Polinomi

Definicija: http://lavica.fesb.hr/mat1/predavanja/node96.html
Algebra polinoma: http://element.hr/plus/erz/catalog/2/5
Linearna funcija (polinom 1. stupnja): http://element.hr/plus/5/linearna-funkcija-sustav-jednadzbi

P1: Komentirajte rješenja jednadžbe $f(x) = g(x)$u ovisnosti o realnom parametru a, ako su polinomi $f(x)$ i $g(x)$ dani izrazima

$$f(x) = \frac{6a+1}{a}x + \frac{6a}{a+1} + \frac{a^2}{(a+1)^3}$$
$$g(x) = \frac{2a+1}{a^3+2a^2+a}x$$

Rješenje:

Zadatak se svodi na rješavanje jednadžbe

$$\frac{6a+1}{a}x + \frac{6a}{a+1} + \frac{a^2}{(a+1)^3} = \frac{2a+1}{a^3+2a^2+a}x$$

Najprije rastavimo nazivnike na faktore do izraza koji se ne mogu više rastaviti.

$$\frac{6a+1}{a}x + \frac{6a}{a+1} + \frac{a^2}{(a+1)^3} = \frac{2a+1}{a(a^2+2a+1)}x$$
$$\frac{6a+1}{a}x + \frac{6a}{a+1} + \frac{a^2}{(a+1)^3} = \frac{2a+1}{a(a+1)^2}x$$

Kako bi sve zadane operacije bile definirane, nazivnik ne smije biti 0 pa moramo postaviti uvjete da svi različiti[1] faktori koji se nalaze u nazivnicima budu različiti od 0: $a \neq 0$ i $a+1 \neq 0$, odnosno

$$a \notin \{0, -1\}$$

Kako bi riješili danu jednadžbu, nakon postavljenog uvjeta, svodimo ju na ekvivalentnu jednadžbu množeći je sa najmanjim zajedničkim nazivnikom.

$$\frac{6a+1}{a}x + \frac{6a}{a+1} + \frac{a^2}{(a+1)^3} = \frac{2a+1}{a(a+1)^2}x \,\Big|\cdot a(a+1)^3$$
$$(6a+1)\cdot(a+1)^3x + 6a\cdot a(a+1)^2 + a^2\cdot a = (2a+1)\cdot(a+1)x$$

Prebacimo izraze[2] s nepoznanicama na jednu stranu, a ostale na suprotnu stranu.

$$(6a+1)(a+1)^3x - (2a+1)(a+1)x = -6a^2(a+1)^2 - a^3$$

Najprije izlučimo nepoznanicu, odnosno x.

$$\{(6a+1)(a+1)^3 - (2a+1)(a+1)\}x = -6a^2(a+1)^2 - a^3$$

Izlučujući zajedničke faktore rastavljamo dobiveni izraz do umnoška linearnih[3] faktora.

$$\{(a+1)[(6a+1)(a+1)^2 - (2a+1)]\}x = -a^2[6(a+1)^2 - a]$$
$$(a+1)[(6a+1)(a^2+2a+1) - (2a+1)]x = -a^2[6(a^2+2a+1) + a]$$
$$(a+1)(6a^3+12a^2+6a+a^2+2a+1-2a-1)x = -a^2(6a^2+12a+6+a)$$
$$(a+1)(6a^3+13a^2+6a)x = -a^2(6a^2+13a+6)$$

[1] Nema smisla ponavljati uvjete za jednake faktore jer su to isti uvjeti.
[2] Ako postoje članovi sa zajedničkim faktorima, binomne izraze u zagradama ne množimo i ne potenciramo jer bi time dobili puno kompliciraniji oblik jednadžbe, već ih prebacujemo onakve kave smo dobili pa im izlučujemo zajedničke faktore. Ako nema zajedničkih faktora, izraze moramo izmnožiti te dobivene pokušati faktorizirati.
[3] Linearan znači da je potencija parametra jednaka 1.

$$(a+1)a(6a^2+13a+6)x=-a^2(6a^2+13a+6)$$

Dobivenu jednadžbu još ne smijemo skraćivati, sve ok ne osiguramo jedinstveno rješenje. Kvadratne izraze moramo također rastaviti na faktore jer nam trebaju linearni izrazi uz x. To je vrlo lako ako se radi o razlici kvadrata ili kvadratu razlike i zbroja. Međutim, izraze oblika $6a^2+13a+6$ rastavljamo tako da srednji član napišemo kao sumu ili razliku cijelih brojeva čije je produkt jednak produktu koeficijenta uz kvadrat nepoznanice i slobodnog koeficijenta. To znači 13 ćemo rastavit na 9+4=13 jer je $9\cdot 4=6\cdot 6$ pa ćemo imati:

$$6a^2+13a+6=6a^2+9a+4a+6=3a(2a+3)+2(2a+3)=(2a+3)(3a+2)$$

iz čega slijedi:

$$a(a+1)(2a+3)(3a+2)x=-a^2(2a+3)(3a+2)$$

Nakon što dobijemo sve linearne faktor uz nepoznanicu x možemo komentirati rješenja jednadžbe. To radimo tako da za a biramo one brojeve $a\notin\{0,-1\}$ čijim uvrštavanjem faktori uz x postaju 0, odnosno izjednačavamo faktore sa 0 i komentiramo rješenja za pojedini. Dok ne osiguramo da je izraz uz x različit od 0 ne možemo s njim podijeliti cijelu jednadžbu

$$a\cdot(a+1)\cdot(2\cdot a+3)\cdot(3\cdot a+2)\cdot \boldsymbol{x}=-a^2\cdot(2\cdot a+3)\cdot(3\cdot a+2)$$

