Algebarske strukture
Skripta

Saša Krešić-Jurić
Odjel za matematiku
Prirodoslovno-matematički fakultet
Split 2013

www.pmfst.hr/~skresic

Sadržaj

1 Grupe **4**

1.1 Polugrupe i grupe 4
1.2 Homomorfizmi grupa 14
1.3 Podgrupe i susjedne klase 18
1.4 Normalne podgrupe i kvocijentne grupe 22
1.5 Teoremi o izomorfizmima 27
1.6 Cikličke grupe 32
1.7 Grupe permutacija 37
1.8 Diedralne grupe 44
1.9 Djelovanje grupe 50
1.10 Teoremi o strukturi grupa 58
1.10.1 Direktni umnožak 58
1.10.2 Poludirektni umnožak 62
1.10.3 Konačno generirane Abelove grupe 68
1.10.4 Sylowljevi teoremi 73

2 Prsteni **77**

2.1 Osnovna svojstva prstena 77
2.2 Vrste prstena 82
2.3 Podprsten i karakteristika prstena 85
2.4 Prsten kvaterniona 86
2.5 Prsten matrica 90
2.6 Prsten grupe 92
2.7 Ideali i kvocijenti prsten 93
2.8 Homomorfizmi prstena 99

2.9 Euklidska domena. Domena glavnih ideala 105
2.10 Prsten polinoma 106
2.10.1 Ireducibilnost polinoma 110
2.11 Maksimalni ideali 113

3 Moduli **118**
3.1 Definicija i primjeri modula 118
3.2 Podmoduli i direktne sume 121
3.3 Homomorfizmi modula i kvocijentni moduli 126

4 Pregled ostalih algebarskih struktura **131**
4.1 Asocijativne algebre 131
4.2 Liejeve algebre 135
4.2.1 Klasične Liejeve algebre 142
4.3 Weylove algebre 143

Predgovor

Ova skripta namijenjema je studentima Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Splitu koji pohađaju kolegij Alegarske strukture. Skripta je podijeljena u četiri cjeline – *Grupe, Prsteni, Moduli* i *Ostale algebarske strukture*. Svojim sadržajem potpuno obuhvaća gradivo predviđeno nastavnim planom za ovaj kolegij. Naglasak je dan na proučavanju grupa i prstena, dok se moduli i ostale algebarske strukture razmatraju samo na uvodnom nivou i kroz različite primjere.

Prvi dio posvećen je osnovama teorije grupa, uključujući teoreme o izomorfizmima, djelovanje grupe na skup i teoreme o strukturi grupa. Posebno se razmatraju različiti primjeri grupa kao što su cikličke grupe, grupe permutacija i diedarske grupe.

U drugom dijelu razmatraju se osnove teorije prstena koja ukjučuje domene glavnih ideala, euklidske domene i maksimalne ideale. Poseban naglasak dan je na različitim primjerima prstena, a naročito prstenu polinoma i njegovim svojstvima.

U trećem dijelu izloženi su osnovni koncepti vezani za teoriju modula, dok je u četvrtom dijelu dan kratak pregled nekih algebarskih struktura kao što su asocijativne algebra, Weylove algebre i Liejeve algebre. Ove strukture ilustrirane su primjerima iz geometrije, linearne algebre i fizike.

Poglavlje 1

Grupe

1.1 Polugrupe i grupe

Grupe su važne matematičke strukture koje imaju svoje podrijetlo u teoriji algebarskih jednadžbi, teoriji brojeva i geometriji. Prva formalna definicija apstraktne grupe u modernom smislu pojavila se 1882. godine. Danas teorija grupa igra važnu ulogu u matematici i fizici gdje se najčešće javlja kao alat pri proučavanju simetrija određenih sustava, kako diskretnih tako i kontinuiranih. U ovom poglavlju upoznat ćemo različite primjere grupa i proučavati njihova osnovna svojstva.

Definicija 1.1 *Binarna operacija na skupu G je preslikavanje s kartezijevog umnoška $G \times G$ u skup G.*

Rezultat binarne operacije na elementu $(a, b) \in G$ oznavčavamo s $a \cdot b$ i nazivamo umnožak elementa a i b. Primjeri binarnih operacija su standardno zbrajanje i množenje na skupovima $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, i vektorski umnožak na skupu $\mathbb{R}^3$,

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2\, v_3 - u_3\, v_2 \\ u_3\, v_1 - u_1\, v_3 \\ u_1\, v_2 - u_2\, v_1 \end{pmatrix}$$

gdje su $\vec{u} = (u_1\, u_2\, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1\, v_2\, v_3)$ vektori u $\mathbb{R}^3$. Za binarnu operaciju kažemo da je asocijativna ako vrijedi

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{za sve} \quad a, b, c \in G.$$

Ako je

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{za sve} \quad a, b \in G,$$

tada kažemo da je binarna operacija komutativna. Zbrajanje i množenje na $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ su očigledno komutativne i asocijativne operacije, dok vektorski umnožak nije ni komutativan ni asocijativan.

Najjednostavnija algebarska struktura je polugrupa koju definiramo kao neprazan skup G s asocijativnom binarnom operacijom. Primjeri polugrupa su

(i) skupovi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ s operacijama zbrajanja ili množenja,

(ii) skup svih preslikavanja $f\colon S \to S$ s nepraznog skupa S na samog sebe.

Nešto bogatija algebarska struktura je grupa koju definiramo kao polugrupu u kojoj postoji neutralni element i u kojoj svaki element ima inverz.

Definicija 1.2 *Neprazan skup G s binarnom operacijom $\cdot$ naziva se grupa ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

(i) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *za sve* $a, b, c \in G$,

(ii) postoji element $e \in G$, *kojeg nazivamo neutralni element ili jedinica, takav da je* $a \cdot e = e \cdot a = a$ *za svaki* $a \in G$,

(iii) za svaki $a \in G$ *postoji element* $a^{-1} \in G$, *kojeg nazivamo inverzni element, takav da je* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Grupu s pripadnom binarnom operacijom zapisujemo kao uređeni par $(G, \cdot)$ ili kao G kada je binarna operacija poznata iz konteksta. Kardinalni broj skupa G naziva se red grupe G i označava s $|G|$. Ako je $|G|$ konačan, kažemo da je G konačna grupa. Grupa s jednim elementom sadrži samo jedinicu, $G = \{e\}$. Primjeri grupa koje svakodnevno susrećemo su skupovi brojeva $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ s operacijom zbrajanja gdje je $e = 0$ i $a^{-1} = -a$, te skupovi $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ s operacijom množenja gdje je $e = 1$ i $a^{-1} = 1/a$.

Propozicija 1.1 *Neka je G grupa.*

(i) Neutralni element $e \in G$ je jedinstven.

(ii) Za svaki $a \in G$ inverzni element a^{-1} je jedinstven.

Dokaz (i) Pretpostavimo da su e i f jedinice u grupi G. Tada prema svojstvu (ii) definicije 1.2 vrijedi $e \cdot f = f$ i $e \cdot f = e$ jer su e i f jedinice u G. Stoga je $e = f$.

(ii) Neka je $a \in G$, i neka su a_1 i a_2 inverzi elementa a. Tada za a_1 i a_2 vrijedi

$$a \cdot a_1 = a_1 \cdot a = e \quad \text{i} \quad a \cdot a_2 = a_2 \cdot a = e.$$

Odavde slijedi

$$a_1 = a_1 \cdot e = a_1 \cdot (a \cdot a_2) = (a_1 \cdot a) \cdot a_2 = e \cdot a_2 = a_2.$$

■

Lako se provjeri da je inverz umnoška dvaju elemenata jednak

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}.$$

Doista, množenjem elementa $a \cdot b$ slijeva i zdesna s $b^{-1} \cdot a^{-1}$ dobivamo

$$(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = a \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = e,$$

i

$$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) \cdot b = b^{-1} \cdot b = e.$$

Asocijativnost množenja u grupi G implicira da za sve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ rezultat množenja elemenata a_i, $1 \leq i \leq n$, ne ovisi o tome kako grupiramo elemente, pa umnožak pišemo bez zagrada $a_1 a_2 \ldots a_n$. Indukcijom se lako pokazuje da je inverz elementa $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ dan s

$$(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \cdots a_1^{-1}.$$

Sljedeća propozicija slijedi izravno iz svojstava grupe pa dokaz izostavljamo.

Propozicija 1.2 *Neka je G grupa i neka su $a, x, y \in G$. Tada*

(i) $a \cdot x = a \cdot y$ implicira $x = y$,

(ii) $x \cdot a = y \cdot a$ implicira $x = y$.

Slika 1.1: Niels Henrik Abel, 1802-1829. Norveški matematičar Niels Abel je dokazao da nije moguće algebarskim metodama riješiti opću polinomijalnu jednadžbu petog stupnja.

Svojstva (i) i (ii) nazivamo zakon kraćenja jer se element $a \in G$ može pokratiti na obje strane jednadžbe. Ako su $a, b \in G$, tada svojstva grupe također impliciraju da jednadžbe $a \cdot x = b$ i $y \cdot a = b$ imaju jedinstvena rješenja $x = a^{-1} \cdot b$ i $y = b \cdot a^{-1}$.

Definicija 1.3 *Kažemo da je grupa G Abelova ili komutativna ako vrijedi*

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \textit{za sve} \quad a, b \in G.$$

Binarna operacija u Abelovoj grupi se označava s $+$, dok za neutralni i inverzni element uvodimo oznake 0 i $-a$. Dakle, u Abelovoj grupi vrijedi

$$a + b = b + a, \quad a + 0 = 0 + a = a, \quad a + (-a) = (-a) + a = 0,$$

za sve $a, b \in G$.

Uvedimo još neke oznake koje će nam biti od koristi. Množenje u apstraktnoj grupi G ćemo označavati jednostavno nizanjem elemenata iz G, odnosno

$$a \cdot b \equiv ab,$$

dok ćemo u nekim slučajevima neutralni element označavati s 1. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Potencije elementa $a \in G$ se definiraju s

$$a^n = a\,a \ldots a \quad (n \text{ puta}),$$
$$a^{-n} = a^{-1}a^{-1} \ldots a^{-1} \quad (n \text{ puta}).$$

U Abelovoj grupi koristimo oznake

$$na = a + a + \cdots + a \quad (n \text{ puta}),$$
$$(-n)a = -a - a \cdots - a \quad (n \text{ puta}).$$

Binarnu operaciju u grupi možemo predočiti pomoću Cayleyeve tablice u kojoj se nalaze umnošci svih elemenata u grupi.

Definicija 1.4 *Neka je $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ konačna grupa. Tablica množenja ili Cayleyeva tablica grupe G je $n \times n$ matrica čiji element na mjestu (i, j) je umnožak $g_i g_j$.*

Mnoga svojstva grupe se mogu vidjeti iz Cayleyeve tablice. Na primjer, ako je grupa komutativna, $g_i g_j = g_j g_i$ za sve i, j, tada je tablica simetrična u odnosu na dijagonalu (i, i). Mjesta gdje se u tablici nalaze jedinice odgovaraju elementima koji su međusobno inverzni. Kako je množenje fiksnim elementom injektivno preslikavanje na G, svaki redak ili stupac sadrži točno po jedan element iz G. Drugim riječima, svaki redak ili stupac predstavlja permutaciju elemenata grupe G.

Primjeri grupa

(1) *Zbrajanje modulo n.* Neka je $n \in \mathbb{N}$. Definirajmo relaciju ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z}$ s

$$x \equiv y \pmod{n} \quad \text{ako je} \quad x - y = qn \quad \text{za neki} \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Neka je $\overline{x}$ klasa ekvivalencije elementa $x \in \mathbb{Z}$. Tada je $\overline{x} = \overline{y}$ ako i samo ako je $x - y = qn$ za neki $q \in \mathbb{Z}$. Označimo skup svih klasa ekvivalencije s

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{x} \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

Na skupu $\mathbb{Z}_n$ možemo definirati zbrajanje modulo n na prirodan način s

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}.$$

$+\,(mod\,4)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Tablica 1.1: Cayleyeva tablica grupe $\mathbb{Z}_4$.

Pokažimo da je ova operacija dobro definirana, odnosno da ne ovisi o predstavniku klase ekvivalencije. Ako je $\overline{x} = \overline{x}_1$ i $\overline{y} = \overline{y}_1$, tada je $x - x_1 = pn$ i $y - y_1 = qn$ za neke $p, q \in \mathbb{Z}$. U tom slučaju vrijedi

$$x + y - (x_1 + y_1) = (p + q)n,$$

što povlači $\overline{x + y} = \overline{x_1 + y_1}$. Neutralni element je klasa ekvivalencije $\overline{0}$, a inverzni element je $-\overline{x} = \overline{(-x)}$. Kako je zbrajanje komutativno zaključujemo da je $(\mathbb{Z}_n, +)$ Abelova grupa. S obzirom da je $\overline{n} = \overline{0}$, $\mathbb{Z}_n$ ima točno n elemenata

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}.$$

Cayleyeva tablica grupe $\mathbb{Z}_4$ prikazana je u tablici 1.1

(2) *Množenje modulo n.* Neka je $\mathbb{Z}_n$ skup kao u prethodnom primjeru. Na skupu $\mathbb{Z}_n$ možemo definirati množenje modulo n pravilom $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$. Lako se provjeri da je množenje dobro definirano. Neka je je $\overline{x} = \overline{x}_1$ i $\overline{y} = \overline{y}_1$. Tada je $x - x_1 = pn$ i $y - y_1 = qn$ za neke $p, q \in \mathbb{Z}$ iz čega slijedi

$$xy = (x_1 + pn)(y_1 + qn) = x_1y_1 + (py_1 + qx_1)n. \tag{1.1}$$

Dakle, $\overline{xy} = \overline{x_1y_1}$. Na taj način $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ postaje polugrupa s jedinicom $\overline{1}$. Neka je $(\mathbb{Z}_n)^\times$ skup svih invertibilnih elemenata u $\mathbb{Z}_n$. Tada je $(\mathbb{Z}_n)^\times$ Abelova grupa u odnosu na množenje modulo n. Očigledno je da $\overline{0}$ nema inverz jer je $\overline{0}\,\overline{x} = \overline{0}$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$ pa se invertibilni elementi nalaze u skupu $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{n-1}\}$. Kao konkretni primjer promotrimo polugrupu

$$\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}.$$

$\cdot\,(mod\,6)$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Tablica 1.2: Tablica množenja polugrupe $\mathbb{Z}_6$.

Iz tablice množenja 1.2 zaključujemo da samo elementi $\overline{1}$ i $\overline{5}$ imaju inverz jer je $\overline{1}\overline{1} = \overline{1}$ i $\overline{5}\overline{5} = \overline{1}$, stoga je

$$(\mathbb{Z}_6)^\times = \{\overline{1}, \overline{5}\}.$$

(3) Lako se provjeri da je skup iracionalnih brojeva oblika

$$G = \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

grupa obzirom na zbrajanje.

Pokažimo da je $G^* = G \setminus \{0\}$ grupa obzirom na množenje. Neka su $a_1 + \sqrt{2}b_1$, $a_2 + \sqrt{2}b_2 \in G^*$. Tada a_i i b_i nisu oba nula. Pokažimo da je

$$(a_1 + \sqrt{2}b_1)(a_2 + \sqrt{2}b_2) = a_1a_2 + 2b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{2} \in G^*. \tag{1.2}$$

Pretpostavimo da je

$$a_1a_2 + 2b_1b_2 = 0 \quad \text{i} \quad a_1b_2 + b_1a_2 = 0. \tag{1.3}$$

Množenjem prve jednadžbe s b_2 i korištenjem druge jednadžbe dobivamo

$$b_1(-a_2^2 + 2b_2^2) = 0. \tag{1.4}$$

Slično, ponavljanjem postupka gdje prvu jednadžbu množimo s a_2 dobivamo

$$a_1(a_2^2 - 2b_2^2) = 0. \tag{1.5}$$

Kako a_1 i b_1 nisu oba nula, iz jednadžbi (1.4) i (1.5) slijedi $a_2^2 - 2b_2^2 = 0$, što vodi na kontradikciju jer su a_2 i b_2 racionalni brojevi koji nisu oba nula. Zaključujemo

da je $a_1a_2+2b_1b_2 \neq 0$ ili $a_1b_2+b_1a_2 \neq 0$ čime je dokazana tvrdnja (1.2). Očigledno je $1 \in G^*$ za $a = 1$ i $b = 0$. Nadalje, iz uvjeta da su a i b racionalni brojevi koji nisu oba nula slijedi $a^2 - 2b^2 \neq 0$ pa je

$$\frac{1}{a+\sqrt{2}b} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \in G^*. \tag{1.6}$$

Dakle, G^* je grupa obzirom na množenje.

(4) *Opća linearna grupa.* Neka je $M(n, \mathbb{R})$ skup svih matrica reda n na poljem $\mathbb{R}$. $M(n, \mathbb{R})$ je polugrupa u odnosu na matrično množenje. Skup $GL(n, \mathbb{R})$ svih invertibilnih matrica reda n je grupa s jedinicom I gdje je I jedinična matrica reda n. Kako je matrica $A \in M(n, \mathbb{R})$ invertibilna ako i samo ako je $\det(A) \neq 0$, grupu $GL(n, \mathbb{R})$ možemo definirati kao

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Ova grupa naziva se opća linearna grupa reda n.

(5) *Heisenbergova grupa* je grupa gornje trokustastih matrica oblika

$$H = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

obzirom na matrično množenje. Inverz matrice H je dan sa

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -b+ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(6) *Unitarna grupa* $U(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ je očigledno grupa obzirom na množenje kompleksnih brojeva jer je $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. Elementi grupe tvore jediničnu kružnicu $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(7) *Grupa rotacija u ravnini* $SO(2)$ je grupa matrica oblika

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Doista, $SO(2)$ je zatvoren obzirom na matrično množenje jer za proizvoljne matrice $R_\theta, R_\varphi \in SO(2)$ vrijedi

$$\begin{aligned} R_\theta R_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} = R_{\theta+\varphi} \in G. \end{aligned}$$

Neutralni element je jedinična matrica I koja odgovara parametru $\theta = 0$,

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Inverzna matrica R_θ^{-1} dana je s

$$R_\theta^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

iz čega slijedi da je $R_\theta^{-1} = R_{-\theta} \in SO(2)$. Time je pokazano da skup $SO(2)$ tvori grupu. Matrica R_θ predstavlja operator rotacije oko z osi koja djeluje na točke u ravnini xy. Ako točku (x, y) zarotiramo u pozitivnom smjeru za kut θ, tada nova točka ima koordinate

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

(vidi sliku 1.2).

(8) *Lorentzova grupa* $O(1,3)$ je grupa matrica

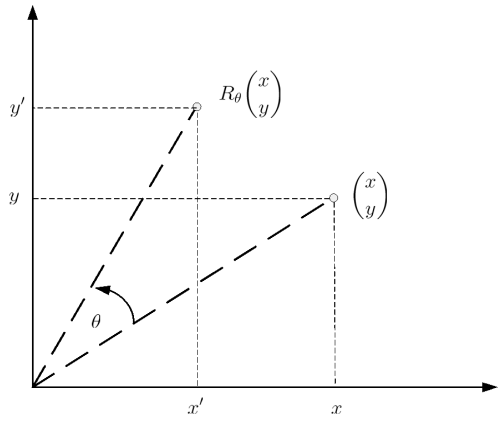
$$O(1,3) = \left\{ A \in GL(4,\mathbb{R}) \mid A^T \eta A = \eta \right\} \tag{1.8}$$

gdje je

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Doista, ako su $A, B \in O(1,3)$, onda je

$$(AB)^T \eta (AB) = B^T (A^T \eta A) B = B^T \eta B = \eta \tag{1.10}$$



Slika 1.2: Operator rotacije R_θ djeluje na točku $\binom{x}{y}$.

što povlači $AB \in O(1,3)$. Nadalje, iz relacije $AA^{-1} = I$ slijedi $(A^{-1})^T A^T = I$, odonsno

$$(A^{-1})^T A^T \eta = \eta. \tag{1.11}$$

S druge strane, iz uvjeta $A^T \eta A = \eta$ slijedi $A^T \eta = \eta A^{-1}$ pa supstitucijom u (1.10) dobivamo

$$(A^{-1})^T \eta A^{-1} = \eta \tag{1.12}$$

pa je $A^{-1} \in O(1,3)$. Zaključujemo da je $O(1,3)$ grupa obzirom na matrično množenje. Lorentzova grupa, nazvana po nizozemskom fizičaru Hendriku Lorentzu, ima važnu ulogu u specijalnoj teoriji relativnosti i teorijskoj fizici uopće. Njezini elementi su izometrije prostora Minkowskog koje fiksiraju ishodište.

(9) *Grupe simetrija diferencijalnih jednadžbi.* Elementi neke grupe mogu ovisiti o jednom ili više realnih parametara. Takve grupe imaju primjenu u proučavanju simetrija diferencijalnih jednadžbi, odnosno u proučavanju transformacija nezavisnih i zavisnih varijabli koje čuvaju oblik diferencijalne jednadžbe. Promotrimo diferencijalnu jednadžbu za nepoznatu funkciju $u = u(x)$,

$$x^2 \frac{d^2u}{dx^2} = F\Big(x\frac{du}{dx} - u\Big) \tag{1.13}$$

gdje je F zadana funkcija. Definirajmo transformaciju

$$T_{(\lambda,\epsilon)}(x,u) = (\lambda x, u + \epsilon\, x), \quad \epsilon \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}^+. \tag{1.14}$$

Skup svih tranformacija (1.14) tvori grupu jer je

$$T_{(\lambda_2,\epsilon_2)} \circ T_{(\lambda_1,\epsilon_1)} = T_{(\lambda_1\lambda_2,\epsilon_1+\lambda_1\epsilon_2)}. \tag{1.15}$$

Jedinica u grupi je transformacija $T_{(1,0)}$, a inverzni element je

$$T^{-1}_{(\lambda,\epsilon)} = T_{(1/\lambda,-\epsilon/\lambda)}. \tag{1.16}$$

Transformacija (1.14) ne mijenja oblik diferencijalne jednadžbe (1.13). Definirajmo nove varijable

$$y = \lambda x, \quad v = u + \epsilon\, x. \tag{1.17}$$

Tada je

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{\lambda}\frac{du}{dx} + \frac{\epsilon}{\lambda}, \qquad \frac{d^2v}{dy^2} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2u}{dx^2}. \tag{1.18}$$

Odavde slijedi

$$y^2\frac{d^2v}{dy^2} = (\lambda x)^2\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2u}{dx^2} = x^2\frac{d^2u}{dx^2}. \tag{1.19}$$

Nadalje, iz (1.18) dobivamo

$$y\frac{dv}{dy} - v = \lambda x\Big(\frac{1}{\lambda}\frac{du}{dx} + \frac{\epsilon}{\lambda}\Big) - (u + \epsilon\, x) = x\frac{dx}{dx} - u. \tag{1.20}$$

Jednadžbe (1.19) i (1.20) impliciraju da varijable (y, u) zadovoljavaju istu diferencijalnu jednadžbu kao (x, u) što znači da je jednadžba (1.13) invarijantna u odnosu na grupu transformacija (1.14). Poznavanje simetrija neke jednadžbe nam omogućuje da od poznatog rješenja $u(x)$ tvorimo nova rješenja $v(y) = u(y/\lambda) + \epsilon y/\lambda$.

1.2 Homomorfizmi grupa

Promotrimo grupu $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ i grupu $G = \{1, i, -1, -i\}$ s operacijom množenja. Lako se uočava da $\mathbb{Z}_4$ i G imaju istu strukturu ako definiramo preslikavanje $\phi\colon \mathbb{Z}_4 \to G$ sa

$$\phi(\bar{0}) = 1, \quad \phi(\bar{1}) = i, \quad \phi(\bar{2}) = -1, \quad \phi(\bar{3}) = -i. \tag{1.21}$$

Primijetimo da je $\phi(\bar{a} + \bar{b}) = \phi(\bar{a})\phi(\bar{b})$ za sve $\bar{a}\,, \bar{b} \in \mathbb{Z}_4$ što povlači da se tablica množenja za $\mathbb{Z}_4$ preslikava u tablicu množenja za G. Ovakva preslikavanja imaju važnu ulogu u teoriji grupa i dana su sljedećom definicijom.

Definicija 1.5 *Neka su G i H grupe. Preslikavanje $\phi\colon G \to H$ naziva se homomorfizam grupa ako vrijedi*

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \quad \textit{za svaki} \quad x, y \in G.$$

Ako je ϕ surjektivno preslikavanje, tada se ϕ naziva *epimorfizam*, a ako je ϕ injekcija, tada ϕ nazivamo *monomorfizam*.

Monomorfizmi su važni jer "čuvaju" strukturu grupe u smislu da se umnožak elemenata x i y preslikava u umnožak njihovih slika $\phi(x)$ i $\phi(y)$. Ako ϕ nije injekcija, onda ne čuva strukturu grupe. Na primjer, očigledno je da trivijalni homomorfizam $\phi(x) = e'$, gdje je e' jedinica u H, ne čuva strukturu grupe jer se čitava grupa G preslikava u jedan element.

Definicija 1.6 *Ako je $\phi\colon G \to H$ bijekcija i homomorfizam, tada se ϕ naziva izomorfizam. U tom slučaju su G i H izomorfne grupe, i pišemo $G \simeq H$. Ako je $G = H$, tada ϕ nazivamo automorfizam.*

Primjeri homomorfizama

(1) Skup $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je grupa u odnosu na množenje kompleksnih brojeva. Konjugacija $\phi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\phi(z) = \overline{z}$, je homomorfizam jer je

$$\phi(z_1 z_2) = \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2 = \phi(z_1)\phi(z_2).$$

Kako je ϕ bijekcija na $\mathbb{C}^*$, ϕ je izomorfizam na $\mathbb{C}^*$.

(2) Neka su $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ grupe s operacijama zbrajanja odnosno množenja, redom, gdje je $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Eksponencijlna funkcija $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\phi(x) = e^x$, je homomorfizam jer vrijedi

$$\phi(x_1 + x_2) = e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} e^{x_2} = \phi(x_1)\phi(x_2).$$

Funkcija $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ je bijekcija gdje je $\phi^{-1}(x) = \ln(x)$ inverzno preslikavanje. Stoga je $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ izomorfizam.

(3) Preslikavanje $\phi\colon SO(2) \to U(1)$ koje matrici $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pridružuje kompleksni broj $e^{i\theta} \in U(1)$ je homomorfizam jer je

$$\phi(R_\theta R_\varphi) = \phi(R_{\theta+\varphi}) = e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi} = \phi(R_\theta)\phi(R_\varphi). \tag{1.22}$$

(4) Preslikavanje $\phi\colon GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ definirano s $\phi(A) = \det(A)$ je homomorfizam, jer iz Binet-Cauchyevog teorema slijedi

$$\phi(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = \phi(A)\phi(B).$$

(5) Neka je G grupa i neka su $\varphi_1, \varphi_2\colon G \to G$ definirani sa $\varphi_1(g) = g^{-1}$ i $\varphi_2(g) = g^2$. Preslikavanja φ_1 i φ_2 su homomorfizmi ako i samo ako je G Abelova grupa.

Unutarnji automorfizam ili konjugacija

Neka je G grupa i odaberimo $a \in G$. Definirajmo preslikavanje $C_a\colon G \to G$ s $C_a(x) = axa^{-1}$. Pokažimo da je C_a automorfizam grupe G. Zbog asocijativnosti množenja imamo

$$C_a(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = C_a(x)C_a(y),$$

pa zaključujemo da je C_a homomorfizam. Pretpostavimo da je $C_a(x) = C_a(y)$. odnosno

$$axa^{-1} = aya^{-1}. \tag{1.23}$$

Množenjem jednadžbe (1.23) slijeva s a^{-1} i zdesna s a dobivamo $x = y$, stoga je C_a injekcija. Neka je $y \in G$ proizvoljan element. Tada za $x = a^{-1}ya$ imamo

$$C_a(x) = a(a^{-1}ya)a^{-1} = y,$$

što pokazuje da je C_a surjekcija. Dakle, C_a je automorfizam grupe G koji nazivamo unutarnji automorfizam ili konjugacija elementom a.

Sljedeći teoremi daju neka osnovna svojstva homomorfizama.

Teorem 1.1 *Neka su G i H grupe s pripadnim jedinicama $e \in G$ i $e' \in H$ i neka je $\phi\colon G \to H$ homomorfizam. Tada je*

(i) $\phi(e) = e'$,

(ii) $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ *za svaki* $x \in G$.

Dokaz (i) Kako je $ee = e$, slijedi

$$\phi(e) = \phi(ee) = \phi(e)\phi(e). \tag{1.24}$$

Množenjem jednadžbe (1.24) zdesna s $\phi(e)^{-1}$ dobivamo

$$\phi(e)\phi(e)^{-1} = \phi(e).$$

Međutim, $\phi(e)\phi(e)^{-1} = e'$ pa zaključujemo $\phi(e) = e'$.

(ii) Neka je $x \in G$. Djelovanjem homomorfizma ϕ na $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ dobivamo

$$\phi(x\,x^{-1}) = \phi(x)\phi(x^{-1}) = e', \tag{1.25}$$
$$\phi(x^{-1}\,x) = \phi(x^{-1})\phi(x) = e'. \tag{1.26}$$

Prema definiciji inverznog elementa, relacije (1.25)-(1.26) povlače da je $\phi(x)^{-1} = \phi(x^{-1})$. ■

Teorem 1.1 pokazuje da homomorfizmi, osim što čuvaju množenje, čuvaju neutralni element i inverznu operaciju $x \mapsto x^{-1}$. Ako su dvije grupe G i H izomorfne, tada one imaju istu strukturu, pa su G i H samo različite realizacije iste algebarske strukture.

Definicija 1.7 *Neka su* G *i* H *grupe. Jezgra homomorfizma* $\phi\colon G \to H$ *je skup*

$$Ker(\phi) = \{x \in G \mid \phi(x) = e'\}.$$

Slika homomorfizma je skup

$$Im(\phi) = \{\phi(x) \mid x \in G\}.$$

S obzirom da je $\phi(e) = e'$, jezgra homomorfizma je neprazan skup. Sljedeći teorem daje karakterizaciju injektivnog homomorfizma.

Teorem 1.2 *Homomorfizam grupa* $\phi\colon G \to H$ *je injektivan ako i samo ako je* $Ker(\phi) = \{e\}$.

Dokaz Pretpostavimo da je ϕ injektivan homomorfizam. Ako je $x \in Ker(\phi)$, tada po teoremu 1.1 (i) vrijedi

$$\phi(x) = e' = \phi(e),$$

iz čega slijedi $x = e$ jer je ϕ injekcija. Dakle, $Ker(\phi) = \{e\}$. Pretpostavimo sada da je $Ker(\phi) = \{e\}$. Ako je $\phi(x) = \phi(y)$, tada je $\phi(x)\phi(y)^{-1} = e'$. Teorem 1.1 (ii) sada implicira

$$e' = \phi(x)\phi(y)^{-1} = \phi(x)\phi(y^{-1}) = \phi(xy^{-1}),$$

iz čega dobivamo $xy^{-1} \in Ker(\phi) = \{e\}$. Dakle, $xy^{-1} = e$, pa zaključujemo $x = y$. Time je pokazano da je ϕ injekcija. ■

Navedimo još neka svojstva homomorfizama koja se lako dokazuju.

(1) Ako su $\phi_1 : G \to H$ i $\phi_2 : H \to K$ homomorfizmi, tada je kompozicija $\phi_2 \circ \phi_1 : G \to K$ homomorfizam.

