JEDNADŽBE

Jednakost koja zadovoljava za određenu vrijednost broja *x* koji se u njoj nalazi zove se **jednadžba. Nepoznanica** je *x*, a vrijednost općeg broja *x* je **korijen ili rješenje** jednadžbe.

Svaka jednadžba koja se dade svesti na oblik

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

naziva se **algebarska**.
Jednadžbe koje ne možemo svesti na oblik polinoma zovu se **transcendentne.**

1. Linearna jednadžba

Jednadžba oblika $0 = ax + b$ naziva se linearna jednadžba.
Rješenje jednadžbe:

$$ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a},\ a \neq 0 .$$

2. Kvadratna jednadžba

Jednadžba oblika $0 = ax^2 + bx + c$ naziva se kvadratna jednadžba.
Rješenje jednadžbe:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ a \neq 0 .$$

Izraz $D = b^2 - 4ac$ naziva se diskriminanta kvadratne jednadžbe i definira kakva su rješenja:

D > 0 rješenja su realni, međusobno različiti brojevi (korijeni x_1 i x_2 su različiti).
D = 0 jednadžba ima dvostruko realno rješenje (korijeni su jednaki).
D < 0 rješenja (korijeni x_1 i x_2) su konjugirano kompleksni brojevi.

Za rješenja kvadratne jednadžbe x_1 i x_2 vrijede Vieteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{i} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} .$$

<u>Primjer 1.</u>

Riješiti jednadžbu $3x^2 - 10x + 3 = 0$

Rješenje:

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$$x_1 = \frac{18}{6} = 3 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Primjer 2.

Riješiti jednadžbu $\frac{6x - x^2}{x^2 - 12} + \frac{x+4}{x+2} = 0$

Rješenje:

$$\frac{6x - x^2}{x^2 - 12} + \frac{x+4}{x+2} = 0 / \left(x^2 - 12\right) \cdot \left(x+2\right)$$

$$x^2 - 12 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{12}$$

$$x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$$

$$\left(6x - x^2\right) \cdot \left(x+2\right) + \left(x+4\right) \cdot \left(x^2 - 12\right) = 0$$

$$6x^2 + 12x - x^3 - 2x^2 + x^3 - 12x + 4x^2 - 48 = 0$$

$$8x^2 - 48 = 0$$

$$x^2 = \frac{48}{8} = 6 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$$

Primjer 3.

Rješavanje jednadžbi rastavljanjem polinoma na množitelje (faktore)

Riješiti jednadžbu $4x^2 - 5x + 1 = 0$

Rješenje:

$$4x^2 - 5x + 1 = 4x^2 - 4x - x + 1 = 4x\left(x-1\right) - \left(x-1\right) = 0$$

$$\left(x-1\right) \cdot \left(4x-1\right) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

3. Jednadžbe trećeg i četvrtog stupnja

Primjer 4

Simetrična jednadžba trećeg stupnja

Riješite jednadžbu $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$

Rješenje:

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 2\left(x^3 + 1\right) - 3x\left(x+1\right) = 2\left(x+1\right)\left(x^2 - x + 1\right) - 3x\left(x+1\right) = 0$$

$$\left(x+1\right)\left(2x^2 - 2x + 2 - 3x\right) = \left(x+1\right)\left(2x^2 - 5x + 2\right) = 0$$

$$x+1=0 \Rightarrow x_1=-1 \qquad \text{i} \qquad 2x^2-5x+2=0$$

$$x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$$

$$x_2=2 \quad \text{i} \quad x_3=\frac{1}{2}$$

Primjer 5

Bikvadratna jednadžba

Riješite jednadžbu $x^4-8x^2+7=0$

Rješenje:
Metodom supstitucije zamjenimo nepoznanicu x s nepoznanicom u za koju vrijedi $u=x^2$.

$x^4-8x^2+7=u^2-8u+7=0$

$$u_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\frac{8\pm 6}{2}$$
$$u_1=7 \Rightarrow x^2=7 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{7}$$
$$u_2=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_{3,4}=\pm 1$$

4. Iracionalne jednadžbe

Iracionalne jednadžbe sadrže nepoznanicu x koja se nalazi pod n-tim korjenom. Kod rješavanju iracionalnih jednažbi potrebno je uvijek gledati područje definicije zadane funkcije. Funkcija $f(x)=\sqrt{x}$ definirana je na skupu $\mathbf{R}^+_0$. To znači da negativni realni brojevi ne mogu biti kandidati za rješenja iracionalne jednadžbe $\sqrt{x}=c$. Ova priča ekvivalentna je za sve korijene parnog eksponenta, a za korijene neparnog eksponenta nemamo taj problem jer su oni definirani na čitavom **R**. Drugi uvjet dolazi iz toga što dva broja zadovoljavaju $x^2=c$, ali samo jedan od njih (pozitivan) je definiran kao rješenje $\sqrt{c}$.Tako da je dodatni uvjet $g(x)\geq 0$. Uz ovaj uvjet zadovoljen je također i uvjet $f(x)\geq 0$.

