D + (D+E)t}{t(t-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -1 \text{ i } E = 1.$$

$$\int \frac{dt}{t(t-1)} = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} = \left| \begin{array}{ll} \text{S:} & w = t - 1 \\ & dw = dt \end{array} \right| == -\ln|t| + \int \frac{dw}{w} + C_2' =$$

$$= -\ln|t| + \ln|w| + C_2 = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C_2 = \ln\left|\frac{e^{x/2}}{e^{x/2}+1}\right| + C_2 =$$

$$= \ln\left|\frac{1}{1+e^{-x/2}}\right| + C_2$$

Dakle, rješenje početnog integrala je:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{x}} &= -2\,\mathrm{e}^{-x/2} - 2\,\ln\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x/2}} + C = \\ &= -2\,\mathrm{e}^{-x/2} + 2\,\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x/2}\right) + C\end{aligned}$$

1.5 Računanje integrala parcijalnim integriranjem

Metoda parcijelne integracije se koristi u slučajevima kada je podintegralni izraz moguće prikazati kao umnožak neke funkcije i diferencijala druge. Izraz koji se koristi pri parcijalnom integriranju je

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du. \tag{22}$$

Parcijalnim integriranjem rješavanje integrala $\int u{\cdot}dv$ se svodi na rješavanje drugoga, $\int v \cdot du$, kojega znamo riješiti. Dokažimo izraz (22); zamislimo da želimo riješiti integral

$$\int f(x)\,dx,$$

u kojemu podintegralnu funkciju f možemo prikazati kao umnožak dviju funkcija:

$$f = u \cdot v$$

Diferencijal funkcije f je jednak:

$$df = d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du.$$

Integriranjem gornjeg diferencijala dobije se izraz (22):

$$\int d(u \cdot v) = \int u \cdot\ dv + \int v \cdot\ du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Proučimo sada metodu parcijalne integracije na nekoliko primjera!

21. Riješite integral:

$$\int \ln x \, dx.$$

Rješenje:

$$\int \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & \Rightarrow du = \frac{dx}{x} & \\ dv = dx & \Rightarrow \int dv = \int dx & \Rightarrow v = x \end{vmatrix} =$$

Primijenimo sada jednadžbu (22):

$$\begin{aligned} &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C = \\ &= x\big(\ln x - 1\big) + C \end{aligned}$$

22. Riješite integral:

$$\int x^2 \mathrm{e}^{-x} \, dx.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int x^2 \mathrm{e}^{-x} \, dx &= \begin{vmatrix} u = x^2 & \Rightarrow du = 2x \, dx \\ dv = \mathrm{e}^{-x} \, dx & \Rightarrow v = -\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = -x^2 \mathrm{e}^{-x} + 2 \int x \mathrm{e}^{-x} \, dx = \\ &= \begin{vmatrix} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \mathrm{e}^{-x} \, dx & \Rightarrow v = -\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = -x^2 \mathrm{e}^{-x} + 2 \Big[- x \mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x} \, dx + C_2 \Big] = \\ &= -x^2 \mathrm{e}^{-x} - 2x \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + C = \\ &= -\mathrm{e}^{-x} \big(x^2 + 2x + 2\big) + C \end{aligned}$$

23. Riješite integral:

$$\int x \sin x \, dx.$$

Rješenje:

$$\int x\sin x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x\,dx & \Rightarrow v = -\cos x \end{array}\right| = -x\cos x + \int \cos x\,dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

24. Riješite integral:

$$\int x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,dx &= \left|\begin{array}{ll} u = x^2 & \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = x\mathrm{e}^{-x^2} & \Rightarrow v = \int x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \quad = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} \end{array}\right| = \\ &= -\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2} + \int x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \\ &= -\frac{1}{2}\,x^2\mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + C \end{aligned}$$

Napomena:
Integral $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ je riješen uvođenjem sustitucije $t = -x^2$.