1.

$$2\cdot a+3=0$$

$$a=-\frac{3}{2}$$

Za a=-3/2 jednadžba postaje:

$$-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}+1\right)\cdot 0\cdot\left(3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+2\right)\cdot x=-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\cdot 0\cdot\left(3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+2\right)$$

$$0=0$$

$$\boldsymbol{x\in R}$$

2.

$$3\cdot a+2$$

$$a=-\frac{2}{3}$$

Za a=-2/3 jednadžba postaje:

$$-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}+1\right)\cdot\left(2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+3\right)\cdot 0\cdot x=-\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+3\right)\cdot 0$$

$$0=0$$

$$\boldsymbol{x\in R}$$

Za ostale realne brojeve, odnosno za brojeve za koje su dobro definirane dane operacije, odnosno za koje faktori uz nepoznanicu nisu 0, tj. za $a\in\mathbb{R}\backslash\left\{0,-1,-\frac{3}{2},-\frac{2}{3}\right\}$ imamo jedinstveno rješenje

$$x=\frac{-a^2(2a+3)(3a+2)}{a(a+1)(2a+3)(3a+2)}$$

$$x=\frac{-a}{a+1}$$

P2. Riješi sljedeće jednadžbe:

a) $|4-2x|-2=2x$; b) $\big||3x-6|+2x-1\big|=3x+5$;

c) $\big||x-1|-2\big|=3$; d) $|4-4x|-|6-3x|=4$;

e) $\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+\left|\frac{2x-1}{x+2}\right|=\frac{1}{2}$; f) $\Big|\big||3x-6|+1\big|-1\Big|=3x+5$.

Rješenje:

a) Kada rješavamo neku jednadžbu najprije moramo uočiti jesu li dobro definirane sve računske operacije, posebno trebamo paziti ima li nepoznanica u nazivniku. Za danu jednadžbu nema uvjeta. Izraz unutar apsolutnih vrijednosti može biti pozitivan i negativan, a ovisno o njegovom predznaku dobivamo različita rješenja. Stoga brojevni pravac na kojem tražimo rješenje dijelimo na intervale unutar kojih izraz unutar modula ima isti predznak, ili je pozitivan ili negativan. Kako bi odredili potrebne intervale iskoristit ćemo svojstvo da linearna funkcija u točkama s iste strane njene nultočke ima jednake predznake, a u točkama koje se nalaze na suprotnim stranama obzirom na nultočku linearna funkcija ima vrijednosti suprotnog predznaka.

$$|4-2x|-2=2x$$

Izjednačavamo sve izraze koji se nalaze samo unutar modula sa 0 te na taj način dobivamo nultočke:

$$4-2x=0$$

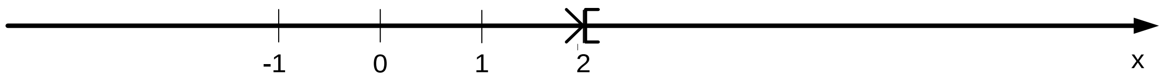
$$x=2$$

Kada znamo predznak izraza, rješavamo se modula tako da zagrade apsolutne vrijednosti zamjenjujemo običnima ako je izraz pozitivan, a ako je negativan, dodajemo još minus ispred zagrada. Izraze koji nisu unutar modula prepisujemo ne mijenjajući ih.

$$|4-2x|-2=2x$$

Dobivena rješenja dijele brojevni pravac na intervale unutar kojih zasebno rješavamo danu jednadžbu.

$I_1=\langle -\infty, 2\rangle$ $I_2=[2,+\infty\rangle$



Predznak izraza unutar prvog intervala određujemo tako da uvrstimo neki broj iz prvog intervala umjesto nepoznanice u izrazu te izračunamo njegovu vrijednost (pozitivna ili negativna). Predznak u ostalim intervalima određujemo na osnovu toga je li interval s iste ili suprotne strane kao prvi u odnosu na nultočku.

$-10\in I_1 \Rightarrow 4-2x=4-2\cdot(-10)=24\Rightarrow \oplus$

4-2x⇒ $\oplus$ 0 $\ominus$

Kada znamo predznak izraza, rješavamo se modula tako da zagrade apsolutne vrijednosti zamjenjujemo običnima ako je izraz pozitivan, a ako je negativan, dodajemo još minus ispred zagrada. Izraze koji nisu unutar modula prepisujemo ne mijenjajući ih.

(4-2x)-2=2x	-(4-2x)-2=2x
4-2x-2=2x	-4+2x-2=2x
$x=\frac{1}{2}\in I_1$	-6=0
	$x\in\emptyset$

Kada dobijemo rješenje, provjeravamo je li se ono nalazi unutar intervala u kojem smo rješavali jednadžbu. Ako nije odbacujemo ga; a ako je, to je rješenje početne jednadžbe. Stoga x=1/2 jest rješenje dane jednadžbe.