Sva rješenja moraju zadovoljavati uvjete:

$$\sqrt[2n]{f(x)}=g(x) \Rightarrow f(x)\geq 0 \quad g(x)\geq 0 \Rightarrow f(x)=\left(g(x)\right)^{2n}$$
$$\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x) \Rightarrow f(x)=\left(g(x)\right)^{2n+1}$$

Primjer 6

Riješite jednadžbu $\sqrt{x^2-3x+3+\sqrt{x^2-36}}=x-1$

Rješenje:

$$\sqrt{x^2-3x+3+\sqrt{x^2-36}}=x-1$$

ako je ispunjen uvjet $x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$ možemo kvadrirati jednadžbu.

$$x^2-3x+3+\sqrt{x^2-36}=(x-1)^2=x^2-2x+1$$
$$\sqrt{x^2-36}=x-2$$
$$x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$$

$$x^2-36=(x-2)^2=x^2-4x+4$$
$$4x=40 \Rightarrow x=10$$

5. Eksponencijalne jednadžbe

Jednadžba u kojoj se nepoznanica *x* nalazi u eksponentu potencije naziva se **eksponencijalna** jednadžba. Prije rješavanja potrebno je uvijek provjeriti područje definicije tj. da vrijedi $a^x=g(x)\Rightarrow g(x)>0$, funkcija $g(x)$ je definirana na skupu **R**$^+$. Tri su osnovna oblika eksponencijalnih jednadžbi:

1. $a^{f(x)}=a^c$ Rješenja se dobiju riješavanjem jednadžbe $f(x)=c$
2. $a^{f(x)}=b$ Jednadžba se riješava logaritmiranjem.
3. $A_2a^{2x}+A_1a^x+A_0=0$ Supstitucijom $a^x=t$ jednadžba se svodi na kvadratnu jednadžbu.

Primjer 7

Riješite jednadžbu $9^{2^x}=6561$

Rješenje:

$$9^{2^x}=6561 \Rightarrow \log_9 9^{2^x}=\log_9 6561$$

$$2^x\cdot\log_9 9=\log_9 6561$$
$$2^x\cdot 1=4$$
$$2^x=2^2 \Rightarrow x=2$$

Primjer 8

Riješite jednadžbu $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

Rješenje:

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

$$2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$$

$$2^{2x}\left(1+2^{-1}\right) = 3^x\left(3^{-\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$2^{2x}\cdot\frac{3}{2} = 3^x\cdot\frac{1+3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^x\cdot\frac{1+3}{3^{\frac{1}{2}}}$$

$$4^x\cdot\frac{3}{2} = 3^x\cdot\frac{4}{3^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4\cdot 2}{3\cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

6. Logaritamske jednadžbe

Jednadžba u kojoj se nepoznanica nalazi pod znakom logaritma naziva se **logaritamska** jednadžba. Za logaritamsku jednadžbu područje definicije je $\log_a f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) > 0$, funkcija $f(x)$ je definirana na skupu $\mathbf{R}^+$. Dva oblika logaritamskih jednažbi možemo svesti na algebarske jednadžbe:

1. Ako se u jednadžbi pojavljuje logaritam istog izraza, jednadžbu riješavamo supstitucijom.
2. Ako se u jednadžbi pojavljuje linearna kombinacija logaritma s istom bazom izraza, jednadžbu riješavamo potenciranjem.

