PRIPREMNI TEČAJ

ELEMENTARNE FUNKCIJE

Bilješke s predavanja 06. 09. 2005.

Sastavila: Leandra Vranješ

ELEMENTARNE FUNKCIJE

Osnovne elementarne funkcije su:

1. polinomi
2. racionalne funkcije
3. eksponencijalne funkcije
4. logaritamske funkcije
5. opća potencija
6. trigonometrijske funkcije
7. ciklometrijske funkcije

Elementarne funkcije su funkcije koje se mogu dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija s pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija (+,-, ·,:) i konačnog broja njihovih kompozicija.

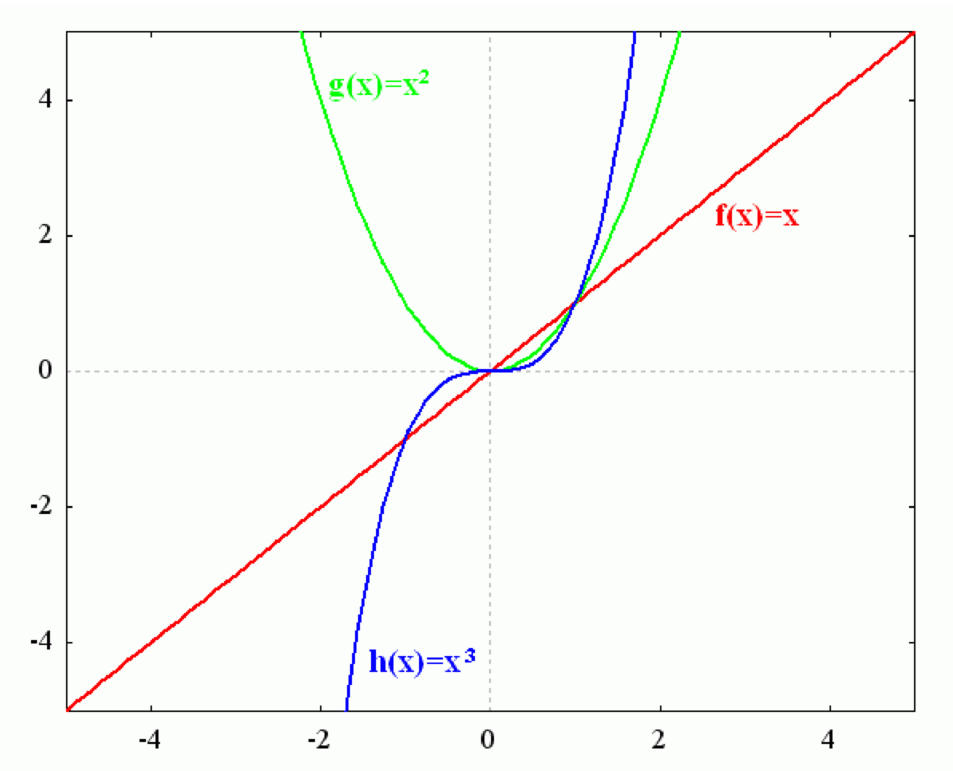
1. Polinomi

Polinomi su funkcije definirane $\forall$ x $\in$ R i ako je p:R$\rightarrow$R polinom onda je

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Realne brojeve $a_0, a_1, \ , a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma. Ako je $a_n \neq 0$ onda govorimo o polinomu n-tog stupnja.

Ako je $p(x)=a$, a$\in$R tada je p konstantni polinom stupnja 0.



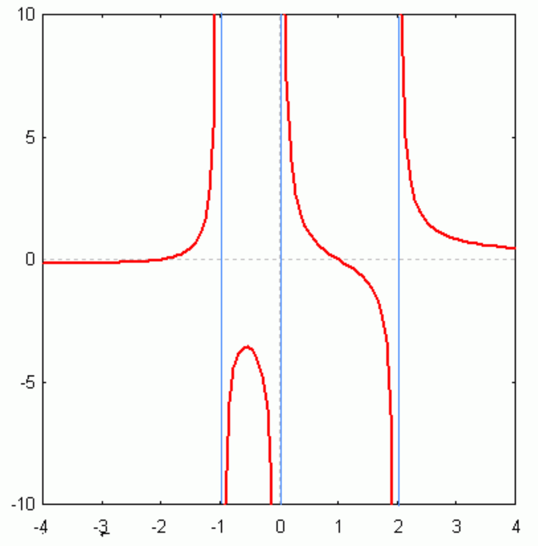
Graf polinoma prvog stupnja je pravac, a polinoma drugog stupnja parabola.

