KOMPLEKSNI BROJEVI

Pr. **Neka je $z = i^{253}\left(2\sin\frac{5\pi}{6} - 2i\cos\frac{5\pi}{6}\right)$. Odredite: a) $|z+z^{-1}|$; b) $z^4\cdot z^2$; c) $\sqrt[3]{z}$; d) Arg(z); e) $Im(z)+Re(z)$.**

Rješenje: Kako bi lakše bilo odrediti tražene elemente, dani broj pretvorit ćemo u trigonometrijski prikaz. Koristeći se tabličnim vrijednostima sinusa i kosinusa najprije broj zapišemo u jednostavnijem algebarskom obliku:

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{5\pi}{6} &= \tfrac{1}{2} \\ \cos\tfrac{5\pi}{6} &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ i^{253} &= i \\ i^2 &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} z &= i\left(2\cdot\tfrac{1}{2} - 2i\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ z &= -\sqrt{3}+i \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\varphi = \frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ (-\sqrt{3},1) \in II. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1}$$

> Algebarski prikaz: $\mathbf{z = x + yi}$; $Re(z) = x \in \mathbb{R}$; $Im(z) = y \in \mathbb{R}$.
>
> Trigonometrijski prikaz: $\mathbf{z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)}$; $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$
>
> Iz algebarskog prikaza prelazimo u trigonometrijski prikaz:
>
> $tg\varphi = \frac{y}{x}$; $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$; Arg(z)= φ
>
> Moramo paziti u kojem se kvadrantu nalazi zadani z, tj. točka (x,y) jer imaju 2 moguća kuta s istom vrijednošću tangensa.

a) $z^{-1} = \left[2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$

$|z+z^{-1}| = \left|-\sqrt{3}+i-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\right| = \left|-\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$

> $\mathbf{z^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi)]},\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$

b) $z^4\cdot z^2 = z^6 = \left(2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right)^6 = 2^6\cdot(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = -64$

c) $w_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)} = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{3}\right)$; $k = 0,1,2$

Za k=0 imamo: $w_0 = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{18} + i\sin\frac{5\pi}{18}\right)$

Za k=1 imamo: $w_1 = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{17\pi}{18} + i\sin\frac{17\pi}{18}\right)$

Za k=2 imamo: $w_2 = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{29\pi}{18} + i\sin\frac{29\pi}{18}\right)$

d) Arg $(z) = \frac{5\pi}{6}$ e) $\text{Im}(z) + \text{Re}(z) = y + x = 1 - \sqrt{3}$

> Jednadžba $w^n = z$, gdje su $z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$ zadani, ima n rješenja u skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$:
>
> $$w_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$
>
> gdje je k redom element skupa $k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}$.

Pr. **Prikažite u Gaussovoj ravnini sva rješenja jednadžbe $w^9 + 1\,000\,000\,000\,i = 0$.**

Rješenje: Iz zadane jednadžbe imamo: $w^9 + 10^9 i = 0 \Rightarrow w^9 = -10^9 i \Rightarrow w_k = \sqrt[9]{-10^9 i}$. Označimo $z = -10^9 i$.

1.) Pretvorimo z u trigonometrijski oblik kako bi ga mogli korjenovati:

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} tg\varphi = \frac{-10^9}{0} = -\infty \\ (0,-10^9) \in -y\ osi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2} \\ r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = 10^9 \end{aligned}\right\} z = 10^9\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

2.) Odredimo w_k, gdje je $k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$:

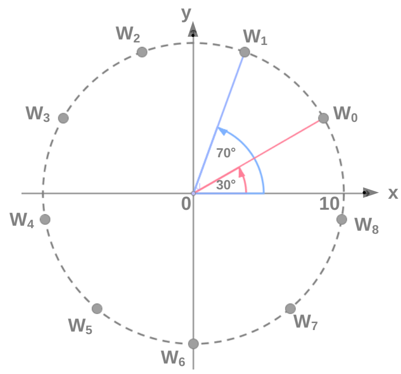
$$w_k = \sqrt[9]{10^9}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{9} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{9}\right)$$

3.) Dovoljno je odrediti prva 2 rješenja, a to su:

$w_0 = 10\left(\cos\frac{3\pi}{18} + i\sin\frac{3\pi}{18}\right)$; $w_1 = 10\left(\cos\frac{7\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi}{18}\right)$; $\frac{3\pi}{18} = \frac{3\cdot 180°}{18} = 30°$, $\frac{7\pi}{18} = \frac{7\cdot 180°}{18} = 70°$

Kutove možemo pretvoriti u stupnjeve radi lakšeg crtanja.

4)Nacrtamo kružnicu radijusa $r = |w| = 10$, te točke w_0 i w_1 na njoj; uzmemo u šestar duljinu $|w_0 w_1|$ te koristeći jednaku udaljenost susjednih točaka nacrtamo ostale koji su zapravo vrhovi pravilnog 9erokuta upisanog u kružnicu radijusa 10 .



ZAD. Odredi realni i imaginarni dio $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$

Rj. $-2+\frac{3}{2}i$

ZAD. Napišite u trigonometrijskom obliku kompleksni broj z ako je $\arg z = \arg(1+i)^{10}$ i $|z| = \left|\frac{1}{5-3i}\right|$.