(2) Ako je $\phi : G \to H$ izomorfizam, tada je inverzno preslikavanje $\phi^{-1} : H \to G$ izomorfizam.

1.3 Podgrupe i susjedne klase

Definicija 1.8 *Neka je G grupa. Neprazan podskup $H \subseteq G$ naziva se podgrupa od G, i zapisuje $H \leq G$, ako je H grupa u odnosu na množenje u G. Ako je $H \neq G$, tada koristimo oznaku $H < G$.*

Iz definicije slijedi da je podgrupa H zatvorena u odnosu na operacije množenja i invertiranja, odnosno za sve $a, b \in H$ vrijedi $ab \in H$ i $a^{-1} \in H$. Primijetimo također da podgrupa H ima istu jedinicu kao i grupa G. Svaka grupa G ima trivijalne podgrupe $\{e\}$ i G. Da bismo ustanovili je li neki podskup $H \subset G$ podgrupa trebamo provjeriti da li je H zatvoren na množenje i invertiranje. Sljedeći teorem pokazuje da se ove dvije operacije mogu kombinirati u jednu što daje kriterij za egzistenciju podgrupe.

Teorem 1.3 *Neka je G grupa. Podskup $H \subseteq G$ je podgrupa od G ako i samo ako je*

$$ab^{-1} \in H \quad \textit{za sve} \quad a, b \in H. \tag{1.27}$$

Dokaz Neka je H podgrupa od G. Odaberimo $a, b \in H$. Tada je $ab^{-1} \in H$ jer je H zatvorena na množenje i invertiranje. Pretpostavimo sada da vrijedi (1.27). Tada za $a = b \in H$ dobivamo $e = aa^{-1} \in H$. Neka su sada $a, b \in H$ proizvoljni elementi. Tada je $b^{-1} = eb^{-1} \in H$, pa je H zatvorena na invertiranje. Nadalje, (1.27) povlači $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$, stoga je H zatvorena na množenje. Time je dokazano da je H podgrupa od G. ■

Primjeri podgrupa

(1) Specialna linearna grupa $SL(n, \mathbb{R})$ je definirana sa

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Ako su $A, B \in SL(n, \mathbb{R})$, onda je

$$\det(AB^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(B)} = 1,$$

stoga je $AB^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$. Dakle, $SL(n, \mathbb{R})$ je podgrupa opće linearne grupe $GL(n, \mathbb{R})$.

(2) Unitarna grupa $U(1) = \{e^{\imath\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ je podgrupa grupe kompleksnih brojeva $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ obzirom na množenje jer je $e^{i\theta_1}(e^{i\theta_2})^{-1} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \in U(1)$.

Ako su H_1 i H_2 podgrupe od G, lako se vidi da je njihov presjek podgrupa od G. Doista, $H_1 \cap H_2$ je neprazan skup jer je $e \in H_1 \cap H_2$. Ako su $a, b \in H_1 \cap H_2$, tada je $a^{-1}b \in H_1$ i $a^{-1}b \in H_2$ pa je $a^{-1}b \in H_1 \cap H_2$. Stoga je $H_1 \cap H_2$ podgrupa od G prema teoremu 1.3. Primijetimo da je $H_1 \cap H_2$ najveća podgrupa od G sadržana u H_1 i H_2. Slično se pokazuje da je presjek bilo koje familije podgrupa $\bigcap_{i \in I} H_i$ takodjer podgrupa od G. Potrebno je naglasiti, međutim, da unija $H_1 \cup H_2$ ne mora biti podgrupa od G.

Teorem 1.4 *Neka je $\phi\colon G \to H$ homomorfizam grupa. Jezgra homomorfizma $Ker(\phi)$ je podgrupa od G, a slika homomorfizma $Im(\phi)$ je podgrupa od H.*

Dokaz Neka su e i e' neutralni elementi u G i H, redom. Skupovi $Ker(\phi)$ i $Im(\phi)$ su neprazni jer je $e \in Ker(\phi)$ i $e' = \phi(e) \in Im(\phi)$. Neka su $a, b \in Ker(\phi)$. Tada je

$$\phi(ab^{-1}) = \phi(a)\phi(b^{-1}) = \phi(a)\phi(b)^{-1} = e'(e')^{-1} = e',$$

što pokazuje $ab^{-1} \in Ker(\phi)$. Prema teoremu 1.3, $Ker(\phi)$ je podgrupa od G.

Neka su $x, y \in Im(\phi)$. Tada postoje $a, b \in G$ takvi da je $\phi(a) = x$ i $\phi(b) = y$. Stoga je $xy^{-1} = \phi(a)\phi(b)^{-1} = \phi(a)\phi(b^{-1}) = \phi(ab^{-1})$, što pokazuje da je $xy^{-1} \in Im(\phi)$. Dakle, $Im(\phi)$ je podgrupa od H. ■

Definicija 1.9 *Neka je A podskup grupe G. Centralizator skupa A u G je skup*

$$C_G(A) = \{g \in G \mid gag^{-1} = a \text{ za svaki } a \in A\}.$$

Centralizator skupa A tvore svi elementi u G koji komutiraju sa svakim elementom skupa A. Primijetimo da je $C_G(A) \neq \emptyset$ jer je $e \in C_G(A)$.

Teorem 1.5 *Neka je A podskup grupe G. Tada je $C_G(A)$ podgrupa od G.*

Dokaz Neka su $g, h \in C_G(A)$. Tada je $gag^{-1} = a$ i $hah^{-1} = a$ za svaki $a \in A$. Primijetimo da $hah^{-1} = a$ implicira $h^{-1}ah = a$. Stoga je

$$(gh^{-1})a(gh^{-1})^{-1} = g(h^{-1}ah)g^{-1} = gag^{-1} = a,$$

što pokazuje da je $gh^{-1} \in C_G(A)$. Dakle, $C_G(A)$ je podgrupa od G. ■

Ako skup $A = \{a\}$ sadrži samo jedan element, tada za centralizator koristimo oznaku $C_G(a)$.

Definicija 1.10 *Centar grupe G je skup*

$$Z(G) = \{g \in G \mid ga = ag \text{ za svaki } a \in G\}.$$

Centar grupe G tvore elementi koji komutiraju sa svakim elementom u G, pa je $Z(G) = C_G(G)$. Prema prethodnom theoremu $Z(G)$ je podgrupa od G. Primijetimo da je G Abelova grupa ako i samo ako je $Z(G) = G$ pa $Z(G)$ pokazuje koliko se G razlikuje od Abelove grupe.

Neka je H podgrupa od G. Definirajmo relaciju na G pravilom

$$a \sim b \quad \text{ako i samo ako je} \quad a^{-1}b \in H.$$

Lako se pokazuje da je $\sim$ relacija ekvivalencije na grupi G:

(1) $a \sim a$ jer je $a^{-1}a = e \in H$,

(2) $a \sim b \Rightarrow b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in H$ jer je $a^{-1}b \in H \Rightarrow b \sim a$,

(3) $a \sim b$ i $b \sim c \Rightarrow a^{-1}b \in H$ i $b^{-1}c \in H \Rightarrow (a^{-1}b)(b^{-1}c) = a^{-1}c \in H \Rightarrow a \sim c$.

Klasa ekvivalencije elementa $a \in G$ je skup

$$\overline{a} = \left\{ b \in G \mid a^{-1}b \in H \right\} = \left\{ b \in G \mid b \in aH \right\} = aH.$$

Definicija 1.11 *Neka je H podgrupa grupe G i neka je $a \in G$. Skup*

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

naziva se lijeva susjedna klasa podgrupe H određena elementom a. Skup svih lijevih susjednih klasa pogrupe H označavamo s G/H.

Slično se definira desna susjedna klasa

$$Ha = \{ha \mid h \in H\}.$$

Skup svih desnih susjednih klasa pogrupe H označavamo s $H \setminus G$. Susjedna klasa generirana elementom $e \in G$ je ujedno lijeva i desna susjedna klasa jer je $eH = He = H$. Iz definicije slijedi da su dvije susjedne klase jednake, $aH = bH$, ako i samo ako je $a = bh$ za neki $h \in H$. Skupovi lijevih i desnih susjednih klasa podgrupe H imaju isti kardinalni broj jer je preslikavanje $\psi \colon G/H \to H \setminus G$ definirano s $\psi(aH) = Ha^{-1}$ bijekcija. Stoga imamo sljedeću definiciju.

Definicija 1.12 *Neka je H podgrupa grupe G. Kardinalni broj skupa G/H, tj. skupa $H \setminus G$, naziva se indeks podgrupe H u G, i označava s $[G : H]$.*

Ako je $H = \{e\}$ trivijalna podgrupa, tada je $aH = \{a\}$ za svaki $a \in G$. Iz ovoga slijedi da je broj susjednih klasa podgrupe $H = \{e\}$ jednak broju elemenata grupe G, odnosno $[G : H] = |G|$. Ako je $H = G$, tada je $aH = H$ za svaki $a \in G$, pa je $[G : H] = 1$. Za proizvoljnu podgrupu očekujemo da se indeks nalazi između 1 i $|G|$.

Teorem 1.6 (Lagrangeov teorem) *Neka je G konačna grupa i neka je H podgrupa od G. Tada je*

$$|G| = [G : H]\,|H|.$$

Dokaz Odaberimo $a \in G$. Preslikavanje $\psi\colon H \to aH$, $\psi(h) = ah$, je bijekcija pa je kardinalni broj susjedne klase aH jednak redu podgrupe H, tj. $|aH| = |H|$. Klase ekvivalencije aH tvore particiju skupa G pa se G može napisati kao disjunktna unija $G = \bigcup_{a\in C} aH$ gdje C sadrži točno jedan element iz svake susjedne klase aH. Odavde slijedi da je

$$|G| = \sum_{a\in C} |aH| = \sum_{a\in C} |H| = k\,|H| \tag{1.28}$$

gdje je k broj elemenata u skupu C, odnosno broj različitih susjednih klasa aH. Dakle, $k = [G : H]$ što povlači $|G| = [G : H]\,|H|$. ■

Lagrangeov teorem ima važnu ulogu u proučavanju strukture grupa. Na primjer, teorem implicira da red podgrupe dijeli red grupe jer je

$$|H| = \frac{|G|}{[G : H]}.$$

Ova činjenica ima za posljedicu da red podgrupe ne može biti proizvoljan. Ako je $|G| = p$ gdje je p prosti broj, tada je $|H| = 1$ ili $|H| = p$ što povlači da G ima samo trivijalne podgrupe $H = \{e\}$ i $H = G$.

1.4 Normalne podgrupe i kvocijentne grupe

U ovom poglavlju ćemo proučavati podgrupe kod kojih nema razlike između lijevih i desnih susjednih klasa, odnosno kod koji je svaka lijeva jednaka desnoj susjednoj klasi.

Definicija 1.13 *Neka je G grupa. Kažemo da je N normalna podgrupa od G ako je $xNx^{-1} \subseteq N$ za svaki $x \in G$.*

Za normalnu podgrupu koristimo oznaku $N \lhd G$. Ako je G Abelova grupa, tada je svaka podgrupa od G normalna jer je $xyx^{-1} = y \in N$ za svaki $x \in G$ i $y \in N$. Primijetimo da je trivijalna podgrupa $\{e\}$ normalna podgrupa svake grupe G jer je $xex^{-1} = e$. Normalna podgrupa se može ekvivalentno definirati na sljedeći način.

Teorem 1.7 *Neka je N podgrupa grupe G. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $N \lhd G$,

(ii) $xN = Nx$ *za svaki* $x \in G$,

(iii) $xNx^{-1} = N$ *za svaki* $x \in G$.

Dokaz (i) $\Rightarrow$ (ii) Neka je $N \lhd G$ i neka je $x \in G$. Svaki $y \in xN$ je oblika $y = xh$ za neki $h \in N$ pa vrijedi $y = (xhx^{-1})x \in Nx$ jer je $xhx^{-1} \in N$. Dakle, $xN \subseteq Nx$. Slično se pokazuje druga inkluzija $Nx \subseteq xN$ pa zaključujemo da je $Nx = xN$.

(ii) $\Rightarrow$ (ii) Pretpostavimo da je $xN = Nx$ za svaki $x \in G$. Neka je $y \in xNx^{-1}$. Tada je $y = xhx^{-1}$ za neki $h \in N$. Iz pretpostavke (ii) slijedi da je $xh = h'x$ za neki $h' \in N$ što povlači $y = xhx^{-1} = h'xx^{-1} = h' \in N$. Dakle, $xNx^{-1} \subseteq N$. Neka je sada $y \in N$. Pretpostavka (ii) povlači da je $yx = xy'$ za neki $y' \in N$ pa vrijedi $y = x(x^{-1}yx)x^{-1} = xy'x^{-1} \in xNx^{-1}$. Dakle, $N \subseteq xNx^{-1}$ što dokazuje tvrdnju $xNx^{-1} = N$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Dokaz je trivijalan jer vrijedi $xNx^{-1} = N \subseteq N$ za svaki $x \in G$. ■

Propozicija 1.3 *Neka je* G *grupa i neka je* H *podgrupa od* G *takva da je* $[G\colon H] = 2$. *Tada je* $H \lhd G$.

Dokaz Kako je $[G\colon H] = 2$, skup lijevih susjednih klasa sadrži dva elementa H i gH gdje je $g \in G \setminus H$. Skupovi H i gH tvore particiju skupa G što povlači da je $gH = G \setminus H$. Dvije desne susjedne klase H i Hg također tvore particiju skupa G i vrijedi $Hg = G \setminus H$. Stoga zaključujemo da je $gH = Hg$ za svaki $g \in G \setminus H$, odnosno $gH = Hg$ za svaki $g \in G$. Prema teoremu 1.7, H je normalna podgrupa od G. ■

Primjeri normalnih podgrupa

(1) Neka je $Z(G)$ centar grupe G i neka je $x \in G$. Tada za svaki $y \in Z(G)$ vrijedi $xyx^{-1} = xx^{-1}y = y$ što povlači

$$xZ(G)x^{-1} = \{xyx^{-1} \mid y \in Z(G)\} = Z(G).$$

Dakle, $Z(G)$ je normalna podgrupa od G.

(2) Neka ja $\varphi\colon G \to H$ homomorfizam s grupe G u grupu H. Ako je $g \in Ker(\varphi)$ i $x \in G$, tada je

$$\varphi(xgx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(g)\varphi(x)^{-1} = \varphi(x)\varphi(x)^{-1} = e,$$

dakle $xgx^{-1} \in Ker(\varphi)$. Odavde slijedi da je $xKer(\varphi)x^{-1} \subseteq Ker(\varphi)$ za svaki $x \in G$, pa je $Ker(\varphi)$ normalna podgrupa od G.

(3) Pokažimo da je $SL(n, \mathbb{R})$ normalna podgrupa opće linearne grupe $GL(n, \mathbb{R})$. Odaberimo $A \in SL(n, \mathbb{R})$ i $B \in GL(n, \mathbb{R})$. Prema Binet-Cauchyevom teoremu imamo

$$\det(BAB^{-1}) = \det(B)\det(A)\det(B^{-1}) = \det(B)\frac{1}{\det(B)} = 1,$$

jer je $\det(A) = 1$. Dakle, $BAB^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$ što pokazuje da je

$$BSL(n, \mathbb{R})B^{-1} \subseteq SL(n, \mathbb{R}).$$

■

Promotrimo sljedeći problem. Neka je H podgrupa od G koja nije normalna u G. Očigledno je $xNx^{-1} \subseteq N$ za svaki $x \in N$ pa je N normalna podgrupa same sebe. Prirodno je zapitati se koja je najveća podgrupa od G koja sadrži N kao normalnu podgrupu. Ovo razmatranje vodi na pojam normalizatora skupa.

Definicija 1.14 *Neka je A podskup grupe G. Definirajmo skup $gAg^{-1} = \{gag^{-1} \mid a \in A\}$. Normalizator skupa A u G je definiran s*

$$N_G(A) = \{g \in G \mid gAg^{-1} = A\}.$$

Ako je $g \in C_G(A)$, tada je $gag^{-1} = a$ za svaki $a \in A$ što implicira $gAg^{-1} = A$. Ovo povlači $g \in N_G(A)$, stoga je $C_G(A) < N_G(A)$. Skup A ne mora biti sadržan u $N_G(A)$. Međutim, ako je A podgrupa od G, tada je $gAg^{-1} = A$ za svaki $g \in A$ pa slijedi $A \subseteq N_G(A)$.

Prema teoremu 1.7, za normalnu podgrupu N od G vrijedi $xN = Nx$, $x \in G$, što je ekvivalentno s

$$xNx^{-1} = N \quad \text{za svaki } x \in G.$$

Stoga se normalne podgrupe mogu karakterizirati kao one podgrupe čiji je normalizator cijela grupa G,

$$N_G(N) = G.$$

Teorem 1.8 *Neka je G grupa.*

(i) Za svaki neprazni podskup $A \subseteq G$, $N_G(A)$ je podgrupa od G.

(ii) Za svaku podgrupu H od G, $N_G(H)$ je najveća podgrupa od G takva da je $H \lhd N_G(H)$.

Dokaz (i) Neka su $g, h \in N_G(A)$. Tada je $gAg^{-1} = A$ i $hAh^{-1} = A$. Primijetimo da $hAh^{-1} = A$ implicira $h^{-1}Ah = A$ iz čega slijedi

$$(gh^{-1})A(gh^{-1})^{-1} = g(h^{-1}Ah)g^{-1} = gAg^{-1} = A.$$

Ovo povlači $gh^{-1} \in N_G(A)$, pa zaključujemo da je $N_G(A)$ podgrupa od G.

(ii) Kako je $H \subseteq N_G(H)$, to je H podgrupa od $N_G(H)$. Nadalje, H je normalna podgrupa od $N_G(H)$ jer je $gHg^{-1} = H$ za svaki $g \in N_G(H)$ prema definiciji normalizatora. Neka je K podgrupa od G takva da je $H \lhd K$. Tada je $kHk^{-1} = H$ za svaki $k \in K$ što po definiciji normalizatora implicira $K \subseteq N_G(H)$. Dakle, $N_G(H)$ je najveća podgrupa od G takva da je $H \lhd N_G(H)$. ■

Ako je $N \lhd G$, tada su prema teoremu 1.7 skupovi lijevih i desnih susjednih klasa jednaki, pa ih možemo ih jednostavno označiti s G/N. Na skupu G/N se može definirati struktura grupe koju nazivamo kvocijentna grupa. Konstrukcijom kvocijentne grupe G/N dobivamo grupu koja je općenito "manja" od G. Struktura grupe G se odražava na strukturu grupe G/N, pa kvocijentne grupe imaju važnu ulogu u proučavanju strukture grupa.

Teorem 1.9 *Neka je N normalna podgrupa grupe G. Tada je G/N grupa u odnosu na množenje definirano s*

$$(xN)(yN) = (xy)N. \tag{1.29}$$

Preslikavanje $\pi\colon G \to G/N$, $\pi(x) = xN$, je epimorfizam i $Ker(\pi) = N$.

Dokaz Potrebno je pokazati da je množenje (1.29) dobro definirano u smislu da rezultat ne ovisi o predstavnicima susjednih klasa xN i yN. Pretpostavimo da je

$$xN = x'N \quad \text{i} \quad yN = y'N. \tag{1.30}$$

Kako je N normalna podgrupa, prema teoremu 1.7 vrijedi $gN = Ng$ za svaki $g \in G$. Odavde i iz (1.30) slijedi

$$(xy)N = x(y'N) = x(Ny') = (x'N)y' = (x'y')N.$$

Dakle, rezultat množenja ne ovisi o predstavnicima klasa pa je operacija (1.29) dobro definirana. Asocijativnost množenja u G se prenosi na G/N, stoga je

$$(xN)(yN)(zN) = (xyz)N.$$

Jedinica u G/N je susjedna klasa $eN = N$ jer je

$$(xN)(eN) = (eN)(xN) = xN.$$

Inverz elementa xN je susjedna klasa $x^{-1}N$ jer je

$$(xN)(x^{-1}N) = (x^{-1}N)(xN) = eN.$$

Iz navedenog zaključujemo da je G/N grupa u odnosu na množenje (1.29). Preslikavanje $\pi\colon G \to G/N$, $\pi(x) = xN$, je očigledno surjekcija. Nadalje, iz definicije množenja u G/N slijedi

$$\pi(xy) = (xy)N = (xN)(yN) = \pi(x)\pi(y),$$

stoga je π homomorfizam. Jezgra homomorfizma je dana s

$$Ker(\pi) = \{x \in G \mid xN = N\} = N$$

jer je $xN = N$ ako i samo ako je $x \in N$. ■

Definicija 1.15 *Neka je N normalna podgrupa grupe G. Grupa G/N naziva se kvocijentna grupa, a homomorfizam $\pi\colon G \to G/N$, $\pi(x) = xN$, naziva se kanonski homomorfizam ili projekcija sa G na G/N.*

Prepostavimo da je G konačna grupa. Prema definiciji indeksa red kvocijentne grupe G/N je $[G : N]$, pa iz Lagrangeovog teorema 1.6 dobivamo jednostavnu formulu za red kvocijentne grupe,

$$\big|G/N\big| = [G : N] = \frac{|G|}{|N|}.$$

Sljedeći rezultat pokazuje kako se od postojećih podgrupa mogu formirati nove podgrupe.

Teorem 1.10 *Neka je G grupa i neka su H i N pogrupe od G. Definirajmo skup*

$$HN = \{ab \mid a \in H,\ b \in N\}.$$

(i) Ako je $N \lhd G$, tada je $HN = NH$ i HN je podgrupa od G.

(ii) Ako su $H \lhd G$ i $N \lhd G$, tada je $HN \lhd G$.

Dokaz (i) Pokažimo da je $HN = NH$. Ako je $y \in HN$, tada je $y = ab$ za neke $a \in H$ i $b \in N$ pa vrijedi $y = (aba^{-1})a \in NH$ jer je $aba^{-1} \in N$. Stoga je $HN \subseteq HN$. Slično, svaki $y \in HN$ je oblika $y = ba$ za neke $\in H$ i $b \in N$ pa imamo $y = a(a^{-1}ba) \in HN$ jer je $a^{-1}ba \in N$. Dakle, $NH \subseteq HN$ što povlači $HN = NH$. Pokažimo sada da je HN podgrupa od G. Neka su $x, y \in HN$. Tada je $x = a_1b_1$ i $y = a_2b_2$ za neke $a_1, a_2 \in H$ i $b_1, b_2 \in N$ što povlači

$$xy^{-1} = a_1b_1(a_2b_2)^{-1} = a_1(b_1b_2^{-1})a_2^{-1} = a_1ha_2^{-1}, \tag{1.31}$$

gdje je $h = b_1b_2^{-1} \in N$. Kako je $N \lhd G$, iz teorema 1.7 (ii) slijedi da je $ha_2^{-1} = a_2^{-1}h'$ za neki $h' \in N$. Iz jednadžbe (1.31) sada imamo

$$xy^{-1} = a_1ha_2^{-1} = a_1a_2^{-1}h' \in HN$$

jer je $a_1a_2^{-1} \in H$. Time je pokazano da je HN podgrupa od G.

(ii) Prema prvoj tvrdnji, HN je podgrupa od G. Za svaki $x \in G$ vrijedi $xHx^{-1} \subseteq H$ i $xNx^{-1} \subseteq N$ što povlači

$$\begin{aligned} xHNx^{-1} &= \{xabx^{-1} \mid a \in H,\ b \in N\} \\ &= \{(xax^{-1})(xbx^{-1}) \mid a \in H,\ b \in N\} = (xHx^{-1})(xNx^{-1}) \subseteq HN. \end{aligned}$$

Dakle, HN je normalna podgrupa od G. ■

1.5 Teoremi o izomorfizmima

U ovom poglavlju ćemo dokazati neke važne rezultate o kvocijentnim grupama i homomorfizmima. Prvi rezultat poznat je kao Fundamentalni teorem o homomorfizmu koji ponekad omogućuje lakše prepoznavanje strukture kvocijentne grupe.

Teorem 1.11 (Prvi teorem o izomorfizmu) *Neka je $\phi\colon G \to H$ homomorfizam grupa. Tada je*

$$G/Ker(\phi) \simeq Im(\phi).$$

Posebno, ako je ϕ surjekcija, tada je

$$G/Ker(\phi) \simeq H.$$

Dokaz Neka je $K = Ker(\phi)$. Definirajmo preslikavanje $\psi\colon G/K \to H$ s $\psi(xK) = \phi(x)$. Pokažimo da je ψ dobro definirano. Ako je $xK = yK$, tada je $x^{-1}y \in K$ što povlači $\phi(x^{-1}y) = e$. Iz teorema 1.1 slijedi da je $\phi(x) = \phi(y)$ što pokazuje da ψ ne ovisi o predstavniku susjedne klase xK. Preslikavanje ψ je homomorfizam jer vrijedi

$$\psi((xK)(yK)) = \psi((xy)K) = \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = \psi(xK)\psi(yK).$$

Nadalje, ako je $\psi(xK) = \psi(yK)$, tada je $\phi(x) = \phi(y)$ što implicira $\phi(x^{-1}y) = e$, odnosno $x^{-1}y \in K$. Odavde slijedi da je $xK = yK$ pa je preslikavanje ψ injektivno. Kako je očigledno $Im(\psi) = Im(\phi)$, zaključujemo da je $\psi\colon G/K \to Im(\phi)$ izomorfizam. Ako je ϕ surjekcija, tj. ako je $Im(\phi) = H$, tada su grupe G/K i H izomorfne. ■

Korolar 1.1 *Ako je $\phi\colon G \to H$ homomorfizam, tada sljedeći dijagram komutira*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & H \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \nearrow_{\psi} & \\ G/Ker(\phi) & & \end{array} \tag{1.32}$$

gdje je π kanonska projekcija $\pi(x) = xKer(\phi)$ i $\psi(xKer(\Phi)) = \Phi(x)$.

Kada kažemo da dijagram (1.32) komutira to znači da slika elementa $x \in G$ ne ovisi o tome koje strelice slijedimo u dijagramu jer je $\psi \circ \pi = \phi$. Ako je G konačna grupa, tada je prema Lagrangeovom teoremu $|G| = [G\colon Ker(\phi)]\,|Ker(\phi)|$. Međutim, $G/Ker(\phi) \simeq Im(\phi)$ implicira da je $[G\colon Ker(\phi)] = |Im(\phi)|$ pa dobivamo zanimljivu formulu za red grupe

$$|G| = |Ker(\phi)|\,|Im(\phi)|.$$

Neka je $\phi\colon G \to H$ homomorfizam i neka je N normalna podgrupa od G. Pretpostavimo da želimo definirati preslikavanje ψ na kvocijentnoj grupi s

$$\psi\colon G/N \to H, \quad \psi(xN) = \phi(x).$$

Tada treba provjeriti da ψ ne ovisi o predstavniku susjedne klase xN. Međutim, prema prvom teoremu o izomorfizmu ψ je dobro definiran na G/N ako i samo ako je $N \subseteq Ker(\phi)$, pa je dovoljno provjeriti da je $N \subseteq Ker(\phi)$.

U sljedećim primjerima ćemo pokazati kako se pomoću prvog teorema o izomorfizmu mogu opisati strukture nekih kvocijentnih grupa.

Primjeri kvocijentnih grupa

U ovim primjerima $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ označavaju grupe u odnosu na množenje.

(1) Pokažimo da je $GL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$. Preslikavanje $\varphi\colon GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ definirano s $\varphi(A) = \det(A)$ je homomorfizam jer prema Binet-Cauchyevom teoremu vrijedi

$$\varphi(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = \varphi(A)\varphi(B).$$

Preslikavanje φ je surjekcija jer za svaki $x \in \mathbb{R}^*$ dijagonalna matrica

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in GL(n,\mathbb{R})$$

ima determinantu $\det(A) = x$. Jezgra homomorfizama dana je s

$$Ker(\varphi) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} = SL(n,\mathbb{R}),$$

pa je prema teoremu 1.11

$$GL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*.$$

Dakle, kvocijentna grupa $GL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{R})$ ima strukturu Abelove grupe $\mathbb{R}^*$.

(2) Neka je $\varphi\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definirano s $\varphi(x) = |x|$. Preslikavanje φ je homomorfizam jer je $\varphi(xy) = |xy| = |x|\,|y| = \varphi(x)\varphi(y)$. Jezgra homomorfizma je dana s

$$Ker(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^* \mid |x| = 1\} = \{-1, 1\},$$

Sliku homomorfizma $Im(\varphi)$ čine svi pozitivni realni brojevi $\mathbb{R}^+$, stoga iz teorema 1.11 slijedi

$$\mathbb{R}^*/\{-1, 1\} \simeq \mathbb{R}^+.$$

(3) Pokažimo da je $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq U(1)$ gdje je $U(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ unitarna grupa. Neka je $\varphi\colon \mathbb{R} \to U(1)$ preslikavanje s aditivne grupe $(\mathbb{R}, +)$ na grupu $U(1)$ definirano s $\varphi(x) = e^{i2\pi x}$. Tada je

$$\varphi(x + y) = e^{i2\pi(x+y)} = e^{i2\pi x}e^{i2\pi y} = \varphi(x)\varphi(y),$$

stoga je φ homomorfizam. Za svaki $e^{i\theta} \in U(1)$ postoji $x = \theta/(2\pi) \in \mathbb{R}$ takav da je $e^{i2\pi x} = e^{i\theta}$, stoga je φ surjekcija. Jezgru homomorfizma čine svi cijeli brojevi jer je

$$e^{i2\pi x} = 1 \quad \text{ako i samo ako je} \quad x \in \mathbb{Z}.$$

Dakle, $Im(\phi) = U(1)$ i $Ker(\phi) = \mathbb{Z}$, pa iz teorema 1.11 slijedi da je

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq U(1).$$

(4) Neka je $Aut(G)$ grupa svih automorfizama grupe G. Unutarnji automorfizmi $Inn(G) = \{I_g \mid g \in G\}$, gdje je $I_g(x) = gxg^{-1}$, tvore podgrupu od $Aut(G)$. Pokažimo da je $G/Z(G) \simeq Inn(G)$. Definirajmo $\varphi\colon G \to Aut(G)$ sa $\varphi(g) = I_g$. Za svaki $x \in G$ vrijedi

$$\varphi(gh)(x) = (gh)x(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = I_g(I_h(x)) = \varphi(g) \circ \varphi(h)(x).$$

Dakle, φ je homomorfizam. Očigledno je $Im(\varphi) = Inn(G)$. Nadalje, jezgra homomorfizma je dana sa $Ker(\varphi) = \{g \in G \mid I_g = id_G\}$. Primijetimo da je $g \in Ker(\varphi)$ ako i samo ako je $gxg^{-1} = x$ za svaki $x \in G$ što povlači da je $Ker(\varphi) = Z(G)$. Prema prvom teoremu o izomorfizmu je $G/Z(G) \simeq Inn(G)$.