25. Riješite integral:

$$\int \frac{\operatorname{arc\ tg} \mathrm{e}^x}{e^x}\,dx.$$

Rješenje:

$$\int \frac{\operatorname{arc\ tg} \mathrm{e}^x}{e^x}\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = \operatorname{arc\ tg} \mathrm{e}^x & \Rightarrow du = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,dx \\ dv = \frac{dx}{\mathrm{e}^x} & \Rightarrow v = -\frac{1}{\mathrm{e}^x} \end{array}\right| = -\frac{\operatorname{arc\ tg} \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} + \int \frac{dx}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$

Riješimo sada integral dobiven parcijalnom integracijom:

$$\int \frac{dx}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \int \frac{dx}{\mathrm{e}^{x}\Big(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}\Big)} = \int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} \text{S:} & p = \mathrm{e}^{-x} \\ & dp = -\mathrm{e}^{-x}\,dx \end{matrix}\right| = -\int \frac{dp}{p+\frac{1}{p}} = -\int \frac{p}{1+p^2}\,dp =$$

$$= \left|\begin{matrix} \text{S:} & r = p^2+1 \\ & dr = 2p\,dp \end{matrix}\right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dr}{r} = -\frac{1}{2}\ln|r| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(p^2+1\right) + C_1 = -\frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right) + C_1$$

Početni integral je, prema tome, jednak:

$$\int \frac{\operatorname{arc\ tg} \mathrm{e}^{x}}{e^{x}}\,dx = -\frac{\operatorname{arc\ tg} \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}} - \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right) + C.$$

26. Riješite integral:

$$\int \sin(\ln x)\,dx.$$

Rješenje:

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \left|\begin{matrix} u = \sin(\ln x) & \Rightarrow du = \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx \\ dv = dx & \Rightarrow v = x \end{matrix}\right| = x\cdot\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = \cos(\ln x) & \Rightarrow du = -\frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx \\ dv = dx & \Rightarrow v = x \end{matrix}\right| = x\cdot\sin(\ln x) - x\cdot\cos(\ln x) -$$

$$-\int \sin(\ln x)\,dx$$

Početni integral se, dakle, može napisati ovako:

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\cdot\sin(\ln x) - x\cdot\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx \Rightarrow$$

$$2\int \sin(\ln x)\,dx = x\cdot\sin(\ln x) - x\cdot\cos(\ln x) \Rightarrow$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x\Big[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\Big].$$

2 Određeni integrali

2.1 Definicija određenog integrala

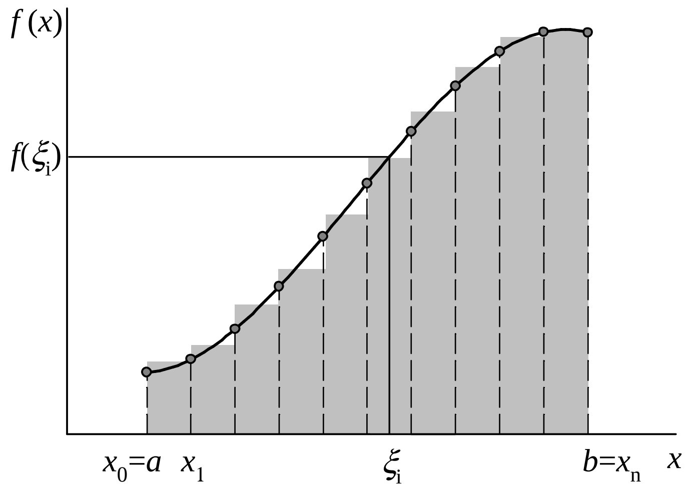
Neka je funkcija $f(x)$ definirana na intervalu $[a, b]$. Podijelimo interval $[a, b]$ na n dijelova točkama $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Unutar svakog intervala $< x_{i-1}, x_i >$ uzmimo po jednu točku ξ_i (vidite siku 2.1) i promotrimo limes:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \text{ , gdje je } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Ukoliko gornji izraz postoji i konačan je za bilo kakvu podjelu intervala $[a, b]$, riječ je o određenom integralu funkcije $f(x)$ u Riemannovom smislu u granicama od a do b i piše se:

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Sa slike 2.1 se vidi da je geometrijsko značenje određenog intregrala površina omeđena funkcijom s jedne, osi-x s druge te okomicama na os-x koje spajaju točke $(a, 0)$ i $(b, 0)$ s funkcijom $f(x)$.