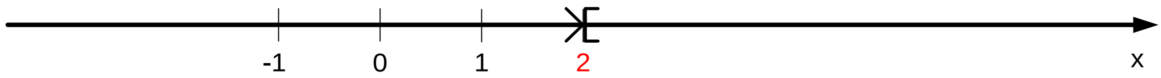
b) Kada imamo dan modul unutar modula, najprije se rješavamo unutarnjeg modula, slično kao kod običnih zagrada, najprije rješavamo unutarnje.

$$\big||3x-6|+2x-1\big|=3x+5$$

$$3x-6=0$$

$$x=2$$

$I_1=\langle -\infty, 2\rangle$ $\qquad$ $I_2=[2,+\infty\rangle$



$-10\in I_1 \Rightarrow 3x-6=3\cdot(-10)-6=-36$

3x-6⇒ $\ominus$ $\quad$ 0 $\quad$ $\oplus$

Kada znamo predznak unutarnjeg izraza, rješavamo se modula tako da samo zagrade unutarnje apsolutne vrijednosti zamijenimo običnima ako je izraz pozitivan, a ako je negativan, dodajemo još minus ispred zagrada. Ostale izraze prepisujemo te nakon toga zbrojimo što se može.

$\lvert -(3x-6)+2x-1\rvert=3x+5$	$\lvert (3x-6)+2x-1\rvert=3x+5$
$\lvert -x+5\rvert=3x+5$	$\lvert 5x-7\rvert=3x+5$

Sada u svakom pojedinom dijelu izjednačavamo ono što imamo unutar modula sa nulom. Nultočke dobivene u pojedinom području, dijele to područje na dva dijela ako se nalaze u tom području, a ako nisu, područje ostaje kako je prethodno definirano.

$-x+5=0$	$5x-7$
$x=5\notin I_1$	$x=\frac{7}{5}\notin I_2$

Dobivene nultočke se ne nalaze unutar intervala unutar kojih rješavamo pa ne mogu podijeliti intervale na dijelove što znači da intervali ostaju kavi jesu. Samo da bi se riješili modula moramo ispitati kakvi su izrazi unutar modula, a to radimo birajući billo koji broj i to iz intervala unutar kojeg rješavamo.

$-10\in I_1 \Rightarrow -x-5=-(-10)-5=5\Rightarrow\oplus$	$10\in I_2\Rightarrow 5x-7=5\cdot 10-7=43\Rightarrow\oplus$
$(-x+5)=3x+5$	$(5x-7)=3x+5$
$x=0\in I_1$	$x=6\in I_2$

Kako se dobivena rješenja nalaze unutar intervala unutar kojih smo tražili rješenje početna dana jednadžba ima dva rješenje 0 i 6.

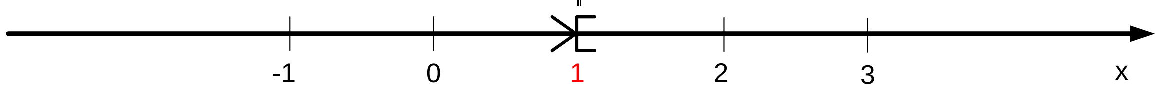
c)

$$||x-1|-2|=3$$

$$x-1=0$$

$$x=1$$

$I_1=\langle -\infty,1\rangle$ $\qquad$ $I_2=[1,+\infty\rangle$



$0\in I_1\Rightarrow x-1=0-1=-1$

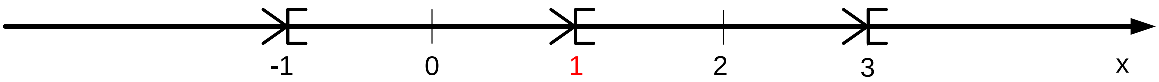
3x-6⇒ $\ominus$ $\qquad$ $\oplus$

I_1	I_2
$\lvert -(x-1)-2\rvert=3$	$\lvert (x-1)-2\rvert=3$
$\lvert -x-1\rvert=3$	$\lvert x-3\rvert=3$
$-x-1=0\Rightarrow x=-1\in I_1$	$x-3=0\Rightarrow x=3\in I_2$

Dobivene nultočke se nalaze unutar intervala unutar kojih rješavamo pa dijele intervale na dijelove. -1 dijeli prvi interval na dva podintervala što znači da ćemo jednadžbu koju smo dobili unutar prvog intervala nastaviti zasebno rješavati u ova dva podintervala. Samo da bi se riješili modula moramo ispitati kavi su izrazi unutar modula, a to radimo birajući billo koji broj iz podintervala u kojem rješavamo i uvrštavajući u izraz koji je unutar modula.

$|-x-1|=3x+5$ $\qquad$ $|x-3|=3$

$I_{11}=\langle -\infty,-1\rangle$ $\qquad$ $I_{12}=[-1,1\rangle$ $\qquad$ $I_{21}=[1,3\rangle$ $\qquad$ $I_{22}=[3,+\infty\rangle$



$-10\in I_{11}\Rightarrow -x-1=9$ $\qquad$ $2\in I_{21}\Rightarrow x-3=-1$

-x-1⇒ $\oplus$ $\qquad$ $\ominus$ $\qquad$ x-3⇒ $\ominus$ $\qquad$ $\oplus$

I_{11}	I_{12}	I_{21}	I_{22}
$(-x-1)=3$	$-(-x-1)=3$	$-(x-3)=3$	$(x-3)=3$
$x=-4\in I_{11}$	$x=2\notin I_{12}$	$x=0\notin I_{21}$	$x=6\in I_{21}$