(5) U kompleksnoj ravnini korjen $\sqrt[m]{1}$ ima m različitih vrijednosti danih sa $e^{i\frac{k2\pi}{m}}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Skup

$$H_m = \left\{e^{i\frac{k2\pi}{m}} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

je grupa u odnosu na množenje čiji elementi su $m$ti korjeni iz jedinice. Definirajmo $\varphi\colon \mathbb{Z} \to H_m$ sa $\varphi(k) = e^{i\frac{k2\pi}{m}}$. Lako se vidi da je $\varphi(k+l) = \varphi(k)\varphi(l)$ pa je φ epimorfizam na grupu H_m. Jezgra epimorfizma je $Ker(\varphi) = \left\{k \in \mathbb{Z} \mid e^{i\frac{k2\pi}{m}} = 1\right\}$. Očigledno je $e^{i\frac{i2\pi}{m}} = 1$ ako i samo ako je $k = m\,n$ za neki $n \in \mathbb{Z}$ što povlači da je $Ker(\varphi) = m\mathbb{Z}$. Sada prema teoremu 1.11 vrijedi $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq H_m$.

Teorem 1.12 (Drugi teorem o izomorfizmu) *Neka je G grupa koja ima podgrupe H i N i neka je $N \lhd G$. Tada je*

$$H/(H \cap N) \simeq HN/N.$$

Dokaz Prema teoremu 1.10(i) skup HN je podgrupa od G i očigledno je $N \lhd HN$. Stoga je kvocijentna grupa HN/N dobro definirana. Promotrimo preslikavanje

$$\varphi\colon H \to HN/N, \quad \varphi(h) = hN.$$

Primijetimo da je $hN = hgN$ za svaki $g \in N$ pa je $\varphi(h) \in HN/N$. Nadalje, φ je očigledno homomorfizam i $Im(\varphi) = HN/N$. Jezgra homomorfizma je dana s

$$Ker(\varphi) = \{h \in H \mid hN = N\} = \{h \in H \mid h \in N\} = H \cap N$$

jer je $hN = N$ ako i samo ako je $h \in N$. Iz prvog teorema o izomorfizmuu slijedi $H/(H \cap N) \simeq HN/N$. ■

Sljedeći teorem o izomorfizmu poznat je i kao teorem o dvostrukom kvocijentu jer podsjeća na pravilo za računanje dvostrukih razlomaka.

Teorem 1.13 (Treći teorem o izomorfizmu) *Neka su H i K normalne podgrupe grupe G i neka je $K \subseteq H$. Tada je*

$$(G/K)/(H/K) \simeq G/H.$$

Dokaz Definirajmo preslikavanje $\varphi\colon G/K \to G/H$ s $\varphi(xK) = xH$. Pokažimo da je φ dobro definirano. Ako je $xK = yK$, tada je $x^{-1}y \in K$ što povlači $x^{-1}y \in H$ jer je $K \subseteq H$. Odavde slijedi $xH = yH$, dakle φ je dobro definirano. Nadalje, za svaki $x, y \in G$ vrijedi

$$\varphi\big((xK)(yK)\big) = \varphi(xyK) = xyH = (xH)(yH) = \varphi(xK)\varphi(yK),$$

što pokazuje da je φ homomorfizam. Preslikavanje φ je očigledno surjekcija jer je

$$Im(\varphi) = \{xH \mid x \in G\} = G/H.$$

Jezgra homomorfizma je dana s

$$Ker(\varphi) = \{xK \mid xH = H\} = \{xK \mid x \in H\} = H/K,$$

pa iz prvog teorema o izomorfizmu slijedi

$$(G/K)/(H/K) \simeq G/H.$$

■

1.6 Cikličke grupe

Neka je G grupa i neka je $a \in G$. Prisjetimo se da potencije elementa $a \in G$ definiramo sa

$$a^0 = e, \quad a^k = \underbrace{a\,a\ldots a}_{k \text{ puta}}, \quad a^{-k} = \underbrace{a^{-1}a^{-1}\ldots a^{-1}}_{k \text{ puta}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Lako se pokazuje da je

$$a^k(a^l)^{-1} = a^{k-l} \quad \text{za sve} \quad k, l \in \mathbb{Z},$$

stoga je skup svih potencija $\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ podgrupa od G što motivira sljedeću definiciju.

Definicija 1.16 *Kažemo da je H ciklička grupa ako postoji $a \in H$ takav da je*

$$H = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

U tom slučaju koristimo zapis $H = \langle a \rangle$ i kažemo da je element a generator grupe H.

Ako je binarna operacija u H zbrajanje, tada pišemo

$$H = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Generator grupe općenito ne mora biti jedinstven. Na primjer, oba elementa a i a^{-1} su generatori grupe H. Također se može pokazati da u cikličkoj grupi prostog reda svaki njezin element generira cijelu grupu (vidi propoziciju 1.5).

Primjeri

(1) Abelova grupa $(\mathbb{Z}, +)$ je ciklička grupa generirana elementom $1 \in \mathbb{Z}$ jer je $n = n \cdot 1$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Primijetimo da -1 također generira $\mathbb{Z}$. Grupa $\mathbb{Z}$ je primjer cikličke grupe beskonačnog reda.

(2) Svaka podgrupa grupe $(\mathbb{Z}, +)$ je ciklička. Neka je H netrivijalna podgrupa od $\mathbb{Z}$. Ako je $x \in H$, tada je $-x \in H$, stoga H sadrži pozitivne i negativne cijele brojeve. Neka je a najmanji prirodni broj u H. Tada je $\langle a \rangle = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq H$ jer je H zatvorena na zbrajanje i oduzimanje. Neka je $x \in H$. Tada postoje $q, r \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$x = qa + r, \quad 0 \leq r < a,$$

što povlači $r = x - qa \in H$ jer je H podgrupa. Odavde slijedi $r = 0$ jer je a najmanji prirodni broj u H. Dakle, $x = qa \in \langle a \rangle$, pa zaključujemo da je $H \subseteq \langle a \rangle$. Time je dokazano $H = \langle a \rangle$.

(3) Neka je $i = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica i neka je G multiplikativna grupa

$$G = \{1, -1, i, -i\}.$$

Tada je G ciklička grupa generirana elementom i jer je $i^{2n} = \pm 1$ i $i^{2n+1} = \pm i$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Primijetimo da G također možemo generirati i elementom $-i$. G je ciklička grupa reda 4 čiji elementi leže na jediničnoj kružnici u Gaussovoj ravnini.

Definicija 1.17 *Neka je G grupa i neka je $a \in G$. Ako postoji prirodni broj m takav da je $a^m = e$, tada najmanji takav m nazivamo red elementa a i označavamo s $|a|$. Ako takav broj ne postoji kažemo da je a beskonačnog reda i pišemo $|a| = \infty$.*

Očigledno je $|a| = 1$ ako i samo ako je $a = e$.

Primjeri

(1) Promotrimo matrice $A, B \in GL(n, \mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Očigledno je najmanja potencija $m \in \mathbb{N}$ za koju vrijedi $A^m = I$ jednaka $m = 4$, stoga je $|A| = 4$. S druge strane

$$B^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^m} \end{pmatrix} \neq I \quad \text{za svaki} \quad m \in \mathbb{N},$$

pa zaključujemo da je $|B| = \infty$.

(2) U multiplikativnoj grupi $G = \{1, -1, i, -i\}$ red elementa -1 jednak je 2, dok elementi i i $-i$ imaju red četiri.

(3) Element $e^{i\frac{2\pi}{n}} \in U(1)$, $n > 1$, ima red n. S druge strane, ako je α iracionalan broj, onda je red elementa $e^{i\alpha 2\pi}$ beskonačan. Doista, ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\left(e^{i\alpha 2\pi}\right)^n = 1$, onda je $e^{i\alpha 2\pi}$ n–ti korijen iz jedinice, odnosno $e^{i\alpha 2\pi} = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Odavde slijedi $\alpha = \frac{k}{n} + m$, $m \in \mathbb{Z}$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je α iracionalan.

Propozicija 1.4 *Neka je G grupa i neka je $a \in G$, $a \neq e$.*

(i) Ako je $|a| = n$ za neki $n \in \mathbb{N}$, tada su elementi $e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ različiti i vrijedi $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$.

(ii) Ako je $|a| = \infty$, tada je $a^k \neq a^l$ za sve $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \neq l$. U tom slučaju imamo $\langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Dokaz (i) Pretpostavimo da je $a^k = a^l$ za neke $0 \leq k, l \leq n-1$, $k > l$. Tada je $a^{k-l} = e$ što je u kontradikciji s pretpostavkom $|a| = n$ jer je $k - l < n$. Neka je sada $m \in \mathbb{Z}$. Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom, postoje $q, r \in \mathbb{Z}$ takvi da je $m = qn + r$, $0 \leq r < n$. Odavde slijedi da je $a^m = (a^n)^q\, a^r = a^r$, stoga se svaka potencija a^m nalazi u skupu $\{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$. Zaključujemo da je $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$.

(ii) Ako je $a^k = a^l$ za neke $k, l \in \mathbb{Z}$, $k > l$, tada je $a^{k-l} = e$ što je u kontradikciji s pretpostavkom $|a| = \infty$. Dakle, sve potencije a^k, $k \in \mathbb{Z}$, su različite. ■

Iz propozicije 1.4 (i) slijedi da je red konačne cikličke grupe $G = \langle a \rangle$ jednak redu generatora,

$$|G| = |a|. \tag{1.33}$$

Ova jednakost vrijedi i ako je $|a| = \infty$ jer tada G ima beskonačno mnogo elemenata. Cikličke grupe reda n obično zapisujemo u obliku

$$G = \langle a \mid a^n = e \rangle \tag{1.34}$$

gdje izraz $a^n = e$ nazivamo relacija. Primjere grupa definiranih generatorima i relacijama ćemo susresti u poglavlju 1.8 o diedralnim grupama.

Propozicija 1.5 *Neka je G konačna grupa reda $|G| \geq 2$ i neka je $a \in G$, $a \neq e$. Tada $|a|$ dijeli $|G|$. Nadalje, ako je $|G|$ prosti broj, tada je G ciklička grupa.*

Dokaz Prema propoziciji 1.4 (i) red cikličke podgrupe $\langle a \rangle$ jednak je $|\langle a \rangle| = |a|$, pa prema Lagrangeovom teoremu $|a|$ dijeli $|G|$. Ako je $|G| = p$ prosti broj, tada je $|a| = 1$ ili $|a| = p$. Kako $|a| = 1$ implicira $a = e$, zaključujemo da je $|a| = p$. Iz propozicije 1.4 (i) slijedi da niz $e, a, a^2, \ldots, a^{p-1}$ ima p različitih elemenata grupe G, stoga se u njemu nalaze svi elementi od G. Dakle, G je ciklička grupa generirana elementom a. ■

Propozicija 1.5 implicira da ako je $|G| = p$ prosti broj, tada svaki element a^k, $1 \leq k \leq p-1$, generira cijelu grupu G. Stoga G ima $p-1$ različitih generatora $a, a^2, \ldots, a^{p-1}$.

Teorem 1.14 *Neka je $G = \langle a \rangle$ ciklička grupa.*

(i) Ako je $|G| = \infty$, tada je G izomorfna grupi $(\mathbb{Z}, +)$.

(ii) Ako je $|G| = n < \infty$, tada je G izomorfna grupi $(\mathbb{Z}_n, +)$.

Dokaz (i) Preslikavanje $\varphi\colon \mathbb{Z} \to G$, $\varphi(k) = a^k$ je homomorfizam jer je

$$\varphi(k+l) = a^{k+l} = a^k\, a^l = \varphi(k)\varphi(l). \tag{1.35}$$

Ovo preslikavanje je surjekcija jer se G sastoji od svih potencija a^k, $k \in \mathbb{Z}$. Također, φ je injekcija jer su prema propoziciji 1.4 (ii) sve potencije a^k, $k \in \mathbb{Z}$, različite. Dakle, $G \simeq \mathbb{Z}$.

(ii) Ako je $|G| = n$, tada prema relaciji (1.33) imamo $a^n = e$. Definirajmo $\varphi\colon \mathbb{Z}_n \to G$ s $\varphi(\overline{k}) = a^k$. Preslikavanje φ je dobro definirano jer ako je $\overline{k} = \overline{l}$, tada je $k = l + qn$ za neki $q \in \mathbb{Z}$ iz čega slijedi $a^k = a^l (a^n)^q = a^l$. Nadalje, φ je homomorfizam jer je

$$\varphi(\overline{k} + \overline{l}) = \varphi(\overline{k+l}) = a^{k+l} = a^k a^l = \varphi(\overline{k})\varphi(\overline{l}).$$

Preslikavanje φ je očigledno bijekcija jer se $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$ preslikavaju u elemente $e, a, \ldots, a^{n-1}$, redom. Dakle, $G \simeq \mathbb{Z}_n$. ■

Posljedica ovog teorema je da su dvije cikličke grupe istog reda izmorfne jer su obje izomorfne grupi $\mathbb{Z}$ ili $\mathbb{Z}_n$. Promotrimo sada podgrupe cikličkih grupa.

Teorem 1.15 *Neka je $G = \langle a \rangle$ ciklička grupa. Svaka podgrupa grupe G je ciklička.*

Dokaz Neka je H podgrupa od G. Tvrdnja trivijalno vrijedi za $H = \{e\}$, stoga pretpostavimo $H \neq \{e\}$. Tada postoji $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ takav da je $a^k \in H$. Kako je $(a^k)^{-1} = a^{-k} \in H$ zaključujemo da postoji $k > 0$ takav da je $a^k \in H$. Neka je $d > 0$ najmanji prirodni broj za koji vrijedi $a^d \in H$. Tada je $\langle a^d \rangle \subseteq H$ jer je H podgrupa.

Odaberimo sada $x \in H$. Tada je $x = a^k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Prema teoremu o dijeljenju s ostakom postoje $q, r \in \mathbb{Z}$ takvi da je $k = qd + r$, $0 \leq r < d$. Odavde dobivamo

$$a^r = a^{k-qd} = a^k (a^d)^{-q} \in H \tag{1.36}$$

jer su $a^k, a^d \in H$. Relacija (1.36) imlicira $r = 0$ jer je $d \in \mathbb{N}$ najmanja potencija sa svojstvom $a^d \in H$. Dakle, $k = qd$ iz čega slijedi $x = (a^d)^q \in \langle a^d \rangle$. Dakle, $H \subseteq \langle a^d \rangle$ što povlači $H = \langle a^d \rangle$. Time je dokazano da je H ciklička podgrupa. ■

Teorem 1.16 *Neka je G ciklička grupa reda n. Tada za svaki $m \in \mathbb{N}$ takav da $m \mid n$ postoji jedinstvena podgrupa od G reda m.*

Dokaz Neka je $G = \langle a \rangle$. Tada je $a^n = e$ jer je $|G| = n$. Pretpostavimo da $m \mid n$ i definirajmo $d = n/m$. Pokažimo da je red elementa a^d jednak m. Očigledno je $(a^d)^m = a^n = e$. Pretpostavimo da postoji $0 < m_1 < m$ takav da je $(a^d)^{m_1} = e$. Kako je $a^n = e$, ovo implicira $dm_1 = qn$ za neki $q \in \mathbb{N}$. Odavde slijedi $m_1 = qm \geq m$ što je u kontradikciji s $m_1 < m$. Dakle, m je najmanji prirodni broj takav da je $(a^d)^m = e$, odnosno $|a^d| = m$. Zaključujemo da je $\langle a^d \rangle$ ciklička podgrupa reda m.

Dokažimo sada jedinstvenost. Neka je H podgrupa od G reda m. Prema teoremu 1.15, $H = \langle a^k \rangle$ gdje je $k > 0$ najmanji prirodni broj takav da je $a^k \in H$. Kako je $|H| = |a^k| = m$, vrijedi $(a^k)^m = e = a^n$ što implicira $km = qn$ za neki $q \in \mathbb{N}$. Stoga je $k = qd$ za $d = n/m$. Odavde slijedi $a^k = (a^d)^q \in \langle a^d \rangle$ što pokazuje $H \subseteq \langle a^d \rangle$. S

obzirom da podgrupe H i $\langle a^d \rangle$ imaju isti red m zaključujemo da je $H = \langle a^d \rangle$. ■

Ako je $G = \langle a \rangle$ ciklička grupa reda n, tada su sve njezine podgrupe oblika $\langle a^d \rangle$ gdje je $d = n/m$. U slučaju kada je n prosti broj, G ima samo trivijalne podgrupe.

Primjer

Primjenom teorema 1.16 lako možemo odrediti sve podgrupe grupe $\mathbb{Z}_n$. Pri tome je potrebno odrediti sve prirodne brojeve m koji dijele n. Tada je $\langle a^d \rangle$, gdje je $d = n/m$, podgrupa reda m. Na primjer, $\mathbb{Z}_{12}$ ima netrivijalne podgrupe reda $m = 2, 3, 4, 6$:

(a) $H_1 = \langle \overline{6} \rangle = \{\overline{0}, \overline{6}\} \quad (m = 2)$,

(b) $H_2 = \langle \overline{4} \rangle = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\} \quad (m = 3)$,

(c) $H_3 = \langle \overline{3} \rangle = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\} \quad (m = 4)$,

(d) $H_4 = \langle \overline{2} \rangle = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \quad (m = 6)$.

1.7 Grupe permutacija

U ovom poglavlju ćemo promotriti elementarna svojstva i pojmove vezane za grupu permutacija. Neka je X neprazan skup. Svako bijektivno preslikavanje $\sigma \colon X \to X$ nazivamo permutacija na skupu X. Skup svih bijekcija na X očigledno tvori grupu u odnosu na kompoziciju preslikavanja,

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)), \quad a \in X, \tag{1.37}$$

a neutralni element u grupi je identiteta $id_X(a) = a$ za svaki $a \in X$. Ovo motivira sljedeću definiciju.

Definicija 1.18 *Neka je X neprazan skup. Grupa svih permutacija na skupu X naziva se simetrična grupa na X i označava sa S_X. Svaka podgrupa grupe S_X naziva se grupa permutacija na X.*

Ako je X konačan skup od n elemenata, tada S_X označavamo sa S_n i nazivamo simetrična grupa reda n. Na skupu X možemo uvesti uređaj i bez gubitka općenitosti

elemente možemo označiti s $1, 2, \ldots, n$. Tada se permutacija $\sigma \in S_n$ može zapisati u matričnom obliku

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

a neutralni element je matrica

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Promotrimo za primjer grupu S_3. Sve permutacije na skupu $X = \{1, 2, 3\}$ su dane sljedećim preslikavanjima:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{1.38}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

Umnožak permutacija računa se uobičajenim pravilom za kompoziciju preslikavanja. Na primjer,

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e.$$

Inverzni element se također lako nalazi iz matričnog zapisa,

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_2.$$

Množenje u grupi S_3 prikazano je u tablici 1.3. Elementarnom kombinatorikom se pokazuje da na skupu od n elemenat imamo $n!$ permutacija, stoga je $|S_n| = n!$.

U simetričnoj grupi istaknuto mjesto zauzimaju permutacije koje neke elemente skupa X ciklički "rotiraju". Takve permutacije nazivaju se cikličke permutacije.

Definicija 1.19 *Neka je $\sigma \in S_n$. Ako postoje $x_1, x_2, \ldots x_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takvi da je*

$$\begin{aligned} \sigma(x_i) &= x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots r-1, \\ \sigma(x_r) &= x_1, \\ \sigma(x) &= x, \quad x \notin \{x_1, x_2, \ldots x_r\}, \end{aligned}$$

tada permutaciju σ nazivamo ciklička permutacija duljine r i označavamo s $(x_1\, x_2 \ldots x_r)$. Cikličku permutaciju duljine dva nazivamo transpozicija.

$\cdot$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_1	σ_2	e	σ_5	σ_3	σ_4
σ_2	e	σ_1	σ_4	σ_5	σ_3
σ_3	σ_4	σ_5	e	σ_1	σ_2
σ_4	σ_5	σ_3	σ_2	e	σ_1
σ_5	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	e

Tablica 1.3: Tablica množenja u grupi S_3.

Ciklička permutacija preslikava elemente $x_1, x_2, \ldots, x_r$ prema pravilu

$$x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_r \mapsto x_1 \tag{1.40}$$

dok na ostalim elementima djeluje kao identiteta. Ciklička permutacija duljine jedan je identiteta koju zapisujemo (x) gdje je x bilo koji od brojeva $1, 2, \ldots, n$. Na primjer, ciklička permutacija $(2\,1\,3)$ na skupu $X = \{1, 2, 3, 4\}$ je preslikavanje

$$2 \mapsto 1, \quad 1 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 2, \quad 4 \mapsto 4,$$

koju možemo zapisati kao

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ciklička permutacija $(x_1\, x_2\, \ldots\, x_r)$ se može napisati na r različitih načina tako da svaki od elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_r$ bude na prvom mjestu. Za dvije cikličke permutacije $(x_1\, x_2\, \ldots\, x_r)$ i $(y_1\, y_2\, \ldots\, y_s)$ kažemo da su disjunktne ako nemaju zajedničkih elemenata, odnosno ako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \cap \{y_1, y_2, \ldots, y_s\} = \emptyset$. Cikličke permutacije su osnovni blokovi na koje se može rastaviti proizvoljna permutacija.

Teorem 1.17 *Svaka permutacija $\sigma \in S_n$ je umnožak disjunktnih cikličkih permutacija. Ciklička faktorizacija je jedinstvena do na poredak cikličkih permutacija i umetanje ili ispuštanje cikličkih permutacija duljine jedan.*

Umjesto dokaza opišimo algoritam kojim se računa ciklička faktorizacija.

Algoritam za cikličku faktorizaciju

(1) Prvu cikličku permutaciju započnite s $a_1 = 1$. Svaku sljedeću cikličku permutaciju započnite s najmanjim elementom $a_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ koji se ne nalazi u prethodnim cikličkim permutacijama.

(2) Odredite $a_2 = \sigma(a_1)$. Ako je $a_2 = a_1$, tada ciklička permutacija ima duljinu jedan i pišemo (a_1). Ako je $a_2 \neq a_1$, tada pišemo $(a_1\, a_2$ (bez desne zagrade!).

(3) Odredite $a_3 = \sigma(a_2)$. Ako je $a_3 = a_1$, tada je ciklička permutacija dana s $(a_1\, a_2)$. Ako je $a_3 \neq a_1$, tada pišemo $(a_1\, a_2\, a_3$. Ponavljajte ovaj postupak dok se ciklička permutacija ne zatvori. Nakon toga vratite se na početak algoritma. Ponovite korake (1)–(3) dok se ne iscrpe svi brojevi u skupu $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ilustrirajmo ovaj algoritam na primjeru permutacije $\sigma \in S_{13}$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 3 & 1 & 11 & 9 & 5 & 10 & 6 & 4 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Počevši algoritam s $a_1 = 1$ dobivamo

$$\sigma = (1\ \ 12\ \ 8\ \ 10\ \ 4)(2\ \ 13)(3)(5\ \ 11\ \ 7)(6\ \ 9).$$

Primijetimo da se ciklička permutacija (3) može ispustiti jer je svaka ciklička permutacija duljine jedan identiteta. Dakle,

$$\sigma = (1\ \ 12\ \ 8\ \ 10\ \ 4)(2\ \ 13)(5\ \ 11\ \ 7)(6\ \ 9). \tag{1.41}$$

Kako su cikličke permutacije u (1.41) disjunktne, možemo ih napisati u bilo kojem poretku.

Primijetimo da se svaka ciklička permutacija $(a_1\ \ a_2\ \ \ldots a_m)$ može napisati kao umnožak transpozicija

$$(a_1\ \ a_2\ \ \ldots a_m) = (a_1\ \ a_m)(a_1\ \ a_{m-1}) \ldots (a_1\ \ a_2).$$

Korolar 1.2 *Svaka permutacija se može napisati kao umnožak transpozicija.*

Ova faktorizacija nije jedinstvena jer se permutacija σ može napisati kao umnožak različitog broja transpozicija. Međutim, može se pokazati da je njezina parnost jedinstvena. Drugim riječima, ako se σ može napisati kao umnožak n ili m transpozicija, tada su n i m ili oba parni ili oba neparni brojevi. Sljedeći primjer ilustrira ovo svojstvo. Množenjem transpozicija na desnoj strani jednakosti lako se provjeri da vrijedi

$$\begin{aligned}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} &= (4\,5)\,(3\,5)\,(2\,5)\,(1\,5) \\ &= (5\,3)\,(2\,1)\,(3\,5)\,(4\,5)\,(2\,3)\,(3\,5).\end{aligned}$$

Dakle, permutacija σ je umnožak četiri ili šest transpozicija. U bilo kojem drugom rastavu σ se može se napisati isključivo kao umnožak parnog broja transpozicija. Ovo motivira sljedeću definiciju.

Definicija 1.20 *Kažemo da je permutacija $\sigma \in S_n$ parna (neparna) ako se može napisati kao umnožak parnog (neparnog) broja transpozicija. Predznak permutacije σ definiran je s*

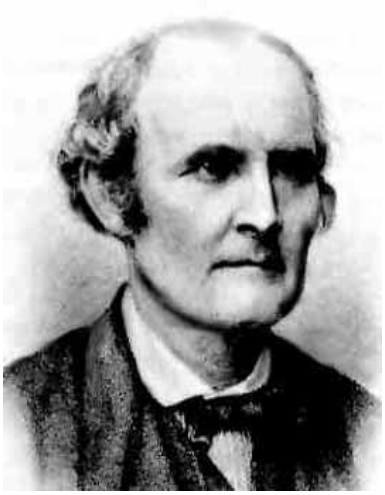
$$\epsilon(\sigma) = \begin{cases} +1 & \textit{ako je } \sigma \textit{ je parna permutacija,} \\ -1 & \textit{ako je } \sigma \textit{ je neparna permutacija.} \end{cases}$$

Skup svih parnih permutacija u S_n, $n > 1$, nazivamo alternirajuća grupa A_n.

Lema 1.1 *Neka je $n \geq 2$. Preslikavanje $\epsilon\colon S_n \to G$, gdje je $G = \{1, -1\}$ multiplikativna grupa, je epimorfizam.*

Dokaz Neka su $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$. Ako su σ_1 i σ_2 obje parne ili obje neparne permutacije, tada je $\sigma_1\sigma_2$ parna permutacija. Ako je σ_1 neparna i σ_2 parna permutacija, tada je $\sigma_1\sigma_2$ neparna permutacija. Ovo implicira da u svakom slučaju vrijedi $\epsilon(\sigma_1\sigma_2) = \epsilon(\sigma_1)\sigma(\sigma_2)$. Budući S_n sadrži transpoziciju $\tau = (1\,2)$, neutralni element $e \in S_n$ možemo rastaviti kao $e = (1\,2)(2\,1)$, pa je $\epsilon(e) = 1$. Nadalje, $\epsilon(\tau) = -1$, stoga je ϵ surjekcija. Zaključujemo da je ϵ epimorfizam. ■

Teorem 1.18 *A_n je normalna podgrupa simetrične grupe S_n. Ako je $n \geq 2$, tada je red podgrupe A_n jednak $|A_n| = \frac{1}{2}n!$.*



Slika 1.3: Arthur Cayley, 1821-1895. Najvažniji Cayleyev doprinos u razvoju algebre je rad na algebri matrica.

Dokaz Ako je $n = 1$, tada je $A_1 = S_1 = \{e\}$, stoga je A_1 trivijalno normalna podgrupa od S_1. Neka je $n \geq 2$ i neka je $G = \{1, -1\}$ mulitiplikativna grupa iz leme 1.1. Prema lemi 1.1 preslikavanje $\epsilon\colon S_n \to G$ je epimorfizam, pa je prema prvom teormu o izomorfizmu

$$S_n/Ker(\epsilon) \simeq G. \tag{1.42}$$

Jezgru homomorfizma tvore upravo parne permutacije jer je

$$Ker(\epsilon) = \{\sigma \in S_n \mid \epsilon(\sigma) = 1\} = A_n.$$

Stoga je A_n normalna podgrupa od S_n. Nadalje, iz relacije (1.42) slijedi $|S_n/A_n| = |G| = 2$, što povlači da je $[S_n\colon A_n] = 2$. Iz Lagrangeovog teorema dobivamo $|S_n| = [S_n\colon A_n]\,|A_n|$ što implicira

$$|A_n| = \frac{1}{[S_n : A_n]}\,|S_n| = \frac{1}{2}\,n!.$$

■

Promotrimo ponovo simetričnu grupu S_3 čiji elementi su dani permutacijama (1.38) i (1.39). Uvedimo oznake $\sigma = \sigma_1$ i $\tau = \sigma_3$. Lako se vidi da je

$$\sigma^2 = \sigma_2,\ \sigma^3 = e,\ \tau^2 = e,\ \sigma^2\tau = \tau\sigma = \sigma_4,\ \sigma\tau = \sigma_5.$$

Dakle, svi elementi grupe S_3 se mogu zapisati kao

$$S_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}.$$

Umnožak bilo koja dva elementa u S_3 se može odrediti koristeći relacije

$$\sigma^3 = \tau^2 = e, \quad \sigma^2\tau = \tau\sigma. \tag{1.43}$$

Ove relacije potpuno određuju Cayleyevu tablicu grupe S_3. Kažeo da su elementi σ i τ *generatori* grupe S_3 koji zadovoljavaju *definirajuće relacije* (1.43). Grupu S_3 možemo zapisati koristeći generatore i relacije u obliku

$$S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = \tau^2 = e,\ \sigma^2\tau = \tau\sigma \rangle.$$

Važnost grupa permutacija se vidi iz sljedećeg teorema.

Teorem 1.19 (Cayleyev teorem) *Svaka grupa je izomorfna nekoj grupi permutacija.*

Dokaz Neka je G grupa. Svakom elementu $a \in G$ želimo pridružiti permutaciju na skupu G. Za odabrani $a \in G$ i definirajmo

$$f_a \colon G \to G, \quad f_a(x) = ax.$$

Preslikavanje f_a je očigledno bijekcija jer $ax = ay$ implicira $x = y$, dok za proizvoljni $y \in G$ vrijedi $f_a(a^{-1}y) = y$. Dakle, $f_a \in S_G$. Promotrimo sada preslikavanje

$$\phi \colon G \to S_G, \quad \phi(a) = f_a,$$

koje elementu $a \in G$ pridružuje permutaciju $f_a \in S_G$. Za svaki $x \in G$ vrijedi

$$f_{ab}(x) = a(bx) = f_a(f_b(x)) = (f_a \circ f_b)(x). \tag{1.44}$$

Jednadžba (1.44) povlači $f_{ab} = f_a \circ f_b$, odnosno $\phi(ab) = \phi(a) \circ \phi(b)$. Dakle, ϕ je homomorfizam. Nadalje, ako je $\phi(a) = \phi(b)$, tada je $ax = bx$ za svaki $x \in G$. Za $x = e$ dobivamo $a = b$ što pokazuje da je ϕ injekcija. Iz navedenog zaključujemo da je $\phi \colon G \to Im(\phi)$ izomorfizam s G na grupu permutacija $Im(\phi) \subseteq S_G$. ■

Homomorfizam ϕ u Cayleyevom teoremu se naziva *lijeva regularna reprezentacija* ili *permutacijska reprezentacija* grupe G. Povijesno gledano, konačne grupe su se prvo proučavale kao podgrupe neke simetrične grupe S_n, a tek kasnije uveden je aksiomatski pristup u teoriji grupa. Prednost aksiomatskog pristupa je u tome što se mnogi rezultati mogu elegantno iskazati bez referiranja na konkretnu simetričnu grupu.