2. Racionalne funkcije

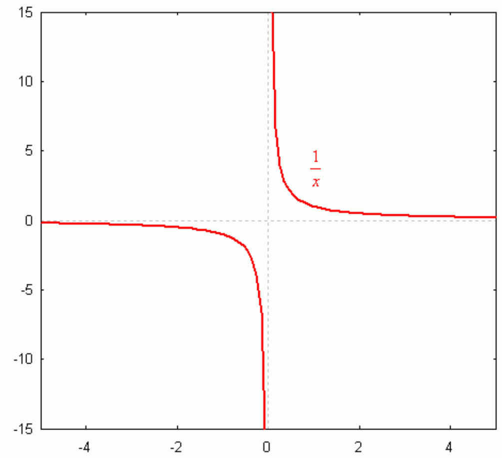
Funkcija $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi je racionalna funkcija. Domena funkcije je skup svih realnih brojeva bez realnih nultočaka polinoma $Q_m(x)$. Polinomi su cijele racionalne funkcije; u tom slučaju je $Q_m(x)=1$. Ako je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika, onda kažemo da je to prava racionalna funkcija.

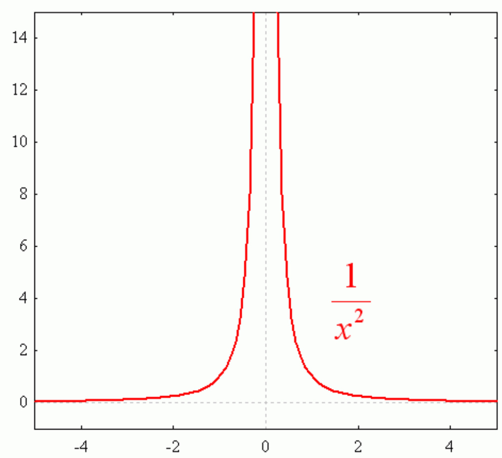
Primjer:

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{(x-1)(x+2)}{x(x+1)(x-2)}$$



Osnovne racionalne funkcije:



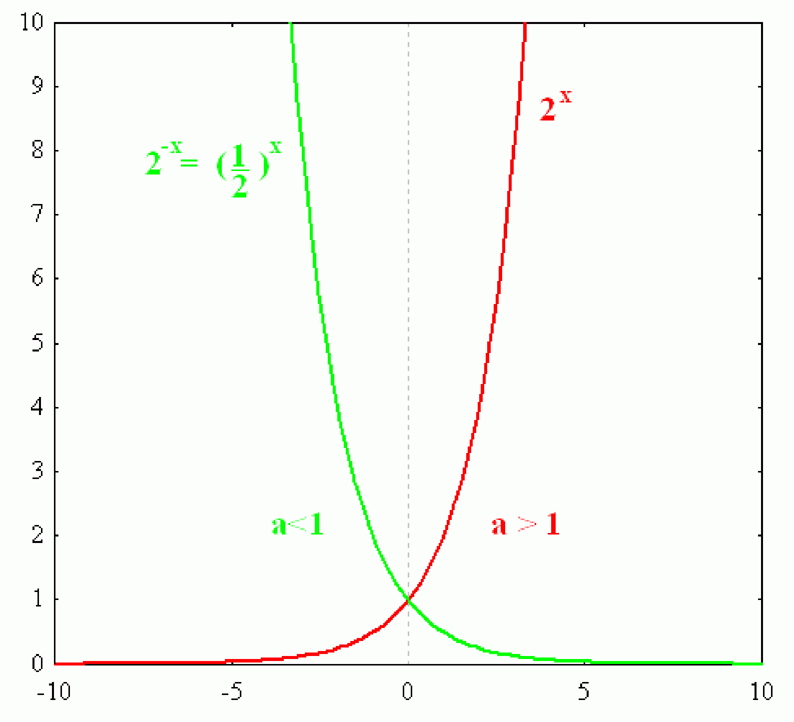


Nultočke funkcije su rješenja jednadžbe P(x)=0, dok su nultočke polinoma Q(x) polovi racionalne funkcije (vertikalne asimptote).

3. Eksponencijalne funkcije

Neka je *a* pozitivan broj različit od 1, 0<*a*, *a*≠1. Eksponencijalna funkcija $f(x)=a^x$ je bijekcija sa R na R^+ za koju vrijedi:

1. $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$...........$a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$
2. $f(0)=1$..............................$a^0=1$.
3. Ako je a> 1, f(x) je strogo rastuća funkcija.
4. Ako je a<1, f(x) je strogo padajuća funkcija.
5. $f(x_1-x_2)=f(x_1):f(x_2)$...........$a^{x_1-x_2}=a^{x_1}:a^{x_2}$
6. $(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$.