Primjer 9

Riješite jednadžbu $\log_a x + \log_{a^2} x - 7\log_{a^4} x = \frac{1}{4}$

Rješenje:
Zbog područja definicije logaritamske funkcije $x > 0$.
Uvrstimo jednakost $\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x$.

$$\log_a x + \log_{a^2} x - 7\log_{a^4} x = \log_a x + \frac{1}{2}\log_a x - \frac{7}{4}\log_a x = \frac{1}{4}$$

Napravimo supstituciju $\log_a x = u$,

$$u + \frac{1}{2}u - \frac{7}{4}u = \frac{1}{4} \Rightarrow u = -1$$

$$\log_a x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$$

Primjer 10

Riješite jednadžbu $\log_{3x} x - \log_3^2 x = \log_{3x} 3 - 1$

Rješenje:

Potrebno je pojednostavniti izraz $\log_{ab} x$.

$$\log_{ab} x = c \Rightarrow (ab)^c = x$$

$$\log_a (ab)^c = \log_a x$$

$$c\log_a (ab) = c(\log_a a + \log_a b) =$$

$$= c(1 + \log_a b) = \log_a x \Rightarrow c = \frac{\log_a x}{1 + \log_a b}$$

$$\log_{ab} x = c = \frac{\log_a x}{1 + \log_a b}$$

Vrijedi $\log_{3x} x = \frac{\log_3 x}{1 + \log_3 x}$, pa je

$$\frac{\log_3 x}{1 + \log_3 x} - \log_3^2 x = \frac{\log_3 3}{1 + \log_3 x} - 1$$

$$\log_3 x - \log_3^2 (1 + \log_3 x) = 1 - (1 + \log_3 x)$$

$$\log_3^3 x + \log_3^2 x - 2\log_3 x = 0$$

Uvrstimo supstituciju $u = \log_3 x$, čime smo trascedentnu jednadžbu sveli na algebarsku $u^3 + u^2 - 2u = 0$.

Riješavamo rastavljanjem polinoma na faktore:

$$u^3 + u^2 - 2u = u(u^2 + u - 2) = u(u^2 + 2u - u - 2) = u(u(u-1) + 2(u-1)) = u(u-1)(u+2)$$

$$u_1 = 0 \Rightarrow \log_3 x = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$u_2 = 1 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x_2 = 3$$

$$u_3 = -2 \Rightarrow \log_3 x = -2 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{9}$$

7. Sustav jednadžbi

Primjer 11

Riješite sustav jednadžbi

$$x + y = 5$$
$$x^2 + y^2 = 13$$

Rješenje:

Izrazimo jednu nepoznanicu y pomoću nepoznanice x iz prve jednažbe i uvrstimo u drugu.

$$x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x$$
$$x^2 + (5 - x)^2 = 13$$

$$x^2 + 25 - 10x + x^2 = 13$$
$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{4} = \frac{10 \pm 2}{4}$$
$$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 2$$
$$x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 3$$

Primjer 12

Riješite sistem jednadžbi

$$3^x \cdot 2^y = 576$$
$$\log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4$$

Rješenje:

Drugu jednadžbu možemo napisati u obliku $\log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4 \Rightarrow (y - x) = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^{\frac{4}{2}} = 4$.
Nepoznanicu $y = 4 + x$ uvrstimo u prvu jednadžbu.

$$3^x \cdot 2^{4+x} = 2^4 \cdot 3^x \cdot 2^x = 576$$
$$3^x \cdot 2^x = \frac{576}{16} = 36$$

$$3^x \cdot 2^x = 9 \cdot 4 = 3^2 \cdot 2^2 \Rightarrow x = 2$$
$$y = x + 4 = 6$$

Zadaci:

Riješite jednadžbe:

1. $9x^2+61x-14=0$ $\qquad$ $x_1=\frac{2}{9}, x_2=-7$

2. $\frac{x+3}{2x-1}-\frac{3x-4}{5x-7}=1$ $\qquad$ $x_1=2, x_2=-\frac{16}{11}$

3. $x^2+6x+5=0$ $\qquad$ $x_1=-5, x_2=-1$

4. $a^{-x-\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{3}{4}x}$ $\qquad$ $x=\frac{4}{21}$

5. $\frac{\log x}{\log x-\log 3}=2$ $\qquad$ $x=9$

6.

$$\begin{aligned} x\sqrt{x}-y\sqrt{y}&=19(\sqrt{x}-\sqrt{y})\\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}&=7(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \end{aligned}$$

$(0,0)$ $\quad$ $(9,4)$
$(4,9)$ $\quad$ $(7,7)$

7.

$$\begin{aligned} 10^{3-\log(x-y)}&=250\\ \sqrt{x-y}+\frac{1}{2}\sqrt{x+y}&=\frac{26-y}{\sqrt{x-y}} \end{aligned}$$

(20,16)

8.

$$\begin{aligned} \log_y x-3\log_x y&=2\\ \log_2 x&=4-\log_2 y \end{aligned}$$

(8,2)