Slika 1: Uz definiciju određenog integrala.

2.2 Svojstva određenog integrala

Pri računanju određenih integrala, važno je znati sljedeća pravila:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{23}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \tag{24}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\ a < c < b \text{ i} \tag{25}$$

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx \text{ , ako je } f(x) \text{ parna i} \\ 0 \text{ , ako je } f(x) \text{ neparna.} \end{cases} \tag{26}$$

Newton-Leibnizova formula

Ako na intervalu $[a,b]$ postoji neodređeni integral funkcije $f(x)$ ($\int f(x)\,dx = F(x) + C$), tada vrijedi i *Newton-Leibnizova formula*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{27}$$

2.3 Zadaci vezani uz određene integrale

Problem rješavanja određenog integrala se, po Newton-Leibnizovoj formuli (27), svodi na problem pronalaženja primitivne funkcije te sva pravila i načini rješavanja koje smo upoznali u poglavlju o neodređenim integralima vrijede i ovdje.

1. Riješite zadatak:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 1}{\sin x + x}\,dx.$$

Rješenje:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 1}{\sin x + x}\, dx = \left| \begin{array}{ll} \text{S:} & t = \sin x + x \\ & dt = \big(\cos x + 1\big)\, dx \end{array} \right| = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}}^{1+\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln|t| \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}}^{1+\frac{\pi}{2}} = \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

2. Riješite zadatak:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\, \cos 4x\, dx.$$

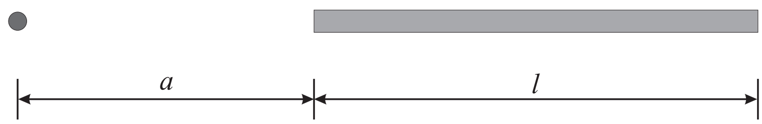
Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\, \cos 4x\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\Big[\cos\big(3x - 4x\big) + \cos\big(3x + 4x\big)\Big]\, dx = \\
&= \big|\cos\big(-x\big) = \cos x\big| = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \frac{1}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 7x\, dx\right] = \\
&= \left| \begin{array}{ll} \text{S:} & t = 7x \\ & dt = 7\, dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\left[\sin x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{7\pi}{2}} \cos t\, dt\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin x\Big|_0^{\pi/2} + \sin t\Big|_0^{7\pi/2}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) + \frac{1}{7}\left(\sin\frac{7\pi}{2} - \sin 0\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\big(1 - 0\big) + \frac{1}{14}\big(-1 - 0\big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{14} = \\
&= \frac{3}{7}
\end{aligned}$$

Zadaci iz fizike

Često se pri rješavanju zadataka iz fizike jave određeni integrali. Pogledajmo nekoliko primjera!

1. Tanak i homogen ravni štap duljine l i mase m se nalazi na udaljenosti a od kuglice mase m_1 (vidjeti sliku). Izračunajte gravitacijsku silu kojom međudjeluju kuglica i štap!



Slika 2: Slika uz zadatak.

Rješenje:

Gravitacijska sila F_G između dva tijela je:

$$F_G = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2},$$

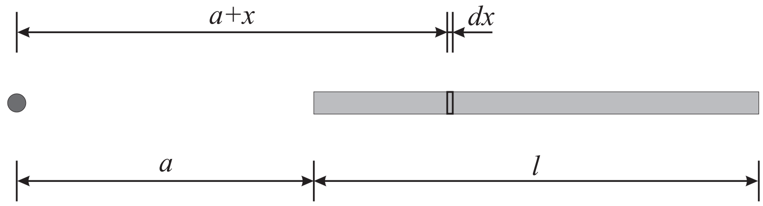
gdje su m_1 i m_2 mase tijela, r udaljenost između njih, a G konstanta. Taj izraz je dobar ako se može pretpostaviti da su mase točkaste. U ovom slučaju bi se to moglo pretpostaviti pod uvjetom da je udaljenost između kuglice i štapa mnogo veća od duljine štapa (drugim riječima, ako je $a/l \ggg 1$). Ako to nije istina, gravitacijska sila koju 'osjeća' jedan kraj štapa nije jednak sili na njegov drugi kraj. Zbog toga je potrebno štap podijeliti na beskonačno tanke dijelove debljine dx (prikazane na slici 3), naći element gravitacijske sile dF_G između kuglice i djelića štapa te integrirati sve te elemente sile. Krenimo redom.

