2. Elementarne funkcije

polinomi, racionalne, eksponencijalne, logaritamske, opća potencija, trigonometrijske i ciklometrijske

Petar Stipanović

Elementarne funkcije

- **Osnovne elementarne funkcije** su:
  1. polinomi
  2. racionalne funkcije
  3. eksponencijalne funkcije
  4. logaritamske funkcije
  5. opća potencija
  6. trigonometrijske funkcije
  7. ciklometrijske funkcije
- **Elementarne funkcije** su funkcije koje se mogu dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija s pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija $(+,-,\cdot,:)$ i konačnog broja njihovih kompozicija.

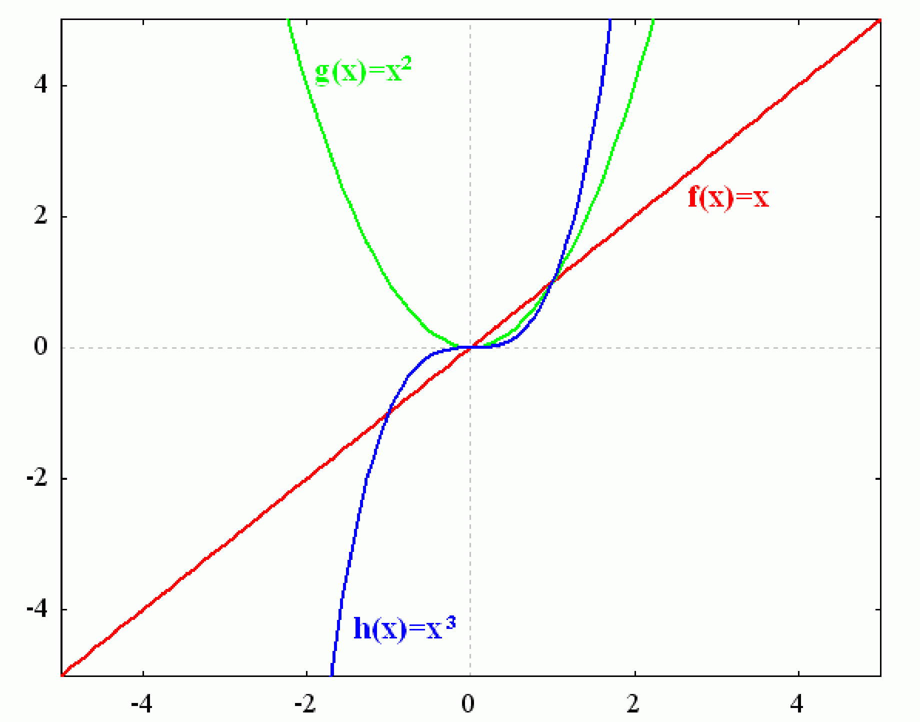
Polinomi

- Polinom n-tog stupnja je funkcija p:$\Re \rightarrow \Re$

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

pri čemu su koeficijenti a_0, a_1,...,a_n realni brojevi i $a_n \neq 0$.

- Primjeri polinoma:
  - konstantna funkcija, f(x)=c
  - linearna funkcija, $f(x)=x$
  - kvadratna funkcija, $g(x)=x^2$
  - kubna funkcija, $h(x)=x^3$



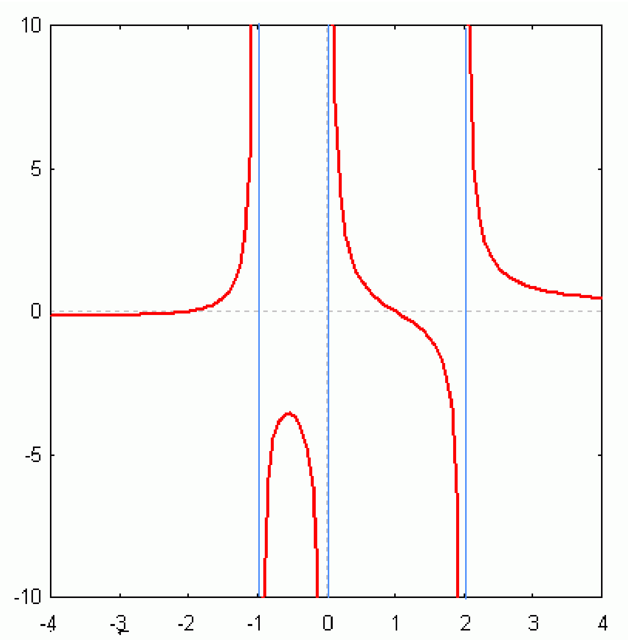
Zadaci (primjene polinoma)

1. S vrha zgrade lopta je bačena u vis. Udaljenost d lopte od zemlje nakon t sekunda dana je formulom $d(t) = 24 + 20t - 4t^2$ metara.
   a) Kolika je visina zgrade?
   b) Nakon koliko će sekunda lopta pasti na zemlju
   c) Nakon koliko će sekunda proći pored vrha zgrade kada bude padala na zemlju?
   d) Koju će najveću visinu lopta doseći?

2. U lunaparku postavljen je vlak „straha" i njegova je putanja u obliku parabole. Raspon joj je 77m, a maksimalna visina 30m. Na udaljenosti 11m jedan od drugog postavljeno je 6 potpornih stupova.
   Kolika im je ukupna duljina?

Racionalne funkcije

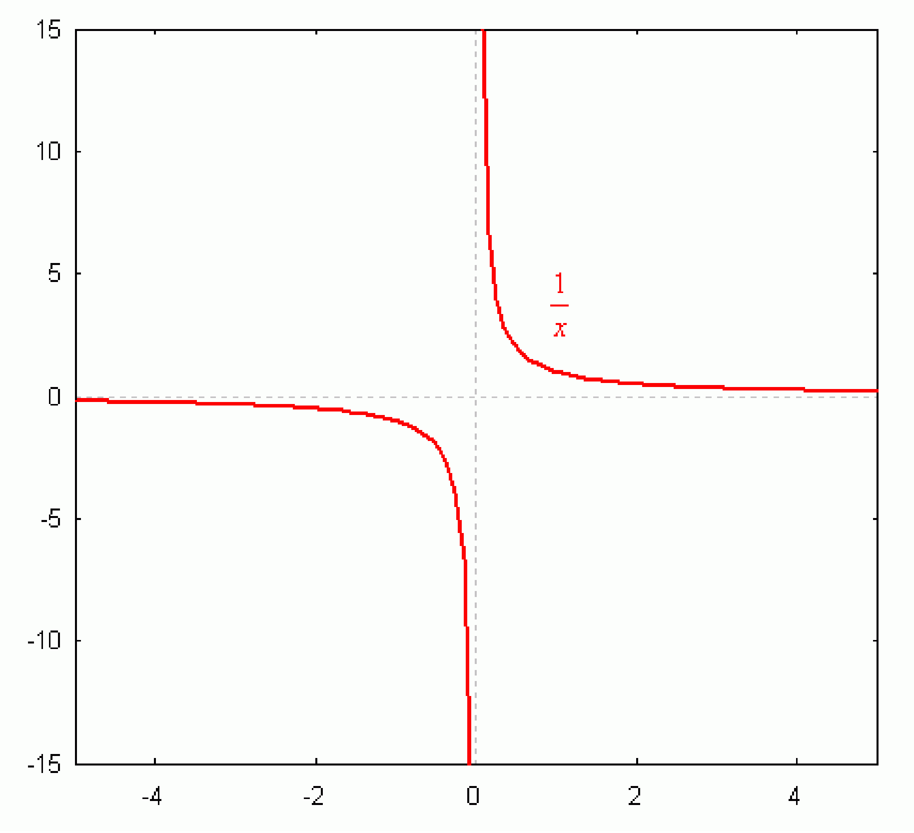
- Funkcija $f(x) = P_n(x) / Q_m(x)$, gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi jest racionalna funkcija.
- Domena: $\mathcal{D}(f) = \{ x \in \Re : Q_m(x) \neq 0 \}$
- Ako je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika, onda kažemo da je to prava racionalna funkcija.

