

3.1.3. Algebarski razlomci

Skraćivanje

1. Skratimo razlomak $\frac{8x^3-27}{2xy-2x^2-3y+3x}$.

Kako bi skratili razlomak, **brojnik i nazivnik rastavljamo na faktore** dok u zagradama ne dobijemo članove koji se više ne mogu rastaviti. U danom brojniku članovi nemaju zajedničkih faktora, ali možemo se poslužiti formulom za razliku kubova koja nam kaže: $8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x - 3)((2x)^2 + 2x \cdot 3 + 3^2) = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$.

U nazivniku svi članovi nemaju zajedničkih faktora pa ih grupiramo. Prva dva imaju zajedničke faktore $2x$, a zadnja dva zajednički faktor 3 . Izlučivanjem zajedničkih nazivnik postaje: $2x(y - x) - 3(y - x)$ što znači da smo ih dobro grupirali jer sada opet imamo zajedničke faktore. Da nismo dobili iste faktore, mogli bi pokušati grupirati članove na drugi način. Prepišemo zajednički faktor „ $(y - x)$ ” pišući ga unutar zagrada jer se radi o višečlanom izrazu; otvorimo zagradu „(“, prepišemo što je ostalo od prvoga člana „ $2x$ ”, prepišemo oznaku računske operacije između članova „ $-$ ”, prepišemo faktor koji je ostao od drugog člana „ 3 ” te zatvorimo zagradu „)”. Dani razlomak postaje:

$$\frac{4x^3 - 27}{2xy - 2x^2 - 3y + 3x} = \frac{(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)}{2x(y - x) - 3(y - x)} = \frac{(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)}{(y - x)(2x - 3)} =$$

Između zagrada i u brojniku i u nazivniku imamo samo množenje što znači: možemo **pokratiti jednake faktore** (zgrade), od kojih je jedan u brojniku, a drugi u nazivniku. Napomena: Možemo pokratiti cijelu zagradu, ali ne smijemo kratiti jedan član iz jedne zgrade s članom iz neke druge zgrade. Isto tako ne smijemo kratiti iste faktore ako se oba nalaze u brojniku ili oba u nazivniku.

$$= \frac{\cancel{(2x-3)}(4x^2+6x+9)}{(y-x)\cancel{(2x-3)}} = \frac{4x^2+6x+9}{y-x}$$

Dobivene izraze u brojniku i nazivniku ne možemo više rastaviti, što znači da ih više ne možemo ni skratiti.

Zbrajanje i oduzimanje

2. Izračunajmo $\frac{2a}{1-a^2} + \frac{1+a}{2a-2} - \frac{a}{1+a}$.

Za **zbrajanje i oduzimanje** algebarskih razlomaka vrijede ista pravila kao i za racionalne brojeve.

Prvo **rastavimo nazivnike na proste faktore**. U prvom nazivniku članovi nemaju zajedničkih faktora, ali mi moramo uočiti da je dani nazivnik razlika kvadrata; u drugom članu 2 je zajednički faktor; treći nazivnik se više ne može rastaviti:

$$\frac{2a}{1-a^2} + \frac{1+a}{2a-2} - \frac{a}{1+a} = \frac{2a}{(1-a)(1+a)} + \frac{1+a}{2(a-1)} - \frac{a}{1+a} =$$

Napomena: ako imamo faktore kojima su svi **članovi suprotni** obzirom na zbrajanje, jednome od njih izlučimo -1 tako da imamo iste faktore. Ako usporedimo faktore u prvom i drugom nazivniku uočiti ćemo da faktor prvog nazivnika „ $1 - a$ ” i faktor drugog nazivnika „ $a - 1$ ” imaju sve suprotne članove (a je broj suprotan broju $-a$, -1 je suprotan broj broju 1).

$$= \frac{2a}{(1-a)(1+a)} + \frac{1+a}{2 \cdot (-1) \cdot (1-a)} - \frac{a}{1+a} = \frac{2a}{(1-a)(1+a)} - \frac{1+a}{2(1-a)} - \frac{a}{1+a} =$$

Najmanji zajednički nazivnik dobijemo tako da prvi nazivnik prepišemo, a od drugih prepisujemo redmo faktore koje nismo već napisali što znači: prepisujemo prvi „ $(1 - a)(1 + a)$ ”, od drugoga pišemo samo ono što nemamo, tj. „ 2 ” jer „ $1 - a$ ” imamo u prvome, cijeli treći već imamo u prvome pa ga ne pišemo.