Primjer

Odredimo permutacijsku reprezentaciju cikličke grupe reda četiri $G = \{e, a, a^2, a^3\}$. Svaki element a^k definira permutaciju $f_{a^k} : G \to G$ na skupu G danu sam $f_{a^k}(a^l) = a^{k+l}$. Označimo elemente od G sa $e \mapsto 1, a \mapsto 2, a^2 \mapsto 3, a^3 \mapsto 4$ i odredimo slike elemenata $1, 2, 3, 4$ za svaki f_{a^k}. Na primjer, $f_{a^3}(a^2) = a^5 = a$ povlači da f_{a^3} preslikava 3 u 2. Direktnim računom se lako pokaže da preslikavanja f_{a^k} daju sljedeće permutacije:

$$f_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1), \tag{1.45}$$

$$f_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3\,4), \tag{1.46}$$

$$f_{a^2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3)(2\,4), \tag{1.47}$$

$$f_{a^3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\,4\,3\,2). \tag{1.48}$$

1.8 Diedralne grupe

Teorija grupa ima važnu ulogu u proučavanju simetrija, posebno u prirodnim znanostima. Intuitivno, kažemo da neki objekt posjeduje simetriju ako je invarijantan u odnosu na određene transformacije. Na primjer, sfera u $\mathbb{R}^3$ je invarijantna u odnosu na svaku rotaciju oko osi koja prolazi središtem sfere, pa kažemo da sfera ima rotacijsku simetriju. U ovom poglavlju definirat ćemo simetrije geometrijskih objekata i pobliže opisati simetrije pravilnih poligona. Neka je X podskup prostora $\mathbb{R}^n$ na kojem je definirana Euklidska udaljenost

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Definicija 1.21 *Permutacija $\sigma \in S_X$ naziva se simetrija na skupu $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ako je*

$$d(\sigma(x), \sigma(y)) = d(x, y) \quad \textit{za sve} \quad x, y \in X.$$

Drugim riječima, simetrija na skupu X je svaka bijekcija $\sigma\colon X \to X$ koja čuva udaljenost između svake dvije točke u X. Primijetimo da u gornjoj definiciji X može biti konačan ili beskonačan skup.

Sa T_X skup svih simetrija na skupu X. Pokažimo da je T_X podgrupa simetrične grupe S_X. Ako su $\sigma, \tau \in T_X$, tada je

$$\begin{aligned} d(\tau\sigma^{-1}(x), \tau\sigma^{-1}(y)) &= d(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)) \\ &= d(\sigma\sigma^{-1}(x), \sigma\sigma^{-1}(y)) = d(x, y) \quad \forall\, x, y \in X, \end{aligned}$$

što pokazuje da je $\tau\sigma^{-1} \in T_X$. Dakle, $T_X \leq S_X$.

Definicija 1.22 *Grupu T_X nazivamo grupa simetrija na skupu X.*

Navedimo nekoliko primjera.

Primjer

Neka je $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ kružnica radijusa $R > 0$ sa središtem u ishodištu i neka je R_θ operator rotacije za kut θ u pozitivnom smjeru. Preslikavanje $R_\theta\colon X \to X$ je očigledno bijekcija i za svake dvije točke $T_1, T_2 \in X$ vrijedi

$$d(R_\theta\, T_1, R_\theta\, T_2) = d(T_1, T_2), \tag{1.49}$$

pa je R_θ simetrija na skupu X za svaki $\theta \in R$. Prema jednadžbi (1.7), operatori rotacije se mogu prikazati kao matrice

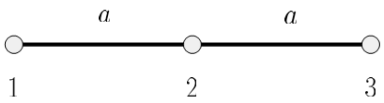
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

koje tvoje specijalnu ortognonalnu grupu $SO(2)$. Dakle, $SO(2)$ je grupa simetrija na skupu X.

Primjer

Neka je X skup točaka na pravcu u oznakama $1, 2, 3$ koje su poredane kao na slici 1.4. Za udaljenosti točaka skupa X vrijedi

$$d(1, 2) = d(2, 3) = a, \quad d(1, 3) = 2a.$$



Slika 1.4: Skup točaka X.

Simetrije skupa X tvore podgrupu simetrične grupe S_3 definirane permutacijma (1.38) i (1.39). Promotrimo djelovanje permutacija na točke iz skupa X. Permutacije $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ i σ_5 nisu simetrije jer

$$\begin{aligned} d(\sigma_1(2), \sigma_1(3)) &= d(3,1) \neq d(2,3), \\ d(\sigma_2(1), \sigma_2(2)) &= d(3,1) \neq d(1,2), \\ d(\sigma_3(1), \sigma_3(2)) &= d(1,3) \neq d(1,2), \\ d(\sigma_5(2), \sigma_5(3)) &= d(1,3) \neq d(2,3). \end{aligned}$$

Međutim, za permutaciju σ_4 vrijedi

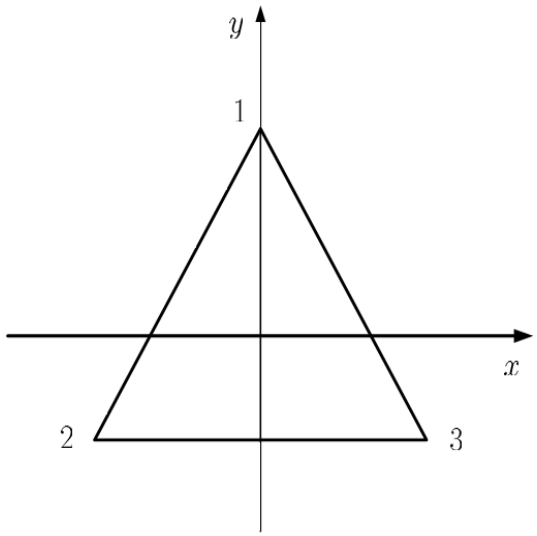
$$\begin{aligned} d(\sigma_4(1), \sigma_4(2)) &= d(3,2) = d(1,2), \\ d(\sigma_4(2), \sigma_4(3)) &= d(2,1) = d(2,3), \\ d(\sigma_4(1), \sigma_4(3)) &= d(3,1) = d(1,3), \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je σ_4 simetrija skupa X. Dakle, grupa simetrija skupa X ima dva elementa, $T_X = \{e, \sigma_4\}$.

Važna grupa simetrija su simetrije pravilnog poligona P_n, $n \geq 3$, koje permutiraju vrhove tog poligona. Pretpostavimo da se središte poligona nalazi u ishodištu koordinatnog sustava. Vrhove poligona označimo s $1, 2, \ldots, n$ u smjeru suprotno od kazaljke na satu. Slika 3 prikazuje tako označeni trokut P_3. Simetrija poligona P_n čuva udaljenost između svakog para vrhova poligona.

Definicija 1.23 *Grupa simetrija pravilnog poligona P_n naziva se diedralna grupa D_n.*

Promotrimo pobliže elemente grupe D_n. Permutacija σ je simetrija poligona P_n ako i samo ako σ preslikava dva susjedna vrha u dva susjedna vrha. Rotacija R za kut $2\pi/n$



Slika 1.5: Trokut P_3.

(koju dogovorno uzimamo u smjeru suprotno od kazaljke na satu) očigledno pripada grupi D_n. Rotacija R preslikava vrh k u vrh $k+1$, stoga je R ciklička permutacija

$$R = (1\ 2\ 3 \ldots n). \tag{1.50}$$

Kompozicija od n rotacija preslikava svaki vrh u samoga sebe što znači da je $R^n = 1$ gdje 1 označava jedinicu u S_n. Osim rotacija, u grupi D_n imamo i refleksiju D obzirom na pravac koji prolazi vrhom 1 i središtem polinoga P_n (umjesto vrha 1 možemo odabrati bilo koji drugi fiksni vrh). Refleksija D je permutacija dana s

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & n & n-1 & \ldots & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.51}$$

Primijetimo da je $D^2 = 1$. Pokažimo da grupa D_n ima $2n$ elemenata. Simetrija poligona je potpuno određena preslikavanjem uređenog para $(1, 2)$. Pretpostavimo da simetrija $\sigma \in D_n$ preslikava vrh 1 u vrh k, tj. pretpostavimo da je $\sigma(1) = k$. Kako je vrh 2 susjedan vrhu 1, onda $\sigma(2)$ može biti samo $k-1$ ili $k+1$ (gdje je $n+1 \equiv 1$ i $1-1 \equiv n$). Kako postoji $2n$ takvih mogućnosti zaključujemo da D_n ima $2n$ elemenata. Rotacija R i refleksija D generiraju $2n$ različitih simetrija poligona P_n koje tvore diedralnu grupu D_n,

$$D_n = \{1, R, R^2, \ldots, R^{n-1}, D, DR, DR^2, \ldots, DR^{n-1}\}.$$

Lako se provjeri da su sve simetrije trokuta na slici 1.5 dane elementima D^iR^j za $i = 0, 1$ i $j = 0, 1, 2$. Promatranjem kako rotacija i refleksija djeluju na vrhove poligona $\{1, 2, \ldots, n\}$ može se pokazati da vrijedi $RD = DR^{-1}$. Odavde indukcijom dobivamo da je $R^kD = DR^{-k}$ za $0 \leq k \leq n$. Stoga množenje u grupi D_n zadovoljava relacije

$$R^n = D^2 = 1, \quad R^kD = DR^{-k}, \quad 0 \leq k \leq n. \tag{1.52}$$

Umnožak bilo koja dva elementa grupe D_n se može svesti na oblik D^iR^j za neki $i = 0, 1$ i $j = 0, 1, \ldots, n-1$ korištenjem pravila (1.52). Na primjer, ako je $n = 12$, tada je

$$(DR^9)(DR^6) = D(R^9D)R^6 = D(DR^{-9})R^6 = D^2R^{-3} = R^{-3} = R^9.$$

Diedralna grupa D_n generirana je elementima R i D i relacijama (1.52). Grupu D_n simbolički zapisujemo u obliku

$$D_n = \langle R, D \mid R^n = D^2 = 1,\ R^kD = DR^{-k} \rangle.$$

Generatori diedralne grupe se mogu, osim permutacijama (1.50) i (1.51) prikazati i matricama reda 2,

$$R = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lako se provjeri da matrice R i D zadovoljavaju relacije (1.52). Matricu R interpretiramo kao rotaciju u ravnini (x, y) za kut $2\pi/n$ u pozitivnom smjeru, a D predstavlja transformaciju $(x, y) \mapsto (y, x)$ odnosno refleksiju obzirom na pravac $y = x$. Na primjeru diedralne grupe vidimo da se ista algebarska struktura može realizirati na više načina koristeći elemente drugih algebarskih struktura.

Kleinova 4-grupa

Navedimo još jedan primjer grupe definirane generatorima i relacijama. Promotrimo matrice

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.53}$$

$\cdot$	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

Tablica 1.4: Tablica množenja u Kleinovoj 4-grupi.

Lako se provjeri da a, b, c i e zadovoljavaju relacije

$$a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad ab = c, \quad bc = a, \quad ca = b.$$

Grupa generirana elementima a, b i c se naziva Kleinova 4-grupa K_4. Tablica množenja u K_4 dobiva se iz relacija (1.54). Na primjer,

$$ac = a(ab) = a^2b = b.$$

Kleinovu 4-grupu možemo zapisati kao

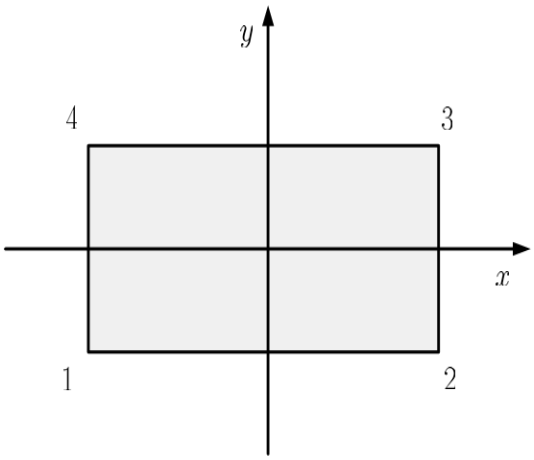
$$K_4 = \big\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = e,\, ab = c,\, bc = a,\, ca = b \big\rangle. \tag{1.54}$$

Kleinova 4-grupa je grupa simetrija pravokutnika prikazanog na slici 1.6. Simetrije su dane permutacijama

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{1.55}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.56}$$

Geometrijski promatrano, A je rotacija za kut π, dok su B i C refleksije u odnosu na osi x i y. Primijetimo da rotacija za kut $\pi/2$ nije simetrija jer pravokutnik nije pravilan. Permutacije E, A, B i C zadovoljavaju iste relacije kao matrice e, a, b i c, stoga je K_4 izomorfna grupi simetrija (1.55)-(1.56). U ovom primjeru algebarska struktura (1.54) ima dvije različite realizacije, jednu pomoću matrica (1.53) i drugu pomoću permutacija (1.55)-(1.56).



Slika 1.6: Pravokutnik.

1.9 Djelovanje grupe

U ovom poglavlju ćemo promatrati djelovanje grupa na skupove. Proučavanjem djelovanja neke grupe na samu sebe možemo doznati više o algebarskoj strukturi grupe. Ideja djelovanja se javlja i kod proučavanja drugih algebarskih struktura kao što su moduli, vektorski prostori i polja.

Definicija 1.24 *Kažemo da grupa G djeluje na skup A ako postoji preslikavanje $G \times A \to A$, $(g, a) \mapsto g \cdot a$, koje zadovoljava sljedeća svojstva:*

(1) $g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = (g_1 g_2) \cdot a$ *za sve* $g_1, g_2 \in G$, $a \in A$,

(2) $e \cdot a = a$ *za svaki* $a \in A$,

gdje je e jedinica u G.

Naglasimo da $g \cdot a$ nije binarna operacija jer su skupovi G i A općenito različiti. Uvjeti (1) i (2) impliciraju da je djelovanje grupe kompatibilno sa strukturom grupe.

Djelovanje grupe na skup A inducira permutacije na skupu A. Svakom elementu $g \in G$ možemo pridružiti preslikavanje

$$\sigma_g \colon A \to A, \quad \sigma_g(a) = g \cdot a.$$

Pokažimo da je σ_g bijekcija na A. Doista, σ_g ima inverz jer je

$$\sigma_g\sigma_{g^{-1}}(a) = g \cdot (g^{-1} \cdot a) = (gg^{-1}) \cdot a = e \cdot a = a,$$

a slično se pokazuje $\sigma_{g^{-1}}\sigma_g(a) = a$. Dakle, σ_g je permutacija na skupu A, tj. $\sigma_g \in S_A$.

Teorem 1.20 *Neka grupa G djeluje na skup A.*

(i) Preslikavanje $\varphi\colon G \to S_A$ dano s $\varphi(g) = \sigma_g$ je homomorfizam.

(ii) Svaki homomorfizam $\varphi\colon G \to S_A$ inducira djelovanje grupe G na skup A.

Dokaz (i) Neka su $g, h \in G$. Tada je

$$\varphi(gh)(a) = \sigma_{gh}(a) = (gh) \cdot a = g \cdot (h \cdot a) = \sigma_g(\sigma_h(a)) = \sigma_g\sigma_h(a) = \varphi(g)\varphi(h)(a)$$

za svaki $a \in A$. Dakle, $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$.

(ii) Neka je $\varphi\colon G \to S_A$ homomorfizam. Tada je $\varphi(g)\colon A \to A$ bijekcija za svaki $g \in G$. Definirajmo

$$g \cdot a = \varphi(g)(a), \quad a \in A. \tag{1.57}$$

Sada imamo

$$(gh) \cdot a = \varphi(gh)(a) = \varphi(g)\varphi(h)(a) = \varphi(g)\big(\varphi(h)(a)\big) = g \cdot (h \cdot a), \tag{1.58}$$

$$e \cdot a = \varphi(e)(a) = a, \tag{1.59}$$

jer je prema teoremu 1.1 $\varphi(e)$ identiteta u S_A. Dakle, preslikavanje (1.57) definira djelovanje grupe G na skup A. ■

Ovaj teorem pokazuje da su djelovanje grupe G na skup A i homomorfizmi $\varphi\colon G \to S_A$ u bijektivnoj korespondenciji, stoga prestavljaju isti pojam u različitim terminima. Svaki homomorfizam $\varphi\colon G \to S_A$ nazivamo *permutacijska reprezentacija* grupe G u simetričnu grupu S_A. Ako skup A ima n elemenata, tada je $S_A = S_n$ simetrična grupa reda n. Permutacijska reprezentacija od G je analogna matričnoj reprezentaciji linearnog operator na vektorskom prostoru. Odabir uređenja na skupu A odgovara odabiru baze u odnosu na koju definiramo matricu operatora.

Primjeri djelovanja grupe

(1) Specijalna ortogonalna grupa $SO(2)$ djeluje na ravninu $\mathbb{R}^2$ matričnim množenjem:

$$R_\theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_\theta \in SO(2).$$

Matrica R_θ je operator rotacije koja točku (x, y) zakreće za kut θ u pozitivnom smjeru. Djelovanje grupe $SO(2)$ je izometrija Euklidskog prostora $\mathbb{R}^2$ jer je

$$||R_\theta \cdot T|| = ||T|| \tag{1.60}$$

za svaku točku $T = (x\ y)^t \in \mathbb{R}^2$ gdje je $||T|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ Euklidska norma.

(2) Neka je $G = D_4$ i neka je $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ skup vrhova pravilnog četverokuta. Diedralna grupa D_4 djeluje na A sa

$$\sigma \cdot x_i = x_{\sigma(i)}, \quad \sigma \in D_4, \quad 1 \leq i \leq 4, \tag{1.61}$$

gdje je σ permutacijska realizacija elemenata grupe D_4 dana sa (1.50) i (1.51).

(3) Grupa G djeluje na samu sebe lijevom translacijom $g \cdot a = ga$ i desnom translacijom $g \cdot a = ag^{-1}$. Nadalje, grupa djeluje na samu sebe konjugacijom

$$g \cdot a = gag^{-1}.$$

Lako se pokazuje da ove operacije definiraju djelovanje. Na primjer, za konjugaciju vrijedi

$$\begin{aligned} (gh) \cdot a &= (gh)a(gh)^{-1} = g(hah^{-1})g^{-1} = g \cdot (h \cdot a), \\ e \cdot a &= eae^{-1} = a. \end{aligned}$$

(4) Neka je N normalna podgrupa od G. Grupa G djeluje na kvocijentnu grupu G/N pravilom

$$g \cdot (aN) = gag^{-1}N.$$

Doista, ako su $g, h \in G$ i $aN \in G/N$, tada imamo

$$\begin{aligned} (gh) \cdot aN &= (gh)a(gh)^{-1}N = g(hah^{-1})g^{-1}N = g \cdot (hah^{-1}N) = g \cdot (h \cdot (aN)), \\ e \cdot (aN) &= eae^{-1}N = aN. \end{aligned}$$

Definicija 1.25 *Neka G djeluje na skup A, i neka je $a \in A$. Skup*

$$G_a = \{g \in G \mid g \cdot a = a\}$$

nazivamo stabilizator elementa a u G. Skup

$$Ga = \{g \cdot a \mid g \in G\}$$

nazivamo orbita elementa a u G.

Lako se pokazuje da je G_a podgrupa od G. Ako G djeluje na sebe konjugacijom, $g \cdot a = gag^{-1}$, onda je stabilizator elementa $a \in G$ jednak normalizatoru od a u G,

$$G_a = \{g \in G \mid gag^{-1} = a\} = N(a),$$

a orbita elementa a je klasa konjugacije

$$Ga = \{gag^{-1} \mid g \in G\} = C(a).$$

Očigledno je $a \in Ga$ jer je $e \cdot a = a$. Na primjer, ako grupa $SO(2)$ djeluje na ravninu $\mathbb{R}^2$ kao u primjeru (1), onda je orbita točke $(r, 0) \in \mathbb{R}^2$ kružnica radijusa $|r| > 0$ sa središtem u ishodištu (vidi sliku 1.7). Djelovanje ove grupe slikovito ilustrira naziv "orbita". Primijetimo da je

$$N(a) = G \quad \text{i} \quad C(a) = \{a\} \quad \text{ako i samo ako je} \quad a \in Z(G) \tag{1.62}$$

gdje je $Z(G)$ centar grupe G.

Sljedeći rezultat pokazuje da orbite elemenata tvore particiju skupa A jer pripadanje istoj orbiti definira relaciju ekvivalencije.

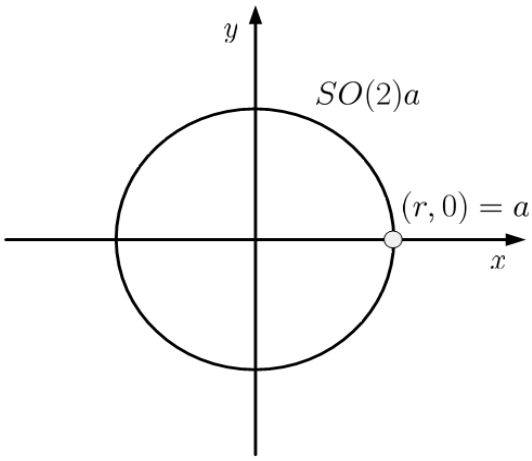
Teorem 1.21 *Neka grupa G djeluje na skup A. Relacija na A definirana sa*

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad a = g \cdot b \quad \textit{za neki} \quad g \in G \tag{1.63}$$

je relacija ekvivalencije. Stoga A možemo rastaviti po orbitama kao disjunktnu uniju

$$A = \bigcup_{a \in C} Ga \tag{1.64}$$

gdje C sadrži točno jedan element iz svake orbite.



Slika 1.7: Orbita točke $(r, 0)$ pod djelovanjem grupe $SO(2)$.

Dokaz Očigledno je $a \sim a$ jer je $e \cdot a = a$ za svaki $a \in A$ pa je relacija (1.63) refleksivna. Ako je $a \sim b$, tada postoji $g \in G$ takav da je $b = g \cdot a$. U tom slučaju

$$g^{-1} \cdot a = g^{-1} \cdot (g \cdot b) = (g^{-1}g) \cdot b = e \cdot b = b,$$

odnosno $b \sim a$ pa je relacija simerična. Nadalje, ako je $a \sim b$ i $b \sim c$, tada je $a = g \cdot b$ i $b = h \cdot c$ za neke $g, h \in G$. Odavde slijedi

$$a = g \cdot b = g \cdot (h \cdot c) = (gh) \cdot c,$$

odnosno $a \sim c$ što pokazuje da je relacija (1.63) tranzitivna. Dakle, (1.63) je relacija ekvivalencije na skupu A. Klasa ekvivalencije elementa $a \in A$ je orbita Ga jer je

$$\overline{a} = \{b \in A \mid b = g \cdot a,\ g \in G\} = Ga,$$

stoga je $A = \cup_{a \in C} Ga$ diskjunktna unija gdje C sadrži točno jedan element iz svake orbite. ■

Definicija 1.26 *Kažemo da grupa G djeluje tranzitivno na skup A ako za svaka dva elementa $a, b \in A$ postoji $g \in G$ takav da je $b = g \cdot a$.*

U slučaju tranzitivnog djelovanja skup A ima samo jednu orbitu jer je $A = G \cdot a$ za svaki $a \in G$. Istražimo sada vezu između orbite i stabilizatora elementa. Intuitivno očekujemo da je orbita elementa manja što je stabilizator veći. Precizna formulacija ove tvrdnje dana je sljedećim teoremom.

Teorem 1.22 *Neka grupa G djeluje na skup A. Kardinalni broj orbite Ga jednak je indeksu stabilizatora G_a u G, tj.*

$$|Ga| = [G\colon G_a]. \tag{1.65}$$

Dokaz Definirajmo preslikavanje skupova $f\colon Ga \to G/G_a$ s $f(g\cdot a) = gG_a$. Ovo preslikavanje je očigledno surjekcija jer orbita Ga sadrži elemente $g\cdot a$ za svaki $g \in G$. Pretpostavimo da je $f(g\cdot a) = f(h\cdot a)$. Tada je $gG_a = hG_a$, odnosno $h^{-1}g \in G_a$ što povlači $(h^{-1}g)\cdot a = a$. Djelovanjem s h na ovu jednakost dobivamo

$$h\cdot a = h\cdot(h^{-1}g)\cdot a = (hh^{-1}g)\cdot a = g\cdot a.$$

Dakle, f je bijekcija što implicira $|Ga| = |G/G_a| = [G : G_a]$. ■

Ako je G konačna grupa, onda je prema Lagrangeovom teoremu $|G| = |G_a|\,[G\colon G_a]$ pa iz (1.65) slijedi

$$|G| = |G_a|\,|Ga| \quad \text{za svaki} \quad a \in A. \tag{1.66}$$

Ako je A konačni skup, onda iz (1.64) i (1.65) slijedi da je broj elemenata skupa jednak

$$|A| = \sum_{a\in C} |Ga| = \sum_{a\in C} [G : G_a].$$

Time smo dokazali

Korolar 1.3 *Neka je A konačni skup na kojeg djeluje grupa G. Tada je*

$$|A| = \sum_{a\in C} [G : G_a]$$

gdje skup C sadrži točno jedan element iz svake orbite.

Neka je $A_g = \{a \in A \mid g\cdot a = a\}$ skup svih elemenata u A koji su stabilizirani elementom $g \in G$. Ako su A i G konačni skupovi, onda se broj orbita u A može izraziti kao prosječni broj elemenata u A koji stabilizirani elementima iz G.

Teorem 1.23 (Burnside) *Neka je G konačna grupa koja djeluje na konačni skup A. Tada je broj orbita u A, u oznaci $|A/G|$, jednak*

$$|A/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |A_g|. \tag{1.67}$$

Dokaz Definirajmo skup $S = \{(g, a) \in G \times A \mid g \cdot a = a\}$. Za fiksni $g \in G$ broj uređenih parova u S jednak je $|A_g|$, odnosno broju elemenata $a \in A$ koji su stabilizirani s g. Za fiksni $a \in A$ broj uređenih parova u S jednak je $|G_a|$, odnosno broju elemenata $g \in g$ koji stabiliziraju a. Stoga je

$$|S| = \sum_{g \in G} |A_g| = \sum_{a \in A} |G_a|. \tag{1.68}$$

Iz relacije (1.66) imamo $|G_a| = |G|/|Ga|$ pa je

$$\sum_{a \in A} |G_a| = |G| \sum_{a \in A} \frac{1}{|Ga|}. \tag{1.69}$$

Prema teoremu 1.21 skup A možemo rastaviti po orbitama $A = \cup_{a \in C} Ga$ gdje skup C sadrži točno jedan element iz svake orbite. Kako su orbite disjunktne, suma po elementima $a \in A$ se može napisati kao suma po elementima orbita Gb, $b \in C$. Ovo povlači da je

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{|Ga|} = \sum_{b \in C} \sum_{a \in Gb} \frac{1}{|Ga|}. \tag{1.70}$$

Međutim, $a \in Gb$ povlači da su a i b u istoj orbiti pa je $|Ga| = |Gb|$ za svaki $a \in Gb$. Stoga je

$$\sum_{a \in Gb} \frac{1}{|Ga|} = \sum_{a \in Gb} \frac{1}{|Gb|} = |Gb| \frac{1}{|Gb|} = 1 \tag{1.71}$$

pa iz (1.70) dobivamo

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{|Ga|} = \sum_{b \in C} 1 = |C| \tag{1.72}$$

gdje je $|C|$ broj orbita u A koji ćemo označiti s $|A/G|$. Sada iz relacija (1.68), (1.69) i (1.72) odmah slijedi

$$\sum_{g \in G} |A_g| = |G| \sum_{a \in A} \frac{1}{|Ga|} = |G| \, |A/G|, \tag{1.73}$$

odnosno

$$|A/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |A_g|. \tag{1.74}$$

■

Prema teoremu 1.21 djelovanje grupe G na sebe konjugacijom tvori particiju od G na klase konjugacije $C(a) = \{gag^{-1} \mid g \in G\}$. Ako je G konačna grupa, ovo ima za posljedicu sljedeći važni rezultat.

Teorem 1.24 (Jednadžba klase) *Neka je G konačna grupa i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ predstavnici klasa konjugacije koje imaju više od jednog elementa. Tada je*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n} [G : N(a_i)].$$

Dokaz Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m$ predstavnici svih klasa konjugacije u G gdje $a_{n+1}, \ldots, a_m$ predstavljaju klase s jednim elementom, odnosno $C(a_k) = \{a_k\}$ za $k = n+1, \ldots, m$. Tada je centar grupe dan sa $Z(G) = \{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m\}$ pa imamo

$$|G| = \sum_{i=1}^{m} |C(a_i)| = \sum_{i=1}^{n} |C(a_i)| + \sum_{i=n+1}^{m} |C(a_i)| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n} |C(a_i)|. \tag{1.75}$$

Prema teoremu 1.22 vrijedi

$$|C(a_i)| = [G : G_{a_i}] = [G : N(a_i)] \tag{1.76}$$

jer je stabilizator G_{a_i} jednak normalizatoru $N(a_i)$. Sada iz jednadžbi (1.75) i (1.76) dobivamo jednadžbu klase

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n} [G : N(a_i)].$$

■

Iz jednadžbe klase možemo izvesti određene zaključke o strukturi grupe. Kao prvu primjenu navodimo činjenicu da grupa reda p^n, gdje je p prost broj, ima netrivijalan centar.

Teorem 1.25 *Neka je G grupa reda p^n, $n \geq 1$, gdje je p prosti broj. Tada je centar grupe G netrivijalan.*

Dokaz Za grupu G jednadžbe klase glasi

$$p^n = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} [G : N(a_i)], \tag{1.77}$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_r$ predstavnici klasa konjugacije koji imaju više od jednog elementa. Prema Lagrangeovom teoremu vrijedi

$$p^n = |N(a_i)|\,[G : N(a_i)] \quad \text{za sve} \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

što implicira $|N(a_i)| = p^k$ i $[G : N(a_i)] = p^l$, gdje je $k + l = n$ za neke $0 \leq k, l \leq n$. Primijetimo da je $|N(a_i)| < p^n$ jer $a_i \notin Z(G)$, što implicira $k < n$, odnosno $l > 0$. Stoga p dijeli $[G : N(a_i)]$. Dakle, p dijeli sumu $\sum_{i=1}^{r}[G : N(a_i)]$, pa iz jednadžbe (1.77) slijedi da p dijeli $|Z(G)|$. Ovo dokazuje da je centar $Z(G)$ netrivijalan. ■

1.10 Teoremi o strukturi grupa

U ovom poglavlju ćemo navesti neke rezultate o strukturi konačnih grupa, posebno o strukturi konačno generiranih Abelovih grupa i Sylowvljeve teoreme. Da bismo razumjeli strukturu konačno generiranih Abelovih grupa, potrebo je uvesti pojam direktnog umnoška grupa.

1.10.1 Direktni umnožak

Neka su $G_1, G_2, \ldots, G_n$ grupe. Na kartezijevom umnošku $G = \times_{i=1}^{n} G_i$ možemo definirati strukturu grupe s množenjem

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n)(h_1, h_2, \ldots, h_n) = (g_1h_1, g_2h_2, \ldots, g_nh_n). \tag{1.78}$$

Jedinica u G je n-torka

$$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

dok je inverzni element dan s

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_n^{-1}).$$

Asocijativnost množenja u G se naslijeđuje od asocijativnosti množenja u grupama G_i. Lako se provjeri da ove operacije zadovoljavaju definiciju grupe 1.2.