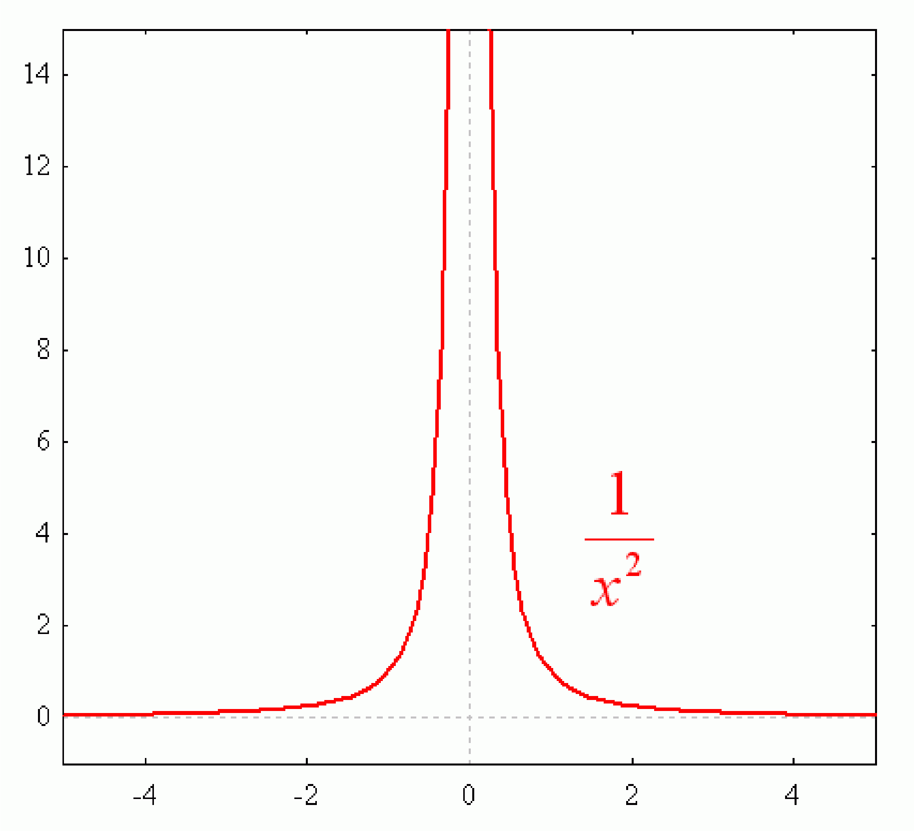


$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x+1)(x-2)}$$

Nultočke racionalne funkcije su rješenja jednadžbe $P(x)=0$, dok su (vertikalne asimptote) polovi racionalne funkcije rješenja jednadžbe $Q(x)=0$.

Primjeri racionalnih funkcija

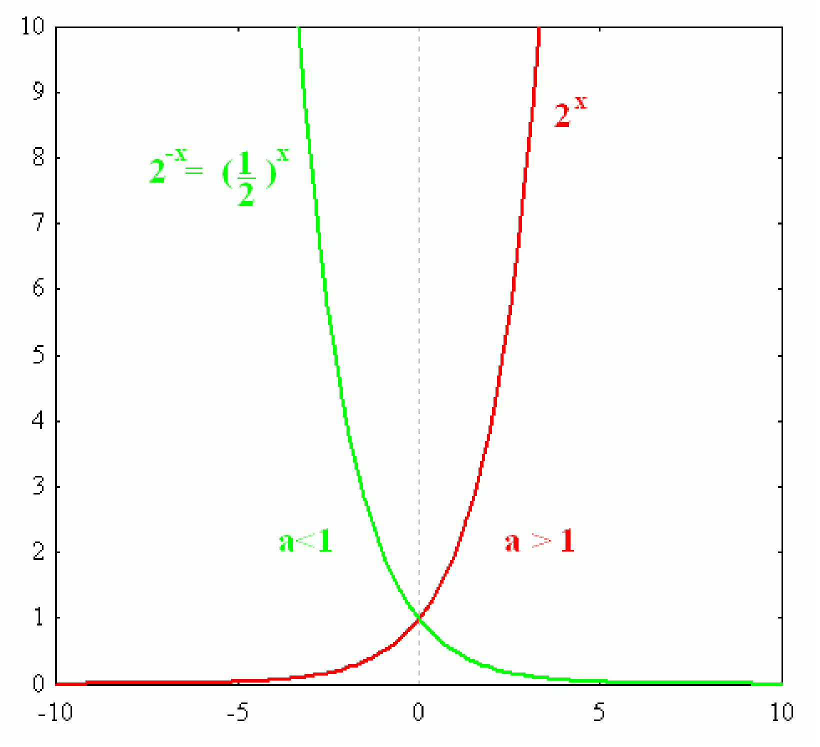


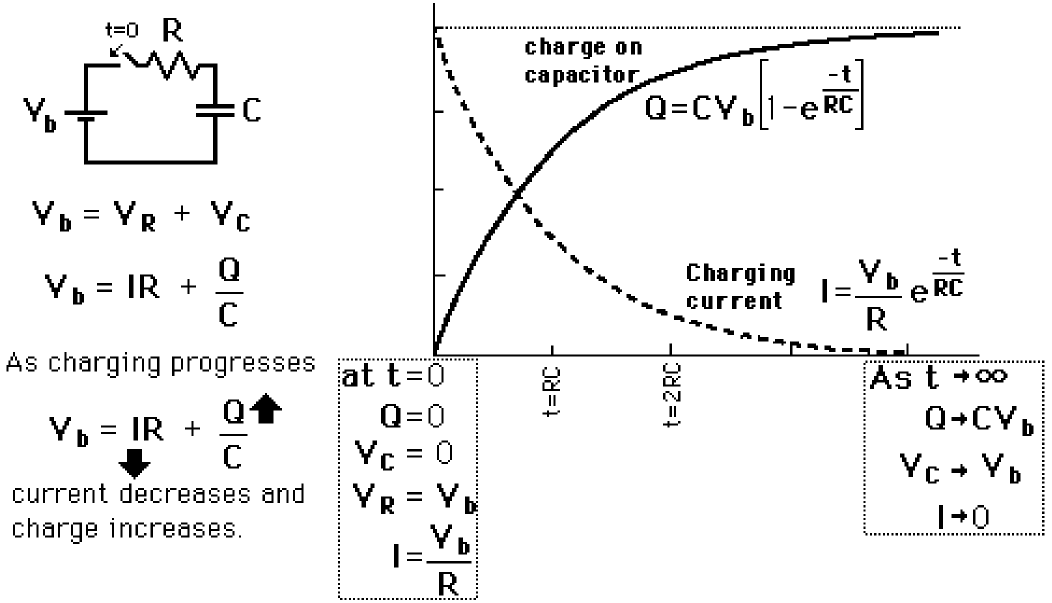


Eksponenecijalna funkcija

- Funkciju oblika $f(x)=a^x$, gdje je $a>0$ i $a\neq 1$, zovemo eksponencijalnom funkcijom baze a.
- Svojstva:
  - ⊳ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ je bijekcija
  - ⊳ $a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$
  - ⊳ $a^{x_1-x_2}=a^{x_1}\cdot a^{-x_2}=\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$
  - ⊳ $a^0=1$
  - ⊳ $a>1\Rightarrow f$ strogo rastuća
  - ⊳ $0<a<1\Rightarrow f$ strogo padajuća

Primjeri eksponencijalne funkcije





Zadaci (primjene eksponencijalne)

3. Ako su p_0 i p_h tlakovi zraka u dva mjesta s visinskom razlikom h, tada vrijedi:

$$p_h = p_0 e^{-kh}$$

pri čemu je k konstanta koja približno iznosi $1.25 \cdot 10^{-4} m^{-1}$

Odredi tlak zraka zraka na vrhu 80 m visoke zgrade ako je u njenom podnožju izmjeren tlak zraka od 1000 hPa.