Brojnik ćemo dobiti tako da prepišemo brojnik prvog razlomka i pomnožimo ga članovima zajeničkog nazivnika kojih nemamo u nazivniku prvog razlomka, prepišemo oznaku računske operacije i brojnik drugog nazivnika pomnožen članovima zajeničkog nazivnika kojih nemamo u nazivniku drugog razlomka itd. Napomena: ako u brojniku razlomka koji zbrajamo ima više članova pišemo ih unutar zagrada.

$$= \frac{2a \cdot 2 - (1+a) \cdot (1+a) - a \cdot (1-a) \cdot 2}{(1-a)(1+a) \cdot 2} = \frac{4a - (1+a)^2 - 2a \cdot (1-a)}{2(1-a)(1+a)}$$

U brojniku riješimo se zagrada, **zbrojimo članove** koji se mogu zbrojiti te dobiveni izraz **rastavimo na proste faktore**, a **u nazivniku** ostavimo izraz kakav je jer je **već rastavljen** na proste faktore. Napomena: moramo paziti na minus ispred zgrade jer pri množenju on svim brojevima u zagradi mijenja predznak. Radi preglednosti najprije zbrajamo nepoznalice s većim eksponentom.

$$= \frac{4a - 1 - 2a - a^2 - 2a + 2a^2}{2(1-a)(1+a)} = \frac{a^2 - 1}{2(1-a)(1+a)} = \frac{(a-1)(a+1)}{2(1-a)(1+a)}$$

Između zagrada i u brojniku i u nazivniku imamo samo množenje što znači: možemo **pokratiti jednake faktore** (zgrade), od kojih je jedna u brojniku, a druga u nazivniku. Napomena: Ako imamo faktore kojima su svi **članovi suprotni** obzirom na zbrajanje, jednome od njih izlučimo -1 tako da imamo iste faktore. U dobivenom izrazu to su faktori „ $(a - 1)$ ” u brojniku i „ $(1 - a)$ ” u nazivniku. Ako faktor u brojniku izlučimo -1 on postaje negativni faktor iz nazivnika: $(a - 1) = -1 \cdot (-a + 1) = -(1 - a)$ pa se može pokratiti s njim.

$$= \frac{-1(a-1)(a+1)}{2(1-a)(1+a)} = \frac{-1 \cdot (-1) \cdot (1+a)(a+1)}{2(1-a)(1+a)} = \frac{-1 \cdot (-1)}{2(1-a)} = -\frac{1}{2}$$

Množenje i dijeljenje

3. Izračunajmo $\frac{14a+4b}{5(49a^2-4b^2)} \cdot \frac{35a-10b}{4a}$.

Za **množenje i dijeljenje** algebarskih razlomaka vrijede ista pravila kao i za racionalne brojeve.

Prvo **rastavimo na proste faktore i brojnike i nazivnike**. Zatim pokratimo jednake faktore od kojih je jedan u brojniku, a drugi u nazivniku.

$$\frac{14a+4b}{5(49a^2-4b^2)} \cdot \frac{35a-10b}{4a} = \frac{2(7a+2b)}{5(7a-2b)(7a+2b)} \cdot \frac{5(7a-2b)}{4a} = \frac{1}{2a}$$

4. Izračunajmo $\frac{3xy+y^2}{2x^2+xy} : \frac{9x^2-y^2}{4x^3+4x^2y+xy^2}$.

Algebarske razlomke dijelimo tako da prvi razlomak množimo recipročnom vrijednošću drugoga, odnosno množimo s razlomkom kojem zamijenimo brojnik i nazivnik.

$$\frac{3xy+y^2}{2x^2+xy} : \frac{9x^2-y^2}{4x^3+4x^2y+xy^2} = \frac{3xy+y^2}{2x^2+xy} \cdot \frac{4x^3+4x^2y+xy^2}{9x^2-y^2} =$$

Rastavimo izraze u brojniku i nazivniku na proste faktore. U prvom razlomku u brojniku zajednički faktor je y pa izlučimo y , u nazivniku zajednički je faktor x pa izlučimo x . U drugom razlomku u brojniku zajednički faktor svih članova je x , a u nazivniku nemamo zajedničkih faktora. Ako nema zajedničkih faktora tada moramo provjeriti imamo li kvadrat ili kub zbroja ili razlike, razliku kvadrata ili kubova te zbroj kubova. Ovdje moramo uočiti razliku kvadrata jer prvi član možemo napisati kao $(3x)^2$.