Element štapa duljine dx ima masu dm:

$$dm = \rho\,A\,dx,$$

gdje je ρ gustoća, A površina poprečnog presjeka, a $A\,dx$ element volumena štapa. Gustoća ρ se može izraziti kao omjer ukupne mase štapa m i njegovog volumena Al te je element mase jednak:

$$dm = \rho\,A\,dx = \frac{m}{A\,l}\,A\,dx = \frac{m}{l}\,dx.$$



Slika 3: Slika uz rješenje zadatka

Gravitacijska sila između kuglice i dijela štapa elementa mase dm je:

$$dF_G = G\,\frac{m_1\,dm}{(a+x)^2} = G\,\frac{m\,m_1}{l}\,\frac{dx}{(a+x)^2}.$$

Ukupna sila je jednaka integralu (drugim riječima, zbroju) elemenata sila dF_G:

$$F_G = \int dF_G = \int_0^l G\,\frac{m\,m_1}{l}\,\frac{dx}{(a+x)^2} = G\,\frac{m\,m_1}{l}\int_0^l \frac{dx}{(a+x)^2}.$$

Rješenje integrala:

$$\int_0^l \frac{dx}{(a+x)^2} = \left| \begin{array}{rl} S: & t = a+x \\ & dt = dx \end{array} \right| = \int_a^{a+l} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_a^{a+l} = -\frac{1}{a+l} + \frac{1}{a} =$$
$$= \frac{l}{a(a+l)} = \frac{l}{a^2(1+\frac{l}{a})}.$$

Uvrstivši rješenje integrala u izraz za silu F_G, dobije se:

$$\begin{aligned} F_G &= G\,\frac{m\,m_1}{l}\frac{l}{a^2(1+\frac{l}{a})} \\ &= G\,\frac{m\,m_1}{a^2(1+\frac{l}{a})}. \end{aligned}$$

Vidimo da za $\frac{l}{a} \to 0$ (odnosno, kada duljina štapa postane zanemariva prema udaljenosti između kuglice i štapa) gornji izraz postaje:

$$F_G = G\,\frac{m\,m_1}{a^2}.$$

2. Izračunajte rad potreban za podizanje mase m s površine Zemlje na visinu h. Koliki je taj rad za $h \to \infty$?

Rješenje:

Kada sila $\vec{F}$ vrši rad na neko tijelo i pomakne ga za element puta $\vec{ds}$, kažemo da izvršila rad dW:

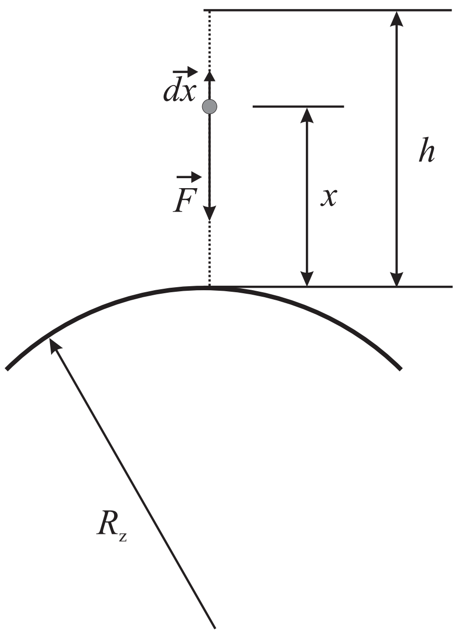
$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