Logaritamska funkcija

- Inverznu funkciju eksponencujalne funkcije $g(x)=a^x$, zovemo logaritamskom funkcijom baze a i označavamo $f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$.
- Svojstva:
  - ⊳ $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je bijekcija
  - ⊳ $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$
  - ⊳ $\log_a(x_1/x_2) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$
  - ⊳ $\log_a 1 = 0$
  - ⊳ $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$
  - ⊳ $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$
  - ⊳ $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
  - ⊳ $a > 1 \Rightarrow f$ strogo rastuća
  - ⊳ $0 < a < 1 \Rightarrow f$ strogo padajuća

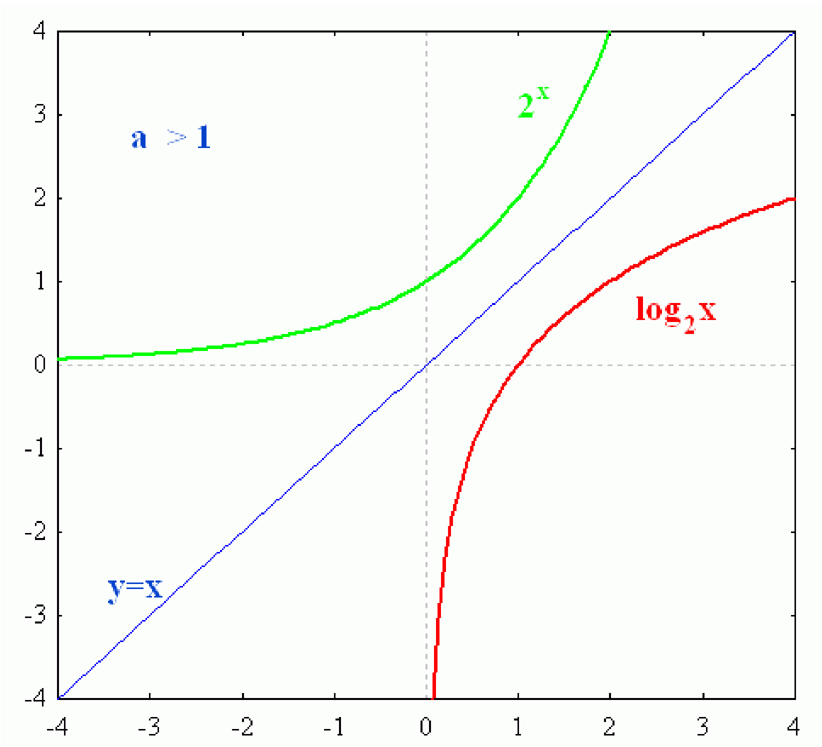
Neke specijalne baze i svojstva

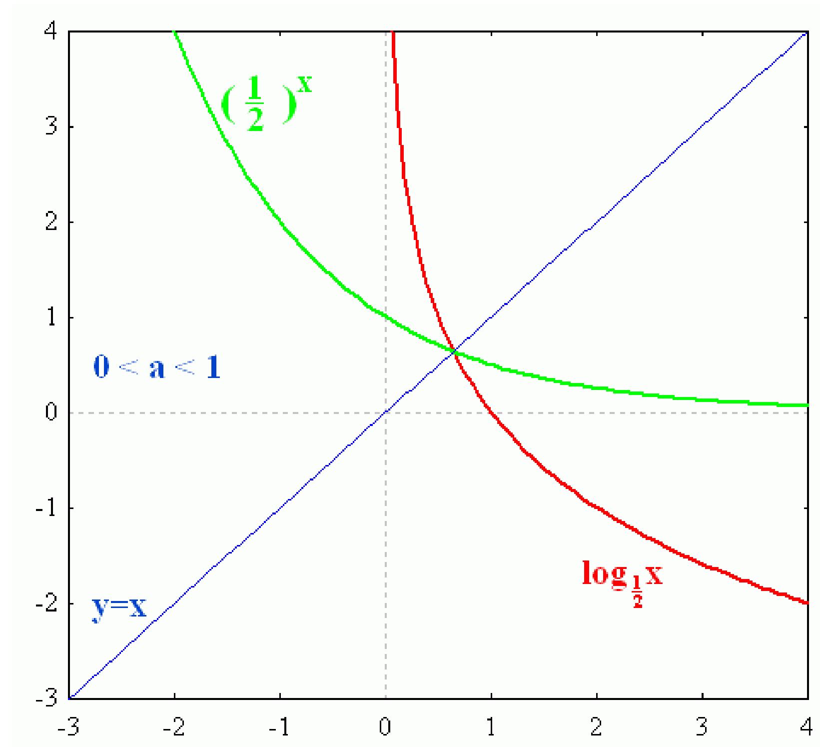
- Ako je baza a=10, pišemo y=log x umjesto $y=\log_{10} x$, i zovemo dekadski logaritam
- Ako je baza a=e, pišemo y=ln x umjesto $y=\log_e x$, i zovemo prirodni logaritam
- Vrijedi:
  - $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$
  - $a^{\log_a x} = x, \forall x \in \mathbb{R}^+$
  - $\log_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$
- Dovoljno je poznavati vrijednosti samo jedne logaritamske funkcije jer se sve druge dobiju iz nje. Naime vrijedi:

$$\log_a x = K \cdot \log_b x; \quad K = \log_a b$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1; \quad \log_{10} x = \log x \; ; \; \log_e x = \ln x$$

Grafovi





Zadaci

4. Jednadžbom $N=N_0e^{-kt}$ dan je zakon radioaktivnog raspadanja. Pritom je N_0 broj atoma neke tvari na početku mjerenja (t=0), N broj atoma koji se nakon vremena t nisu raspali, a k konstanta karakteristična za pojedinu radioaktivnu tvar.

   Nakon kojeg vremena će se raspasti 75% prvobitnog broja atoma neke tvari ako je $k = 2.5 \cdot 10^{-6} s^{-1}$?

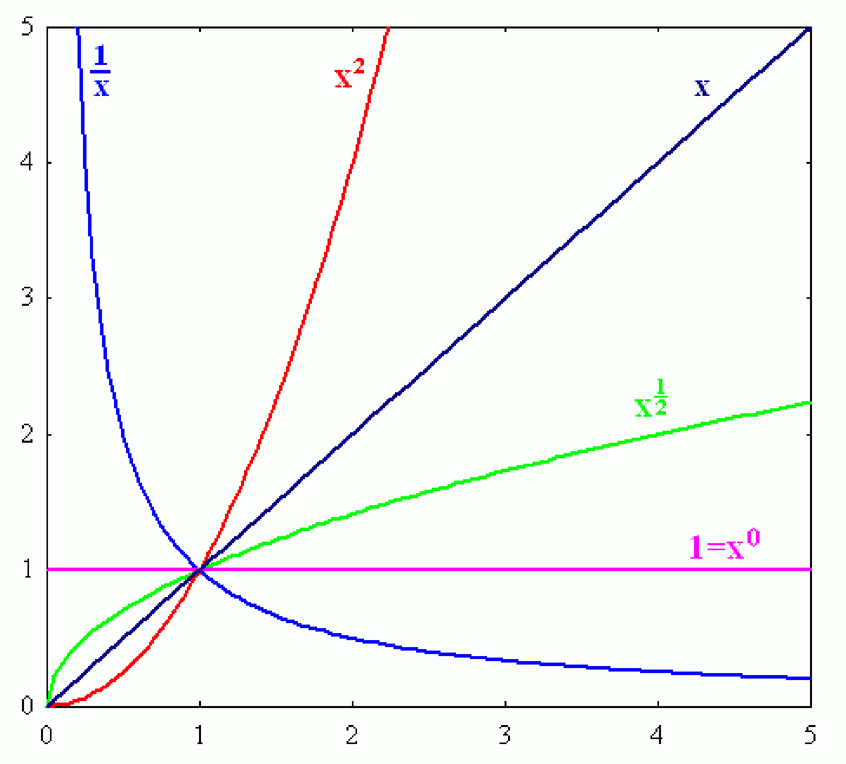
5. Izračunajte vrijeme poluraspada radija ako je $k = 1.382 \cdot 10^{-11} s^{-1}$.