Zadatak:

Ako su p_0 i p_h tlakovi zraka u dva mjesta s visinskom razlikom h, tada vrijedi:

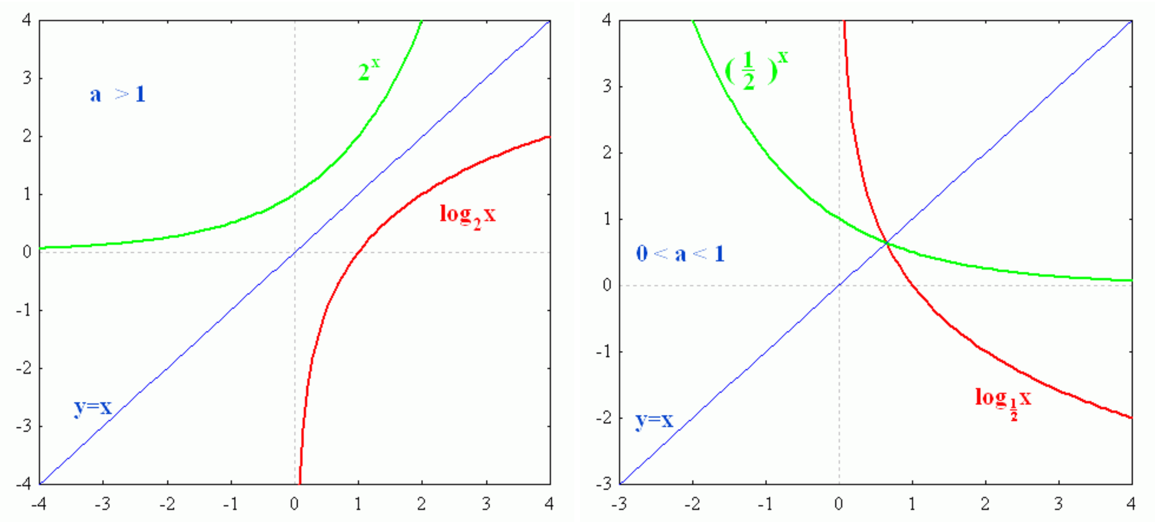
$$p_h=p_0e^{-kh}$$

pri čemu je k konstanta koja približno iznosi $1.25\times10^{-4}m^{-1}$.

Odredite tlak zraka na vrhu 80 m visoke zgrade ako je u njenom podnožju izmjeren tlak zraka od 1000 hPa.

4. Logaritamske funkcije

Logaritamska funkcija $f(x) = \log_a x$ je inverzna funkcija od eksponencijalne funkcije a^x.
Svojstva logaritamske funkcije:
1. Domena logaritamske funkcije je skup svih pozitivnih brojeva P^+.
2. Slika funkcije je skup P, $f(1) = \log_a 1 = 0$.
3. $\log_a x$ je strogo rastuća funkcija ako je a>1.
4. $\log_a x$ je strogo padajuća funkcija ako je a<1.
5. $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
6. $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$
7. $\log_a x^r = r \log_a x$



Dovoljno je poznavati vrijednosti samo jedne logaritamske funkcije jer se sve druge dobiju iz nje. Naime vrijedi:

$$\log_a x = K \cdot \log_b x; \quad K = \log_a b$$

$\log_a b \cdot \log_b a = 1$; $\log_{10} x = \log x$; $\log_e x = \ln x$

Zadatak:

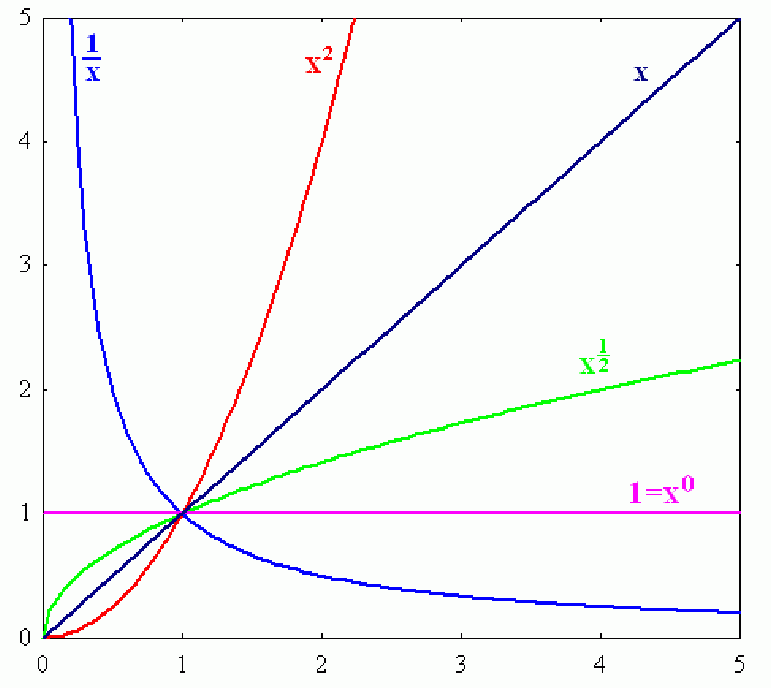
1. Jednadžbom $N = N_0 e^{-kt}$ dan je zakon radioaktivnog raspadanja. Pritom je N_0 broj atoma neke tvari na početku mjerenja ($t=0$), N broj atoma koji se nakon vremena t nisu raspali, a k konstanta karakteristična za pojedinu radioaktivnu tvar.
Nakon kojeg vremena će se raspasti 75% prvobitnog broja atoma neke tvari ako je $k = 2.5 \cdot 10^{-6} s^{-1}$?