Rj. $z = \frac{\sqrt{34}}{34}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

Pr.**Za koje** $w \in \mathbb{C}$ **jednadžba** $\mathbf{2z^2 - 2(\mathrm{Re}w + \mathrm{Im}w)z + \mathrm{Re}w \cdot \mathrm{Im}w + 2 = 0}$ **ima oba rješenja** $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^-$**?**

Rješenje: Pretpostavimo li dano rješenje u obliku $w = x + yi$ tada zadana jednadžba postaje kvadratna jednadžba za z.

$$2z^2 - 2(x + y)z + xy + 2 = 0$$

- Diskriminanta kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, tj. broj $D = b^2 - 4ac$ određuje prirodu rješenja (broj realnih rješenja jednadžbe):
  - ✓ Akko je $D = 0$, jednadžba ima jedno (dvostruko) realno rješenje
  $$D = 0 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \in \mathbb{R})$$
  - ✓ Akko je $D > 0$, jednadžba ima dva različita realna rješenja
  $$D > 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2 \in \mathbb{R})\&(x_1 \neq x_2)$$
  - ✓ Akko je $D < 0$, jednadžba nema realnih rješenja, a rješenje je par konjugirano kompleksnih brojeva
  $$D < 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R})\&(x_1 = \overline{x_2})$$
  ili zapisano na drugi način
  $$D < 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2 \notin \mathbb{R})\&(x_1 \neq x_2)$$
- Za njezina rješenja x_1ix_2 vrijede Vièteove formule:
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$
- Ako su brojevi x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, tada danu jednadžbu možemo faktorizirati ovako:
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
- x_1 i $x_2$također su rješenja jednadžbe:
$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Jednadžbu zadanu u zadatku rješavamo po z, a x i y su neki realni brojevi koji određuju koeficijente. Koristeći Vièteove formule polaznu jednadžbu možemo napisati u obliku:

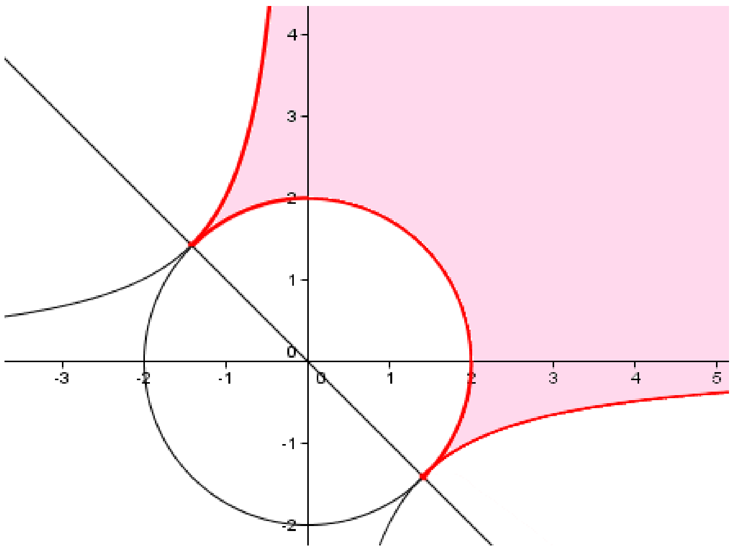
$$2z^2 - 2(x + y)z + xy + 2 = z^2 - (z_1 + z_2)x + z_1 \cdot z_2 = 0$$

Uvjet dan u zadatku jesu pozitivna rješenja što znači da su rješenja realni brojevi ($D \geq 0$) za koje vrijedi $z_1 \geq 0$ i $z_2 \geq 0$ iz čega slijedi:

$$D \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4 \geq 0$$

$$z_1 + z_2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x + y) > 0 \Leftrightarrow x + y \geq 0$$

$$z_1 \cdot z_2 \geq 0 \Leftrightarrow xy + 2 > 0 \Leftrightarrow xy \geq -2$$



Pr. **Odredi skup točaka z kompleksne ravnine za koje vrijedi**

$$\mathbf{1 - |z|^2 = \sqrt{(1 - \mathrm{Re}^2 z - \mathrm{Im}^2 z)^2 + (\mathrm{Im} z - \mathrm{Re}^2 z)^2}}$$

Rješenje:

Pretpostavimo li $z = x + yi$ tada dobivamo jednadžbu za realne koeficijente

$$1 - x^2 - y^2 = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)^2 + (y - x^2)^2}$$

Iz dobivenog oblika jednakosti ne možemo prepoznati o kojoj se krivulji radi pa najprije moramo srediti izraz, odnosno kvadrirati jednakost. Kako je drugi korijen nekoga broja uvijek pozitivan prije kvadriranja moramo postaviti uvjet da bude zadovoljeno:

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0$$

Kvadriranjem dobivamo ekvivalentnu jednakost koja uz gornji uvjet daje ista rješenja:

$$(1 - x^2 - y^2)^2 = (1 - x^2 - y^2)^2 + (y - x^2)^2$$

$$(y - x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow y - x^2 = 0 \Leftrightarrow y = x^2$$

Dakle, traženi skup točaka je dio parabole $y = x^2$ koji zadovoljava uvjet

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

odnosno crveni dio parabole $y = x^2$ koji se nalazi unutar kruga $x^2 + y^2 \leq 1$.