NEJEDNADŽBE

Pri riješavanju nejdednadžba koristimo se istim postupcima kao kod riješavanja jednadžbi. Međutim, posebnu pažnju treba posvetiti što se dešava s znakom nejednakosti kada se na nejednadžbu primjenjuju različite funkcije. Neka od pravila su:

1. Kada množimo (dijelimo) nejednadžbu s negativnim brojem mjenja se znak nejednakosti

$$f(x) > g(x) \;/\; \cdot(-1) \Rightarrow -f(x) < -g(x)$$

2. Ako je $f(x) > g(x) \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{g(x)}$

3. Ako u nejednakosti imamo razlomak $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, onda znak jednakosti može stajati samo uz funkciju u brojniku jer uvijek mora vrijediti $g(x) \neq 0$.

Posebni slučaj su **transcedentne** nejednadžbe gdje se uvijek mora provjeravati područje definicija funkcije.

<u>Primjer 13.</u>

Riješite nejednadžbu $\dfrac{2x-5}{x-1} \leq 3$

Rješenje:

$$\frac{2x-5}{x-1} \leq 3 \Rightarrow \frac{2x-5}{x-1} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x-5-3x+3}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{-x-2}{x-1} \leq 0 \;/\; \cdot(-1)$$

$$\frac{x+2}{x-1} \geq 0$$

Ova nejednakost vrijedi za dva slučaja:

a)

$$x+2 \geq 0$$
$$x-1 > 0$$
$$x \geq -2$$
$$x > 1$$
$$x \in \langle 1, \infty+\rangle$$

b)

$$x+2 \leq 0$$
$$x-1 < 0$$
$$x \leq -2$$
$$x < 1$$
$$x \in \langle -\infty, -2]$$

Rješenje: $x \in \langle -\infty, -2] \cup \langle 1, \infty+\rangle$

Primjer 14.

Nejednadžbe s apsolutnom vrijednosti

Riješite nejednadžbu $|3x+5|>|x+1|$

Rješenje:

Izraz $x+1$ može biti $=0$ ili $\neq 0$.

I) Ako je $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ pa lako možemo provjeriti zadovoljava li taj izbor zadanu nejednadžbu: $|-3+5|>|-1+1| \Rightarrow 2>0$ što je istinito. Dakle, $x=-1$ je jedno moguće rješenje.

II) Ako je $x+1 \neq 0$, zadanu nejednadžbu možemo napisati u obliku:

$$|3x+5|>|x+1| \Rightarrow \frac{|3x+5|}{|x+1|}>1 \Rightarrow \left|\frac{3x+5}{x+1}\right|>1$$

Za funkciju apsolutna vrijednost vrijedi da je $|f(x)|$ element skupa $\mathbf{R}^+$ dok je funkcija $f(x)$ definirana na čitavm skupu **R**. Prema tome gornju nejednadžbu mogu pisati u obliku:

$$\frac{3x+5}{x+1}>1 \quad \text{ili} \quad \frac{3x+5}{x+1}<-1 \Rightarrow -1>\frac{3x+5}{x+1}$$

Sad riješavamo dvije nejednadžbe za pozitvnu i negativnu funkciju ispod modula:

$$\frac{3x+5}{x+1}>1$$

$$\frac{3x+5}{x+1}-1=\frac{3x+5-x-1}{x+1}=\frac{2x+4}{x+1}>0$$

a) ILI b)

$$\begin{array}{l} 2x+4>0 \\ \underline{x+1>0} \\ x>-2 \\ \underline{x>-1} \\ x\in\langle -1,\infty+\rangle \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2x+4<0 \\ \underline{x+1<0} \\ x<-2 \\ \underline{x<-1} \\ x\in\langle -\infty,-2\rangle \end{array}$$

$$-1>\frac{3x+5}{x+1} \Rightarrow \frac{3x+5}{x+1}<-1$$

$$\frac{3x+5}{x+1}+1=\frac{3x+5+x+1}{x+1}=\frac{4x+6}{x+1}<0$$

a) ILI b)

$$\begin{array}{l} 4x+6>0 \\ \underline{x+1<0} \\ x>-\frac{3}{2} \\ \underline{x<-1} \\ x\in\langle -\frac{3}{2},-1\rangle \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4x+6<0 \\ \underline{x+1>0} \\ x<-\frac{3}{2} \\ \underline{x>-1} \end{array}$$

nema rješenja

Dakle, ukupno je rješenje za slučaj II)

$$x\in\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle -\tfrac{3}{2},+\infty\rangle \setminus\{-1\},$$

a za slučaj I) je bilo $x=-1$. Znači, konačno rješenje je:

$$x\in\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle -\frac{3}{2},+\infty\rangle$$