2. Vrijeme poluraspada ($T_{1/2}$) je vrijeme potrebno da se raspadne polovica prvobitnog broja atoma. Iz $N = \frac{1}{2} N_0 \Rightarrow T_{1/2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\log 2}{\log e} = \frac{1}{k} \cdot 0.693$.
Izračunajte vrijeme poluraspada radija ako je $k = 1.382 \cdot 10^{-11} s^{-1}$

5. Opća potencija

Ako je *c* realan broj, onda funkciju $f(x)=x^c$ definiramo za pozitivne realne brojeve i nazivamo je općom potencijom:

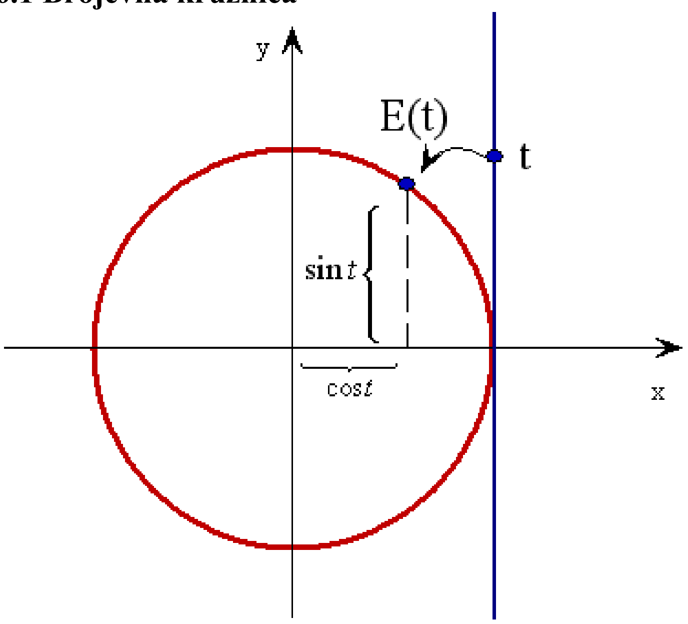
$$f(x)=x^c=\left(e^{\ln x}\right)^c=e^{c\ln x}$$



6. **Trigonometrijske funkcije**

Funkciju *f(x)* nazivamo periodičnom ako postoji takav pozitivan broj *T (period funkcije)*, da je $f(x+T)=f(x)$ za sve vrijednosti *x*, koje pripadaju području definicije funkcije *f(x)*.