Opća potencija

- **Općom potencijom** nazivamo funkciju

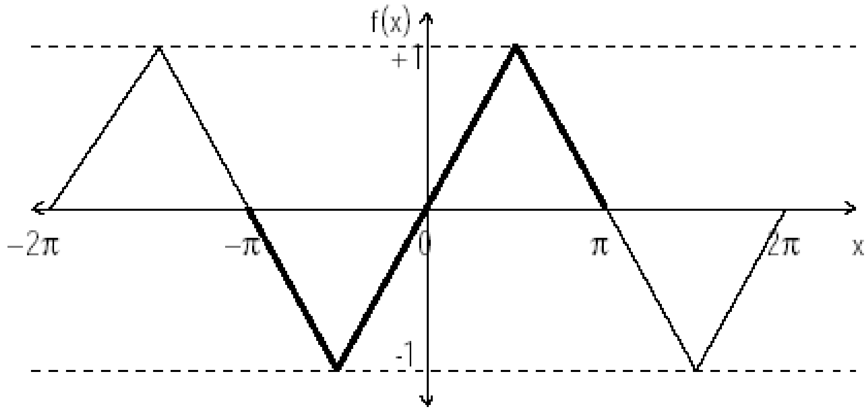
$$f(x) = x^c = \left(e^{\ln x}\right)^c = e^{c \ln x}, \quad x > 0, c \in R$$

$$f : R^+ \to R^+$$



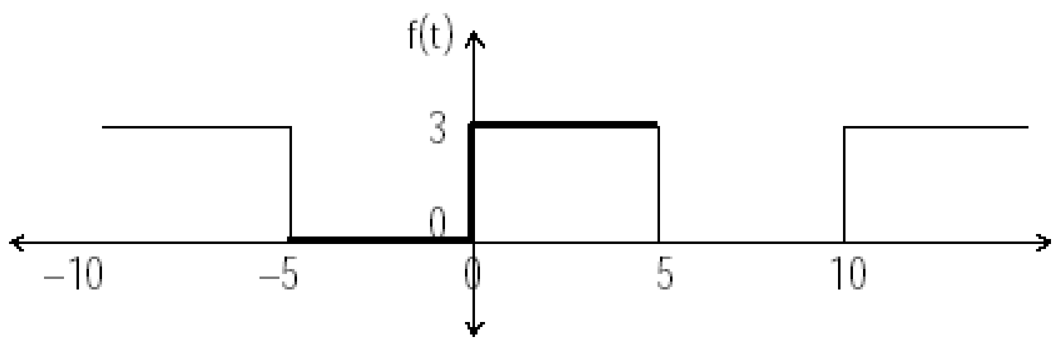
Periodične funkcije

- Funkciju *f(x)* nazivamo periodičnom ako postoji takav pozitivan broj *T (period funkcije)*, da je *f (x+T)=f(x)* za sve vrijednosti *x*, koje pripadaju području definicije funkcije *f(x)*.



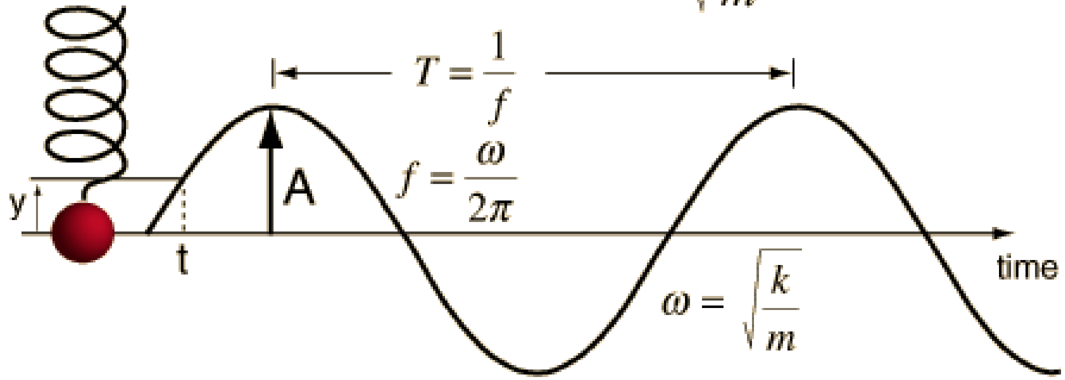
$$f(x) = (-2/\pi)(x+\pi) \quad \text{for } -\pi \le x \le -\pi/2,$$

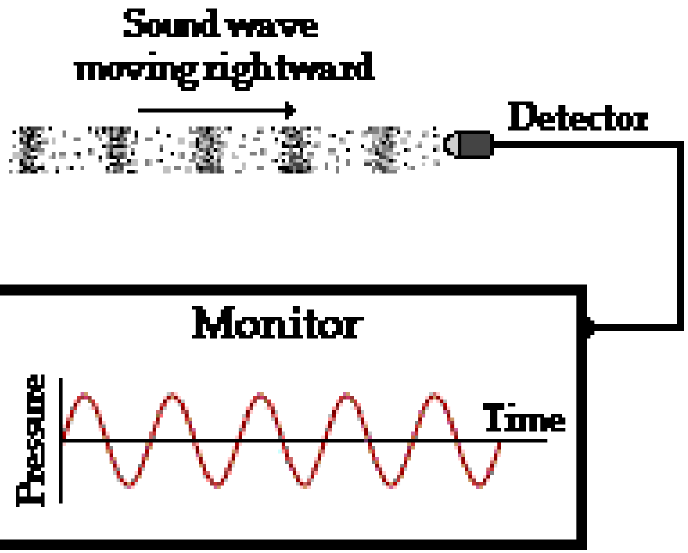
$$= 2x/\pi \quad \text{for } -\pi/2 \le x \le \pi/2,$$



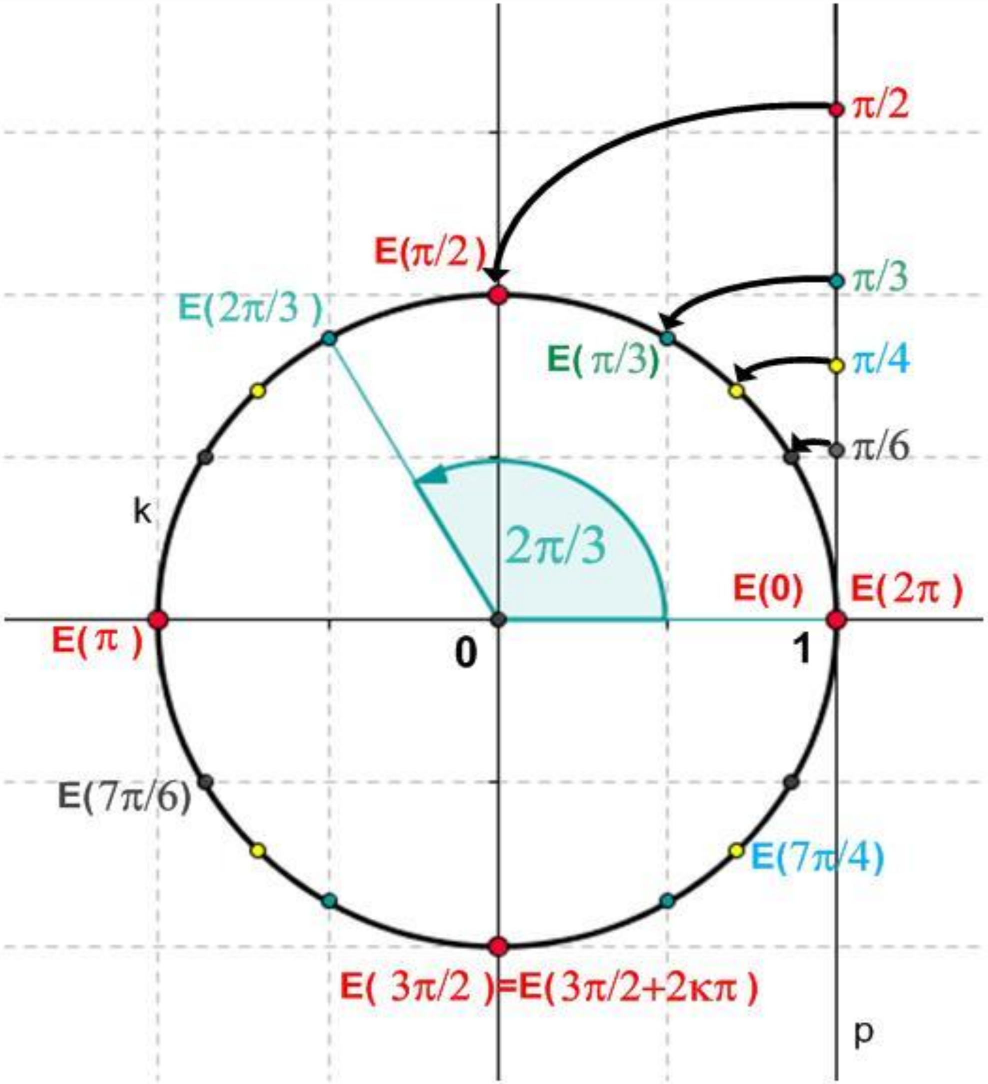
Primjeri

$$y = A\sin\omega t = A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$





BROJEVNA KRUŽNICA



Namatanjem brojevnog pravca p na kružnicu definirano je pridruživanje realnih brojeva točkama brojevne kružnice. Ovo preslikavanje zovemo eksponencijalno preslikavanje : $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{p} \longmapsto \boldsymbol{E}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{k}(0,1)$

p - pravac paralelan s y osi, a prolazi točkom (1,0)
k(0,1) - brojevna kružnica
Na slici je prikazano pridruživanje pozitivnih brojeva, a negativne brojeve pridružujemo u suprotnom smjeru od pozitivnih, odnosno u smjeru kretanja kazaljke.
Primjeri nekih točaka:

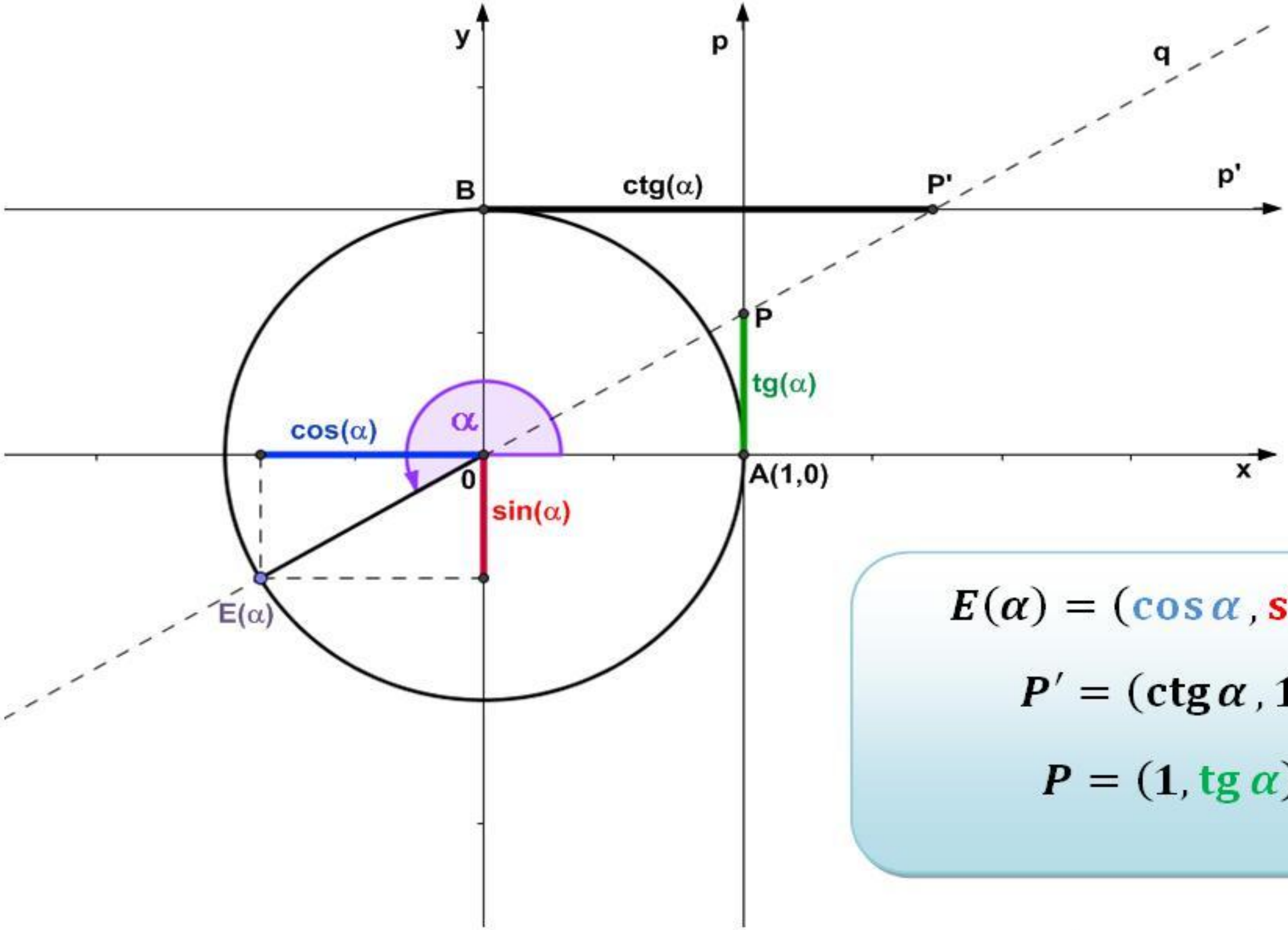
$$E(0) = E(2\pi) = (1,0)$$
$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$$
$$E(\pi) = (-1,0)$$

U svaku točku kružnice preslika se beskonačno mnogo točaka brojevnog pravca jer vrijedi:

$$E(\alpha) = E(\alpha + 2k\pi)$$
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\alpha'}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\alpha})$$

α' - glavna mjera kuta

DEFINICIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA



$$E(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$P' = (\operatorname{ctg}\alpha, 1)$$

$$P = (1, \operatorname{tg}\alpha)$$

$E(\alpha) \in k(0,1)$ - točka na brojevnoj kružnici čije su koordinate cos i sin kuta α

p' - pravac paralelan x-osi, a prolazi točkom B(0,1)

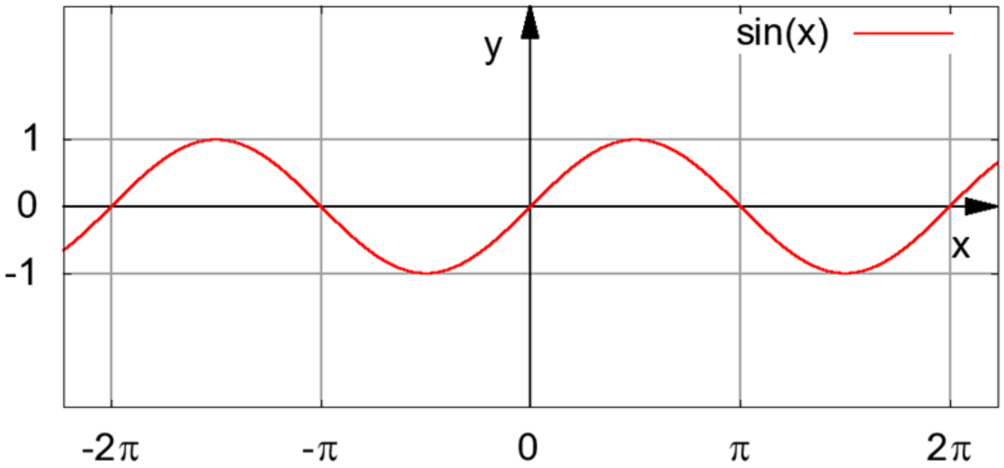
p - pravac paralelan y-osi, a prolazi točkom A(1,0)

q - pravac koji prolazi točkama O(0,0) i $E(\alpha)$

$P' = q \cap p'$; $P = q \cap p$

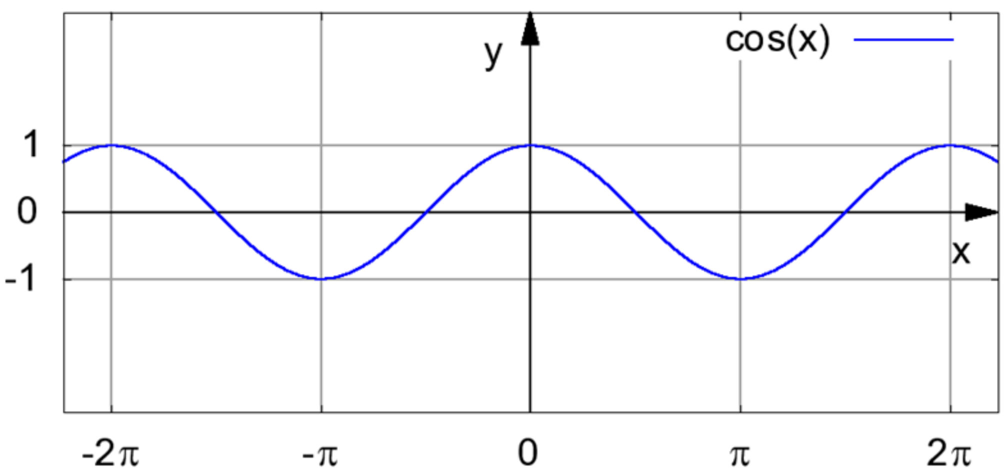
α/kvadrant	*I*	*II*	*III*	*IV*
$sin(\alpha)$	+	+	-	-
$cos(\alpha)$	+	-	-	+
$tg(\alpha)$	+	-	+	-
$ctg(\alpha)$	+	-	+	-