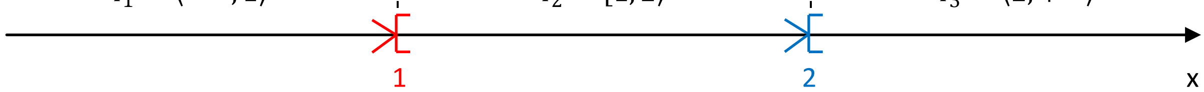
Od 4 dobivena broja, 2 su rješenje polazne jednadžbe jer se nalaze unutar intervala unutar kojih smo rješavali, a to su -4 i 6.

d)

$$|4-4x|-|6-3x|=4$$

$4-4x=0\Rightarrow x=1$ $\qquad$ $6-3x=0\Rightarrow x=2$

$I_1=\langle -\infty,1\rangle$ $\qquad$ $I_2=[1,2\rangle$ $\qquad$ $I_3=\langle 2,+\infty\rangle$



$Za\ x=0\in I_1\Rightarrow\begin{cases}4-4x=4\\6-3x=6\end{cases}$

$4-4x\Rightarrow$ $\oplus$ $\qquad$ $\ominus$ $\qquad$ $\ominus$

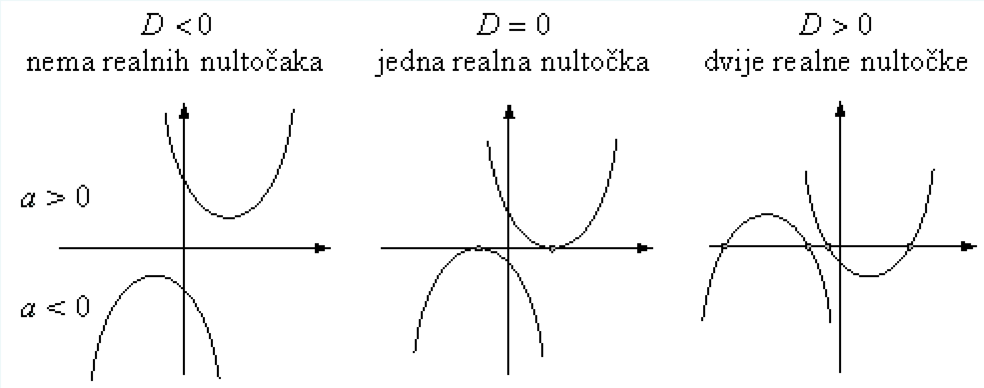
$6-3x\Rightarrow$ $\oplus$ $\qquad$ $\oplus$ $\qquad$ $\ominus$

I_1	I_2	I_3
$(4-4x)-(6-3x)=4$	$-(4-4x)-(6-3x)=4$	$-(4-4x)+(6-3x)=4$
$-x=6$	$7x=14$	
$x=-6\in I_1$	$x=2\notin I_2$	$x=2\in I_3$

Rješenje polazne jednadžbe: $x\in\{-6,2\}$

Polinom 2. stupnja

Graf polinoma 2. stupnja (kvadratne funkcije) $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabola koja siječe os x u realnim nul-točkama, s otvorom gore (za $a > 0$) ili s otvorom dolje (za $a < 0$). Tjeme (vrh) parabole nalazi se u točki $(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.



Nultočke polinoma 2. stupnja dobivamo rješavajući kvadratnu jednadžbu

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdje su $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$, zove se kvadratna jednadžba. Broj *a* zovemo vodeći koeficijent, *b* koeficijent linearnog člana te *c* slobodni koeficijent. Ako je $a = 1$, tada danu jednadžbu zovemo normirana kvadratna jednadžba.

- Ima 2 rješenja (korijena, nultočke) u skupu kompleksnih brojeva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Diskriminanta kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, tj. broj $D = b^2 - 4ac$ određuje prirodu rješenja (broj realnih rješenja jednadžbe):
  - ✓ Akko je $D = 0$, jednadžba ima jedno (dvostruko) realno rješenje
  $$D = 0 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \in \mathbb{R})$$
  - ✓ Akko je $D > 0$, jednadžba ima dva različita realna rješenja
  $$D > 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \& (x_1 \neq x_2)$$
  - ✓ Akko je $D < 0$, jednadžba nema realnih rješenja, a rješenje je par konjugirano kompleksnih brojeva
  $$D < 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}) \& (x_1 = \overline{x_2})$$
  ili zapisano na drugi način
  $$D < 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2 \notin \mathbb{R}) \& (x_1 \neq x_2)$$
- Za njezina rješenja x_1 i x_2 vrijede Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

- Ako su brojevi x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, tada danu jednadžbu možemo faktorizirati ovako:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- x_1 i x_2 također su rješenja jednadžbe:

$$ax^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

P3. Prikaži funkciju $f(x) = |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5|$ pomoću razlomljenih polinoma te nacrtaj njen graf.