$$= \frac{y(3x+y)}{x(2x+y)} \cdot \frac{x(4x^2+4xy+y^2)}{(3x-y)(3x+y)} =$$

Provjerimo jesu li svi izrazi u zagradama do kraja rastavljeni na faktore; provjerimo imaju li zajedničkih faktora; ako nemaju provjerimo imamo li kvadrat ili kub zbroja ili razlike, razliku kvadrata ili kubova te zbroj kubova; provjerimo imamo li izraze sa svim suprotnim brojevima. U dobivenom izrazu nemamo zagrada sa suprotnim brojevima, a svi izrazi osim faktora „ $4x^2 + 4xy + y^2$ “ ne mogu se više rastaviti. U izrazu „ $4x^2 + 4xy + y^2$ “ nemamo zajedničkih faktora, ali moramo uočiti da ovaj izraz možemo zapisati kao kvadrat zbroja, odnosno: $4x^2 + 4xy + y^2 = (2x + y)^2$.

$$= \frac{y(3x+y)}{x(2x+y)} \cdot \frac{x(2x+y)^2}{(3x-y)(3x+y)} =$$

Imamo samo **množenje između zagrada** što znači da smo izraz rastavili na faktore što znači da **možemo kratiti**. Kratimo iste članove, tj. faktor prvog brojnika „ $3x + y$ “ sa faktorom drugog nazivnika „ $3x + y$ “ te faktor prvog nazivnika „ $2x + y$ “ i kvadrat faktora drugog brojnika.

$$= \frac{y(2x+y)}{3x-y}$$

Složeniji zadaci

5. Izračunajmo $\left(\frac{x}{x^2-36} - \frac{x-6}{x^2+6x}\right) : \frac{2x-6}{x^2+6x} + \frac{x}{6-x}$.

Kada imamo složenije izraze **prvo riješimo izraz u zagradi**. U zagradi imamo oduzimanje algebarskih razlomaka pa provodimo sličan postupak kao u drugom zadatku: rastavimo nazivnike na proste faktore, nađemo najmanji zajednički nazivnik te zbrojimo ili oduzmemo razlomke. Dobiveni najmanji zajednički nazivnik ostavimo kakav je, ne trebamo ga raspisivati jer je već rastavljen na faktore, a u brojniku sredimo izraz tako da se riješimo zagrada pa dobiveni izraz rastavimo na faktore.

Sve razlomke, koji se nalaze van zagrada, **rastavimo na proste faktore**.

$$\left(\frac{x}{x^2-36} - \frac{x-6}{x^2+6x}\right) : \frac{2x-6}{x^2+6x} + \frac{x}{6-x} = \left(\frac{x}{(x-6)(x+6)} - \frac{x-6}{x(x+6)}\right) : \frac{2(x-3)}{x(x+6)} + \frac{x}{6-x} = \frac{x \cdot x - (x-6)(x-6)}{(x-6)(x+6)x} \cdot \frac{x(x+6)}{2(x-3)} + \frac{x}{6-x} =$$

U brojniku imamo minus ispred zgrade u drugom članu pa se svim elementima mijenja predznak nakon množenja:

$$= \frac{x^2-x^2+12x-36}{(x-6)(x+6)x} \cdot \frac{x(x+6)}{2(x-3)} + \frac{x}{6-x} = \frac{12x-36}{(x-6)(x+6)x} \cdot \frac{x(x+6)}{2(x-3)} + \frac{x}{6-x} = \frac{12(x-3)}{(x-6)(x+6)x} \cdot \frac{x(x+6)}{2(x-3)} + \frac{x}{6-x} =$$

Isto kao s racionalnim brojevima, **prvo obavimo operacije množenja i dijeljenja, a zatim zbrajanja i oduzimanja**. U prva 2 razlomka možemo kratiti iste članove jer se im brojnici i nazivnici rastavljeni na faktore:

$$= \frac{6}{x-6} \cdot \frac{1}{1} + \frac{x}{6-x} = \frac{6}{x-6} + \frac{x}{6-x} =$$

Još preostaje zbrojiti dobivene razlomke. Nazivnici su već rastavljeni. Ako imamo faktore kojima su svi članovi suprotni obzirom na zbrajanje, jednome od njih izlučimo -1 tako da imamo iste faktore. U dobivenom izrazu to su faktori „ $x - 6$ “ u prvom nazivniku i „ $6 - x$ “ u drugom nazivniku. Ako drugom nazivniku izlučimo -1 on postaje negativni prvi nazivnik: $(6 - x) = -1 \cdot (-6 + x) = -(x - 6)$ pa je najmanji zajednički nazivnik „ $x - 6$ “.