Trigonometrijske funkcije



$sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$

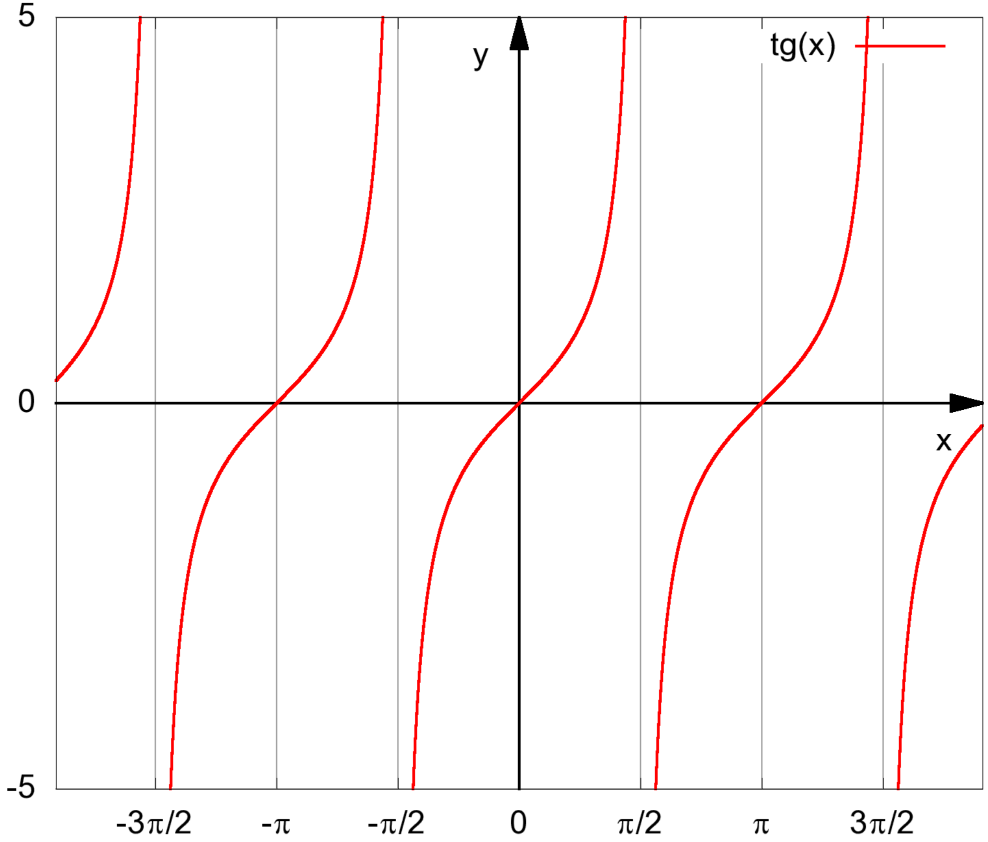
- sin(-x) = - sin(x) ⇒ neparna
- sin(x+2π) = sin(x) ⇒ periodična
- surjektivna na intervalu [-1,1]



$cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$

- cos(-x) = cos(x) ⇒ parna
- cos(x+2π) = cos(x) ⇒ periodična
- surjektivna na intervalu [-1,1]

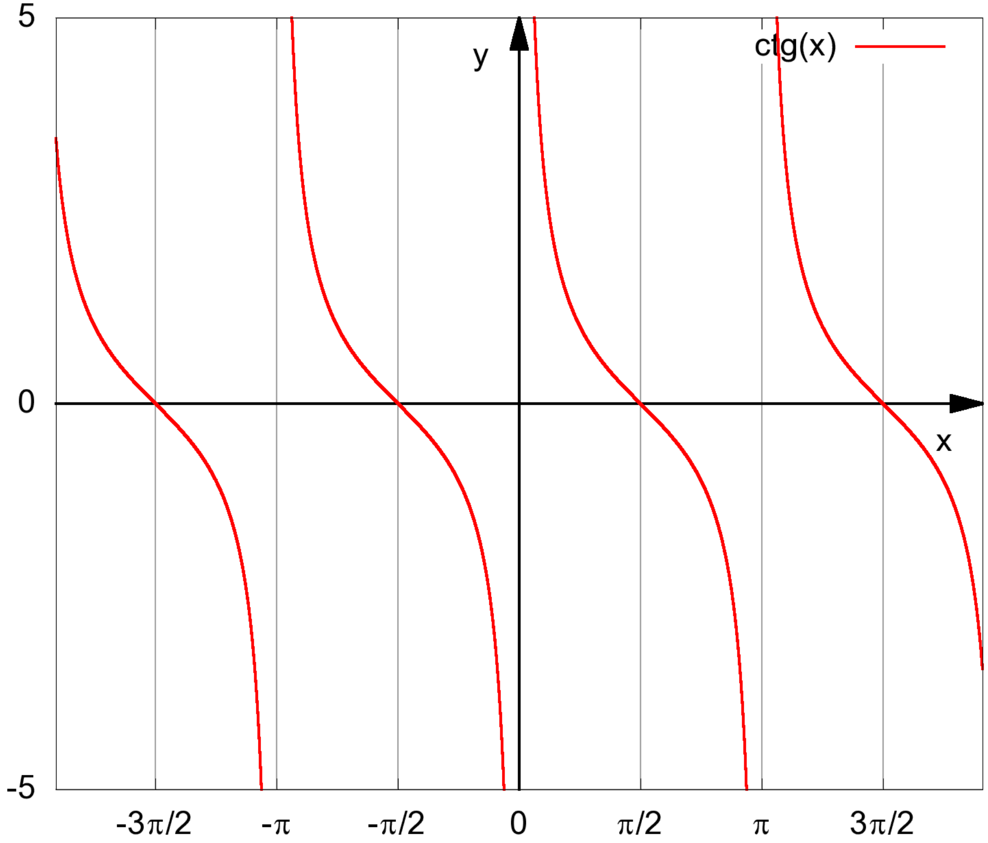
Trigonometrijske funkcije



$$tg: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

- tg(-x) = - tg(x) $\Rightarrow$ neparna
- tg(x+π) = tg(x) $\Rightarrow$ periodična
- surjektivna na $\Re$
- ctg(x) = 1/tg(x)

Trigonometrijske funkcije



$ctg: \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$

- ctg(-x) = - ctg(x) ⇒ neparna
- ctg(x+π) = ctg(x) ⇒ periodična
- surjektivna na $\Re$
- nije injektivna