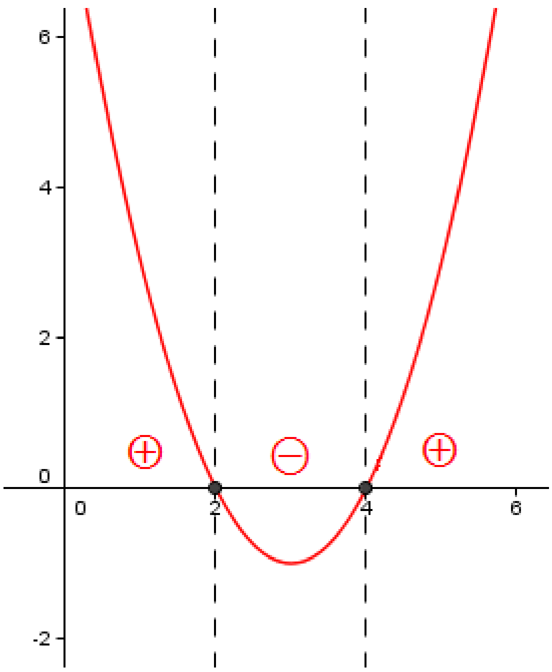
Rješenje:

Izraz unutar apsolutnih vrijednosti može biti pozitivan i negativa pa kako bi se riješili modula moramo brojevni pravac podijeliti na intervala unutar kojih je izraz pozitivan, odnosno negativan. Stoga ćemo najprije nacrtati grafove funkcija unutar modula kako bi odredili kada su dani izrazi pozitivni odnosno negativni, a da bi bilo jasnije danu funkciju zapisati ćemo u obliku:

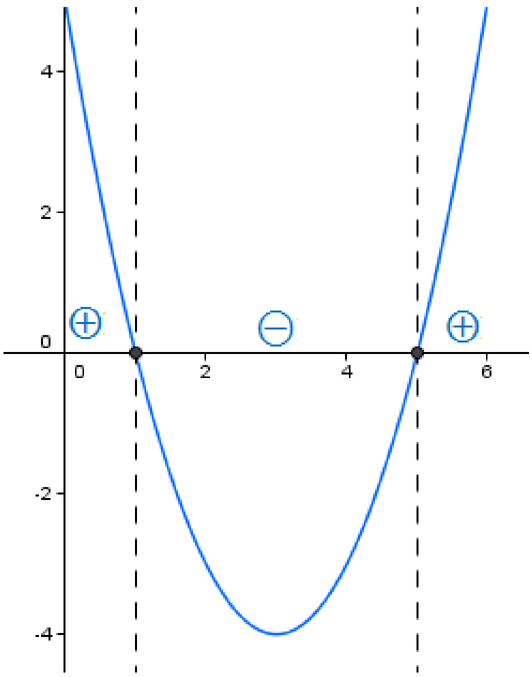
$$f(x) = |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = |g(x)| + |h(x)|$$

Ako kvadratna funkcija ima dvije realne različite nultočke, ona sa suprotnih strana nultočaka ima suprotne predznake, ako ima jednu realnu nultočku zadržava isti predznak sa suprotnih strana, a ako nema realnih nultočaka ona je uvijek pozitivna ili negativna. Stoga prvo tražimo nultočke funkcija $g(x)$ i $h(x)$:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 4$$



$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 5$$



Nultočke funkcije dijele područje u intervala u kojima je funkcija ili pozitivna (graf funkcije je iznad osi x) ili negativna (graf funkcije je ispod osi x). Dobili smo ukupno 4 različite realne nultočke pa koristeći njih dijelimo područje u pet intervala unutar kojih zasebno provjeravamo pozitivnost izraza unutar modula te određujemo funkciju. Ako je pozitivna funkcija, izraz unutar modula pišemo unutar običnih zagrada, a ako je negativna onda još ispred zagrada moramo promijeniti predznak.

	$I_1 = \langle -\infty, 1\rangle$	$I_2 = [1, 2\rangle$	$I_3 = [2, 4\rangle$	$I_4 = [4, 5\rangle$	$I_5 = [5, +\infty\rangle$
$x^2 - 6x + 8$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$x^2 - 6x + 5$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
	$f(x) = (x^2 - 6x + 8) + (x^2 - 6x + 5)$	$f(x) = (x^2 - 6x + 8) - (x^2 - 6x + 5)$	$f(x) = -(x^2 - 6x + 8) - (x^2 - 6x + 5)$	$f(x) = (x^2 - 6x + 8) - (x^2 - 6x + 5)$	$f(x) = (x^2 - 6x + 8) + (x^2 - 6x + 5)$
	$f(x) = 2x^2 - 12x + 13$	$f(x) = 3$	$f(x) = -2x^2 + 12x - 13$	$f(x) = 3$	$f(x) = 2x^2 - 12x + 13$

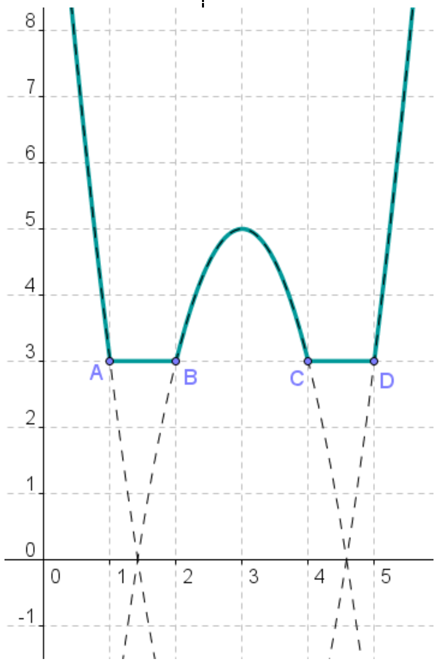
Kvadratne funkcije crtamo tako da odredimo njihove nultočke i predznak vodećeg koeficijenta.

$$2x^2 - 12x + 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1.5 \\ x_2 = 4.5 \end{cases}$$

$$-2x^2 + 12x - 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1.5 \\ x_2 = 4.5 \end{cases}$$

Sada moramo nacrtati grafove svih dobivenih funkcija i to samo njihove dijelove koji se nalaze u područjima u kojima smo dobili njihove oblike. X koordinate sjecišta određene su granicama područja, a da bi znali y-koordinatu, samo x koordinatu uvrstimo u danu funkciju pa dobivamo točke $A(1,3)$, $B(2,3)$, $C(4,3)$, $D(5,3)$.