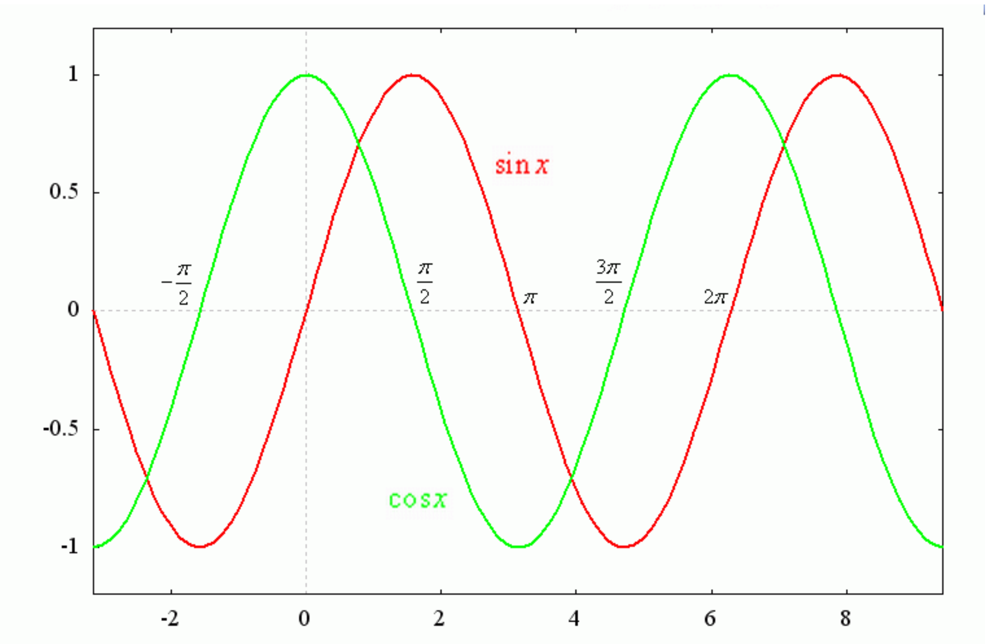
6.1 Brojevna kružnica



Neka je zadana brojevna kružnica (r=1) i neka je ishodište koordinatnog sustava u centru kružnice. Na kružnicu namatamo brojevni pravac tako da nuli pravca odgovara točka (1,0). Realnom broju *t* prilikom tog namatanja pripada potpuno određena točka *E(t)* na toj kružnici. Npr. (E(π/2)=(0,1), E(π)=(-1,0)) Koordinate točke *E(t)* neka su (cost, sin t). Apcisa točke *E(t)* je funkcija od *t*, nazivamo je kosinus i pišemo $f(t)=\cos t$. Ordinata točke E(t) je funkcija sinus, $f(t)=\sin t$.

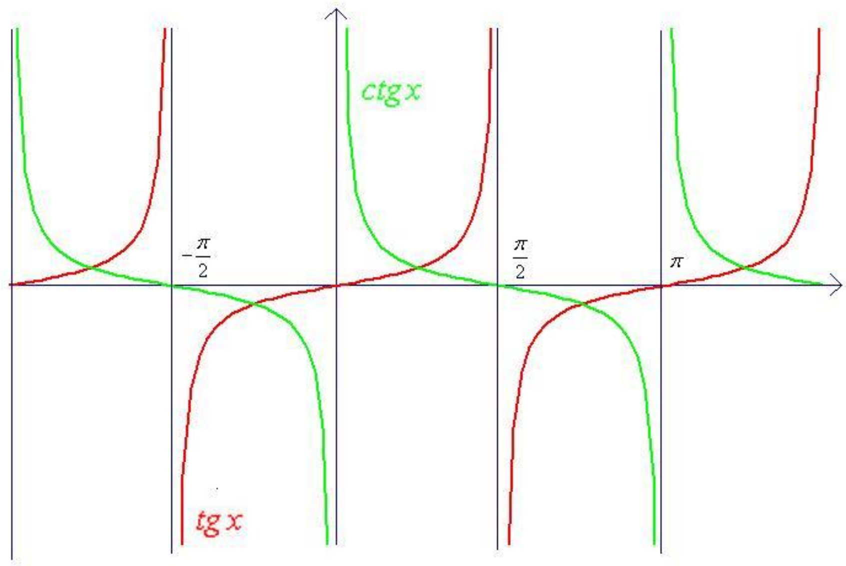
Neka svojstva funkcija <u>sinus i kosinus</u>:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
3. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
4. sinus je neparna funkcija $\sin(-x) = -\sin(x)$
5. kosinus je parna funkcija $\cos(-x) = \cos(x)$



<u>Tangens i kotangens:</u>

$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad ctg\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$$



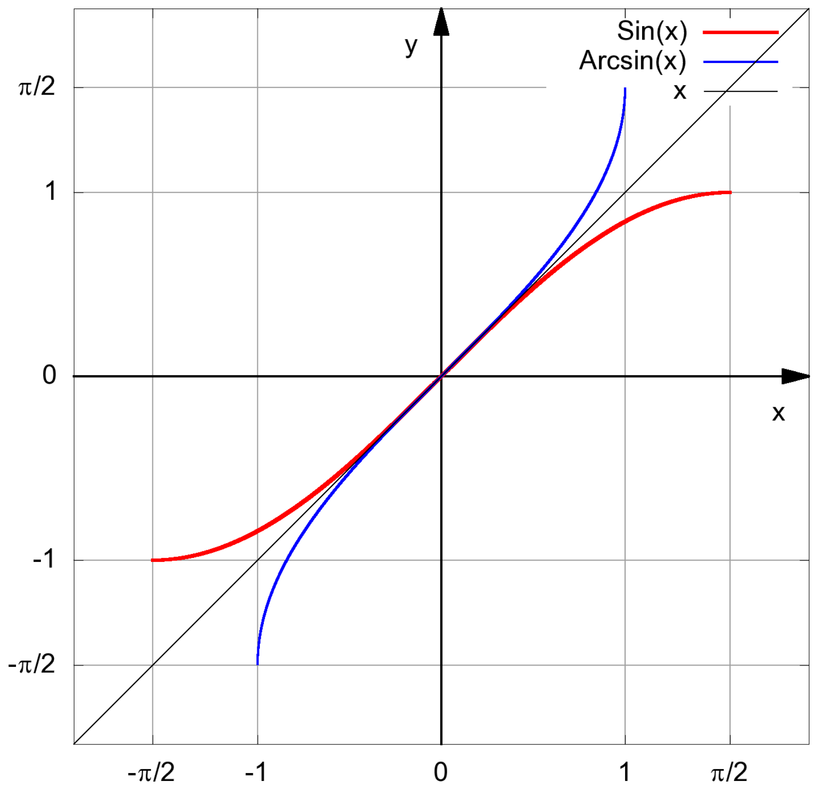
Neka svojstva funkcije tangens i kotangens:

1. Funkcija tangens je strogo rastuća na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ preslika u P.
2. Funkcija kotangens je strogo padajuća na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, interval $\langle 0, \pi \rangle$ preslika u P.
3. Funkcije tangens i kotangens su periodične funkcije s osnovnim periodom π,
$tg(x+\pi) = tg\, x, \quad ctg(x+\pi) = ctg\, x$.
4. Funkcije su neparne, tj. grafovi su simetrični s obzirom na ishodište koordinatnog sustava:
$tg(-x) = -tg(x), \quad ctg(-x) = -ctg(x)$

7. Ciklometrijske funkcije

Arkus sinus

$f(x) = \sin x$ je strogo rastuća na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, kojeg preslika u interval [-1,1]. Stoga je moguće definirati funkciju $g : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ za koju vrijedi $g(\sin x) = x, \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, i $\sin(g(x)) = x, \ \forall x \in [-1,1]$. Tu funkciju nazivamo arkus sinus i pišemo $g(x) = y = \arcsin x$



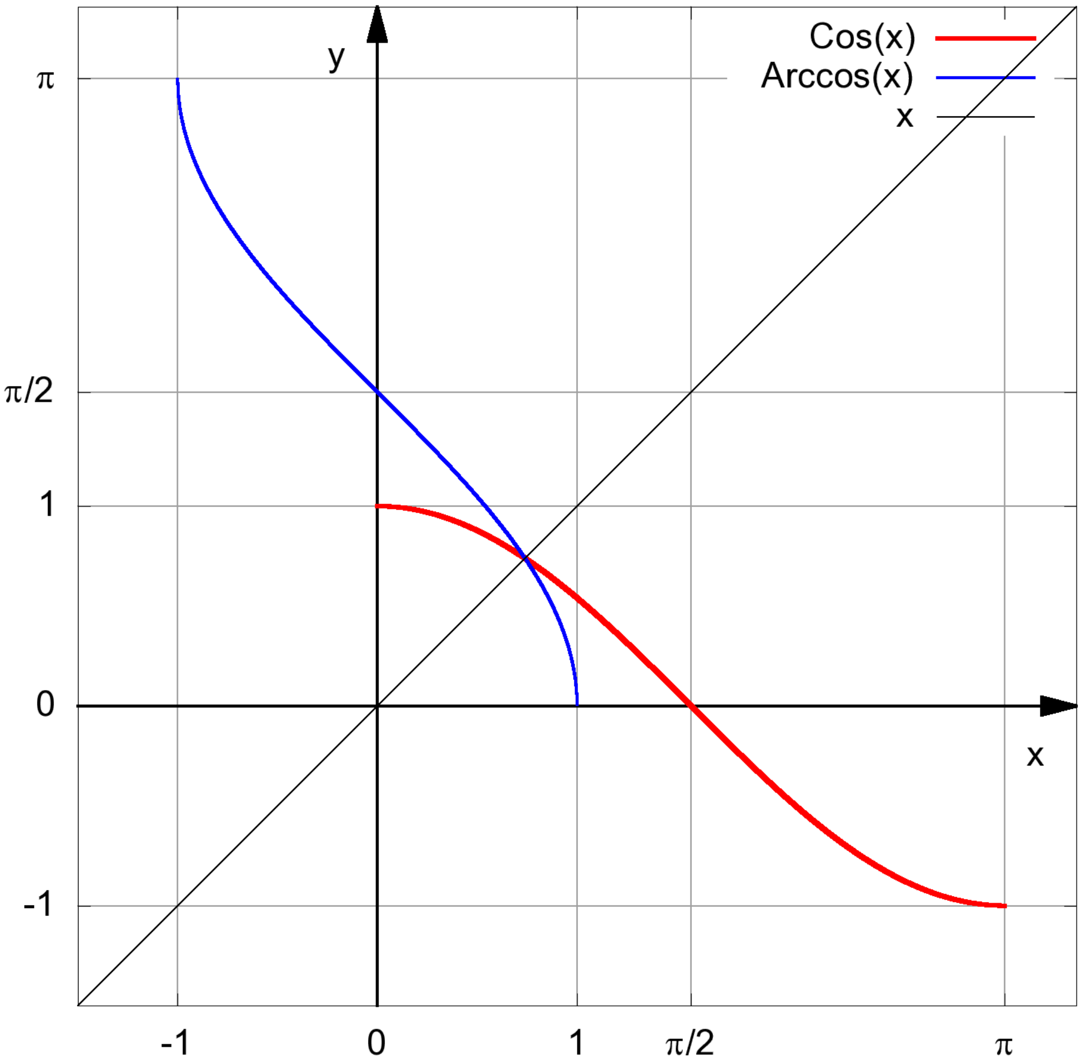
Arkus kosinus

Funkcija kosinus je strogo padajuća na intervalu [0,π], i taj interval preslika na interval od [1,1]. Stoga postoji inverzna funkcija restrikcije funkcije kosinus na interval od [0, π]. Tu funkciju nazivamo arkus kosinus i pišemo $y = \arccos x, |x| \leq 1$. Očito vrijedi