Primjer 15

Riješite nejednadžbu $(x+2)(-x^2+4x-3)>0$

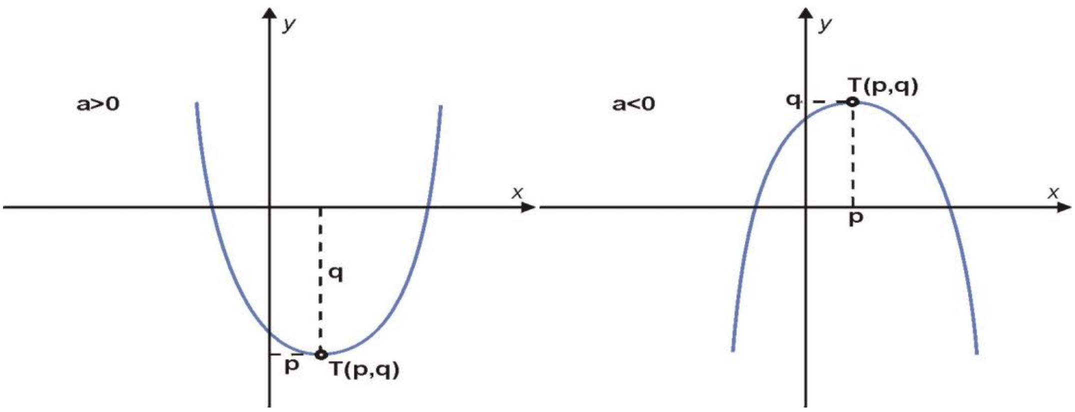
Rješenje:

$(x+2)(-x^2+4x-3)>0$ vrijedi za dva slučaja:

a)
$x+2>0 \Rightarrow x>-2$
$-x^2+4x-3>0$

b)
$x+2<0 \Rightarrow x<-2$
$-x^2+4x-3<0$

Područje definicije polinoma drugog i višeg stupnja određujemo crtanjem grafa. Graf funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$ je parabola određena jednadžbom $y=ax^2+bx+c$. Sjecišta na osi Ox su rješanja jednadžbe $ax^2+bx+c=0$, a ekstrem funkcije je u točki $p=-\frac{b}{2a}$ i $q=\frac{4ac-b^2}{4a}$.
Tok funkcije definiran je predznakom koeficijenta *a* što je prikazano na slici:



Riješimo jednadžbu $-x^2+4x-3=0$

$-x^2+4x-3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{-2}=\frac{-4\pm 2}{-2}$, pa je $x_1=3$ i $x_2=1$. Negativan predznak koeficijenta *a* nam kaže da je parabola okrenuta prema dolje (desna slika). Prema tome vrijedi:

a)

$-x^2+4x-3>0$
$x\in\langle 1,3\rangle$

b)

$-x^2+4x-3<0$
$x\in\langle -\infty,1\rangle \cup \langle 3,\infty+\rangle$

Rješenje je:

$$x\in\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle 1,3\rangle$$

Zadaci

Riješite nejednadžbe:

1. $x^2 \geq 25$ $\qquad x \in (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$

2. $\dfrac{x-1}{(2-x)(x-3)} \geq 0$ $\qquad x \in \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle$

3. $x^2 - |5x-3| < 2 + x$ $\qquad x \in \langle -5, 3 + 2\sqrt{2} \rangle$

4. $\left| \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1$ $\qquad x \in \left[0, \dfrac{8}{5}\right] \cup \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right\rangle$

5. Riješite sustav nejednadžbi

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &\geq 0 \\ x^2 + 2x &> 0 \end{aligned} \qquad x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup [1, +\infty\rangle$$

NIZOVI

Nizom brojeva nazivamo skup brojeva $a_1, a_2, a_3, ...a_n, ...$ koji su raspoređeni u određenom poretku jedan za drugim ili **niz** u skupu S je svaka funkcija $f : N \to S$, tj. funkcija koja prirodnom broju n pridružuje broj a_n. Brojevi koji ulaze u niz nazivaju se **članovima**. Članovi niza mogu biti i međusobno jednaki. Niz smatramo zadanim ako je poznat zakon po kojemu se niz tvori. U mnogim slučajevima možemo postaviti formulu za opći član a_n niza.

Primjer 1.