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12x + 13, & x < 1 \\ 3, & 1 \le x < 2 \\ -2x^2 + 12x - 13, & 2 \le x < 4 \\ 3, & 4 \le x < 5 \\ 2x^2 - 12x + 13, & x > 5 \end{cases}}$$



P4. Odredite nultočke polinoma

$$\boldsymbol{f(x) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15}$$

Rješenje (analitičko):

Cilj nam je eliminirati što više potencija, odnosno supstitucijom svesti na što jednostavniji izraz. Izraz $(x+a)(x+b)$ ima najmanje različitih monoma ako je $a=-b$, odnosno postaje razlika kvadrata pa se članovi linearni u x ponište. Dakle, jedan od boljih izbora za supstituciju je

$$y \equiv x+4$$

jer izrazi lijevo i desno od sredine postaju razlika kvadrata čime se jednadžba svodi na bikvadratnu koja se lako rješava supstitucijom

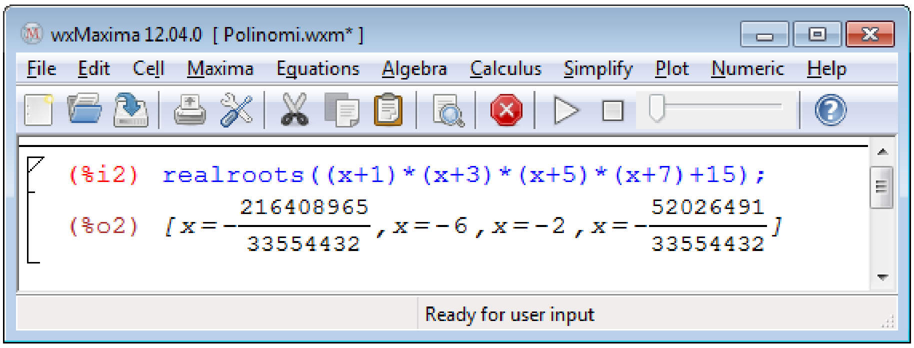
$$t \equiv y^2$$

$$\vdots$$

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = -6 \qquad x_3 = -4+\sqrt{6} \qquad x_3 = -4-\sqrt{6}$$

Rješenje (wxMaxima):

Koristeći naredbu realroots(polinom) možemo naći nultočke upisanog polinoma

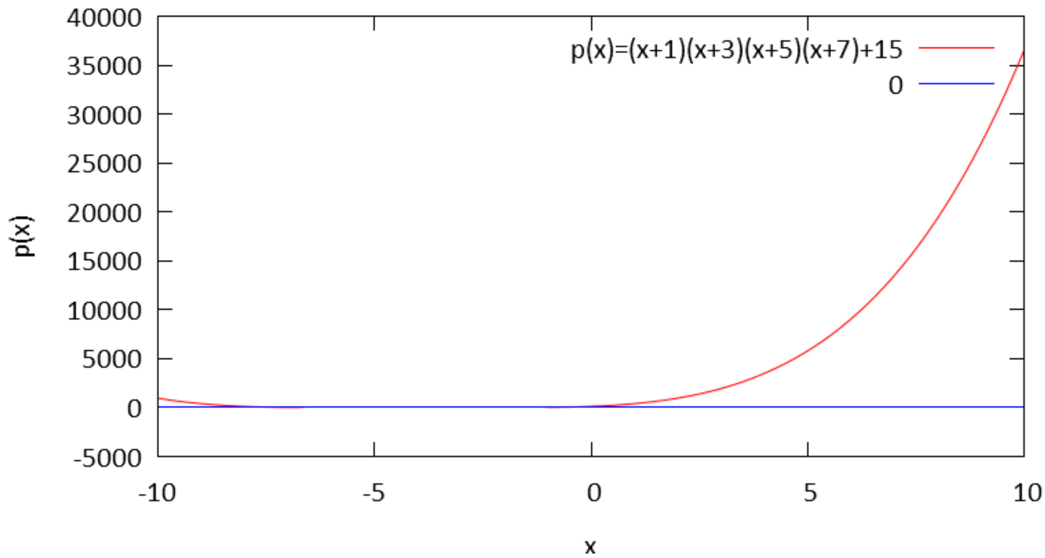


Rješenje (gnuplot):

Možemo približno procijeniti u kojim točkama (realnim nultočkama) graf siječe x-os ako ga nacrtamo naredbom plot [Xmin:Xmax][Ymin:Ymax] f(x), g(x) gdje samo nizemo funkcije koje želimo prikazati odvojene zarezima, a prikaz ograničavamo naredbama u uglatim zagradama koje gnuplot sam procjenjuje ako nisu upisane.