$$= \frac{6}{x-6} + \frac{x}{-(x-6)} = \frac{6}{x-6} - \frac{x}{x-6} = \frac{6-x}{x-6} =$$

Preostaje još skratiti dobiveni razlomak ako se može. Više brojnik i nazivnik ne možemo rastaviti na faktore, ali moramo uočiti da su oni izrazi sa svim suprotnim brojevima pa ćemo brojniku izlučiti -1 te ih pokratiti:

$$\frac{6-x}{x-6} = \frac{-(x-6)}{x-6} = -1$$

Dodatni zadaci sa rješenjima: <http://element.hr/plus/2/potencije-i-algebarski-izrazi>

3.1.4. wxMaxima

- ❖ wxMaxima matematički je programski alat koji ima slične mogućnosti kao i Maple i Mathematica
- ❖ umjesto pisanja cijelog izraza možemo unutar zagrada navesti liniju u kojoj je napisan
- ❖ ulazne (input) linije označene su sa (%iRedniBroj)
- ❖ izlazne (output) linije označene su sa (%oRedniBroj)
- ❖ izraz iz prethodne linije možemo pozvati naredbom (%) i bez upisivanja broja
- ❖ potencije a^n unosimo naredbom a^n
- ❖ izraz možemo pojednostavniti naredbom **factor**(izraz) gdje izraz može biti i broj linije u kojoj je upisan
- ❖ suprotno faktorizaciji, izraz možemo i raspisati naredbom **expand**(izraz)

Linkovi za download:

<http://maxima.sourceforge.net/>

<http://andrejv.github.com/wxmaxima/index.html>

Prethodne zadatke možemo riješiti i na lakši način uz pomoć wxMaxime:

wxMaxima 12.04.0 [3.1.3. Algebarski razlomci.wxm*]

```

File Edit Cell Maxima Equations Algebra Calculus Simplify Plot
Numeric Help

(%i1) (8*x^3-27)/(2*x*y-2*x*x-3*y+3*x);
(%o1) 8 x^3 - 27
      2 x y - 3 y - 2 x^2 + 3 x

(%i2) factor(%i1);
(%o2) 4 x^2 + 6 x + 9
      y - x

(%i3) 2*a/(1-a^2)+(1+a)/(2*a-2)-a/(1+a);
(%o3) 2 a / (1 - a^2) + (a + 1) / (2 a - 2) - a / (a + 1)

(%i4) factor(%);
(%o4) 1
      2

(%i5) (14*a+4*b)/(5*(49*a^2-4*b^2))*
(35*a-10*b)/(4*a);
(%o5) (35 a - 10 b) (4 b + 14 a)
      20 a (49 a^2 - 4 b^2)

(%i6) factor(%);
(%o6) 1
      2 a
  
```

Welcome to wxMaxima Ready for user input

wxMaxima 12.04.0 [3.1.3. Algebarski razlomci.wxm*]

```

File Edit Cell Maxima Equations Algebra Calculus Simplify Plot
Numeric Help

(%i7) (3*x*y+y^2)/(2*x^2+x*y)/
(9*x^2-y^2)/(4*x^3+4*x^2*y+x*y^2);
(%o7) (y^2 + 3 x y) (x y^2 + 4 x^2 y + 4 x^3)
      (x y + 2 x^2) (9 x^2 - y^2)

(%i8) factor(%);
(%o8) y (y + 2 x)
      y - 3 x

(%i9) (x/(x^2-36)-(x-6)/(x^2+6*x))/
(2*x-6)/(x^2+6*x)+x/(6-x);
(%o9) (x^2 + 6 x) (x / (x^2 - 36) - (x - 6) / (x^2 + 6 x)) + x / (6 - x)
      2 x - 6

(%i10) factor(%);
(%o10) -1

(%i11) (x+y)^8;
(%o11) (y + x)^8

(%i12) expand(%);
(%o12) y^8 + 8 x y^7 + 28 x^2 y^6 + 56 x^3 y^5 + 70 x^4 y^4
      + 56 x^5 y^3 + 28 x^6 y^2 + 8 x^7 y + x^8
  
```

Ready for user input

Za pripremni tečaj iz matematike:

 Petar Stipanović (16.09.2013.)