Definicija 1.27 *Neka su $G_1, G_2, \ldots, G_n$ grupe. Skup $G = \times_{i=1}^{n} G_i$ s binarnom operacijom* (1.78) *nazivamo vanjski direktni umnožak grupa $G_1, G_2, \ldots, G_n$.*

Radi jednostavnosti, $G = \times_{i=1}^{n} G_i$ ćemo nazvati direktni umnožak grupa $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Ako su $G_1, G_2, \ldots, G_n$ konačne grupe, tada je očito red grupe G jednak

$$|G| = \prod_{i=1}^{n} |G_i|.$$

Za ilustraciju, promotrimo direktni umnožak Abelove grupe $G_1 = \mathbb{R}$ s operacijom zbrajanja i $G_2 = GL(n, \mathbb{R})$ s operacijom matričnog množenja. Množenje u $G_1 \times G_2$ je definirano s

$$(x, A)(y, B) = (x + y, AB).$$

Neutralni element je

$$e = (0, I)$$

gdje je I jedinična matrica reda n, dok je inverzni element dan s

$$(x, A)^{-1} = (-x, A^{-1}).$$

Sljedeća propozicija pokazuje da direktni umnožak $G = \times_{i=1}^{n} G_i$ sadrži izomorfnu kopiju svake grupe G_i koja je normalna podgrupa od G.

Propozicija 1.6 *Neka je $G = \times_{i=1}^{n} G_i$ direktni umnožak grupa $G_1, G_2, \ldots, G_n$.*

(i) Definirajmo

$$\overline{G}_i = \Big\{(e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \mid g_i \in G_i\Big\}.$$

Tada je $\overline{G}_i$ normalna podgrupa od G i $\overline{G}_i \simeq G_i$. Također,

$$G/\overline{G}_i \simeq \times_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} G_j.$$

(ii) Definirajmo projekciju na i-tu komponentu $\pi_i \colon G \to G_i$ s

$$\pi_i(g_1, g_2, \ldots, g_n) = g_i.$$

Tada je π_i epimorfizam s jezgrom

$$Ker(\pi_i) \simeq G/\overline{G}_i.$$

Dokaz (i) Ako su

$$x = (e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in \overline{G}_i, \quad y = (e_1, \ldots, e_{i-1}, h_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in \overline{G}_i,$$

tada je

$$xy^{-1} = (e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i h_i^{-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in \overline{G}_i.$$

Dakle, $\overline{G}_i$ je podgrupa od G. Preslikavanje

$$g_i \mapsto (e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$$

je izomorfizam, pa je $G_i \simeq \overline{G}_i$. Stoga G_i možemo identificirati s izomorfnom kopijom $\overline{G}_i \subseteq G$. Definirajmo preslikavanje $\varphi_i \colon G \to \times_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} G_j$ s

$$\varphi_i(g_1, g_2, \ldots, g_n) = (g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n),$$

koje jednostavno ispusti element g_i. Iz definicije množenja u direktnom umnošku slijedi da je φ_i homomorfizam. Jezgra homomorfizma φ_i je dana s

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \Big\{(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G \mid g_j = e_j,\ j \neq i\Big\} \\ &= \Big\{(e_1, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \mid g_i \in G_i\Big\} = \overline{G}_i, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je $\overline{G}_i$ normalna podgrupa od G. Kako je φ_i surjekcija, iz prvog teorema o izomorfizmu dobivamo

$$G/\overline{G}_i \simeq \times_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} G_j. \tag{1.79}$$

(ii) Slično kao u prethodnom slučaju lako se pokazuje da je projekcija $\pi_i \colon G \to G_i$ homomorfizam s jezgrom

$$\begin{aligned} Ker(\pi_i) &= \Big\{(g_1, g_2, \ldots, g_n) \mid g_i = e_i\Big\} \\ &= \Big\{(g_1, \ldots, g_{i-1}, e_i, g_{i+1} \ldots, g_n) \mid g_j \in G_j\Big\}. \end{aligned}$$

Preslikavanje dano s $(g_1, \ldots, g_{i-1}, e_i, g_{i+1} \ldots, g_n) \mapsto (g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1} \ldots, g_n)$ je izomorfizam grupa

$$Ker(\pi_i) \simeq \times_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} G_j,$$

pa iz jednadžbe (1.79) dobivamo $Ker(\pi_i) \simeq G/\overline{G}_i$. ■

Ako je $G = G_1 \times G_2$ direktni umnožak dviju grupa, tada se svaki element iz G može rastaviti kao

$$(g_1, g_2) = (g_1, e_2)(e_1, g_2).$$

Ovo implicira da je grupa G jednaka umnošku

$$G = \overline{G}_1 \overline{G}_2$$

gdje su $\overline{G}_1$ i $\overline{G}_2$ normalne podgrupe od G i $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = \{e\}$. Sljedeći teorem pokazuje da vrijedi obrat ovog zaključka i daje nam kriterij kada je neka grupa direktni umnožak dviju grupa.

Teorem 1.26 *Neka je G grupa s podgrupama H i K takve da su*

(i) H i K normalne podgrupe od G,

(ii) $H \cap K = \{e\}$.

Tada je $HK \simeq H \times K$.

Dokaz Prema teoremu 1.10, HK je podgrupa grupe G. Pokažimo da svaki element od H komutira sa svakim elementom od K. Neka su $h \in H$ i $k \in K$. Tada je $k^{-1}hk \in H$ jer je H normalna podgrupa. Stoga je $h^{-1}(k^{-1}hk) \in H$. Slično se pokazuje $(h^{-1}k^{-1}h)k \in K$, pa zaključujemo $h^{-1}k^{-1}hk \in H \cap K$. Kako je $H \cap K = \{e\}$, slijedi da je $h^{-1}k^{-1}hk = e$, odnosno $hk = kh$.

Svaki $x \in HK$ ima jedinstveni zapis kao umnožak $x = hk$ za neki $h \in H$ i $k \in K$. Doista, ako je $x = hk = h_1k_1$, tada $h_1^{-1}h = k_1k^{-1}$ implicira $h_1^{-1}h \in H \cap K$ i $k_1k^{-1} \in H \cap K$. Odavde slijedi $h_1 = h$ i $k_1 = k$ jer je $H \cap K = \{e\}$. Stoga je preslikavanje

$$\varphi\colon HK \to H \times K, \quad \varphi(hk) = (h, k),$$

dobro definirano. Nadalje,

$$\begin{aligned}\varphi((h_1k_1)(h_2k_2)) &= \varphi(h_1h_2k_1k_2) = (h_1h_2, k_1k_2)\\ &= (h_1, k_1)(h_2, k_2) = \varphi(h_1, k_1)\varphi(h_2, k_2)\end{aligned}$$

jer k_1 i h_2 komutiraju pa zaključujemo da je φ homomorfizam. Preslikavanje φ je očigledno bijekcija jer svaki element $(h, k) \in H \times K$ ima jedinstvenu prasliku $hk \in HK$. Dakle, grupe HK i $H \times K$ su izomorfne. ■

Definicija 1.28 *Neka je G grupa koja sadrži normalne podgrupe H i K takve da je $G = HK$ i $H \cap K = \{e\}$. Tada kažemo da je G unutarnji direktni umnožak grupa H i K.*

Na kraju promotrimo čemu je izomorfan direktni umnožak i kvocijentih grupa.

Teorem 1.27 *Neka su G_1 i G_2 grupe, i neka su $N_1 \lhd G_1$ i $N_2 \lhd G_2$. Tada je*

$$(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \simeq (G_1/N_1) \times (G_2/N_2).$$

Dokaz Definirajmo preslikavanje $\phi\colon G_1 \times G_2 \to (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$ s $\phi(x_1, x_2) = (x_1N_1, x_2N_2)$. Pokažimo da je ϕ homomorfizam. Imamo

$$\begin{aligned}\phi((x_1, x_2)(y_1, y_2)) &= \phi(x_1y_1, x_2y_2) = (x_1y_1N_1, x_2y_2N_2)\\ &= \big((x_1N_1)(y_1N_1), (x_2N_2)(y_2N_2)\big)\\ &= (x_1N_1, x_2N_2)(y_1N_1, y_2N_2) = \phi(x_1, x_2)\phi(y_1, y_2).\end{aligned}$$

Preslikavanje ϕ je surjektivno jer je

$$Im(\phi) = \{(x_1N_1, x_2N_2) \mid x_1, x_2 \in G\} = (G_1/N_1) \times (G_2/N_2).$$

Nadalje, jezgra homomorfizma je dana s

$$\begin{aligned}Ker(\phi) &= \{(x_1, x_2) \mid (x_1N_1, x_2N_2) = (N_1, N_2)\}\\ &= \{(x_1, x_2) \mid x_1N_1 = N_1,\ x_2N_2 = N_2\}\\ &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in N_1, x_2 \in N_2\} = N_1 \times N_2.\end{aligned}$$

Dakle, prema prvom teoremu o izomorfizmu, vrijedi

$$(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \simeq (G_1/N_1) \times (G_2/N_2).$$

■

1.10.2 Poludirektni umnožak

Ako su H i K Abelove grupe, tada je $H \times K$ također Abelova grupa. Dakle, nekomutativne grupe nije moguće dobiti kao direktni umnožak Abelovih grupa. U ovom poglavlju éemo razmotriti generalizaciju direktnog umnoška koje na skupu $H \times K$ općenito definira strukturu nekomutativne grupe čak i ako su H i K Abelove. Ova konstrukcija naziva se poludirektni umnožak.

Da bismo motivirali definiciju poludirektnog umnoška, pretpostavimo da G sadrži dvije podgrupe H i K sa sljedećim svojstvima:

(a) $H \lhd G$,

(b) $H \cap K = \{e\}$.

Prema teoremu 1.10, HK je podgrupa od G. Ako su h_1k_1, $h_2k_2 \in HK$, tada je njihov umnožak jednak

$$(h_1k_1)(h_2k_2) = h_1(k_1h_2k_1^{-1})(k_1k_2) = h_3k_3, \tag{1.80}$$

gdje je $k_3 = k_1k_2$ i $h_3 = k_1h_2k_1^{-1} \in H$ jer je H normalna podgrupa. Element $k_1h_2k_1^{-1}$ jednak je $I_{k_1}(h_2)$, gdje je I_k konjugacija elementom $k \in K$. Definirajmo preslikavanje

$$\varphi\colon K \to \mathrm{Aut}(H), \quad \varphi(k) = I_k.$$

Tada umnožak (1.80) možemo pisati u obliku

$$(h_1k_1)(h_2k_2) = \big(h_1\varphi(k_1)(h_2)\big)(k_1k_2). \tag{1.81}$$

Primijetimo da je φ homomorfizam jer za svaki $h \in H$ vrijedi

$$\begin{aligned}\varphi(k_1k_2)(h) &= (k_1k_2)h(k_1k_2)^{-1} = k_1(k_2hk_2^{-1})k_1^{-1} \\ &= \varphi(k_1)\big(\varphi(k_2)(h)\big) = \big(\varphi(k_1) \circ \varphi(k_2)\big)(h).\end{aligned}$$

Dakle, $\varphi(k_1k_2) = \varphi(k_1) \circ \varphi(k_2)$. Kako je $H \cap K = \{e\}$ svaki element grupe HK je na jedinstven način prikazan umnoškom hk, $h \in H$, $k \in K$, pa ga možemo identificirati s uređenim parom (h, k). U ovoj oznaci umnožak (1.81) postaje

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1\varphi(k_1)(h_2), k_1k_2).$$

Ova definicija množenja ima smisla i kada H i K nisu podgrupe neke grupe G i za proizvoljni homomorfizam $\varphi\colon K \to \mathrm{Aut}(H)$. Homomorfizam φ inducira djelovanje grupe K na grupu H definiran s

$$k \cdot h = \varphi(k)(h).$$

Neutralni element $e_K \in K$ djeluje kao identiteta na H jer je $\varphi(e_K) = id_H$, tj.

$$e_K \cdot h = id_H(h) = h.$$

Također,

$$k \cdot e_H = \varphi(k)(e_H) = e_H$$

jer automorfizam $\varphi(k)$ preslikava jedinicu u samu sebe. Djelovanje umnoška k_1k_2 je dano s

$$(k_1k_2)\cdot h = \varphi(k_1k_2)(h) = (\varphi(k_1)\circ\varphi(k_2))(h) = \varphi(k_1)\big(\varphi(k_2)(h)\big) = k_1\cdot(k_2\cdot h). \quad (1.82)$$

Nadalje, k djeluje na umnožak h_1h_2 kao

$$k\cdot(h_1h_2) = \varphi(k)(h_1h_2) = \varphi(k)(h_1)\,\varphi(k)(h_2) = (k\cdot h_1)(k\cdot h_2) \quad (1.83)$$

jer je $\varphi(k)$ homomorfizam. Ova razmatranja motiviraju sljedeći rezultat.

Teorem 1.28 *Neka su H i K grupe, i neka je $\varphi\colon K\to Aut(H)$ homomorfizam. Na kartezijevom produktu $H\times K$ definirajmo umnožak*

$$(h_1,k_1)(h_2,k_2) = \big(h_1\,(k_1\cdot h_2), k_1k_2\big) \quad (1.84)$$

gdje je $k\cdot h = \varphi(k)(h)$.

(i) Množenje (1.84) *definira strukturu grupe na skupu $G = H\times K$. Neutralni element je $e = (e_H, e_K)$, a inverzni element dan je s*

$$(h,k)^{-1} = (k^{-1}\cdot h^{-1}, k^{-1}).$$

(ii) Podgrupe $\bar H = H\times\{e_K\}$ i $\bar K = \{e_H\}\times K$ su izomorfne grupama H i K.

(iii) $\bar H$ je normalna pogrupa od G.

(iv) $\bar H\cap\bar K = \{e\}$.

Dokaz (i) Dokažimo asocijativnost množenja (1.84). Imamo

$$\begin{aligned}\big((h_1,k_1)(h_2,k_2)\big)(h_3,k_3) &= \big(h_1\,(k_1\cdot h_2), k_1k_2\big)(h_3,k_3)\\ &= (h_1\,(k_1\cdot h_2)\,(k_1k_2)\cdot h_3, (k_1k_2)\,k_3). \end{aligned}\quad (1.85)$$

S druge strane,

$$\begin{aligned}(h_1,k_1)\big((h_2,k_2)(h_3,k_3)\big) &= (h_1,k_1)\big(h_2\,(k_2\cdot h_3), k_2\,k_3\big)\\ &= \big(h_1\,k_1\cdot(h_2\,(k_2\cdot h_3)), k_1\,(k_2k_3)\big). \end{aligned}\quad (1.86)$$

Primjenom relacija (1.82) i (1.83) dobivamo

$$(k_1 \cdot h_2)(k_1 k_2) \cdot h_3 = (k_1 \cdot h_2)\big(k_1 \cdot (k_2 \cdot h_3)\big) = k_1 \cdot (h_2(k_2 \cdot h_3)), \tag{1.87}$$

pa supstitucija izraza (1.87) u jednadžbu (1.86) povlači

$$(h_1, k_1)\big((h_2, k_2)(h_3, k_3)\big) = \big(h_1(k_1 \cdot h_2)(k_1 k_2) \cdot h_3, k_1(k_2 k_3)\big) = \big((h_1, k_1)(h_2, k_2)\big)(h_2, k_3).$$

Lako se provjeri da je (e_H, e_K) neutralni element zdesna jer je

$$(h, k)(e_H, e_K) = (h\,(k \cdot e_H), k e_K) = (h e_H, k) = (h, k),$$

a slično se pokazuje i $(e_H, e_K)(h, k) = (h, k)$. Dakle, (e_H, e_K) je jedinica u G. Provjerimo da je inverzni element dan s

$$(h, k)^{-1} = (k^{-1} \cdot h^{-1}, k^{-1}).$$

Doista,

$$\begin{aligned}(h, k)(k^{-1} \cdot h^{-1}, k^{-1}) &= (h\,k \cdot (k^{-1} \cdot h^{-1}), k k^{-1}) \\ &= (h\,(k k^{-1}) \cdot h^{-1}, e_K) = (h\,(e_K \cdot h^{-1}), e_K) = (e_H, e_K).\end{aligned}$$

Slično se pokazuje da je $(k^{-1} \cdot h^{-1}, k^{-1})(h, k) = (e_H, e_K)$.

(ii) Pokažimo da je $\bar{H}$ podgrupa od G. Ako su $(h_1, e_K), (h_2, e_K) \in \bar{H}$, tada je

$$\begin{aligned}(h_1, e_K)(h_2, e_K)^{-1} &= (h_1, e_K)(e_K \cdot h_2^{-1}, e_K) \\ &= (h_1\, e_K \cdot (e_K \cdot h_2^{-1}), e_K) = (h_1 h_2^{-1}, e_K) \in \bar{H}.\end{aligned}$$

Preslikavanje $\psi\colon \bar{H} \to H$, $\psi(h, e_k) = h$, je očigledno bijekcija. Također,

$$\begin{aligned}\psi((h_1, e_K)(h_2, e_K)) &= \psi\big(h_1(e_K \cdot h_2), e_K\big) \\ &= \psi(h_1 h_2, e_K) = h_1 h_2 = \psi(h_1, e_K)\psi(h_2, e_K),\end{aligned}$$

stoga je ψ izomorfizam s $\bar{H}$ na H. Slično se pokazuje da je $\bar{K} \simeq K$.

(iii) Neka je $(h, e_K) \in \bar{H}$, i neka je $(h_1, k_1) \in G$. Tada imamo

$$\begin{aligned}(h_1, k_1)(h, e_K)(h_1, k_1)^{-1} &= \big((h_1\,(k_1 \cdot h), k_1\big)(k_1^{-1} \cdot h_1^{-1}, k_1^{-1}) \\ &= (h_1\,(k_1 \cdot h)\,k_1 \cdot (k_1^{-1} \cdot h_1^{-1}), e_K) \\ &= (h_1\,(k_1 \cdot h)\,h_1^{-1}, e_K) \in \bar{H},\end{aligned}$$

čime je pokazano da je $\bar{H}$ normalna podgrupa od G.

(iv) Ako je $(h,k) \in \bar{H} \cap \bar{K}$, tada je $(h,k) \in \bar{H}$ i $(h,k) \in \bar{K}$ iz čega slijedi da je $h = e_H$ i $k = e_K$. Dakle, $\bar{H} \cap \bar{K} = \{(e_H, e_K)\}$. ■

Definicija 1.29 *Neka su H i K grupe, i neka je $\varphi\colon K \to Aut(H)$ homomorfizam. Skup $H \times K$ zajedno s operacijom množenja*

$$(h_1,k_1)(h_2,k_2) = \big(h_1\,(k_1 \cdot h_2), k_1k_2\big)$$

gdje je $k \cdot h = \varphi(k)(h)$ nazivamo poludirektni produkt grupa H i K i označavamo s

$$H \rtimes_\varphi K.$$

Ako je iz kontektsta jasno o kojem se homomorfizmu φ radi, tada pišemo $H \rtimes K$.

Grupa euklidskih gibanja ISO(2)

Grupu transformacija $E(2)$ tvore izometrije u $\mathbb{R}^2$, odnosno transformacije koje čuvaju Euklidsku metriku $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$. Podgrupa transformacija u $E(2)$ koje čuvaju orijentaciju sastoji se od translacija i rotacija, i označava s $ISO(2)$. Svaki element grupe $ISO(2)$ je kompozicija translacije i rotacije

$$x \mapsto R(x+v), \quad R \in SO(2), \quad x, v \in \mathbb{R}^2,$$

ili kompozicija rotacije i translacije

$$x \mapsto Rx + v.$$

Grupa $ISO(2)$ ima primjene u klasičnoj mehanici gdje prikazuje sva moguća gibanja krutog tijela u ravnini.

Pokazat ćemo da je $ISO(2)$ poludirektni umnožak grupe translacija $\mathbf{T}$ i grupe rotacija $SO(2)$. Svaka translacija T_v za vektor $v \in \mathbb{R}^2$,

$$T_v(x) = x + v,$$

je jedinstveno određena tim vektorom, stoga T_v možemo identificirati s vektorom v. Preslikavanje $T_v \mapsto v$ na prirodan način daje izomorfizam s grupe $\mathbf{T}$ na grupu $(\mathbb{R}^2, +)$. Elementi grupe rotacija su matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Za svaki $R_\theta \in SO(2)$ definirajmo preslikavanje $\varphi(R_\theta)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s

$$\varphi(R_\theta)(v) = R_\theta v, \quad v \in \mathbb{R}^2.$$

Preslikavanje $\varphi(R_\theta)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je očigledno bijekcija jer je matrica R_θ invertibilna. Također, $\varphi(R_\theta)$ je homomorfizam jer je

$$\varphi(R_\theta)(u+v) = R_\theta(u+v) = R_\theta u + R_\theta v = \varphi(R_\theta)(u) + \varphi(R_\theta)(v).$$

Stoga je $\varphi(R_\theta) \in Aut(\mathbb{R}^2)$. Nadalje,

$$\varphi(R_\theta R_\sigma)(v) = R_\theta(R_\sigma v) = \varphi(R_\theta)\big(\varphi(R_\sigma)(v)\big) = \big(\varphi(R_\theta) \circ \varphi(R_\sigma)\big)(v)$$

za svaki $v \in \mathbb{R}^2$, pa zaključujemo da je preslikavanje $\varphi\colon SO(2) \to Aut(\mathbb{R}^2)$ također homomorfizam. Odavde slijedi da grupa $SO(2)$ djeluje na $\mathbb{R}^2$ množenjem slijeva,

$$R_\theta \cdot v = \varphi(R_\theta)(v) = R_\theta v. \tag{1.88}$$

Koristeći djelovanje (1.88) možemo definirati poludirektni umnožak $\mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$ s binarnom operacijom

$$(u, R_\theta)(v, R_\sigma) = (u + R_\theta v, R_\theta R_\sigma). \tag{1.89}$$

$\mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$ je grupa euklidskih gibanja koja čuva orijentaciju, i označavamo je s $ISO(2)$.

Operacija (1.89) se može na vrlo zgodan način prikazati kao matrično množenje ako uređeni par (u, R_θ) uložimo u matricu trećeg reda na sljedeći način:

$$(u, R_\theta) \hookrightarrow \begin{pmatrix} R_\theta & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.90}$$

Lako provjeri da operacija (1.89) odgovara umnošku matrica koje predstavljaju uređene parove (u, R_θ) i (v, R_σ):

$$\begin{pmatrix} R_\theta & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_\sigma & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\theta R_\sigma & R_\theta v + u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stoga je $ISO(2)$ izomorfna matričnoj grupi

$$\left\{ \begin{pmatrix} R_\theta & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid R_\theta \in SO(2),\ v \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Neutralni element je jedinična matrica koja odgovara rotaciji za kut od $\theta = 0$ radijana i translaciji za nul-vektor $v = 0$. Inverzni element je dan s

$$\begin{pmatrix} R_\theta & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R_\theta^{-1} & -R_\theta^{-1} v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podgrupe

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} I & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid v \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid R_\theta \in SO(2) \right\}$$

su izomorfne grupama translacija $\mathbf{T}$ i rotacija $SO(2)$, redom, dok je H normalna podgrupa grupe $ISO(2)$.

1.10.3 Konačno generirane Abelove grupe

U proučavanju algebarskih struktura često nailazimo na sljedeći problem. Ako je zadana grupa G i podskup $A \subseteq G$, kako pronaći najmanju podgrupu od G koja sadrži skup A? Ovaj problem smo već susreli kod cikličkih podgrupa. Ciklička podgrupa generirana elementom $x \in G$ se formira tako da se skupu $\{x\}$ dodaju sve cjelobrojne potencije elementa x. Na taj način prošireni skup postaje zatvoren na operacije množenja i invertiranja. Ovu konstrukciju ćemo sada generalizirati na proizvoljne podskupove grupe G.

Definicija 1.30 *Neka je G grupa i neka je $A \subseteq G$. Podgrupa generirana skupom A je najmanja podgrupa od G koja sadrži A. Podgrupu generiranu skupom A označavamo s $\langle A \rangle$.*

$\langle A\rangle$ je najmanja podgrupa od G koja sadrži A u sljedećem smislu: ako je H podgrupa od G takva da je $A \subseteq H$, tada je $\langle A\rangle \subseteq H$. Podgrupa $\langle A\rangle$ je presjek svih podgrupa od G koje sadrže skup A, tj.

$$\langle A\rangle = \bigcap_{\substack{H\leq G\\ A\subseteq H}} H.$$

Ako je A konačan skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tada pišemo

$$\langle A\rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle.$$

Podgrupa $\langle A\rangle$ se tvori tako da se A proširi elementima iz G tako da $\langle A\rangle$ bude zatvoreno u odnosu na množenje i invertiranje u grupi G. Ovo proširenje mora biti minimalno u smislu gornje definicije. Na primjer, ako je $A = \{x\}$, tada skup A proširujemo svim potencijama x^k, $k \in \mathbb{Z}$, i dobivamo cikličku grupu

$$\langle x\rangle = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

U trivijalnim slučajevima kada je $A = \{e\}$ ili $A = G$ očito je $\langle e\rangle = \{e\}$ i $\langle G\rangle = G$.

Propozicija 1.7 *Neka je G grupa, i neka je $A \subseteq G$. Tada je*

$$\langle A\rangle = \{a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2} \ldots a_n^{\epsilon_n} \mid n \geq 1,\ a_i \in A,\ \epsilon_i = \pm 1\}.$$

U ovoj propoziciji elementi a_i ne moraju biti nužno različiti, broj faktora u umnošku je proizvoljan, a skup A ne mora biti konačan niti čak prebrojiv.

Dokaz Definirajmo skup $H = \{a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2} \ldots a_n^{\epsilon_n} \mid n \geq 1,\ a_i \in A,\ \epsilon_i = \pm 1\}$. Pokažimo da je H podgrupa od G. Ako su

$$a = a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2} \ldots a_n^{\epsilon_n} \quad \text{i} \quad b = b_1^{\delta_1} b_2^{\delta_2} \ldots b_m^{\delta_m}, \quad \epsilon_i = \pm 1, \delta_i = \pm 1,$$

tada je

$$ab^{-1} = a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2} \ldots a_n^{\epsilon_n} b_m^{-\delta_m} b_{m-1}^{-\delta_{m-1}} \ldots b_1^{-\delta_1} \in H$$

jer je $-\delta_i = \pm 1$ za svaki i. Dakle, $H \leq G$. Očigledno je $A \subseteq H$ za $n = 1$ i $\epsilon_1 = 1$ što implicira $\langle A\rangle \subseteq H$. S druge strane, podgrupa $\langle A\rangle$ je zatvorena na množenje i invertiranje pa sadrži sve elemente oblika

$$a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2} \ldots a_n^{\epsilon_n}, \quad a_i \in A, \quad n \geq 0, \quad \epsilon_i = \pm 1,$$

što implicira da je $H \subseteq \langle A \rangle$. Stoga zaključujemo da je $H = \langle A \rangle$. ■

Primijetimo da ako je G Abelova grupa i $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq G$ konačan skup, tada iz gornje propozicije slijedi da je

$$\langle A \rangle = \{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n} \mid k_i \in \mathbb{Z}, \}.$$

Definicija 1.31 *Kažemo da je grupa G konačno generirana ako postoji konačan podskup $A \subseteq G$ takav da je $G = \langle A \rangle$.*

Svaka konačna grupa G je očito konačno generirana jer možemo uzeti $A = G$. Međutim, konačno generirana grupa ne mora biti konačna. Na primjer, $(\mathbb{Z}, +)$ je beskonačna grupa generirana brojem 1.

Definicija 1.32 *Direktni umnožak*

$$\mathbb{Z}^r = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \times \cdots \times \mathbb{Z} \quad (r \text{ kopija})$$

naziva se slobodna Abelova grupa ranga r.

Grupa $\mathbb{Z}^r$ je generirana elementima

$$x_i = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0), \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

gdje se broj 1 u elementu x_i nalazi na i-tom mjestu.

Struktura konačno generiranih Abelovih grupa može se potpuno opisati sljedećim teoremom koji kazuje da je svaka takva grupa izomorfna direktnom umnošku slobodne Abelove grupa ranga $r \geq 0$ i konačnog broja cikličkih grupa $\mathbb{Z}_n$.

Teorem 1.29 (Osnovni teorem o konačno generiranim Abelovim grupama) *Neka je G konačno generirana Abelova grupa. Tada je*

$$G \simeq \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k} \tag{1.91}$$

gdje $r, n_1, \ldots, n_k$ zadovoljavaju sljedeće uvjete:

(i) $r \geq 0$, $n_i \geq 2$ za svaki i,

(ii) $n_{i+1} \mid n_i$ *za* $1 \leq i \leq k-1$.

Rastav (1.91) *grupe* G *je jedinstven.*

Definicija 1.33 *Broj* $r \geq 0$ *naziva se slobodni rang ili Bettijev broj grupe* G*, a brojevi* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *nazivaju se invarijantni faktori grupe* G*.*

Relaciju (1.91) nazivamo rastav grupe G na invarijantne faktore. Uvjet (ii) implicira da invarijatni faktori tvore padajući niz

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3 \ldots \geq n_k.$$

Dvije konačno generirane Abelove grupe su izomorfne ako i samo ako imaju isti rang i invarijantne faktore. Primijetimo da je Abelova grupa G konačna ako i samo ako je $r = 0$, i u tom slučaju imamo

$$G \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k},$$

a red grupe je jednak $|G| = n_1 n_2 \ldots n_k$.

Teorem 1.29 nam omogućava klasifikaciju konačnih Abelovih grupa. Ako želimo pronaći sve Abelove grupe reda n, tada se problem svodi na nalaženje svih invarijantih faktora n_i takvih da je

(i) $n_i \geq 2$,

(ii) $n_{i+1} \mid n_i$,

(iii) $n = n_1 n_2 \ldots n_k$.

Ako je p prosti broj koji dijeli n, tada $p \mid n_i$ za neki $i \geq 1$. Zbog svojstva (ii) ovo implicira da $p \mid n_1$. Ovo zapažanje nam daje važno svojstvo najvećeg invarijantnog faktora n_1:

$$\textit{Svaki prosti djelitelj broja } n \textit{ dijeli } n_1. \tag{1.92}$$

Posebno, ako je $n = p_1 p_2 \ldots p_s$ gdje su $p_1, p_2, \ldots, p_s$ različiti prosti brojevi, tada (1.92) implicira da $p_i \mid n_1$ za svaki i, pa postoji samo jedan mogući invarijantni faktor $n_1 = n$. Odavde slijedi

Korolar 1.4 *Ako je $n = p_1 p_2 \dots p_s$ umnožak različitih prostih brojeva $p_1, p_2, \dots, p_s$, tada je svaka Abelova grupa reda n izomorfna cikličkoj grupi $\mathbb{Z}_n$.*

Primjer 1.1 *Prema korolaru 1.4, grupa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_6$ jer je $6 = 2 \cdot 3$ gdje su 2 i 3 prosti brojevi. Lako se provjeri da element $g = (\bar{1}, \bar{2}) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ima red 6, pa g generira cikličku grupu $\mathbb{Z}_6$.*

Primjer 1.2 *Odredite sve moguće Abelove grupe reda 180.*

Potrebno je odrediti sve invarijantne faktore n_i takve da je $180 = n_1 n_2 \dots n_k$.

(1) U prvom koraku n se faktorizira na potencije prostih brojeva:

$$n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

(2) U drugom koraku određuje se najveći invarijantni faktor n_1 imajući na umu da svi prosti faktori broja n dijele n_1 i $n_1 \mid n$. Dakle, moguće vrijednosti za n_1 su

$$n_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

(3) Treći korak se sastoji u određivanju ostalih invarijantnih faktora $n_2, n_3 \dots$ za svaku moguću vrijednost broja n_1. Ovi invarijantni faktori imaju svojstvo da $n_2 \mid n_1$ i $n_1 n_2 \mid n$, $n_3 \mid n_2$ i $n_1 n_2 n_3 \mid n$, i tako dalje.