$\cos(\arccos(x)) = x, \ \forall |x| \leq 1 \ \ i \quad \arccos(\cos(x)) = x, x \in [0, \pi]$.

$$Cos = cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1,1]$$

$$Arccos = Cos^{-1} : [-1,1] \to [0, \pi]$$

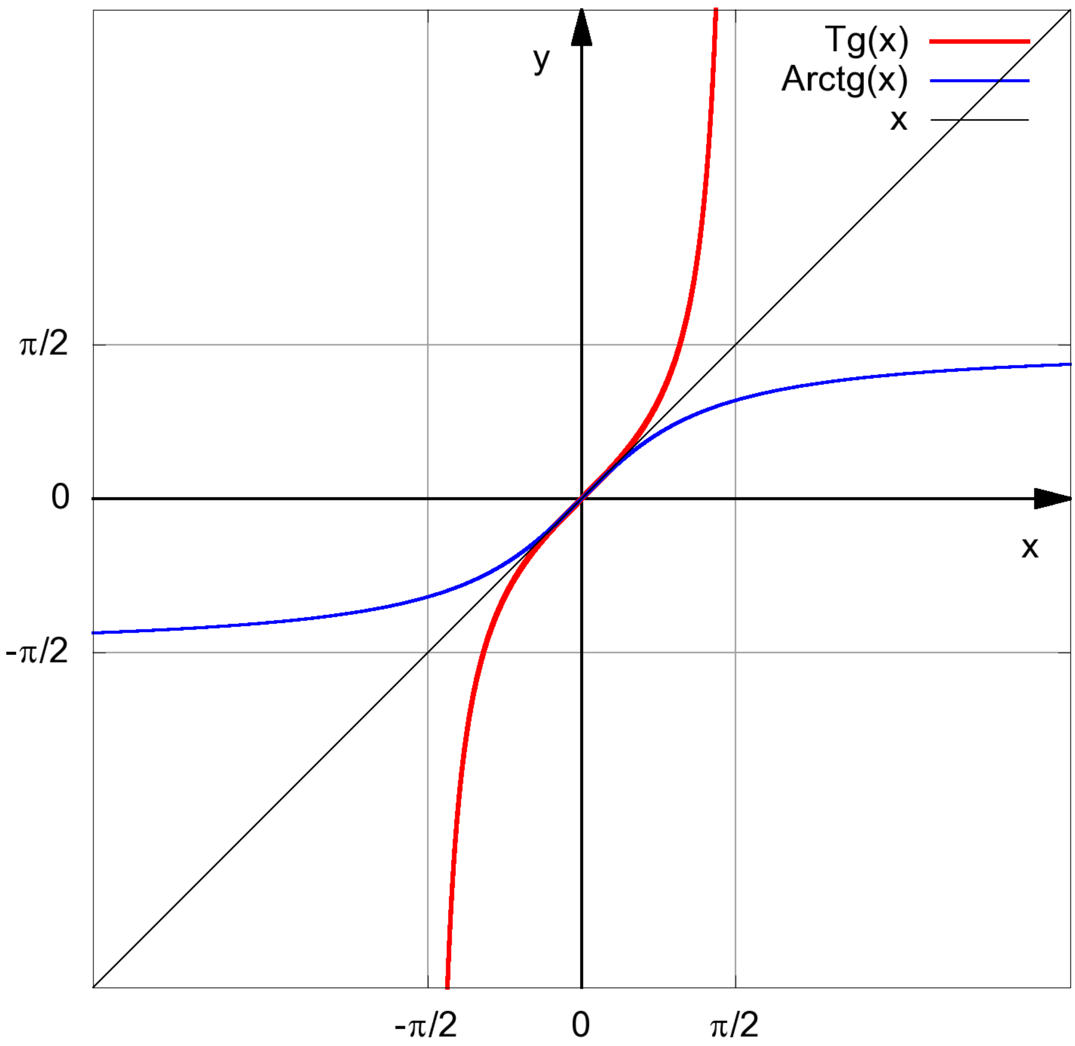


Arkus tangens

Tangens je strogo rastuća na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ i ona preslika taj interval na R. Prema tome, moguće je definirati funkciju $f:\mathbb{R}\to\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ za koju vrijedi $f(tg(x))=x,\ \forall x\in\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ i $tg(f(x))=x,\ \forall\in\mathbf{R}$. Takvu funkciju nazivamo arkus tangens i pišemo $y=arctg\,x$.