Na visini x od površine Zemlje tijelo mase m osjeća Zemljinu gravitacijsku silu usmjerenu prema njenom središtu koja je jednaka:

$$F_G = G \, \frac{M_Z \, m}{\left(R_Z + x\right)^2},$$

gdje je M_Z masa Zemlje, a R_Z njen polumjer. Da bi se tijelo podiglo s visine x na visinu $x + dx$, potrebno je uložiti rad dW:

$$dW = F_G \, dx = G \, \frac{M_Z \, m}{\left(R_Z + x\right)^2} \, dx.$$



Slika 4: Slika uz rješenje zadatka

Primjetite da je rad, po definiciji, jednak skalarnom umnošku vektora sile i pomaka. Na slici 4 se vidi da su vektori gravitacijske sile i puta usmjereni u suprotnim smjerovima te je njihov skalarni umnožak negativan. Da bi se tijelo podiglo na visinu h, potrebno je djelovati vanjskom *silom usmjerenom* od *površine Zemlje. Zato je rad dW u gornjoj jednadžbi pozitivan.*
Kako se vidi iz gornje jednadžbe, rad što ga vrši vanjska sila ovisi o visini tijela od površine Zemlje. Zato je ukupan rad W jednak integralu elemenata rada dW:

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \int_0^h G\,\frac{M_Z\,m}{\big(R_Z+x\big)^2}\,dx = G\,M_Z\,m\int_0^h \frac{dx}{\big(R_Z+x\big)^2} \\ &= \left|\begin{matrix} S\colon & t = R_Z + x \\ & dt = dx \end{matrix}\right| = G\,M_Z\,m\int_{R_Z}^{R_Z+h}\frac{dt}{t^2} = -G\,M_Z\,m\frac{1}{t}\bigg|_{R_Z}^{R_Z+h} \\ &= -G\,M_Z\,m\left[\frac{1}{R_Z+h}-\frac{1}{R_Z}\right] = G\,\frac{M_Z\,m\,h}{R_Z\big(R_Z+h\big)}. \end{aligned}$$

Podijele li se brojnik i nazivnik gornjeg izraza s h, dobije se ovisnost izvršenog rada o visini tijela, $W(h)$:

$$W(h) = G\,\frac{M_Z\,m}{R_Z\big(1+\frac{R_Z}{h}\big)}.$$

Ukoliko želimo tijelo otrgnuti od gravitacijskog privlačenja Zemlje (drugim riječima, želimo da $h \to \infty$), rad je jednak:

$$W(h\to\infty) = G\,\frac{M_Z\,m}{R_Z}.$$

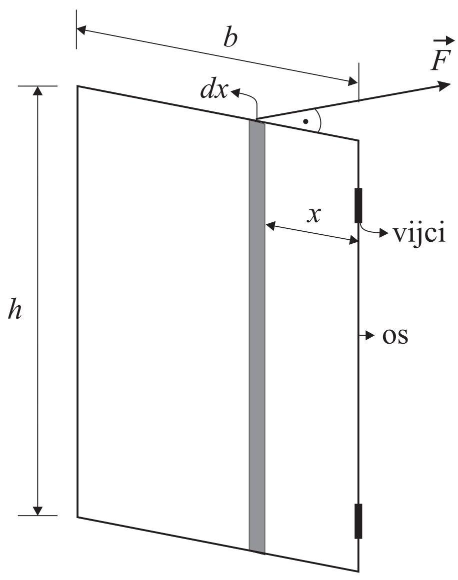
3. Vjetar vrši stalni tlak p na vrata široka b i visoka h. Izračnajte moment sile kojeg osjećaju vijci koji pridržavaju vrata!