Na primjer, ako je $n_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, tada su kandidati za n_2 dani s $n_2 = 2, 3, 6$. Ostale kombinacije djelitelja n_1 nisu dozvoljene jer u tom slučaju $n_1 n_2 \nmid n$. Ako je $n_2 = 2$, tada $n_3 \mid n_2$ implicira $n_3 = 2$. Ovo vodi na kontradikciju jer $n_1 n_2 n_3 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \nmid n$. Isti zaključak vrijedi za $n_2 = 3$. Dakle, jedina mogućnost za n_2 je $n_2 = 6$. Tada je

$$6 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) = 180,$$

pa su $n_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ i $n_2 = 6$ invarijantni faktori koji daju rastav

$$\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_6.$$

Sličnim argumentima se određuju invarijantni faktori za ostale vrijednosti n_1. Kompletna lista invarijantnih faktora s odgovarajućim rastavima dana je u tablici 1.5. ■

Invarijantni faktori	Abelove grupe
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$	$\mathbb{Z}_{180}$
$2 \cdot 3 \cdot 5$, 6	$\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_6$
$2^2 \cdot 3 \cdot 5$, 3	$\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_3$
$2 \cdot 3^2 \cdot 5$, 2	$\mathbb{Z}_{90} \times \mathbb{Z}_2$

Tablica 1.5: Klasifikacija Abelovih grupa reda 180.

1.10.4 Sylowljevi teoremi

Ako je G konačna grupa, tada prema Lagrangeovom teoremu red bilo koje podgrupe od G dijeli $|G|$. Prirodno se nameće pitanje: Ako k dijeli $|G|$, da li G nužno ima podgrupu reda k? Ako malo razmislimo, vidjet ćemo da obrat ne vrijedi. Na primjer, alternirajuća grupa A_4 koja ima 12 elemenata ne sadrži podgrupu reda 6 što se vidi iz sljedećeg razmatranja. Pretpostavimo da je H podgrupa od A_4 i $|H| = 6$. Tada je $[A_4 \colon H] = 2$ pa je H normalna podgrupa od A_4 prema propoziciji 1.3. Kvocijentna grupa A_4/H ima dva elementa pa je kvadrat svakog elementa u A_4/H jednak jedinici, $(gH)^2 = g^2H = H$ za svaki $g \in A_4$. Ovo povlači da je $g^2 \in H$ za svaki $g \in A_4$. Ako je $g \in A_4$ element reda 3, tada imamo $g = (g^2)^2 \in H$ pa zaključujemo da H sadrži sve element od A_4 reda 3. Međutim, to je kontradikcija jer A_4 ima 8 cikličkih permutacija duljine 3, odnosno 8 elemenata reda 3, dok je $|H| = 6$. Dakle, A_4 nema podgrupu reda 6. Općenito se može se pokazati grupa A_n nema podgrupu reda $n!/4$ za $n \geq 5$.

Parcijalni obrat Lagrangeovog teorema ipak vrijedi u nekim posebnim slučajevima. Ovu činjenicu otkrio je L. Sylow koji je pokazao da ako p^i dijeli $|G|$ gdje je p prosti broj, tada G ima podgrupu reda p^i.

Definicija 1.34 *Neka je G konačna grupa i neka je p prosti broj.*

(i) Grupa G naziva se p-grupa ako je $|G| = p^k$ za neki $k > 0$.

(ii) Podgrupa od G reda p^i naziva se p-podgrupa od G.

(iii) Podgrupa reda p^k, gdje je p^k najveća potencija od p koja dijeli $|G|$, naziva se Sylowljeva p-podgrupa od G.

Slika 1.8: Ludwig Sylow, 1832-1918. Sylow je bio srednjoškolski profesor koji je 1872. dokazao jedan od najvažnijih rezultata u teoriji konačnih grupa.

Primijetimo da ako je $|G| = p^k m$ gdje $p \nmid m$, tada Sylowljeva p-podgrupa ima red p^k. Skup Sylowljevih p-podgrupa od G označavamo sa $Syl_p(G)$, a broj Sylowljevih p-podgrupa s n_p.

Primjeri

(1) Grupa $\mathbb{Z}_{12}$ čiji red je $12 = 2^2 \cdot 3$ ima jednu Sylowljevu 2-podgrupu reda 4

$$\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\},$$

i jednu Sylowljevu 3-podgrupu reda 3

$$\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}.$$

(2) Simetrična grupa S_3 reda $6 = 2 \cdot 3$ ima tri Sylowljeve 2-podgrupe

$$\{(1), (1\,2)\}, \quad \{(1), (2\,3)\}, \quad \{(1), (1\,3)\},$$

i jednu Sylowljevu 3-podgrupu

$$\{(1), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}.$$

(3) Diedralna grupa D_{12} reda $12 = 2^2 \cdot 3$ je definirana s

$$D_{12} = \Big\{1, R, \ldots, R^5, D, DR, \ldots, DR^5 \mid R^6 = D^2 = 1,\ R^k D = DR^{-k}\Big\}.$$

D_{12} ima tri Sylowljeve 2-podgrupe

$$\{1, R^3, D, DR^3\}, \quad \{1, R^3, DR^5, DR^2\}, \quad \{1, R^3, DR^4, DR\},$$

i jednu Sylowljevu 3-podgrupu

$$\{1, R^2, R^4\}.$$

■

U ovim primjerima svaka grupa reda $p^k m$, gdje je p prosti broj i $p \nmid m$, ima barem jednu podgrupu reda p^k.

Teorem 1.30 (Prvi Sylowljev teorem) *Neka je G grupa reda $p^k m$ gdje je p prosti broj i $p \nmid m$. Tada G ima podgrupe reda p^i za svaki $1 \leq i \leq k$. Posebno, G ima barem jednu Sylowljevu p-podgrupu.*

Sylowljeva p-podgrupa od G je maksimalna podgrupa u smislu da je p^k najveća potencija od p koja dijeli $|G|$. Sljedeći teorem daje neka svojstva ovih grupa.

Teorem 1.31 (Drugi Sylowljev teorem)

(i) Ako su P_1 i P_2 Sylowljeve p-podgrupe od G, tada postoji $g \in G$ takav da

$$P_2 = gP_1g^{-1}.$$

(ii) Broj Sylowljevih p-podgrupa je oblika $n_p = 1 + kp$ za neki $k \geq 0$, odnosno

$$n_p \equiv 1 \pmod{p}.$$

Nadalje, n_p dijeli indeks $[G\colon P]$ gdje je P bilo koja Sylowljeva p-podgrupa od G.

(iii) Bilo koja p-podgrupa od G sadržana je u nekoj Sylowljevoj p-podgrupi od G.

Prvi dio teorema 1.31 kaže da se svaka Sylowljeva p-podgrupa može dobiti konjugacijom jedne Sylowljeve p-podgrupe. Drugim riječima, konjugacija djeluje tranzitivno na skup Sylowljevih p-podgrupa.

Neka je $|G| = p^k m$ gdje $p \nmid m$, i neka je P Sylowljeva p-podgrupa. Tada je $|P| = p^k$ pa iz Lagrangeovog teorema slijedi $[G\colon P] = m$. Stoga $n_p \mid m$ prema drugom dijelu teorema 1.31.

Sylowvljevi teoremi su važni u klasifikaciji konačnih grupa. Zaključimo ovo poglavlje s nekim rezultatima o strukturi grupa koji su posljedica Sylowljevih teorema.

(1) Ako je G grupa reda p^n, gdje je p prosti broj, koja sadrži točno po jednu podgrupu reda $p, p^2, \ldots, p^{n-1}$, onda je G ciklička grupa.

(2) Postoje samo dvije nekomutativne grupe reda 8:

   (a) Oktička grupa generirana elementima a i b koji zadovoljavaju relacije

$$a^4 = e, \quad b^2 = e, \quad b^{-1}ab = a^3.$$

   (b) Grupa kvaterniona generirana elementima a i b koji zadovoljavaju relacije

$$a^4 = e, \quad b^2 = a^2, \quad b^{-1}ab = a^3.$$

(3) Neka je G grupa reda pq gdje su p i q prosti brojevi i $p < q$. Tada postoje najviše dvije grupe reda pq:

   (a) Ciklička grupa pq.

   (b) Ako $p \mid q - 1$, grupa generirana elementima a i b koji zadovoljavaju relacije

$$a^p = b^q = e, \quad a^{-1}ba = b^r$$

   za neki $r \in \mathbb{Z}$ takav da je $r^p \equiv 1 \pmod{q}$ i $r \not\equiv 1 \pmod{q}$.

Poglavlje 2

Prsteni

2.1 Osnovna svojstva prstena

Prsteni su algebarske strukture na kojima su definirane dvije binarne operacije koje nazivamo zbrajanje i množenje, i koje su povezane zakonom distributivnosti. Prototip prstena je skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ sa standardnim operacijama zbrajanja i množenja. U ovom poglavlju ćemo proučiti elementarna svojstva prstena, posebno konstrukcije koje su analogne onim u teoriji grupa kao što su podprsteni, ideali (koji su analogni normalnim podgrupama), kvocijentni prsteni i homomorfizmi prstena. Kratko ćemo se osvrnuti i na pitanje multiplikativnog inverza koje prirodno vodi do konstrukcije polja.

Definicija 2.1 *Prsten je neprazan skup R s dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$ koje nazivamo zbrajanje i množenje, i koje za svaki $a, b, c \in R$ zadovoljavaju sljedeća svojstva:*

(i) $(R, +)$ *je Abelova grupa,*

(ii) množenje je asocijativno:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

(iii) množenje je distributivno u odnosu na zbrajanje slijeva i zdesna:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Neutralni element u Abelovoj grupi $(R, +)$ označavamo s 0, a inverzni element s $-a$. Dakle, u prstenu vrijedi

$$a + (-a) = 0 \quad \text{za svaki } a \in R.$$

Radi jednostavnosti pisanja množenje označavamo s $a \cdot b \equiv ab$.

Definicija 2.2 *Ako je množenje u prstenu R komutativno, tada R nazivamo komutativni prsten. Kažemo da je R prsten s jedinicom ako postoji element $1 \in R$ takav da je*

$$1a = a1 = a \quad \textit{za svaki } a \in R.$$

Zanimiljivo je primijetiti da komutativnost zbrajanja u R slijedi iz uvjeta distributivnosti. Pretpostavimo na trenutak da $(R, +)$ nije nužno Abelova grupa i da R ima jedinicu $1 \in R$. Tada se umnožak $(1 + 1)(a + b)$ može izračunati na dva različita načina:

$$(1 + 1)(a + b) = (1 + 1)a + (1 + 1)b = a + a + b + b, \tag{2.1}$$

$$(1 + 1)(a + b) = 1(a + b) + 1(a + b) = a + b + a + b. \tag{2.2}$$

Usporedbom (2.1) and (2.2) zaključujemo da je $a + b = b + a$ jer bismo inače imali kontradikciju. Dakle, $(R, +)$ mora biti Abelova grupa kako bi zbrajanje bilo kompatibilno s uvjetom distibutivnosti.

Primjeri prstena

(1) Neka je $(R, +)$ Abelova grupa. Ako na R definiramo množenje s $ab = 0$ za svaki $a, b \in R$, tada dobivamo trivijalni prsten. Ovakav prsten nema jedinicu osim ako je $R = \{0\}$. U tom je slučaju $1 = 0$.

(2) Standardni primjeri prstena s jedinicom su skupovi brojeva $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ sa standardnim operacijama zbrajanja i množenja.

(3) Neka je $M(n, \mathbb{F})$ skup kvadratnih matrica reda n nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. $M(n, \mathbb{F})$ je prsten s operacijama matričnog zbrajanja i množenja. Nula u prstenu je nul matrica, a jedinica je jedinična matrica.

(4) Skup 2×2 matrica na poljem $\mathbb{F}$ definiran sa

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F} \right\} \tag{2.3}$$

je nekomutativni prsten. Primijetimo da R nema jedinicu. Pretpostavimo da postoji $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in R$ takav da je

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

za sve $a, b \in \mathbb{F}$. Jednadžba (2.4) implicira $ax = a$, $ay = b$ i $xb = b$ što vodi na kontradikciju ako je $a = 0$ i $b \neq 0$. Jedinična matrica $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ je jedinica u prstenu $M(2, \mathbb{F})$, ali $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \notin R$.

(5) Sa $\mathbb{R}[x]$ označimo skup polinoma s realnim koeficijentima

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0.$$

Standardne operacije zbrajanja i množenja polinoma zadovoljavaju aksiome prstena. Nula u $\mathbb{R}[x]$ je nul polinom $f(x) = 0$, a jedinica je konstantni polinom $f(x) = 1$. Svojstva polinoma s koeficijentima u proizvoljnom prstenu ćemo detaljnije proučiti u poglavlju 2.10.

(6) Skup neprekidnih funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je prsten sa zbrajanjem i množenjem po točkama:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \quad x \in [a, b].$$

Jedinica u prstenu je konstantna funkcija

$$\mathbf{1}(x) = 1 \quad \text{za svaki } x \in [a, b].$$

Ovaj prsten označavamo s $C[a, b]$.

(7) Promotrimo Abelovu grupu $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$. Množenje u $\mathbb{Z}_n$ definirano s

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy},$$

zadovoljava aksiome prstena. $\mathbb{Z}_n$ je prsten s jedinicom $\overline{1}$ koji ima konačno mnogo elemenata.

Elemenatarna svojstva prstena dana su sljedećim teoremom.

Teorem 2.1 *Neka je R prsten. Tada za svaki $a, b, c \in R$ vrijedi*

(i) $a0 = 0a = 0$,

(ii) $a(-b) = -(ab) = (-a)b$,

(iii) $a(b-c) = ab - ac, \quad (a-b)c = ac - bc.$

Dokaz

(i) Iz distribucije množenja slijedi

$$a0 = a(0+0) = a0 + a0,$$

što prema definiciji neutralnog elementa implicira $a0 = 0$. Slično se pokazuje da je $0a = 0$.

(ii) Distributivnost množenja daje

$$0 = a0 = a(b + (-b)) = ab + a(-b),$$

pa iz definicije inverznog elementa slijedi

$$a(-b) = -(ab).$$

Slično se pokazuje relacija $-(ab) = (-a)b$.

(iii) Koristeći svojstvo (ii) dobivamo

$$a(b-c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab - ac,$$

i slično

$$(a-b)c = (a + (-b))c = ac + (-b)c = ac - bc.$$

■

Množenje u prstenu je asocijativno pa umnožak elemenata a_1, a_2 i a_3 jednostavno zapisujemo kao $a_1a_2a_3$ jer nije važno kako grupiramo elemente. Isto vrijedi za umnožak elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koji zapisujemo kao

$$\Pi_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Također, zbog asocijativnosti zbrajanja suma elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se zapisuje kao

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Sljedeća propozicija daje generalizaciju aksioma o distributivnosti, i lako se dokazuje indukcijom po n i m.

Propozicija 2.1 *Neka je R prsten, i neka su $a_i, b_j \in R$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Tada je*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j.$$

Ako je $a \in R$ i $m \in \mathbb{N}$, tada definiramo

$$\begin{aligned} a^m &= \underbrace{a\,a\ldots a}_{m \text{ puta}}, \quad ma = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{m \text{ puta}}, \\ a^{-m} &= (a^{-1})^m \quad \text{ako } a \text{ ima muliplikativni inverz } a^{-1}, \\ -ma &= \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{m \text{ puta}}. \end{aligned}$$

Ako R ima jedinicu, tada definiramo $a^0 = 1$. Iz ovih definicija indukcijom se lako pokazuje sljedeći teorem.

Teorem 2.2 *Neka je R prsten, i neka su $a, b \in R$. Tada za svaki $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi*

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$,

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Također, za svaki $n, m \in \mathbb{Z}$ imamo

(i) $ma + na = (m+n)a$,

(ii) $m(na) = (mn)a$,

(iii) $(ma)(nb) = (mn)(ab) = (na)(mb)$.

2.2 Vrste prstena

S obzirom na svojstva množenja, razlikujemo nekoliko vrsta prstena.

Definicija 2.3 *Neka je R prsten s jedinicom. Ako svaki element $a \in R$, $a \neq 0$, ima multiplikativni inverz $a^{-1} \in R$, tada R nazivamo prsten s dijeljenjem. Ako je množenje u R također komutativno, tada R nazivamo polje.*

Ako je R prsten s jedinicom, tada skup invertibilnih elemenata tvori multiplikativnu grupu R^*. Na primjer, u prstenu cijelih brojeva je $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$. U prstenu s dijeljenjem multiplikativna grupa jednaka je $R^* = R \setminus \{0\}$.

Standarni primjeri prstena s dijeljenjem (odnosno polja) su prsteni brojeva $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Primijetimo da $\mathbb{Z}$ nije prsten s dijeljenjem jer cijeli brojevi osim 1 i -1 nemaju multiplikativni inverz u $\mathbb{Z}$. Prsten matrica $M(n, \mathbb{R})$ nije prsten s dijeljenjem jer matrica $A \neq 0$ nema nužno imati inverz. Na primjer, matrica

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \neq 0,$$

nije nul-matrica, ali A^{-1} ne postoji jer je $\det(A) = 0$.

Definicija 2.4 *Prsten R nazivamo integralna domena ako $xy = 0$, $x, y \in R$, povlači $x = 0$ ili $y = 0$.*

Ako je R prsten s dijeljenjem, onda je R integralna domena. Posebno, svako polje je integralna domena. Ako je R integralna domena i $x, y \in R \setminus \{0\}$, onda je $xy \neq 0$. Napomenimo da neki autori definiraju integralnu domenu kao komutativni prsten s jedinicom koji zadovoljava definiciju 2.4.

Primjeri

(1) Prsten cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ je očigledno integralna domena.

(2) Lako se pokazuje da je prsten Gaussovih cijelih brojeva

$$\mathbb{Z}[i] = \left\{ m + in \mid m, n \in \mathbb{Z},\ i = \sqrt{-1} \right\}$$

također integralna domena.

(3) Promotrimo prsten neprekidnih funkcija $C[0,1]$. Definirajmo

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Tada su $f, g \in C[0,1]$ i $f \neq 0$, $g \neq 0$. Međutim, $f(x)g(x) = 0$ za svaki $x \in [0,1]$, odnosno $fg = 0$, pa zaključujemo da $C[0,1]$ nije integralna domena.

Prsten $\mathbb{Z}$ je komutativna integralna domena s jedinicom koja nije polje jer za $n \in \mathbb{Z}$ osim za $n = \pm 1$ vrijedi $n^{-1} = \frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$. Međutim, u sljedećem slučaju vrijedi obrat.

Propozicija 2.2 *Neka je R komutativna integralna domena s jedinicom. Ako je R konačan skup, tada je R polje.*

Dokaz Odaberimo $a \in R$, $a \neq 0$, i definirajmo preslikavanje $\varphi\colon R \to R$ s $\varphi(x) = ax$. Pokažimo da je φ injekcija. Ako je $ax = ay$, tada je $a(x - y) = 0$ što implicira da je $x - y = 0$ jer je R integralna domena i $a \neq 0$. Dakle, $x = y$. Injektivnost implicira da je $\varphi\colon R \to R$ surjekcija jer je R konačan skup. Odavde slijedi da za $1 \in R$ postoji jedinstveni $b \in R$ takav da je $\varphi(b) = 1$, odnosno $ab = ba = 1$. Time je dokazano da svaki element $a \neq 0$ ima mulitplikativni inverz. Stoga je R polje. ■

Definicija 2.5 *Neka je R prsten. Element $x \in R$ naziva se lijevi djelitelj nule ako postoji $y \in R$, $y \neq 0$, takav da je $xy = 0$. Slično se definira desni djelitelj nule. Ako je x lijevi i desni djelitelj nule, tada se x naziva djelitelj nule.*

Očito je $0 \in R$ trivijalni djelitelj nule u svakom prstenu R. Primijetimo da je R integralna domena ako i samo ako je $0 \in R$ jedini djelitelj nule u R. Primjeri prstena s netrivijalnim djeliteljima nule su $M(n, \mathbb{R})$ i $\mathbb{Z}_n$.

Neka su

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \neq 0,$$

matrice u prstenu $M(2, \mathbb{R})$. Tada je $AB = 0$, što znači da je A lijevi djelitelj a B desni djelitelj nule u $M(2, \mathbb{R})$.

Netrivijalni djelitelji nule u prstenu $\mathbb{Z}_n$ su elementi $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ gdje a i n nisu relativno prosti, odnosno a i n imaju zajedničkog djelitelja $d > 1$. Neka je $d > 1$ najveći zajednički djelitelj brojeva a i n. Tada je $n = bd$ i $a = cd$ za neki $b \in \mathbb{N}$ i $c \in \mathbb{Z}$. Kako je $d > 1$ imamo $0 < b < n$, stoga je $\overline{b} \neq \overline{0}$. Nadalje, $ab = cdb = cn$ što implicira da je $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab} = \overline{0}$. Dakle, $\overline{a}$ je djelitelj nule jer je $\overline{b} \neq \overline{0}$. Na primjer, djelitelji nule u prstenu $\mathbb{Z}_6$ su $\overline{2}$, $\overline{3}$ i $\overline{4}$ jer 2, 3 i 4 nisu relativno prosti u odnosu na 6.

Definirajmo još nekoliko korisnih pojmova u teoriji prstena.

Definicija 2.6 *Neka je R prsten. Za element $a \in R$ kažemo da je nilpotentan ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a^n = 0$.*

Neutralni element $0 \in R$ je očigledno nilpotentan. Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

je nilpotentan element u prstenu $M(2, \mathbb{R})$ jer je

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ako je R integralna domena, tada R ne sadrži nilpotentne elemente $a \neq 0$. Doista, ako je $a \neq 0$ nilpotentan, tada jednakost $a^n = aa^{n-1} = 0$ implicira $a^{n-1} = 0$. Iteracijom po n zaključujemo da je $a = 0$, što je kontradikcija. Dakle, jedini nilpotentni element u integralnoj domeni je $0 \in R$.

Definicija 2.7 *Neka je R prsten. Kažemo da je element $a \in R$ idempotentan ako je $a^2 = a$.*

Očito je da su 0 i 1 idempotentni elementi u svakom prstenu R (ako R ima jedinicu). Za matricu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$$

vrijedi $A^2 = A$, stoga je A idempotentan element u $M(2, \mathbb{R})$.

2.3 Podprsten i karakteristika prstena

Definicija 2.8 *Neka je $(R, +, \cdot)$ prsten, i neka je $S \subseteq R$ neprazan podskup. Ako je $(S, +, \cdot)$ prsten, tada S nazivamo podprsten od R.*

Binarne operacije u S su iste kao u R. Slično se definira podpolje nekog polja. Svaki prsten R ima trivijalne podprstene: $\{0\}$ i R.

Propozicija 2.3 *Neka je R prsten. Neprazan podskup $S \subseteq R$ je podprsten od R ako za svaki $a, b \in S$ vrijedi $a - b \in S$ i $ab \in S$.*

Dokaz Ako je $a - b \in S$ za svaki $a, b \in S$, tada je $(S, +)$ aditivna podgrupa grupe $(R, +)$. Nadalje, ako je $ab \in S$ za svaki $a, b \in S$, tada je S zatvoren na množenje, dok se asocijativnost i distributivnost množenja nasljeđuju iz R. ■

Lako se pokazuje da je presjek konačnog broja podprstena od R također podprsten od R.

Definicija 2.9 *Neka je R prsten. Skup*

$$Z(R) = \{a \in R \mid xa = ax \quad za\ svaki \quad x \in R\}$$

naziva se centar prstena R.

Centar $Z(R)$ je neprazan skup jer je $0 \in Z(R)$.

Teorem 2.3 *Centar prstena je podprsten.*

Dokaz Neka su $a, b \in Z(R)$ i $x \in R$. Tada je

$$(a - b)x = ax - bx = xa - xb = x(a - b),$$

što pokazuje da je $a - b \in Z(R)$. Nadalje,

$$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = x(ab),$$

pa slijedi da je $ab \in Z(R)$. Prema propoziciji 2.3, $Z(R)$ je podprsten od R. ■

Definicija 2.10 *Neka je R prsten. Pretpostavimo da postoji prirodni broj n takav da je $na = 0$ za svaki element $a \in R$. Najmanji takav prirodni broj naziva se karakteristika prstena R. Ako takav broj ne postoji, tada kažemo da R ima karakteristiku nula.*

Karakteristiku prstena R označavamo s $char(R)$. Očigledno je da prsten cijelih brojeva ima karakteristiku $char(\mathbb{Z}) = 0$, dok je karakteristika prstena $\mathbb{Z}_n$ jednaka n. Doista, ako je $\overline{k} \in \mathbb{Z}_n$, tada je

$$n\overline{k} = \underbrace{\overline{k} + \overline{k} + \cdots + \overline{k}}_{n \text{ puta}} = \overline{nk} = \overline{n}\overline{k} = \overline{0}$$

jer je $\overline{n} = \overline{0}$. Pokažimo da je n namanji prirodni broj sa svojstvom $n\overline{k} = \overline{0}$ za svaki $\overline{k} \in \mathbb{Z}_n$. Pretpostavimo da postoji $1 \leq m < n$ takav da je $m\overline{k} = \overline{0}$ za svaki $\overline{k} \in \mathbb{Z}_n$. Tada za $k = 1$ dobivamo

$$m\overline{1} = \underbrace{\overline{1} + \overline{1} + \cdots + \overline{1}}_{n \text{ puta}} = \overline{m} = \overline{0},$$

što implicira $m = pn$ za neki $p \geq 1$. Time dobivamo kontradikciju jer je $m < n$. Dakle, $m = n$.

Teorem 2.4 *Neka je F polje. Tada je $char(F)$ nula ili prost broj.*

Dokaz Pretpostavimo da je $n \neq 0$ karakteristika polja F. Tada je $n1 = 0$ gdje je 1 jedinica u polju F. Ako n nije prosti broj, tada se n može faktorizirati kao $n = n_1 n_2$ gdje je $1 < n_1 < n$ i $1 < n_2 < n$. Sada $(n_1 n_2)1 = 0$ implicira $(n_1 1)(n_2 1) = 0$ što daje $n_1 1 = 0$ ili $n_2 1 = 0$ jer je F integralna domena. Ovo dalje implicira $n_1 a = 0$ ili $n_2 a = 0$ za svaki $a \in F$, čime dobivamo kontradikciju jer su $n_1 < n$ i $n_2 < n$. Zaključujemo da se n nije složen, dakle n je prost broj. ■

2.4 Prsten kvaterniona

1843. godine irski matematičar W.R. Hamilton konstruirao je prvi primjer nekomutativnog prstena s dijeljenjem. Elemente tog prstena nazvao je kvaternioni jer su definirani pomoću četiri realna broja. Kvaternioni nalaze široku primjenu u matematici, fizici i tehnici. Na primjer, kvaternionima se opisuju prostorne rotacije pa se

Slika 2.1: William Rowan Hamilton, 1805-1865. Hamilton je otkrio kvaternione 1843 godine, što je primjer prve nekomutativne algebre.

stoga primjenjuju u 3D računalnoj grafici, teorijskoj mehanici i teoriji kontrole. Interesantno je spomenuti da se položaj svemirskih satelita u orbiti kontrolira pomoću kvaterniona. Kvaternioni su imali važan utjecaj na razvoj algebre jer su doveli do istraživanja drugih "hiperkompleksnih" brojevnih sustava.

U ovom odjeljku ćemo konstruirati kvaternione promatrajući kompleksne matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \tag{2.5}$$

gdje $\overline{a}$ označava konjugaciju broja a. Neka je $\mathbb{H}$ skup svih matrica oblika (2.5). Pokažimo da je $\mathbb{H}$ podprsten prstena $M(2, \mathbb{C})$. Ako su $A_1, A_2 \in \mathbb{H}$, tada je

$$A_1 - A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b}_1 & \overline{a}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b}_2 & \overline{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ -\overline{(b_1 - b_2)} & \overline{a_1 - a_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}.$$

Također,

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b}_1 & \overline{a}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b}_2 & \overline{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}$$

gdje je $u = a_1 a_2 - b_1 \overline{b}_2$ i $v = a_1 b_2 + b_1 \overline{a}_2$, pa je $\mathbb{H}$ zatvoren na množenje. Prema propoziciji 2.3, $\mathbb{H}$ je podprsten od $M(2, \mathbb{C})$.

$\cdot$	$\mathbf{e}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{e}$	$\mathbf{e}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{e}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{e}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{e}$

Tablica 2.1: Tablica množenja kvaterniona

Pokažimo sada da je $\mathbb{H}$ prsten s dijeljenjem. Neka je $A \in \mathbb{H}$, $A \neq 0$. Tada je $a \neq 0$ ili $b \neq 0$, što povlači da je $\det(A) = |a|^2 + |b|^2 > 0$. Dakle, matrica A je invertibilna i vrijedi

$$A^{-1} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da je A^{-1} također matrica oblika (2.5) jer je $a = \overline{\overline{a}}$ i $b = -(-b)$, pa zaključujemo da je $A^{-1} \in \mathbb{H}$. Time je dokazano da je $\mathbb{H}$ prsten s dijeljenjem.

Ako kompleksne brojeve a i b rastavimo na realni i imaginarni dio, $a = \alpha_1 + i\alpha_2$ i $b = \beta_1 + i\beta_2$, tada matricu A možemo napisati kao zbroj

$$A = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Definirajmo matrice

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ove matrice zadovoljavaju tablicu množenja 2.1. Stoga se umnožak u prstenu $\mathbb{H}$ može računati korištenjem tablice 2.1 i distribucije matričnog množenja. Ovo motivira sljedeću definiciju.

Definicija 2.11 *Brojevi oblika*

$$x = a\,\mathbf{e} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

gdje simboli $\mathbf{e}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ *i* $\mathbf{k}$ *zadovoljavaju tablicu množenja 2.1 nazivaju se realni kvaternioni.*

Zbroj dvaju kvaterioniona x_1 i x_2 dan je s

$$x_1 + x_2 = (a_1 + a_2)\,\mathbf{e} + (b_1 + b_2)\,\mathbf{i} + (c_1 + c_2)\,\mathbf{j} + (d_1 + d_2)\,\mathbf{k}.$$

Umnožak

$$x_1 x_2 = (a_1\,\mathbf{e} + b_1\,\mathbf{i} + c_1\,\mathbf{j} + d_1\,\mathbf{k})(a_2\,\mathbf{e} + b_2\,\mathbf{i} + c_2\,\mathbf{j} + d_2\,\mathbf{k})$$

se računa primjenom tablice 2.1 i distributivnosti množenja. Na primjer, ako su $x_1 = 2\mathbf{e} + \mathbf{i} - \mathbf{k}$ i $x_2 = -2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, tada je

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= (2\mathbf{e} + \mathbf{i} - \mathbf{k})(-2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= -4\mathbf{ej} - 2\mathbf{ij} + 2\mathbf{kj} + 2\mathbf{ek} + \mathbf{ik} - \mathbf{k}^2 \\ &= -4\mathbf{j} - 2\mathbf{k} - 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k} - \mathbf{j} + \mathbf{e} \\ &= \mathbf{e} - 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Nula u prstenu je

$$0 = 0\mathbf{e} + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \tag{2.7}$$

a jedinica je

$$1 = 1\mathbf{e} + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}. \tag{2.8}$$

Inverz kvaterniona jednak je

$$(a\,\mathbf{e} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k})^{-1} = \frac{a\,\mathbf{e} - b\,\mathbf{i} - c\,\mathbf{j} - d\,\mathbf{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

uz uvjet da je barem jedan od brojeva a, b, c ili d različit od nule. Primijetimo da prsten kvaterniona $\mathbb{H}$ sadrži podprstene $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ jer realne i kompleksne brojeve možemo identificirati s kvaternionima kao

$$a \equiv a\,\mathbf{e}, \quad a + ib \equiv a\,\mathbf{e} + b\,\mathbf{i}.$$

Dakle, $\mathbb{H}$ predstavlja proširenje polja kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, ali množenje u proširenom prstenu $\mathbb{H}$ nije komutativno.