Odredite nekoliko prvi članova niza ako je zadan opći član

$$a_n = n \quad 1, 2, 3, \ldots$$

$$a_n = 2^{-n} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

$$a_n = (-1)^{n+1} \quad 1, -1, 1, -1, \ldots$$

$$a_{2n+1} = -\frac{n+1}{2} \quad a_{2n} = 0 \quad -1, , 0, -2, 0, -3, -4, \ldots$$

Primjer 2

Aritmetički niz

Nizovi se mogu zadati i pomoću rekurzivnih formula, u kojima se članovi niza zadaju pomoću već prije definiranih. Aritmetički niz definiran je rekurzivnom formulom

$$a_n = a_{n-1} + d \qquad n \geq 2$$

Varijabla *d* je konstantna realna veličina, a prvi član niza a_1 može biti zadan.

Zbrajajući redom članove niza dobije se niz suma:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$....$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Broj S_n se naziva parcijalna suma aritmetičkog niza.

Odredite opći član aritmetičkog niza i zbroj prvih *n* članova niza

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
&a_1 - konstanta \\
&a_2 = a_1 + d \\
&a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d \\
&.... \\
&a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

Suma S_n može se pisati na dva načina:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + \left[a_1 + (n-1)d\right]$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + \left[a_n - (n-1)d\right]$$

Zbrojimo ove dvije jednakosti, pa vrijedi:

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$$

<u>Primjer 2.</u>

Kako glasi aritmetički niz kojemu je suma četvrtog i šestog člana –20, a umnožak drugog i petog člana –140?

Rješenje:

Iz zadatka dobijemo jednakosti $a_4 + a_6 = -20$ i $a_2.a_5 = -140$. Uvrstimo formule za opći član niza i dobijemo sustav jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$a_4 + a_6 = -20 \Rightarrow a_1 + 3d + a_1 + 5d = 2a_1 + 8d = -20$$

$$a_2 \cdot a_5 = -140 \Rightarrow (a_1 + d)\cdot(a_1 + 4d) = a_1^2 + 5a_1 d + 4d^2 = -140$$

Iz prve jednadžbe izrazimo $a_1 = -10 - 4d$ i uvrstimo u drugu.

$$(-10 - 4d)^2 + 5d(-10 - 4d) + 4d^2 = -140$$

$$100 + 80d + 16d^2 - 50d - 20d^2 + 4d^2 = -140$$

$$d = -8 \Rightarrow a_1 = 22$$

Aritmetički niz je 22,14,6,-2,-10,-18,...

<u>Primjer 3.</u>

<u>Geometrijski niz</u>

Niz u kojem je količnik dva uzastopna člana konstantan nazivamo geometrijski niz. Ovaj niz zadan je rekurzivnom formulom $a_n = q \cdot a_{n-1}$, gdje je q realan broj različit od 0. Prvi član niza može biti po volji odabran.

Geometrijski niz s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima opći član $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza s kvocijentom $q \neq 0$ iznosi $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Između 1 i 256 umetni tri broja tako da s dva zadana čine geometrijski niz

Rješenje:

Varijabla $a_1 = 1$, budući trebamo umetnuti tri broja vrijedi $a_5 = 256 = a_1 \cdot q^4 = 1 \cdot q^4 \Rightarrow q = 4$,
Pa je traženi geometrijski niz jednak $1, 4, 16, 64, 256$.

REDOVI

Izraz oblika $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ gdje brojevi $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ čine niz nazivamo **redom brojeva**. Sume $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ nazivamo djelomičnim ili parcijalnim sumama reda, a član a_n općim članom reda. Sume reda označavaju se $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Red je **konvergentan** ako je konvergentan niz njegovih parcijalnih suma. U tom slučaju suma reda je jednaka limesu niza parcijalnih suma:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Tablica suma nekih redova brojeva:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

Zadaci:

1. Tri broja, kojih je zbroj 21, čine aritmetički niz. Ako drugom oduzmemo 1 a trećem dodamo 1, dobit ćemo tri broja koja čine geometrijski niz. Koji su to brojevi?

Rj. 12,7,2 ili 3,7,11

2. Izračunaj zbroj n brojeva oblika 1, 11, 111, ...

Rj. $\dfrac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}$

3. Riješite jednadžbu $2^{x + x^2 + x^3 + \ldots} = 2\sqrt{2}$ Rj. $x = \dfrac{3}{5}$

LITERATURA

Zbirka zadataka iz više matematike P. M. Miličić i M. P. Ušćulić

Repetitorij više matematike, Boris Apsen

Matematički priručnik, I. N. Bronštejn-K. A. Semendjajev