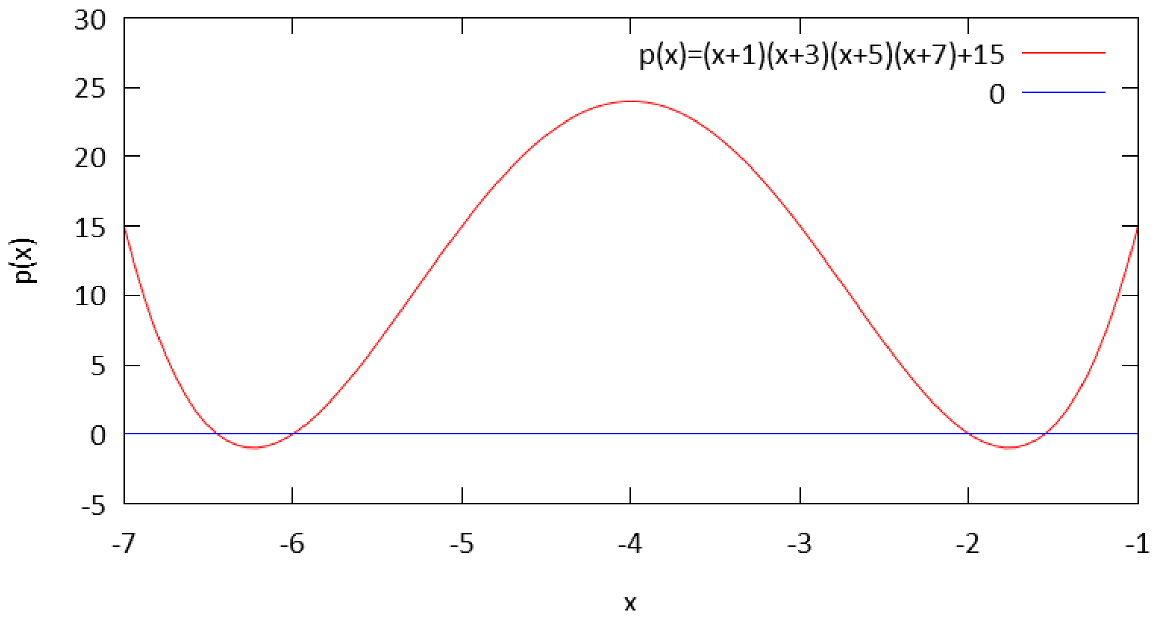
```
p(x)=(x+1)*(x+3)*(x+5)*(x+7)+15

plot p(x), 0
```



Iz prikaza je teško pročitati nultočke pa je bolje ograničiti područje prikazivanja polinoma

```
p(x)=(x+1)*(x+3)*(x+5)*(x+7)+15
plot [-7:-1][-20:50] p(x), 0
```



Sada se rješenja mogu približno očitati iz sjecišta polinoma (crvena krivulja) i x-osi (plava linija).

Gnuplot

Link za download i upute: www.gnuplot.info
Naredba za crtanje 2D grafova: plot
Naredba za crtanje 3D grafova: splot

Parcijalni razlomci

Rastav na parcijalne razlomke: http://lavica.fesb.hr/mat2/predavanja/node11.html
Riješeni primjer unutar zadatka iz integracije: http://lavica.fesb.hr/mat2/predavanja/node13.html

P5. Rastavite na parcijalne razlomke sljedeći izraz

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}$$

Rješenje:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\vdots$$

Nakon množenja najmanjim zajedničkim nazivnikom i grupiranja i izjednačavanja članova uz iste potencije na lijevoj i desnoj strani jednakosti, dobivamo sustav od tri jednadžbeiz kojih određujemo koeficijente A, B, C

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1/4}{x-1}-\frac{1/4}{x+1}+\frac{1/2}{(x+1)^2}$$

Zadaci za vježbu

Zadana je kvadratna jednadžba $-70x^2 + 210x - 140 = 0$.

a) Bez rješavanja kvadratne jednadžbe odredite prirodu njezinih rješenja.
b) Koristeći se formulom za rješavanje kvadratne jednadžbe riješi danu jednadžbu.
c) Napiši zadanu jednadžbu u obliku umnoška polinoma 1. stupnja.
d) Napiši u nepoznanici y jednadžbu čija su rješenja za 3 veća od rješenja zadane jednadžbe.

2. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ različiti. Riješi sljedeće jednadžbe:

a) $ax^2 + bx + c = 0$;
b) $-ax^2 + bx - c = 0$;
c) $bx^2 + bx + b = 0$;
d) $cx^2 + cx + a + b + c = 0$;
e) $-(a+b)x^2 + (a-c)x + b = 0$;
f) $bx^2 + cx - a = 0$

3. Neka su a, b, c različiti pozitivni realni brojevi. Riješi jednadžbu: $ax^2 + bxyz + cy^2 - z^2 = 0$:

a) po x; b) po y; c) po z.

4. Riješi jednadžbe:

a) $\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2 + 3 = 4 \cdot \frac{1-x}{x+3}$;
b) $(2x-3) \cdot (x-3) = 0$;
c) $\frac{3}{4x^2+12x+9} + \frac{2}{4x^2-12x+9} = \frac{1}{4x^2-9}$;
d) $\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2$;
e) $\frac{2}{2x+3} + \frac{3}{4x^2+12x+9} = \frac{3}{x+2}$;
f) $x^2 - 5x + |x+2| = 0$.

5. Za koju vrijednost parametra $m \in \mathbb{R}$ jednadžba $(m+5)x^2 + (2m-1)x + m = 0$:

a) ima dvostruko realno rješenje;
b) ima različita realna rješenja;
c) nema realna rješenja;
d) ima samo jedno realno rješenje;
e) ima rješenja koja zadovoljavaju uvjet $x_1 = \overline{x_2}$;
f) ima kompleksna rješenja;
g) nema kompleksna rješenja;
h) ima realna rješenja;
i) ima rješenja koja zadovoljavaju uvjet $x_1 \neq \overline{x_2}$;
j) ima jedno rješenje iz skupa $\mathbb{R}$, a drugo iz skupa $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$?