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija i osnovni identiteti

$\alpha'/°$	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
α'/rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$sin(\alpha)$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$cos(\alpha)$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg(\alpha)$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$\alpha/°$	-360	-330	-315	-300	-270	-240	-225	-210	-180	-150	-135	-120	-90	-60	-45	-30	0

$$sin^2 t + cos^2 t = 1$$

$$tgt = \frac{sint}{cost}$$

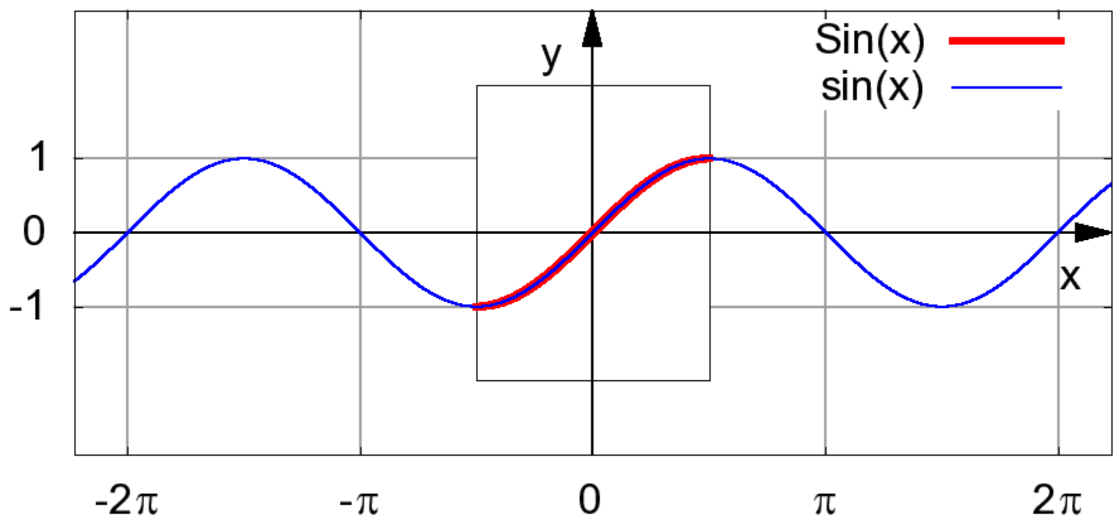
$$ctgt = \frac{1}{tgt} = \frac{cost}{sint}$$

Ciklometrijske funkcije

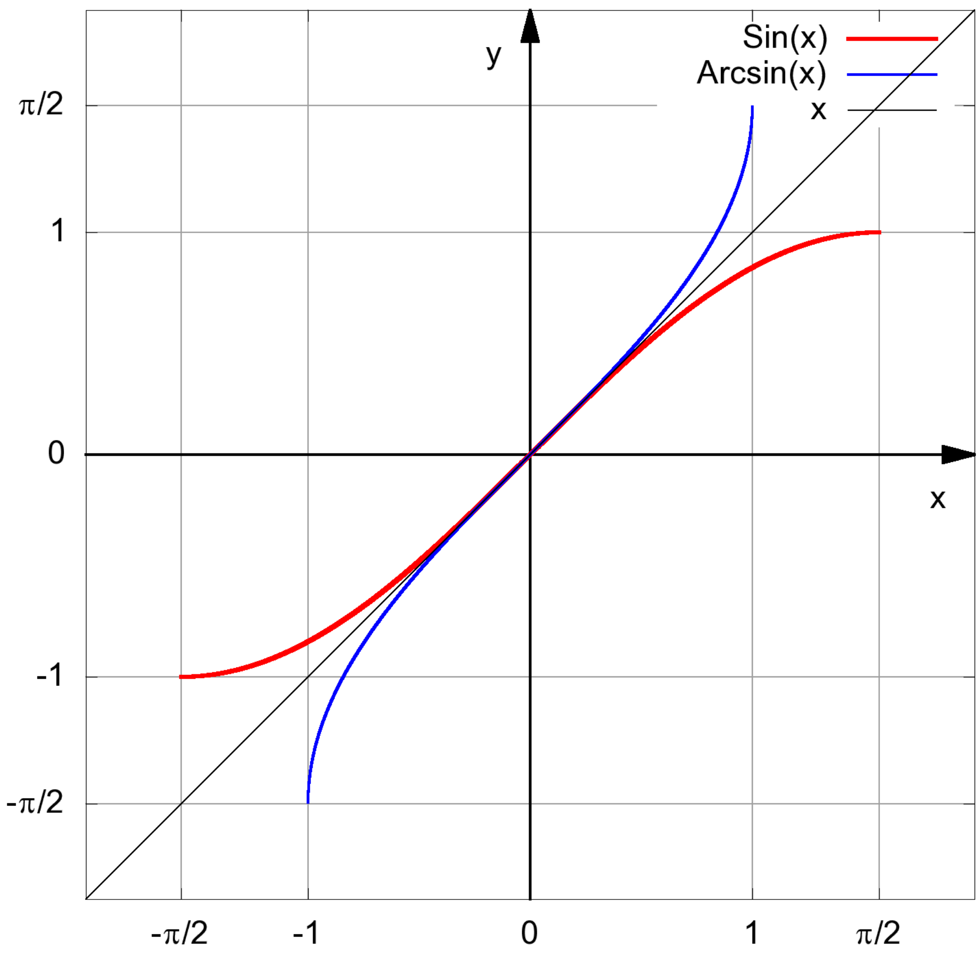
Ciklometrijske funkcije su inverzne funkcije od pripadnih trigonometrijskih. Funkcija sin(x) je surjekcija, ali nije bijekcija pa za definirati njenu inverznu funkciju moramo je suziti.

$$Sin = sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}: \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

Kako bi ona postala injekcija sužavamo je birajući neki monotoni dio i pazeći da na tom dijelu ostane surjekcija, a tako dobivenu restrikciju označavamo Sin(x). Logičan izbor je njen dio od -pi/2 do pi/2 (kvadratićem označeni dio na slici). Analogno postupamo za kosinus.



Ciklometrijske funkcije (arkus sinus)



$$Arcsin = Sin^{-1}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

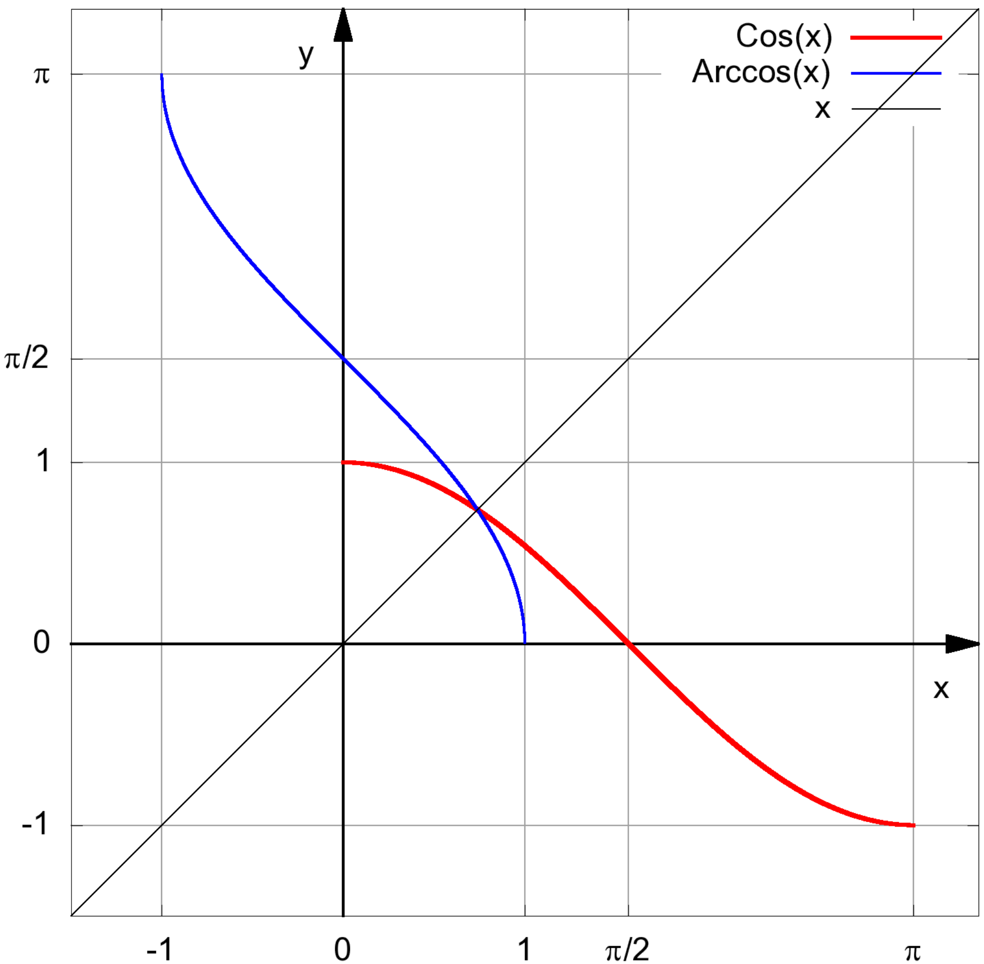
$$Sin = sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