2.5 Prsten matrica

Pojam matrice nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva se može proširiti na proizvoljan prsten. Neka je A matrica reda n s elementima u nekom prstenu R,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in R, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Matricu kraće označavamo s $A = (a_{ij})$ gdje je a_{ij} element matrice A u i-tom retku i j-tom stupcu. Prsten matrica $M(n, R)$ je skup matrica reda n na kojem zbrajanje i množenje definiramo na standardni način:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \tag{2.9}$$

$$AB = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \Big). \tag{2.10}$$

Lako se pokazuje da zbrajanje i množenje definirano s (2.9) i (2.10) zadovoljava aksiome prstena. Nula u prstenu $M(n, R)$ je nul matrica čiji su svi elementi $0 \in R$. Ako R ima jedinicu $1 \in R$, tada je jedinica u prstenu $M(n, R)$ jedinična matrica

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

U tom slučaju svaku matricu A možemo napisati kao linearnu kombinaciju s koeficijentima u R,

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij},$$

gdje matrica E_{ij} ima u i-tom retku i j-tom stupcu jedinicu a na ostalim mjestima nulu. Za umnožak matrica E_{ij} vrijedi pravilo

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il} \tag{2.11}$$

gdje je δ_{jk} Kroneckerov delta simbol

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Matrice E_{ii} su idempotentne jer je $E_{ii}^2 = E_{ii}$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$. Ako je $n > 1$, tada prema pravilu (2.11) imamo

$$E_{11}E_{12} = \delta_{11}E_{12} = E_{12},$$
$$E_{12}E_{11} = \delta_{21}E_{11} = 0.$$

Stoga je $M(n, R)$ nekomutativan prsten za $n > 1$.

Pretpostavimo da je R komutativan prsten s jedinicom. U tom slučaju standardni rezultati iz linearne algebre analogno vrijede i u prstenu $M(n, R)$. Posebice, možemo definirati determinantu matrice kao

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

gdje se suma uzima po svim permutacijama skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, a $\operatorname{sgn}(\sigma)$ je predznak permutacije σ. Za determinantu vrijedi Binet-Cauchyeva formula

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad \text{za svaki} \quad A, B \in M(n, R). \tag{2.12}$$

Prisjetimo se da je kofaktor elementa a_{ij} definiran s

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij},$$

gdje je Δ_{ij} subdeterminanta matrice A koje se dobije tako da se iz A izbriše i-ti redak i j-ti stupac. Adjunkta matrice A je matrica $\tilde{A} = (\alpha_{ij})$ gdje je $\alpha_{ij} = A_{ji}$. Za svaku matricu $A \in M(n, R)$ vrijedi

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A)I \tag{2.13}$$

gdje je $I \in M(n, R)$ jedinična matrica.

Teorem 2.5 *Neka je R komutativan prsten s jedinicom. Tada je $A \in M(n, R)$ invertibilna matrica ako i samo ako je $\det(A)$ invertibilna u R.*

Dokaz Neka je A invertibilna matrica. Tada postoji $A^{-1} \in M(n, R)$ takva da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Iz jednadžbe (2.12) dobivamo

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(A^{-1})\det(A) = \det(I) = 1,$$

što pokazuje da je $\det(A)$ invertibilna u R. Pretpostavimo sada da je $\Delta = \det(A)$ invertibilna u R, odnosno da postoji $\Delta^{-1} \in R$ takav da je $\Delta\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\Delta = 1$. Kako je R komutativan prsten, za svaki $a \in R$ i $B \in M(n, R)$ vrijedi $aB = Ba$. Množenjem jednadžbe (2.13) s Δ^{-1} i koristeći svojstvo komutativnosti u prstenu R dobivamo

$$(\Delta^{-1}\tilde{A})A = A(\Delta^{-1}\tilde{A}) = I.$$

Odavde slijedi da je A invertibilna matrica i da je

$$A^{-1} = \Delta^{-1}\tilde{A}.$$

■

Kako svi elementi nekog polja koji su različiti od nule imaju multiplikativni inverz, poseban slučaj ovog teorema je

Korolar 2.1 *Neka je F polje. Tada je $A \in M(n, F)$ invertibilna ako i samo ako je $det(A) \neq 0$.*

2.6 Prsten grupe

Neka je R prsten s jedinicom $1 \in R$, i neka je $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ konačna grupa. Označimo s RG skup svih formalnih suma

$$a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n, \quad a_i \in R, \quad g_i \in G.$$

Neka je $g_1 = e$ neutralni element u G. Tada kraće pišemo $ag_1 = a$, i slično $1g_i = g_i$. Zbrajanje u RG se definira po komponentama, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} a_ig_i + \sum_{i=1}^{n} b_ig_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)g_i.$$

Množenje se definira tako da prvo definiramo

$$(ag_i)(bg_j) = (ab)g_k \tag{2.14}$$

gdje je $g_k = g_ig_j$, a zatim (2.14) proširujemo na formalne sume koristeći zakon distributivnosti. Ako je

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_ig_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_jg_j\Big) = \sum_{k=1}^{n} c_kg_k,$$

tada je koeficijent elementa g_k jednak

$$c_k = \sum_{g_i g_j = g_k} a_i b_j.$$

Ovako definirano zbrajanje i množenje u RG zadovolja svojstva prstena. Asocijativnost množenja u RG se naslijeđuje od asocijativnosti množenja u R i G. Nadalje, element $1e = 1$ je jedinica u RG. Time skup RG dobiva strukturu prstena s jedinicom kojeg nazivamo prsten grupe. Za primjer promotrimo diedralnu grupu

$$D_4 = \langle R, D \mid R^4 = D^2 = 1,\ R^k D = DR^{-k} \rangle$$

i prsten $\mathbb{Z}$. Neka su $x = 2R^2 - 3D$ i $y = R + 2DR^3$. Tada je

$$\begin{aligned} xy &= (2R^2 - 3D)(R + 2DR^3) \\ &= 2R^3 - 3DR + 4R^2DR^3 - 6D^2R^3 \\ &= 2R^3 - 3DR + 4DR^{-2}R^3 - 6R^3 = -4R^3 + DR. \end{aligned}$$

Ako je R komutativan prsten i G Abelova grupa, tada je prsten RG komutativan. Preslikavanjem $a \mapsto ae$ s R u RG dobivamo ulganje prstena R u prsten RG. Slično, preslikavanje $g \mapsto 1g$ s G u RG predstavlja ulaganje grupe G u prsten RG. Stoga RG sadrži kopije prstena R i grupe G.

Interesantno je primijetiti da ako je $|G| > 1$, tada RG ima djelitelje nule. Odaberimo $g \in G$, $g \neq e$. Tada postoji $m > 1$ takav da je $g^m = e$ jer je G konačna grupa. Po definiciji prstena grupe, formalne sume $e - g$ i $e + g + g^2 + \cdots + g^{m-1}$ nisu nula. Međutim

$$(e - g)(e + g + g^2 + \cdots + g^{m-1}) = e - g^m = 0,$$

što pokazuje da je $e - g$ je djelitelj nule u RG za svaki $g \neq e$.

2.7 Ideali i kvocijenti prsten

Koncept ideala u prstenu je analogan normalnoj podgrupi. Kvocijentni prsteni se tvore na sličan način kao kvocijentne grupe, a veza između ideala i homomorfizama prstena je analogna vezi između normalnih podgrupa i homomorfizama grupa.

Definicija 2.12 *Neprazan podskup I prstena R naziva se ideal ako vrijedi*

(i) $a - b \in I$ *za svaki* $a, b \in I$,

(ii) $ra \in I$ *i* $ar \in I$ *za svaki* $a \in I$, $r \in R$.

Ako umjesto svojstva (ii) vrijedi $ra \in I$ za svaki $a \in I$, $r \in R$, tada I nazivamo lijevi ideal prstena R. Slično definiramo desni ideal u R. Ideal je lijevi i desni ideal, pa se ponekad naziva dvostrani ideal. Ako je R komutativni prsten, tada je svaki ideal u R dvostran. Svaki ideal je podprsten jer je I Abelova podgrupa od R prema svojstvu (i), a iz svojstva (ii) slijedi da je I zatvoren na množenje u R. Međutim, podprsten nije nužno ideal jer ne mora vrijediti svojstvo (ii). Svaki prsten R ima trivijalne ideale $\{0\}$ i R.

Primjeri ideala

(1) Svaki podprsten u prstenu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ je ideal. Neka je $S \subseteq \mathbb{Z}$ podprsten. Ako je $r \in \mathbb{Z}$ i $a \in S$, tada je

$$ra = \begin{cases} \underbrace{a + a + \cdots + a}_{r}, & r > 0, \\ 0, & r = 0, \\ \underbrace{-a - a - \cdots - a}_{|r|}, & r < 0. \end{cases}$$

U svakom slučaju je $ra \in S$ jer je S aditivna podgrupa od $\mathbb{Z}$. Stoga je S ideal u $\mathbb{Z}$.

(2) Neka je R prsten gornje-trokutastih kvadratnih matrica reda 2 nad poljem $\mathbb{R}$. Tada je podskup

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

ideal u R. Doista, I je očito aditivna podrupa od R. Za svaku matricu $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \in R$ imamo

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & xa \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & az \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I,$$

pa zaključujemo da je I ideal u R. Ako I promatramo kao podskup prstena R' kvadratnih matrica reda 2 nad $\mathbb{R}$, tada I nije ni lijevi ni desni ideal u R'. Dakle, svojstvo ideala ne ovisi samo o skupu I već i o prstenu u kojem ga promatramo.

(3) Neka je R prsten, i neka je $a \in R$. Tada je

$$aR = \{ar \mid r \in R\}$$

desni ideal u R, a

$$Ra = \{ra \mid r \in R\}$$

lijevi ideal u R. Ako R nema jedinicu, a ne mora biti element skupa aR ili Ra. Pokažimo da je aR desni ideal. Odaberimo $ar_1, ar_2 \in aR$. Tada je

$$ar_1 - ar_2 = a(r_1 - r_2) \in aR$$

jer je $r_1 - r_2 \in R$. Dakle, aR je Abelova podgrupa od R. Nadalje, za svaki $r \in R$ imamo

$$(ar_1)r = a(r_1 r) \in aR$$

jer je $r_1 r \in R$, pa zaključujemo da je aR desni ideal u R. Slično se pokazuje da je Ra lijevi ideal u R.

(4) Neka je R prsten, i neka je $a \in R$. Definirajmo

$$RaR = \Big\{ \sum_i r_i a s_i \mid r_i, s_i \in R \Big\} \tag{2.15}$$

gdje $\sum_i$ označava konačnu sumu. Razlika dviju ovakvih suma je opet suma oblika (2.15), dakle RaR je Abelova podgrupa od R. Također, za $r, s \in R$ imamo

$$r\Big(\sum_i r_i a s_i\Big) = \sum_i (r r_i) a s_i \in RaR,$$
$$\Big(\sum_i r_i a s_i\Big) s = \sum_i r_i a (s_i s) \in RaR,$$

što pokazuje da je RaR (dvostrani) ideal u R.

Teorem 2.6 *Neka su A i B ideali u prstenu R. Tada je skup*

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

ideal u prstenu R.

Dokaz Odaberimo $x, y \in A + B$. Tada je $x = a + b$ i $y = a' + b'$ za neke $a, a' \in A$ i $b, b' \in B$, pa vrijedi $x - y = (a - a') + (b - b') \in A + B$ jer je $a - a' \in A$ i $b - b' \in B$. Za svaki $r \in R$ imamo $rx = ra + rb \in A + B$ jer je $ra \in A$ i $rb \in B$. Time je dokazano da je $A + B$ ideal od R. ■

Propozicija 2.4 *Neka je $\{I_k\}_{k\in J}$ familija ideala prstena R. Tada je $\bigcap_{k\in J} I_k$ također ideal prstena R.*

Dokaz Odaberimo $a, b \in \bigcap_{k\in J} I_k$ i $r \in R$. Tada je $a - b \in I_k$ i $ra \in I_k$ za svaki $k \in J$ jer je I_k ideal od R. Slijedi da je $a - b \in \bigcap_{k\in J} I_k$ i $ra \in \bigcap_{k\in J} I_k$, pa zaključujemo da je $\bigcap_{i\in J} I_k$ ideal od R. ■

Definicija 2.13 *Neka je S podskup prstena R. Najmanji ideal koji sadrži S naziva se ideal generiran skupom S, i označava sa (S). Ako je S konačan skup, $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, tada koristimo oznaku $(S) = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Ideal (a) generiran jednim elementom $a \in R$ nazivamo glavni ideal.*

Ideal generiran skupom $S \subseteq R$ se tvori na sljedeći način. Neka je $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k\in J}$ familija ideala od R takvih da je $S \subseteq A_k$ za svaki $k \in J$. Primijetimo da je $\mathcal{A}$ neprazan skup jer je $R \in \mathcal{A}$. Prema propoziciji 2.4, $\bigcap_{k\in J} A_k$ je ideal od R i $S \subseteq \bigcap_{k\in J} A_k$. Ako je B bilo koji drugi ideal od R koji sadrži S, tada je $B \in \mathcal{A}$ pa je $\bigcap_{k\in J} A_k \subseteq B$. Dakle, $\bigcap_{k\in J} A_k$ je najmanji ideal koji sadrži skup S, pa je

$$(S) = \bigcap_{k\in J} A_k.$$

Analogne definicije i tvrdnje se mogu formulirati za lijeve i desne ideale.

Neka je R prsten s jedinicom. Lako se provjeri da je

$$(a) = \left\{ \sum_i r_i a s_i \mid r_i, s_i \in R \right\} = RaR,$$

gdje $\sum_i$ označava konačnu sumu. Ako je R također komutativan, tada je

$$(a) = \{ra \mid r \in R\} = Ra.$$

Sada ćemo definirati kvocijentni prsten na sličan način kako smo definirali kvocijentnu grupu. Neka je I ideal u prstenu R. Definirajmo relaciju ekvivalencije $\sim$ na R s

$$a \sim b \quad \text{ako i samo ako je} \quad a - b \in I.$$

Klasa ekvivalencije elementa $a \in R$ je

$$\overline{a} = \{b \in R \mid a - b \in I\} = \{a + r \mid r \in I\} = a + I.$$

Skup svih klasa ekvivalencije $\overline{a}$ označimo s

$$R/I = \{a + I \mid a \in R\}.$$

Na skupu R/I možemo definirati zbrajanje i množenje na prirodan način:

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I, \tag{2.16}$$

$$(a + I)(b + I) = ab + I. \tag{2.17}$$

Pokažimo da su operacije (2.16) i (2.17) dobro definirane, odnosno da ne ovise o predstavniku klase ekvivalencije. Ako je $a + I = a' + I$ i $b + I = b' + I$, tada je $a' - a = r \in I$ i $b' - b = s \in I$. Sada imamo

$$(a' + b') + I = (a + b + r + s) + I = (a + b) + I$$

jer je $r + s \in I$. Nadalje,

$$a'b' + I = (a + r)(b + s) + I = (ab + rb + as + rs) + I = ab + I$$

jer zbog dvostranosti ideala I imamo $rb, as, rs \in I$. Dakle, zbrajanje i množenje u R/I je dobro definirano. Lako se provjeri da skup R/I s operacijama (2.16) i (2.17) zadovoljava aksiome prstena. Operacije (2.16) i (2.17) možemo kraće zapisati kao

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}, \quad \overline{a}\overline{b} = \overline{ab} \quad \text{za sve } a, b \in R.$$

Nula u prstenu R/I je klasa ekvivalencije $\overline{0} = I$. Ako R ima jedinicu $1 \in R$, tada je jedinica u R/I dana s $\overline{1} = 1 + I$.

Definicija 2.14 *Neka je I ideal u prstenu R. Tada se prsten $(R/I, +, \cdot)$ naziva kvocijentni prsten R modulo I.*

Ako je $I = R$, tada je R/I nul-prsten jer je $\overline{r} = r + I = \overline{0}$ za svaki $r \in R$. Ako je $I = (0)$, tada se R/I može identificirati s R ako $a + (0)$ identificiramo s a.

Primjeri kvocijentnih prstena

(1) Neka je (n) ideal u prstenu $\mathbb{Z}$. Ako je $n \neq 0$, tada je kvocijentni prsten $\mathbb{Z}/(n)$ jednak prstenu $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ sa zbrajanjem i množenjem modulo n. Ako je $n = 0$, tada je $\mathbb{Z}/(0) = \mathbb{Z}$.

(2) Neka je (x) ideal generiran polinomom x u prstenu $\mathbb{R}[x]$. Promotrimo kvocijentni prsten

$$\mathbb{R}[x]/(x) = \Big\{ f(x) + (x) \mid f(x) \in \mathbb{R}[x] \Big\}.$$

Ako je $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_m x^m$, tada je

$$\overline{f(x)} = f(x) + (x) = a_0 + (x) = \overline{a}_0$$

jer je $a_k x^k \in (x)$ za svaki $k \geq 1$. Dakle,

$$\mathbb{R}[x]/(x) = \big\{ a + (x) \mid a \in \mathbb{R} \big\}.$$

Ako element $a + (x)$ identificiramo s realnim brojem a, tada se zbrajanje i množenje u $\mathbb{R}[x]/(x)$ svodi na zbrajanje i množenje u skupu $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \big(a + (x)\big) + \big(b + (x)\big) &= (a + b) + (x), \\ \big(a + (x)\big)\big(b + (x)\big) &= ab + (x). \end{aligned}$$

Stoga kvocijentni prsten $\mathbb{R}[x]/(x)$ možemo identificirati s poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$.

(3) Promotrimo sada kvocijentni prsten

$$\mathbb{R}[x]/(x^2+1) = \Big\{ f(x) + (x^2+1) \mid f(x) \in \mathbb{R}[x] \Big\}.$$

Da bismo odredili elemente prstena $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ primijetimo da $x^2+1 \in (x^2+1)$ implicira

$$\overline{x^2+1} = \overline{x}^2 + \overline{1} = \overline{0}.$$

Dakle, $\overline{x}^2 = -\overline{1}$ odakle slijedi da su potencije elementa $\overline{x} \in \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ dane s

$$\overline{x}^{2n} = (-1)^n \, \overline{1}, \quad \overline{x}^{2n+1} = (-1)^n \, \overline{x}, \quad n \geq 1. \tag{2.18}$$

Ako je $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_m x^m$, tada iz (2.18) slijedi da je

$$\overline{f(x)} = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 \overline{x} + \overline{a}_2 \overline{x}^2 + \cdots + \overline{a}_m \overline{x}^m = \overline{\alpha} + \overline{\beta}\overline{x}$$

za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, gdje se α i β dobiju grupiranjem koeficijenata uz parne i neparne potencije od $\overline{x}$. Zaključujemo da je

$$\mathbb{R}[x]/(x^2+1) = \{\overline{\alpha} + \overline{\beta}\,\overline{x} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad \text{gdje je } \overline{x}^2 = -\overline{1}. \tag{2.19}$$

Ako $\bar{\alpha}$ i $\bar{\beta}$ identificiramo s realnim brojevima α i β, te $\bar{x}$ identificiramo s imaginarnom jedinicom $i = \sqrt{-1}$, tada je zbrajanje i množenu u $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ istovjetno zbrajanju i množenju kompleksnih brojeva. Dakle, $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ možemo identificirati s poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

2.8 Homomorfizmi prstena

Neka je I ideal u prstenu R. Definirajmo preslikavanje

$$\pi \colon R \to R/I, \quad \pi(a) = a + I. \tag{2.20}$$

Iz definicije binarnih operacija u R/I slijedi da π zadovoljava

$$\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b), \quad \pi(ab) = \pi(a)\pi(b).$$

Preslikavanje π naziva se *projekcija* ili *kanonski homomorfizam* s prstena R na prsten R/I. Ovo motivira sljedeću definiciju.

Definicija 2.15 *Neka su R i S prsteni. Preslikavanje $f \colon R \to S$ koje zadovoljava svojstva*

(i) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,

(ii) $f(ab) = f(a)f(b)$,

za sve $a, b \in R$ naziva se homomorfizam prstena.

Ako je f injekcija (surjekcija), tada kažemo da je f monomorfizam (epimorfizam) prstena. Ako je f bijekcija, tada je f *izomorfizam* prstena, i kažemo da su prsteni R i S izomorfni. U tom slučaju je inverzno preslikavanje $f^{-1} \colon S \to R$ također izomorfizam prstena.

Definicija 2.16 *Neka je $f \colon R \to S$ homomorfizam prstena. Jezgra homomorfizma je skup*

$$Ker(f) = \{a \in R \mid f(a) = 0\}.$$

Primijetimo da svojstvo (i) iz definicije 2.15 implicira da je homomorfizam prstena $f\colon R \to S$ također homomorfizam iz grupe $(R,+)$ u grupu $(S,+)$. Stoga dokaz sljedećeg teorema izostavljamo jer su analogne tvrdnje dokazane u teoremima 1.1 i 1.2.

Teorem 2.7 *Neka je $f\colon R \to S$ homomorfizam iz prstena R u prsten S. Tada vrijedi:*

(i) $f(0) = 0'$ *gdje su* 0 *i* $0'$ *nule u prstenovima R i S, redom,*

(ii) $f(-a) = -f(a)$ *za svaki* $a \in R$,

(iii) f *je injektivan homomorfizam ako i samo ako je* $Ker(f) = \{0\}$.

Navedimo još neka svojstva homomorfizma prstena.

Teorem 2.8 *Neka su R i S prstenovi i neka je $f\colon R \to S$ homomorfizam.*

(i) Jezgra $Ker(f)$ je ideal u R.

(ii) Slika $Im(f)$ je podprsten od S.

(iii) Ako R ima jedinicu 1, *tada je $f(1)$ jedinica u $Im(f)$.*

(iv) Ako je R komutativan prsten, tada je $Im(f)$ komutativan podprsten od S.

Dokaz (i) Jezgra $Ker(f)$ je Abelova podgrupa od R. Neka su $r \in R$ i $a \in Ker(f)$. Tada je

$$f(ra) = f(r)f(a) = f(r)0 = 0.$$

Slično se pokazuje $f(ar) = 0$. Dakle, $ra \in Ker(f)$ i $ar \in Ker(f)$ što pokazuje da je $Ker(f)$ ideal u R.
(ii) Neka su $x, y \in Im(f) \subseteq S$. Tada postoje $a, b \in R$ takvi da je $f(a) = x$ i $f(b) = y$. Sada imamo

$$x - y = f(a) - f(b) = f(a - b) \in Im(f),$$
$$xy = f(a)f(b) = f(ab) \in Im(f).$$

Slijedi da je $Im(f)$ podprsten od S.

(iii) Pretpostavimo da je R prsten s jedinicom $1 \in R$. Tada za svaki $f(a) \in Im(f)$, $a \in R$, vrijedi

$$f(a) = f(1 \cdot a) = f(1)f(a),$$

i slično $f(a) = f(a)f(1)$. Dakle, $f(1)$ je jedinica u podprstenu $Im(f)$.
(iv) Pretpostavimo da je R komutativan prsten. Neka su $f(a), f(b) \in Im(f)$ za neke $a, b \in R$. Množenje u $Im(f)$ je komutativno jer je

$$f(a)f(b) = f(ab) = f(ba) = f(b)f(a).$$

Dakle, $Im(f)$ je komutativan podprsten u S. ■

Naglasimo da $f(1) \in S$ ne mora biti jedinica u prstenu S. Doista, preslikavanje $f\colon \mathbb{R} \to M(2, \mathbb{R})$ dano sa $f(a) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ je homomorfizam prstena pa je $f(1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ jedinica u podprstenu

$$Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.21}$$

Međutim, $f(1)$ nije jedinica u $M(2, \mathbb{R})$.

Iako prsten ne mora imati jedinicu, svaki prsten se može uložiti u prsten s jedinicom.

Teorem 2.9 *Neka je R prsten. Tada postoji injektivni homomorfizam prstena $f\colon R \to S$ gdje je S prsten s jedinicom.*

Dokaz Neka je S kartezijev umnožak $S = R \times \mathbb{Z}$. Na skupu S definirajmo binarne operacije

$$(a, m) + (b, n) = (a + b, m + n), \tag{2.22}$$
$$(a, m)(b, n) = (ab + mb + na, mn), \tag{2.23}$$

gdje su $a, b \in R$ i $m, n \in \mathbb{Z}$. Lako se provjeri da operacije (2.22) i (2.23) zadovoljavaju aksiome prstena. Uređeni par $(0_R, 1)$ (gdje je 0_R nula u R) je jedinica u S jer je

$$(a, m)(0_R, 1) = (a0_R + m0_R + a, m) = (a, m),$$
$$(0_R, 1)(a, m) = (0_R a + a + m0_R, m) = (a, m).$$

Definirajmo preslikavanje $f\colon R \to S$ s $f(a) = (a, 0)$. Iz definicije binarnih operacija u S imamo

$$f(a+b) = (a+b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b),$$
$$f(ab) = (ab, 0) = (a, 0)(b, 0) = f(a)f(b).$$

Preslikavanje f je očigledno injekcija pa je f monomorfizam iz prstena R u prsten S. ■

Prema teoremu 2.9, svaki prsten R možemo identificirati s podprstenom $f(R) \subseteq S$, ali jedinica u S nije sadržana u $f(R)$. Ako R ima jedinicu $1_R \in R$, onda je $f(1_R)$ jedinica u $f(R)$, ali $f(1_R)$ nije jedinica u S jer

$$(1_R, 0)(a, n) = (a + n1_R, 0) \neq (a, n). \tag{2.24}$$

Sljedeći teorem je analogan prvom teoremu o izomorfizmu u teoriji grupa.

Teorem 2.10 (Prvi teorem o homomorfizmu prstena) *Neka je $f\colon R \to S$ homomorfizam iz prstena R u prsten S. Tada je*

$$R/Ker(f) \simeq Im(f).$$

Dokaz Označimo $K = Ker(f)$. Definirajmo preslikavanje $h\colon R/K \to S$ s $h(\overline{a}) = f(a)$ gdje je $\overline{a} = a + K$. Ako je $\overline{a} = \overline{b}$, tada je $a - b \in K$ što implicira $f(a - b) = 0$, odnosno $f(a) = f(b)$. Dakle, preslikavanje h je dobro definirano. Pokažimo da je h homomorfizam prstena. Za svaki $\overline{a}, \overline{b} \in R/K$ vrijedi

$$h(\overline{a} + \overline{b}) = h(\overline{a+b}) = f(a+b) = f(a) + f(b) = h(\overline{a}) + h(\overline{b}),$$
$$h(\overline{a}\overline{b}) = h(\overline{ab}) = f(ab) = f(a)f(b) = h(\overline{a})h(\overline{b}).$$

Nadalje, h je očigledno surjekcija na $Im(f)$ jer je

$$Im(h) = \{h(a + K) \mid a \in R\} = \{f(a) \mid a \in R\} = Im(f).$$

Preostaje nam dokazati da je h injekcija. Ako je $h(\overline{a}) = h(\overline{b})$, tada je $f(a) = f(b)$ što povlači $f(a - b) = 0$, odnosno $a - b \in K$. Odavde slijedi $a + K = b + K$, odnosno $\overline{a} = \overline{b}$. Time je dokazano da je $h\colon R/K \to Im(f)$ izomorfizam. ■

Primjer

Promotrimo prsten

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} n & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Q} \right\}. \tag{2.25}$$

Lako se provjeri da je skup

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{Q} \right\} \tag{2.26}$$

dvostrani ideal u R. Doista,

$$\begin{pmatrix} n & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ns \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A, \tag{2.27}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A. \tag{2.28}$$

Kvocijentni prsten je dan sa

$$R/A = \left\{ \begin{pmatrix} n & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A \mid n \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Q} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A \mid n \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{2.29}$$

Preslikavanje $f\colon R/A \to \mathbb{Z}$ definirano sa

$$f\left(\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A \right) = n \tag{2.30}$$

je izomorfizam prstena, stoga je $R/A \simeq \mathbb{Z}$.

Neka je $f\colon R \to S$ homomorfizam prstena. Zanima nas u kakvom su odnosu ideali u S s idealima u R. Ova korespodencija dana je sljedećim teoremom.

Teorem 2.11 *Neka je $f\colon R \to S$ epimorfizam prstena. Neka je I_R skup svih ideala u R koji sadrže jezgru $Ker(f)$ i neka je I_S skup svih ideala u S. Tada je preslikavanje $\psi\colon I_R \to I_S$ definirano s $\psi(A) = f(A)$ bijekcija.*

Dokaz Tvrdnju ćemo dokazati u dva koraka.
(i) Pokažimo da je ψ surjekcija. Neka je X ideal u S. Pokažimo da je skup

$$f^{-1}(X) = \{a \in R \mid f(a) \in X\}$$

ideal u R koji sadrži $Ker(f)$. Neka su $a, b \in f^{-1}(X)$. Tada su $f(a), f(b) \in X$, pa vrijedi $f(a-b) = f(a) - f(b) \in X$, dakle je $a - b \in f^{-1}(X)$. Za svaki $r \in R$ imamo $f(ra) = f(r)f(a) \in X$, stoga je $ra \in f^{-1}(X)$. Slično se pokazuje $ar \in f^{-1}(X)$, pa zaključujemo da je $f^{-1}(X)$ ideal u R.

Ako je $a \in Ker(f)$, tada je $f(a) = 0 \in X$, odnosno $a \in f^{-1}(X)$, što implicira da je $Ker(f) \subseteq f^{-1}(X)$. Kako je $f\colon R \to S$ surjekcija, na nivou skupova je $X = f\big(f^{-1}(X)\big)$. Dakle, ideal X je oblika $f(A)$ gdje je $A = f^{-1}(X)$ ideal u R koji sadrži $Ker(f)$. Time je dokazano da je ψ surjekcija.

(ii) Sada ćemo pokazati da je ψ injekcija. Pretpostavimo da je $f(A) = f(B)$ gdje su $A, B \in I_R$. Pokažimo da je $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$. Kako je

$$f^{-1}\big(f(A)\big) = \{x \in R \mid f(x) \in f(A)\},$$

trivijalno slijedi da je $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$. Odaberimo sada $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$. Tada je $f(x) = f(a)$ za neki $a \in A$. Odavde slijedi $f(x-a) = 0$, odnosno $x - a \in Ker(f) \subseteq A$. Stoga je $x = a + a' \in A$ za neki $a' \in A$, što implicira $f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq A$. Time je pokazano da je $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$, i slično $B = f^{-1}\big(f(B)\big)$. Sada iz jednakosti $f(A) = f(B)$ odmah slijedi $A = B$, čime je dokazano da je ψ injekcija. ■

Ovaj teorem pokazuje da ako je $f\colon R \to S$ epimorfizam prstena, tada su ideali u S u 1-1 korespondenciji s idealima u R koji sadrže $Ker(f)$. Važna posljedica ovog teorema je sljedeći rezultat koji se odnosi na ideale u kvocijentnom prstenu.