6. Opiši ovisnost prirode rješenja kvadratne jednadžbe $px^2 - 3x + p + 10 = 0$ o vrijednostima realnog parametra p.
7. Ako je broj 1 jedno rješenje kvadratne jednadžbe $kx^2 + 2x = -6$, odredite k i drugo rješenje ne koristeći formulu za rješavanje kvadratne jednadžbe.
8. Odredi realni broj$a$ ako je -3+2i rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + 6x + a = 0$.
9. U jednadžbi $kx^2 - 6kx = 9$ odredite k ako je jedno rješenje jednadžbe jednako trostrukoj recipročnoj vrijednosti drugog rješenja.
10. Napiši kvadratnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima čije je jedno rješenje broj $\frac{6 \cdot i^{457}}{1-\sqrt{5}i} + \left|\frac{1+\sqrt{3}i}{4}\right| + |1-2i|$.
11. Ne rješavajući kvadratnu jednadžbu $x^2 - 2x + 3 = 0$ izračunaj:

a) $3x_1^2 + 3x_2^2$;
b) $\frac{5x_1^3+5x_2^3}{(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2)}$;
c) $\frac{3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2}{4x_1^2x_2+4x_1x_2^2}$;
d) $3x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_1x_2$.

12. Za zadanu kvadratnu jednadžbu $2x^2 + 3x - 5 = 0$ odredite kvadratnu jednadžbu u nepoznanici y takvu da:

a) se njezina rješenja razlikuju od rješenja zadane jednadžbe samo po predznaku;
b) njezina rješenja budu jednaka recipročnim vrijednostima rješenja zadane jednadžbe;
c) njezina rješenja budu jednaka n-terostrukim vrijednostima rješenja zadane jednadžbe;
d) njezina rješenja budu jednaka kvadratima rješenja zadane jednadžbe;

e) njezino rješenja bude broj: $\frac{\overline{x_1+x_2-2i}}{3+i}$, gdje su x_1 i x_2 rješenja zadane jednadžbe.

13. Kakvi moraju biti p i q da bi rješenja jednadžbe $x^2+px+q=0$ bili brojevi p i q?

14. Odredite a ako kvadratna jednadžba $x^2+2ax\sqrt{a^2-3}+4=0$ ima jedno realno rješenje.

15. Napišite neku kvadratnu jednadžbu s racionalnim koeficijentima kojoj je jedno rješenje $4-\sqrt{3}$.

16. Napišite jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima kojoj su rješenja recipročna rješenjima jednadžbe $5x^2+28x=12$.

17. Riješi jednadžbe uvođenjem nove nepoznanice:

a) $(x^2+2x+2)(x^2+2x+3)=0;$

b) $(x^2-8x)^2-5(x-4)^2=81;$

c) $\left(2x+\frac{5}{3x}\right)^2-2\cdot\frac{6x^2+5}{3x}+2=0;$

d) $x^4-2x^2=1.$

18. Riješi sustave jednadžbi:

a) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^3+y^3=8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2-y^2=8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=2, \\ 3xy=8. \end{cases}$

19. Odredi x iz sljedećih jednadžbi:

a) $x^4+6x^2+25=0;$ b) $25x^4+50x^2+125=0;$ c) $-3x^4-2\sqrt{3}x^2-3=0;$

d) $\sqrt{2x-3-\sqrt{2x+1}}=4;$ e) $\sqrt{2x+1}-2x-1=0;$ f) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=\sqrt{5x}.$

20. Odredite površinu pravokutnog trokuta kojemu je duljina jedne stranice jednaka utrostručenoj duljini najkraće stranice uvećanoj za 3cm, a duljina druge jednaka utrostručenoj duljini najkraće stranice uvećanoj za 4 cm.

21. Duljina pravokutnika dvostruko je veća od njegove širine. Ako mu stranice produljimo za 2 cm, nastat će pravokutnik površine 144cm^2. Koje su dimenzije početnog pravokutnika?

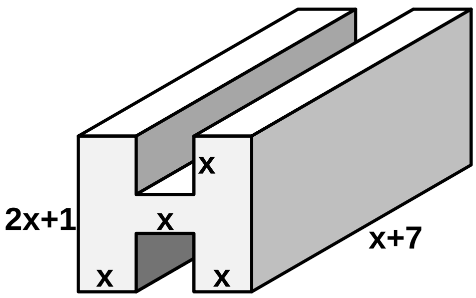
22. Igralište je dimenzija 40mX90m. Kosilicom se oko igrališta pokosi staza jednake širine kojoj je površina jednaka trećini površine igrališta. Kolika je širina staze.

23. Dvije krojačice potpisale su ugovor o isporuci odijela: prva 810, a druga 900 odijela u istom vremenskom razdoblju. Prva je radionica posao završila 3 dana prije roka, a druga 6 dana prije roka. Kolika im je dnevna norma ako je druga radionica šila 4 odijela više od prve?

24. Stranice trokuta a=10cm, b=11cm, c=19cm produljene su za jednak iznos. Za koliko su produljene ako je time nastao pravokutan trokut?

25. Iz poznatog oplošja odredite x.

a) oplošje 300 cm^2



b) oplošje 250 cm^2