$$Tg=tg|_{\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle}:\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle\to\mathbb{R}$$

$$Arctg=Tg^{-1}:\mathbb{R}\to\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$$

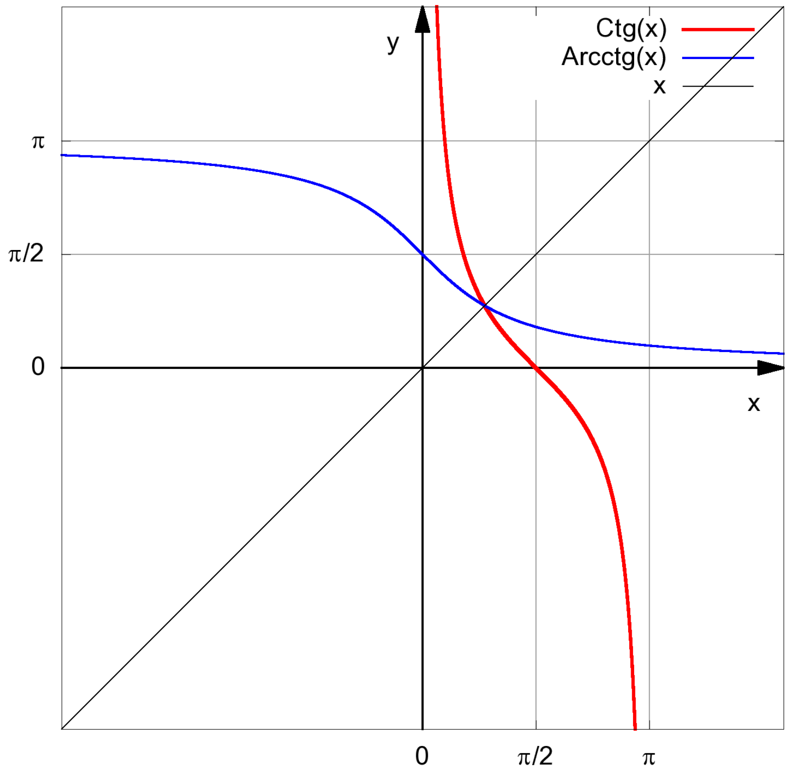


Arkus kotangens

Funkcija kotangens je strogo padajuća na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ i ona preslika taj interval na $\mathbb{R}$. Funkciju $f:\mathbb{R}\to\langle 0,\pi\rangle$ za koju je $f(ctg\,x)=x,\ \forall x\in\langle 0,\pi\rangle,\ i\ ctg(f(x))=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nazivamo arkus kotangens i pišemo $f(x)=y=\operatorname{arcctg}x$.

$$Ctg = ctg|_{\langle 0,\pi\rangle}: \langle 0,\pi\rangle \to \mathbb{R}$$

$$Arcctg = Ctg^{-1}: \mathbb{R} \to \langle 0,\pi\rangle$$



ZADACI:

Odredite područje definicije funkcije:

1. a) $y=\sqrt{x+1}$ b) $y=\sqrt[3]{x+1}$

2. $y=\dfrac{1}{4-x^2}$

3. $y=\sqrt{x^2-2}$

4. $y=\sqrt{2+x-x^2}$

5. $y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$

6. $y=\sqrt{x-x^3}$

7. $y=\log\dfrac{2+x}{2-x}$

8. $y=\log\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

9. $y=\arccos\frac{2x}{1+x}$

10. $y=\arcsin\left(\log\frac{x}{10}\right)$

11. $y=\sqrt{\sin 2x}$

12. $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$

13. $y=arctg(x+2)-\ln(-x)$

14. $y=\log_5(x^2+2x-3)$

15. Odredite koje su od zadanih funkcija parne a koje neparne:

a) $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$

b) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$

d) $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$

e) $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$

16. Odredite koje su od niže navedenih funkcija periodične i za te periodične funkcije nađite njihov najmanji period T:

$a)\, f(x)=10\sin 3x$

b) $f(x)=a\sin\lambda x+b\cos\lambda x$

c) $f(x)=\sqrt{tg(x)}$

d) $f(x)=\sin^2 x$

e) $f(x)=\sin(\sqrt{x})$

17. Za funkciju *f(x)* izračunajte inverznu funkciju i odredite područje definicije, ako je

a) $f(x)=\log\frac{x}{2}$

b) $f(x)=\mathrm{arctg}3x$

c) $f(x)=2^{x^3}$

d) $f(x)=\sqrt{e^x}$

e) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

f) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

18. Da li su jednake funkcije f i g, definirane na prirodnoj domeni?

a) $f(x)=2^{\log_2(x+1)}$, $g(x)=x+1$

b) $f(x)=\log_3 x^2$, $g(x)=2\log_3 x$

c) $f(x)=\log_3(x-1)+\log_3(x+1)$, $g(x)=\log_3(x^2-1)$

d) $f(x)=\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x$, $g(x)=1;$