Arcsin i Sin su inverzne funkcije pa vrijedi:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad |x| \le 1,$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ciklometrijske funkcije (arkus kosinus)



$$Arccos = Cos^{-1}: [-1,1] \to [0,\pi]$$

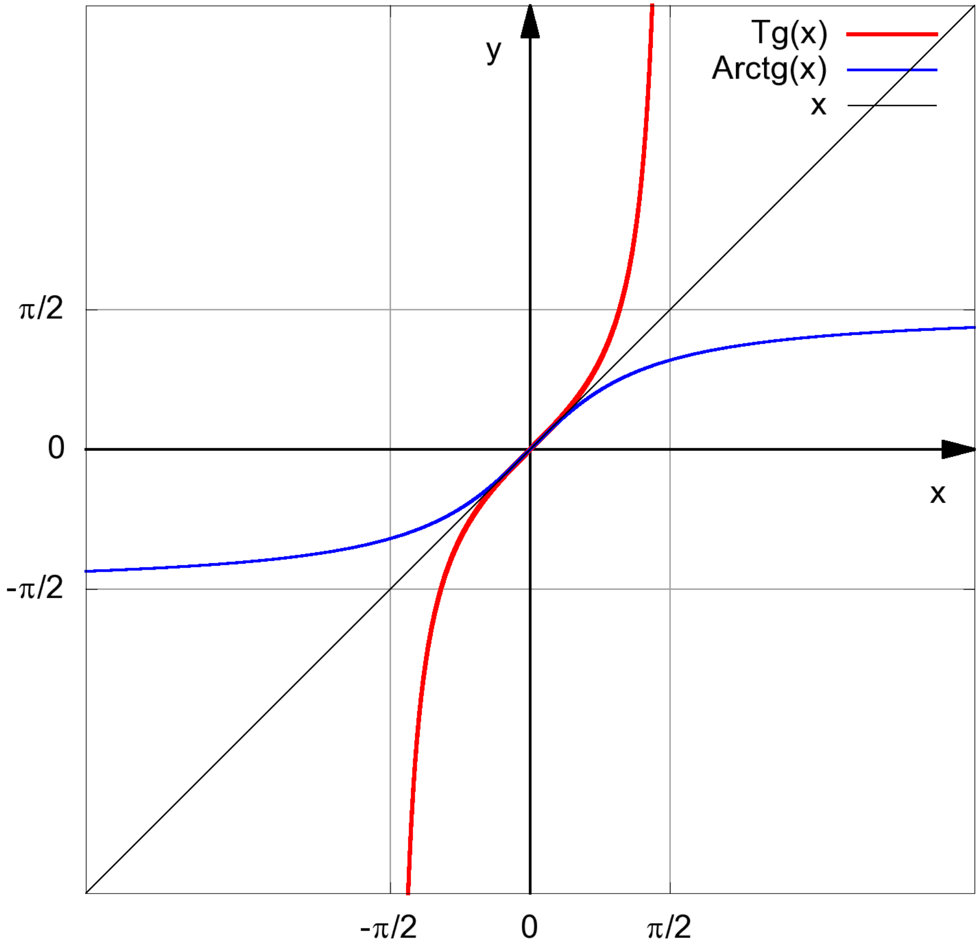
$$Cos = cos|_{[0,\pi]}: [0,\pi] \to [-1,1]$$

Arccos i Cos su inverzne funkcije pa vrijedi:

$$cos(arccos\, x) = x, \quad |x| \le 1,$$

$$arccos(cos\, x) = x, \quad x \in [0,\pi]$$

Ciklometrijske funkcije (arkus tangens)



$$Arctg = Tg^{-1}: \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$$

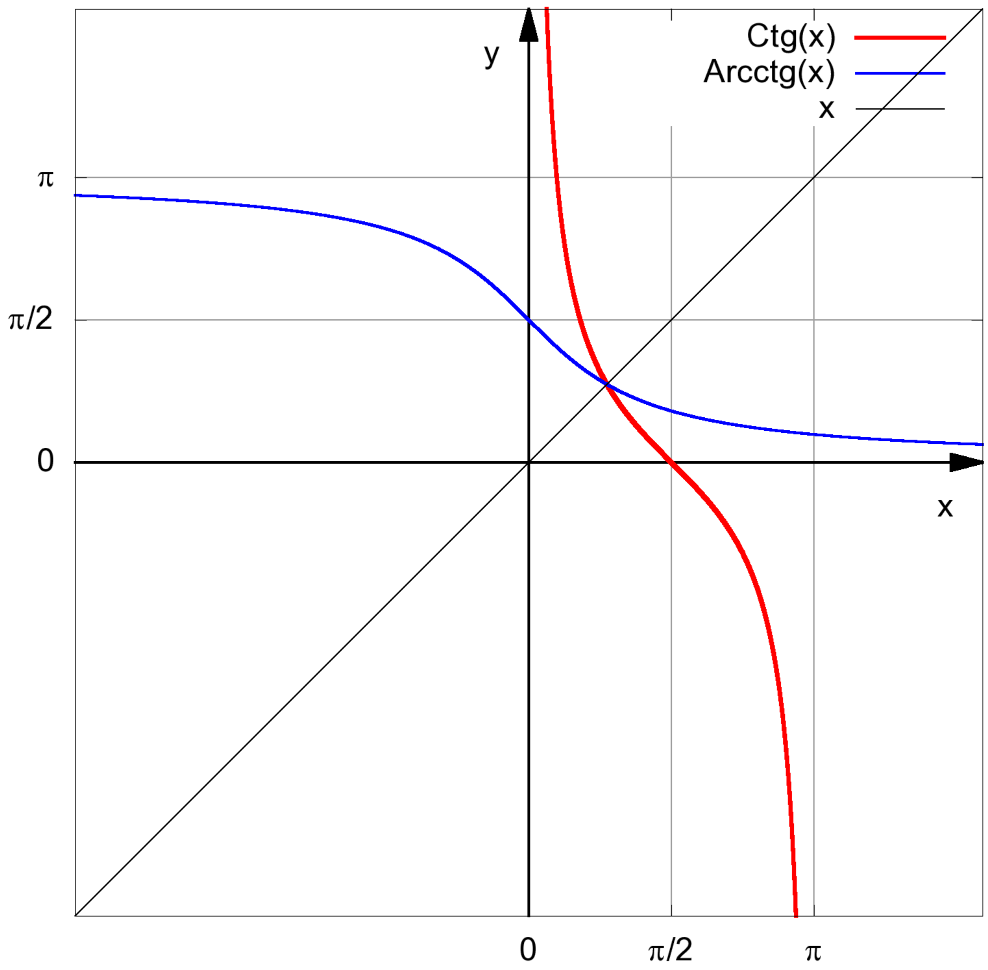
$$Tg = tg|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}: \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \mathbb{R}$$

Arctg i Tg su inverzne funkcije pa vrijedi:

$$tg\left(arctgx\right) = x, \quad \forall x \in R,$$

$$arctg\left(tgx\right) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Ciklometrijske funkcije (arkus kotangens)



$$Arcctg = Ctg^{-1}\colon \mathbb{R} \to \langle 0, \pi \rangle$$

$$Ctg = ctg|_{\langle 0,\pi \rangle}\colon \langle 0, \pi \rangle \to \mathbb{R}$$

Arcctg i Ctg su inverzne funkcije pa vrijedi:

$$ctg\left(arcctgx\right) = x, \quad \forall x \in R,$$

$$arcctg\left(ctgx\right) = x, \quad x \in \left(0, \pi\right)$$

Korisni linkovi

- http://www.pmfst.hr/index.php?option=com_content&view=article&id=248&Itemid=229
- http://lavica.fesb.hr/mat1/
- http://www.geof.hr/~jbeban/mat1.htm
- http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/analiza/materijali.php
- Dodatne upite možete poslati na e-mail pero@pmfst.hr

Hvala na pažnji!

Ako ima budnih, mogu postaviti pitanja!