Rješenje:
Na slici su shematski prikazana vrata. Pošto je tlak kojim vjetar djeluje na vrata stalan, sila koju stvara vjetar na vrata je uvijek okomita na površinu vrata. Vjetar izaziva vrtnju vrata oko osi označene na slici pa nam je moment sile bitna fizikalna veličina.
Moment sile $\vec{M}$ je definiran kao vektorski umnožak sile $\vec{F}$ i njegovog vektora udaljenosti od osi vrtnje $\vec{r}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Da bi se mogao izračunati ukupni moment sile kojim vjetar djeluje na vrata, podijelimo ih na zamišljene trake usporedne s osi vrtnje (na slici je jedna takva traka označena sivom bojom). Element momenta dM kojim vjetar djeluje na tu jednu zamišljenu traku je jednak

$$dM = x\,dF.$$



Slika 5: Slika uz rješenje zadatka

Primjetimo da je sila na bilo koju zamišljenu traku okomita na površinu vrata te je dovoljno računati modul vektora momenta $d\vec{M}$. Element sile dF se lako može izračunati iz same definicije tlaka koja kaže da je tlak omjer sile i površine. Iz toga slijedi da je $dF = p\,h\,dx$. Ukupan moment sile M je jednak integralu momenata na sve zamišljene trake:

$$\begin{aligned} M &= \int dM = \int_0^b phx\,dx = ph\frac{x^2}{2}\Big|_0^b \\ &= \frac{phb^2}{2}. \end{aligned}$$

4. Kapljica početne mase m_0 pada u gravitacijskom polju Zemlje i jednoliko isparava gubeći n grama u sekundi. Izračunajte rad kojeg izvrši sila teže od početka gibanja do potpunog isparavanja kapljice. Zanemarite promjenu gravitacijskog ubrzanja g i otpor zraka.

   Rješenje:
   Masa kapljice $m(T)$ se mijenja u vremenu po sljedećem zakonu:

$$m(T) = m_0 - n\,t.$$

   Sila teže i vektor pomaka kapljice su usmjereni u istom smjeru te je element rada dW što ga izvrši sila teže $\vec{F}_G$ na elementu puta $\vec{ds}$ jednak:

$$dW = \vec{F}_G \cdot \vec{ds} = m(t)\,g\,ds.$$

   Put ds što ga prevali kapljica je jednak umnošku brzine v i vremena dt:

$$ds = v\,dt.$$

   Kapljica izvodi jednoliko ubrzano gibanje s ubrzanjam jednakim gravitacijskom ubrzanju g (sjetite se da ubrzanje što ga tijelo osjeća usljed djelovanja sile teže ne ovisi o masi tijela):

$$v = g\,t \Rightarrow ds = g\,t\,dt.$$

Iz toga slijedi da je rad što ga sila teže izvrši na putu ds jednak:

$$dW = m(t)\, g^2 t\, dt.$$

Kapljica se giba do trenutka t_0, kada u potpunosti ispari. Vrijeme t_0 ćemo naći iz uvjeta da je masa kapljice tada jednaka nuli:

$$m(t_0) = 0 \Rightarrow m_0 - nt_0 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{m_0}{n}.$$

Ukupan rad W je jednak:

$$\begin{aligned}
W &= \int dW = \int_0^{t_0} m(t)\, g^2 t\, dt = \int_0^{t_0} \big(m_0 - nt\big)\, g^2 t\, dt = \\
&= \int_0^{t_0} m_0\, g^2\, t\, dt - \int_0^{t_0} n\, g^2\, t^2\, dt = \frac{m_0 g^2}{2}\, t^2 \Big|_0^{t_0} - \frac{ng^2}{3}\, t^3 \Big|_0^{t_0} = \\
&= \frac{m_0 g^2 t_0^2}{2} - \frac{ng^2 t_0^3}{3} = \frac{m_0^3 g^2}{2n^2} - \frac{m_0^3 g^2}{3n^2} = \\
&= \frac{m_0^3 g^2}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Literatura:

1. I. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, *Matematički priručnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb

2. M. Uščumlić, P. Miličić, *Zbirka zadataka iz više matematike*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.

3. G. L. Dimić, M. D. Mitrinović, *Zbirka zadataka iz fizike D - viši kurs*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987

4. Dž. Lugić, *Matematika II: metodički riješeni zadaci i kratki pregled definicija i teorema*, Sveučilite u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split, 1999.