Teorem 2.12 *Neka je I ideal u prstenu R. Tada je svaki ideal u R/I oblika A/I gdje je $A \subseteq R$ ideal koji sadrži I.*

Dokaz Neka je $\varphi\colon R \to R/I$ kanonski homomorfizam, $\varphi(a) = a + I$. Kako je φ surjekcija, prema teoremu 2.11 svaki ideal u prstenu R/I je oblika $\varphi(A)$ gdje je A ideal u R i $A \supseteq Ker(\varphi) = I$. Također, vrijedi

$$\varphi(A) = \{\varphi(a) = a + I \mid a \in A\} = A/I,$$

čime je teorem dokazan. ■

2.9 Euklidska domena. Domena glavnih ideala

Važna klasa prstena su Euklidske domene na kojima se može definirati algoritam dijeljenja.

Definicija 2.17 *Neka je R prsten. Svaka funkcija $\phi\colon R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ sa svojstvom $\phi(0) = 0$ i $\phi(a) > 0$ za svaki $a \neq 0$ naziva se norma na R.*

Norma na neki način mjeri "veličinu" elemenata u R.

Definicija 2.18 *Neka je R komutativna integralna domena s jedinicom. Kažemo da je R euklidska domena ako postoji norma $\phi\colon R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ takva da za sve $a, b \in R$, $b \neq 0$, postoje $q, r \in R$ takvi da je*

$$a = bq + r \quad \textit{gdje je} \quad \phi(r) < \phi(b).$$

Element q nazivamo kvocijent, a r ostatak pri dijeljenju.

Primjeri

(1) Prsten cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ je euklidska domena s normom $\phi(n) = |n|$. Ako su $a, b \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$, tada prema algoritmu za dijeljenje cijelih brojeva postoje jedinstveni $q, r \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|,$$

odnosno $\phi(r) < \phi(b)$.

(2) Neka je $\mathbb{Z}[i]$ prsten Gaussovih cijelih brojeva

$$\mathbb{Z}[i] = \Big\{ m + in \mid m, n \in \mathbb{Z},\, i = \sqrt{-1} \Big\}.$$

Definirajmo normu

$$\phi(m + in) = |m + in| = m^2 + n^2.$$

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, $b \neq 0$. Tada je $ab^{-1} = \alpha + i\beta$ za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Za racionalne brojeve α i β neka su $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{Z}$ takvi da je α_0 najbliži α i β_0 najbliži β. Tada je $|\alpha - \alpha_0| \leq \frac{1}{2}$ i $|\beta - \beta_0| \leq \frac{1}{2}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} a &= b(\alpha + i\beta) = b\big((\alpha - \alpha_0) + i(\beta - \beta_0) + \alpha_0 + i\beta_0\big) \\ &= b\big(\alpha_0 + i\beta_0\big) + b\big(\alpha - \alpha_0 + i(\beta - \beta_0)\big). \end{aligned}$$

Definirajmo $q = \alpha_0 + i\beta_0$ i $r = b\big(\alpha - \alpha_0 + i(\beta - \beta_0)\big)$. Tada je $a = bq + r$.

Očigledno je $q \in \mathbb{Z}[i]$, pa slijedi da je $r = a - bq \in \mathbb{Z}[i]$. Nadalje,

$$\begin{aligned}\phi(r) &= |b|^2|\alpha - \alpha_0 + i(\beta - \beta_0)|^2 = |b|^2\big((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2\big)\\ &\leq |b|^2\Big(\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2\Big) < |b|^2 = \phi(b).\end{aligned}$$

Time smo pokazali da je $\mathbb{Z}[i]$ Euklidska domena.

Definicija 2.19 *Prsten u kojem je svaki ideal glavni naziva se prsten glavnih ideala. Komutativna integralna domena s jedinicom u kojoj je svaki ideal glavni naziva se domena glavnih ideala.*

Prema definiciji, u domeni R glavnih ideala svaki ideal je oblika $(a) = Ra$ za neki $a \in R$ jer R komutativan prsten s jedinicom.

Teorem 2.13 *Svaka Euklidska domena je domena glavnih ideala.*

Dokaz Neka je R Euklidska domena s normom $\phi\colon R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, i neka je I ideal u R. Ako je $I = \{0\}$ nul-ideal, tada je $I = (0)$. Stoga pretpostavimo $I \neq \{0\}$. Skup $S = \{\phi(a) \mid a \in I, a \neq 0\}$ je omeđen odozdo, pa postoji $d \in I$, $d \neq 0$, koji ima minimalnu normu u S. Pokažimo da je $I = (d)$. Očigledno je $(d) \subseteq I$. Odaberimo $a \in I$, $a \neq 0$. Kako je R Euklidska domena, postoje $q, r \in R$ takvi da je $a = dq + r$ i $\phi(r) < \phi(d)$. Primijetimo da je $r = a - dq \in I$. Ako je $r \neq 0$, tada iz $0 < \phi(r) < \phi(d)$ dobivamo kontradikciju zbog minimalnosti norme $\phi(d)$. Dakle, $r = 0$ što implicira $a = dq \in (d)$. Zaključujemo da je $I \subseteq (d)$, što povlači $I = (d)$. ■

Svaki ideal I u Euklidskoj domeni je generiran nekim elementom $d \in I$ koji ima minimalnu normu u I. Element d ne mora biti jedinstven. Na primjer, prsten cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ je domena glavnih ideala gdje je svaki ideal I generian elementom d koji ima najmanju apsolutnu vrijednost u I. Ako je $I \neq \{0\}$, ovaj element nije jedinstven jer je $I = (d) = (-d)$.

2.10 Prsten polinoma

Neka je R komutativni prsten s jedinicom. Formalna suma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in R, \tag{2.31}$$

naziva se polinom u varijabli x. Ako je $a_n \neq 0$, onda a_n nazivamo vodeći koeficijent, a $a_n x^n$ vodeći član polinoma $f(x)$. Polinom $f(x) = a_0$ nazivamo konstantni polinom. Ako je $a_0 = 0$, onda $f(x) = 0$ nazivamo nul–polinom. Stupanj polinoma definiramo sa $\deg(f(x)) = n$ gdje je $a_n \neq 0$ vodeći koeficijent polinoma, dok stupanj nul–polinoma definiramo sa $\deg(0) = -\infty$. Za simbol $-\infty$ vrijedi standardna konvencija

$$-\infty < n, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty, \quad -\infty + n = -\infty \quad \forall\, n \geq 0. \tag{2.32}$$

Dakle, konstantni polinom $\neq 0$ ima stupanj 0, a nul–polinom ima stupanj $-\infty$. Skup svih polinoma oblika (2.31) označavamo sa $R[x]$. Zbroj polinoma $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ i $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, $n \geq m$, definiramo sa

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k \tag{2.33}$$

gdje smo uzeli da je $b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = b_n = 0$. Umnožak polinoma je definiran sa

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + a_n b_m x^{n+m} \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j \Big) x^k. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Sumu

$$\sum_{i+j=k} a_i b_j = a_0 b_0 + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$$

nazivamo konvolucijski umnožak nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$. Lako se provjeri da operacije (2.33) i (2.34) zadovoljavaju aksiome prstena. Stoga je $R[x]$ komkutativni prsten s jedinicom. Prsten R je sadržan u $R[x]$ kao prsten konstantnih polinoma. Primijetimo da za stupanj polinoma vrijede nejednakosti

$$\begin{aligned} \deg(f(x) + g(x)) &\leq \max\big(\deg(f(x)), \deg(g(x))\big), \\ \deg(f(x)g(x)) &\leq \deg(f(x)) + \deg(g(x)), \end{aligned}$$

koje imaju smisla i za $f(x) = 0$ ili $g(x) = 0$ uzevši u obzir konvenciju (2.32).

Propozicija 2.5 *Neka je R integralna domena. Tada je*

(i) $R[x]$ integralna domena,

(ii) $deg(f(x)g(x)) = deg(f(x)) + deg(g(x))$.

Dokaz Neka su zadani polinomi $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \neq 0$ i $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \neq 0$. Tada su $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$ pa je $a_n b_m \neq 0$ jer je R integralna domena. Ovo povlači da je $f(x)g(x) \neq 0$ jer je vodeći član umnoška $a_n b_m x^{n+m} \neq 0$. Odavde slijedi da je $\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$. Dakle, $R[x]$ je integralna domena jer nema djelitelja nule osim nul-polinoma. ■

Svojstva polinoma u mnogome ovise o prstenu R. Na primjer, $x^2 + 1$ se ne može faktorizirati u prstenu $\mathbb{Z}[x]$, ali u prstenu $\mathbb{Z}_2[x]$ imamo

$$x^2 + \overline{1} = x^2 + \overline{2}x + \overline{1} = (x + \overline{1})^2$$

jer je $\bar{2} = \bar{0}$. Sada ćemo pobliže promotriti problem faktorizacije i ireducibilnosti polinoma u $R[x]$.

Teorem 2.14 (Euklidov algoritam) *Neka je R komutativni prsten s jedinicom, i neka su $f(x), g(x) \in R[x]$ gdje je $g(x) \neq 0$. Ako je vodeći koeficijent od $g(x)$ invertibilan u R, onda postoje jedinstveni polinomi $q(x), r(x) \in R[x]$ takvi da je*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad deg(r(x)) < deg(g(x)). \tag{2.35}$$

Dokaz Ako je $f(x) = 0$, onda su $q(x) = r(x) = 0$. Pretpostavimo da je $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \neq 0$ i neka je $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ gdje je $b_m^{-1} \in R$. Ako je $\deg(g(x)) > \deg(f(x))$, onda u relaciji (2.35) možemo uzeti $q(x) = 0$ i $r(x) = f(x)$. Stoga je dovoljno promatrati slučaj $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$, pa dokaz možemo provesti indukcijom po $n = \deg(f(x))$.

Ako je $n = 0$, tada je $f(x) = a_0$ i $g(x) = b_0$ pa možemo uzeti $q(x) = b_0^{-1}a_0$ i $r(x) = 0$. Primijetimo da je $\deg(r(x)) = -\infty < 0 = \deg(g(x))$. Pretpostavimo sada da tvrdnja (2.35) vrijedi za svaki polinom $f(x)$ stupnja $< n$. Promotrimo

$$\begin{aligned} a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) &= a_n b_m^{-1} x^{n-m}(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0) \\ &= a_n x^n + a_n b_m^{-1}(b_{m-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 x^{n-m}) \\ &= a_n x^n + g_1(x) \end{aligned}$$

gdje je $\deg(g_1(x)) \leq n-1$. Sada je

$$f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 + g_1(x) = f_1(x) \tag{2.36}$$

gdje je $\deg(f_1(x)) \leq n-1$. Po pretpostavci indukcije postoje $q_1(x), r(x) \in R[x]$ takvi da je

$$f_1(x) = g(x)q_1(x) + r(x), \quad \deg(r(x)) < \deg(g(x)). \tag{2.37}$$

Iz jednadžbi (2.36) i (2.37) slijedi

$$f(x) = g(x)\big(a_n b_m^{-1} x^{n-m} + q_1(x)\big) + r(x).$$

Definirajmo $q(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} + q_1(x)$. Time je dokazana egzistencija polinoma $q(x)$ i $r(x)$.

Da bismo dokazali jedinstvenost rastava (2.35) pretpostavimo da je

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x) = g(x)q_2(x) + r_2(x)$$

gdje je $\deg(r_i(x)) < \deg(g(x))$ za $i = 1, 2$. Odavde dobivamo

$$g(x)(q_1(x) - q_2(x)) = r_2(x) - r_1(x). \tag{2.38}$$

Kako je vodeći koeficijent u $g(x)$ invertibilan, to je

$$\deg\big(g(x)(q_1(x) - q_2(x))\big) = \deg(g(x)) + \deg(q_1(x) - q_2(x)).$$

Također, $\deg(r_1(x) - r_2(x)) < \deg(g(x))$ što zajedno s jednadžbom (2.38) povlači

$$\deg(g(x)) + \deg(q_1(x) - q_2(x)) < \deg(g(x)).$$

Ova nejednakost vrijedi ako i samo ako je $\deg(q_1(x) - q_2(x)) = -\infty$, odnosno $q_1(x) = q_2(x)$. Sada iz jednadžbe (2.38) dobivamo $r_1(x) = r_2(x)$. ■

U posebnom slučaju kada je F polje i $f(x), g(x) \in F[x]$ gdje je $g(x) \neq 0$, tada postoje jedinstveni polinomi $q(x), r(x) \in F[x]$ takvi da je $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ i $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$. Odavde slijedi da je $F[x]$ prsten u kojem postoji algoritam dijeljenja.

Teorem 2.15 *Ako je F polje, onda je prsten $F[x]$ domena glavnih ideala.*

Dokaz Ako je F polje, tada je prema propoziciji 2.5 $F[x]$ komutativna integralna domena s jedinicom. Definirajmo normu $\phi\colon F[x] \to \mathbb{N}_0$ kao funkciju $\phi(f) = 2^{\deg(f)}$ (gdje je po dogovoru $2^{-\infty} = 0$). Sada iz teorema 2.14 slijedi da je $F[x]$ Euklidska domena pa je prema teoremu 2.13 $F[x]$ domena glavnih ideala. ■

2.10.1 Ireducibilnost polinoma

Promotrimo sada pobliže problem iredubilnosti i faktorizacije polinoma. Posebno nas zanima uvjet kada se u faktorizaciji polinoma javlja linearni faktor, odnosno polinom stupnja jedan.

Definicija 2.20 *Neka je F polje. Kažemo da je polinom $f(x) \in F[x]$ ireducibilan nad poljem F ako je $deg(f(x)) \geq 1$ i ako*

$$f(x) = g(x)h(x), \quad g(x), h(x) \in F[x],$$

povlači $g(x) \in F$ ili $h(x) \in F$.

Drugim riječima, ako je $f(x)$ ireducibilan, tada u faktorizaciji $f(x) = g(x)h(x)$ jedan od polinoma $g(x)$ ili $h(x)$ mora biti konstantan. Primijetimo da je prema definiciji 2.20 polinom prvog stupnja ireducibilan. Ako je $f(x) = g(x)h(x)$, tada kažemo da $g(x)$, odnosno $h(x)$, dijeli $f(x)$. Faktorizacija polinoma u mnogome ovisi o prstenu u kojem se nalaze njegovi koeficijenti. Na primjer, polinom $x^2 + 1$ je ireducibilan nad $\mathbb{R}$, ali nad prstenom $\mathbb{C}$ se može faktorizirati kao

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Isti polinom se također može faktorizirati u prstenu $\mathbb{Z}_2[x]$ kao

$$x^2 + \overline{1} = (x + \overline{1})(x + \overline{1})$$

jer je $\bar{2} = \bar{0}$. Neka je R prsten i neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in R[x]$. Za svaki $\alpha \in R$ možemo definirati element $f(\alpha) \in R$ kao $f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0$.

Definicija 2.21 *Neka je R podprsten komutativnog prstena S, i neka je $f(x) \in R[x]$. Kažemo da je $\alpha \in S$ korijen polinoma $f(x)$ u S ako je $f(\alpha) = 0$.*

Ova definicija uzima u obzir činjenicu da korijen polinoma ne mora biti u istom prstenu kao i njegovi koeficijenti. Na primjer, korijeni polinoma $x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ su $\pm i$ koji leže u prstenu $\mathbb{C}$.

Teorem 2.16 *Neka je F polje i neka je $f(x) \in F[x]$, $deg(f(x)) = n \geq 1$.*

(a) $\alpha \in F$ *je korijen polinoma* $f(x)$ *ako i samo ako* $x - \alpha$ *dijeli* $f(x)$*.*

(b) $f(x)$ *ima najviše* n *korijena u polju* F*.*

Dokaz (a) Ako $x - \alpha$ dijeli $f(x)$, tada je $f(x) = (x - \alpha)q(x)$ za neki $q(x) \in F[x]$, pa je očigledno $f(\alpha) = 0$. Pretpostavimo da je $f(\alpha) = 0$. Prema teoremu 2.14 postoje jedinstveni polinomi $q(x), r(x) \in F[x]$ takvi da je

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x) \tag{2.39}$$

gdje je $r(x) = 0$ ili $r(x) = c \neq 0$. Kako je $f(\alpha) = 0$, iz jednadžbe (2.39) slijedi $r(\alpha) = 0$, što implicira $r(x) = 0$. Dakle, $x - \alpha$ dijeli $f(x)$.

(b) Pretpostavimo da su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in F$ različiti korjeni polinoma $f(x)$. Tada je

$$f(x) = (x - \alpha_1)q_1(x) \quad \text{za neki} \quad q_1(x) \in F[x].$$

Nadalje, $f(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)q_1(\alpha_2) = 0$ povlači $q_1(\alpha_2) = 0$ jer je $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$. Sada postoji $q_2(x) \in F[x]$ takav da je $q_1(x) = (x - \alpha_2)q_2(x)$. Ponavljanjem postupka zaključujemo da polinom $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_m)$ dijeli $f(x)$ pa je očito $m \leq n$. ■

Iz teorema 2.16 odmah slijedi da ako polinom $f(x) \in F[x]$ stupnja ≥ 2 ima korijen $\alpha \in F$, tada je $f(x)$ reducibilan u F. U tom slučaju možemo $f(x)$ napisati kao umnožak polinoma koji nisu konstantni, tj. kao

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) \quad \text{za neki} \quad q(x) \in F[x].$$

Primijetimo da reducibilan polinom u $F[x]$ ne mora imati korijen u F. Na primjer, $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + 1)$ je reducibilan nad $\mathbb{R}$ ali nema realne korjene. Međutim, za polinome stupnja 2 ili 3 vrijedi obrat.

Propozicija 2.6 *Neka je* F *polje i neka je* $f(x) \in F[x]$ *polinom stupnja* 2 *ili* 3*. Ako je* $f(x)$ *reducibilan nad* F*, tada* $f(x)$ *ima korijen u* F*.*

Dokaz Ako je $f(x)$ reducibilan polinom stupnja 2 ili 3, tada je $f(x) = g(x)h(x)$ gdje $g(x)$ i $h(x)$ nisu konstantni polinomi. Dakle, jedan od polinoma $g(x)$ ili $h(x)$ ima stupanj 1. Pretpostavimo da je $g(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Tada je $g(-ba^{-1}) = 0$ pa

zaključujemo da je $-ba^{-1} \in F$ korijen polinoma $f(x)$. ■

Vrlo često nas zanima problem faktorizacije u prstenu $R[x]$ gdje je R podprsten polja F. Prirodno je zapitati se kako se faktorizacija u $F[x]$ može iskoristiti da saznamo nešto o faktorizaciji u $R[x]$. Sljedeći rezultati koje navodimo bez dokaza daju neke kriterije ireducibilnosti u prstenima $\mathbb{Z}[x]$ i $\mathbb{Q}[x]$.

Lema 2.1 *Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ polinom u $\mathbb{Z}[x]$. Pretpostavimo da $f(x)$ ima korijen $r/s \in \mathbb{Q}$ gdje je r/s potpuno skraćeni razlomak.*

(a) Tada $r \mid a_0$ i $s \mid a_n$.

(b) Ako je $a_n = 1$ i $f(d) \neq 0$ za svaki $d \in \mathbb{Z}$ koji dijeli a_0, tada $f(x)$ nema korijen u $\mathbb{Q}$.

Primjer

Neka su $f(x) = x^2 - p$ i $g(x) = x^3 - p$ polinomi u $\mathbb{Z}[x]$ gdje je p prosti broj. Jedini djelitelji slobodnog člana za oba polinoma su ± 1 i $\pm p$. Međutim, $f(d) \neq 0$ i $g(d) \neq 0$ za $d = \pm 1, \pm p$, pa polinomi $f(x)$ i $g(x)$ nemaju korjen u $\mathbb{Q}$. Iz propozicije 2.6 sada slijedi da su $f(x)$ i $g(x)$ ireducibilni u $\mathbb{Q}[x]$. ■

Teorem 2.17 (Eisensteinov kriterij) *Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $n \geq 1$. Ako postoji prosti broj p takav da $p \mid a_k$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $p \nmid a_n$ i $p^2 \nmid a_0$, tada je $f(x)$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$.*

Primjeri

(1) Polinom $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 5$ je ireducibilan nad $\mathbb{Q}$. Ako je p prost broj koji dijeli a_k za $k = 0, 1, \ldots, 4$, tada su jedine mogućnosti $p = 1$ ili 5. Kako $5 \nmid 2$, to je $p = 5$. Sada $5^2 \nmid 5$ pa je prema Eisensteinovom kriteriju $f(x)$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$.

(2) Neka je p prost broj. Tada je polinom $f_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$. Na ovom polinomu ne možemo direktno primijeniti Eisensteinov kriterij. Međutim, možemo napraviti sljedeću transformaciju. Primijetimo da je

$$f_p(x)(x-1) = x^p - 1,$$

pa tranformacijom varijabli $x \mapsto x+1$ i primjenom binomne formule dobivamo

$$f_p(x+1)x = (x+1)^p - 1 = \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots + \binom{p}{p}x^p.$$

Dakle,

$$f_p(x+1) = \binom{p}{1} + \binom{p}{2}x + \cdots + \binom{p}{p}x^{p-1}.$$

Broj p dijeli $\binom{p}{k}$ za $k = 1, 2, \ldots, p-1$, ali $p \nmid \binom{p}{p} = 1$. Također, $p^2 \nmid \binom{p}{1} = p$, pa je $f_p(x+1)$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$ prema Eisensteinovom kriteriju. Ovo implicira da je $f_p(x)$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$. ■

Za polje F kažemo da je algebarski zatvoreno ako svaki polinom $f(x) \in F[x]$ stupnja ≥ 1 ima korjen u F. Na primjer, dobro je poznato da je polje $\mathbb{C}$ algebarski zatvoreno, dok polje $\mathbb{R}$ nije. Može se pokazati da je svako polje sadržano u nekom polju koje je algebarski zatvoreno. Ako je F algebarski zatvoreno polje, tada su ireducibilni polinomi u $F[x]$ upravo polinomi prvog stupnja. U tom slučaju svaki polinom $f(x) \in F[x]$ se može faktorizirati kao

$$f(x) = c\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)^{k_i}$$

gdje je $c \in F$, $c \neq 0$, $k_i \in \mathbb{N}$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in F$ su korijeni polinoma $f(x)$.

2.11 Maksimalni ideali

U ovom odjeljku proučavamo važnu klasu ideala koji nisu sadržani ni u jednom pravom idealu. Takve ideale nazivamo maksimalni ideali. Oni su usko povezani s prostim prstenima koji imaju samo trivijalne ideale.

Definicija 2.22 *Kažemo da je R prosti prsten ako R nema netrivijalnih ideala.*

Drugim riječima, jedini ideali u prstom prstenu su nul-ideal $\{0\}$ i cijeli prsten R. Očigledno, svako polje je prosti prsten. Ako je A ideal u polju F i $A \neq \{0\}$, onda postoji $x \in A$, $x \neq 0$, pa je $x^{-1}x = 1 \in A$. Sada za svaki $x \in F$ vrijedi $x = x\,1 \in A$ što povlači da je $A = F$.

Definicija 2.23 *Neka je R prsten. Kažemo da je A maksimalani ideal u R ako vrijedi:*

(i) $A \neq R$,

(ii) ako je B ideal u R i $B \supseteq A$, tada je $B = A$ ili $B = R$.

Proizvoljni prsten ne mora imati maksimalne ideale. Međutim, može se pokazati da u svakom prstenu $R \neq 0$ s jedinicom maksimalni ideali uvijek postoje. Sljedeći teorem daje karakterizaciju maksimalnih ideala.

Teorem 2.18 *Neka je R prsten, i neka je $A \neq R$ ideal u R. Tada su sljedeća svojstva ekvivalentna:*

(i) A je maksimalni ideal,

(ii) R/A je prosti prsten,

(iii) za svaki $x \in R$, $x \notin A$, vrijedi $A + (x) = R$.

Dokaz (i) $\Rightarrow$ (ii) Neka je $J \subseteq R/A$ ideal. Prema Teoremu 2.12, $J = B/A$ za neki ideal $B \subseteq R$ takav da $B \supseteq A$. Kako je A je maksimalni ideal, to je $B = A$ ili $B = R$ što povlači $J = A/A = \{\bar{0}\}$ ili $J = R/A$. Dakle, R/A ima samo trivijalne ideale pa je R/A prosti prsten.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Neka je $x \in R$, $x \notin A$. Tada je $B = A + (x)$ ideal u R gdje je A pravi podskup od B. Ovo povlači da je B/A ideal u R/A koji nije nul-ideal. Tada iz pretpostavke (ii) slijedi da je $B/A = R/A$ odakle dobivamo $A + (x) = R$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Neka je B ideal u R takav da $B \supseteq A$. Ako je $B \neq A$, tada postoji $x \in B \setminus A$. Ideali (x) i A su sadržani u B, stoga je $A + (x) \subseteq B$. Iz pretpostavke (iii) slijedi $A + (x) = R$ što povlači $B = R$. Dakle, A je maksimalni ideal u R. ■

Ako je R komutativni prsten s jedinicom, onda su maksimalni ideali karakterizirani strukturom kvocijentnih prstena.

Teorem 2.19 *Neka je R komutativni prsten s jedinicom. Ideal $M \subset R$ je maksimalan ako i samo ako je R/M polje.*

Dokaz Primijetimo da je $\bar{R} = R/M$ komutativan prsten s jedinicom $\bar{1} = 1 + M$, $1 \in R$. Neka je M maksimalan ideal u R. Želimo pokazati da svaki element $\bar{a} \in \bar{R}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, ima multiplikativni inverz u $\bar{R}$. Prema teremu 2.18 kvocijentni prsten $\bar{R}$ je prost, stoga je $(\bar{a}) = \bar{R}$ za svaki $\bar{a} \neq \bar{0}$. Međutim, $(\bar{a}) = \bar{a}\,\bar{R} = \bar{R}\,\bar{a}$ jer je $\bar{R}$ komutativan prsten s jedinicom. Sada iz $\bar{R} = \bar{a}\,\bar{R} = \bar{R}\,\bar{a}$ slijedi da za $\bar{1} \in \bar{R}$ postoji $\bar{b} \in \bar{R}$ takav da je $\bar{1} = \bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{a}$. Time je dokazano da je $\bar{R}$ polje.

Pretpostavimo sada da je $\bar{R}$ polje. Neka je $K \subseteq R$ ideal u R takav da $K \supseteq M$. Tada je K/M ideal u $\bar{R}$, pa je $K/M = \{\bar{0}\}$ ili $K/M = \bar{R}$ jer $\bar{R}$ nema netrivijalnih ideala. Ovo implicira da je $K = M$ ili $K = R$, stoga je M maksimalan ideal u R. ■

Koristeći gornje teoreme možemo konstruirati maksimalne ideale.

Primjeri maksimalnih ideala

(1) Promotrimo prsten 2×2 matrica nad poljem F

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}. \tag{2.40}$$

Lako se provjeri da je

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in F \right\} \tag{2.41}$$

ideal u R. Definirajmo prsten

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in F \right\}. \tag{2.42}$$

Preslikavanje $f\colon R \to S$ damo sa

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

je epimorfizam prstena s jezgrom $Ker(f) = M$ pa je prema prvom teoremu o izomorfizmu $R/M \simeq S$. Primijetimo da je $S \simeq \mathbb{F}$ jer je preslikavanje $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto a$ izomorfizam prstena. Stoga je R/M polje, odnosno R/M je prosti prsten pa je prema teoremu 2.18 M maksimalni ideal.

(2) Neka je $\mathbb{R}[x]$ prsten polinoma nad poljem $\mathbb{R}$. U prošlom odjeljku smo pokazali da su kvocijentni prsteni $\mathbb{R}[x]/(x)$ i $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ izomorfni poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{R}[x]/(x) \simeq \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \simeq \mathbb{C}.$$

Prema teoremu 2.19 ideali (x) i (x^2+1) su maksimalni ideali u $\mathbb{R}[x]$.

(3) Svi maksimalni ideali u prstenu $\mathbb{Z}$ su oblika (p) gdje je p prosti broj. Neka je M maksimalan ideal u $\mathbb{Z}$. Tada je $M = (n)$ za neki $n > 0$ jer je $\mathbb{Z}$ domena glavnih ideala. Prema Teoremu 2.19 slijedi da je $\mathbb{Z}/(n)$ polje. Ako n nije prosti broj, onda n možemo faktorizirati kao $n = n_1 n_2$ za neke $1 < n_1, n_2 < n$. U tom slučaju je $\bar{n} = \bar{n}_1 \bar{n}_2 = \bar{0}$ što je kontradikcija s $\bar{n}_1, \bar{n}_2 \neq \bar{0}$ jer polje nema djelitelja nule. Dakle, n je prosti broj.

Dokažimo obrat tvrdnje. Neka je n prosti broj. Pokazat ćemo da je $\mathbb{Z}/(n)$ polje. Ako je $0 < a < n$, onda je najveći zajednički djelitelj brojeva a i n jednak 1. Stoga postoje $p, q \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$p\,a + qn = 1. \tag{2.44}$$

U kvocijentnom prstenu jednakost (2.44) daje

$$\bar{p}\,\bar{a} + \bar{q}\,\bar{n} = \bar{p}\,\bar{a} = \bar{1}$$

jer je $\bar{n} = \bar{0}$. Ovo pokazuje da svaki element $\bar{a} \neq \bar{0}$ ima mulitiplikativni inverz. Dakle $\mathbb{Z}/(n)$ je polje, pa prema teoremu 2.19 slijedi da je (n) maksimalni ideal u $\mathbb{Z}$.

Sljedeći rezultat opisuje maksimalne ideale u prstenu polinoma $F[x]$ gdje je F polje.

Teorem 2.20 *Neka je F polje. $M \subseteq F[x]$ je maksimalni ideal u $F[x]$ ako i samo ako je $M = (p(x))$ gdje je $p(x)$ ireducibilni polinom u $F[x]$.*

Dokaz Neka je $p(x) \in F[x]$ ireducibilan polinom. Prema teoremu 2.15 prsten $F[x]$ je domena glavnih ideala. Neka je $(h(x))$ ideal u $F[x]$ takav da $(h(x)) \supseteq (p(x))$. Tada je $p(x) \in (h(x))$ što povlači $p(x) = g(x)h(x)$ za neki $g(x) \in F[x]$. Kako je $p(x)$ ireducibilan polinom, to je $g(x) = c$ ili $h(x) = c$. Ako je $g(x) = c$, tada je $(p(x)) = (c\,h(x)) = (h(x))$. Ako je $h(x) = c$, tada je $(h(x)) = (c) = F[x]$. Dakle,

$(h(x)) = (p(x))$ ili $(h(x)) = F[x]$ što povlači da je $(p(x))$ maksimalni ideal u $F[x]$.

Pretpostavimo sada da je $(p(x))$ maksimalni ideal u $F[x]$, i neka je

$$p(x) = g(x)h(x) \tag{2.45}$$

za neke $g(x), h(x) \in F[x]$. Tada je $(p(x)) \subseteq (g(x))$ što povlači $(g(x)) = (p(x))$ ili $(g(x)) = F[x]$. Ako je $(g(x)) = (p(x))$, tada je $g(x) = k(x)p(x)$ za neki $k(x) \in F[x]$. Supstitucijom ovog izraza u (2.45) dobivamo

$$p(x) = k(x)p(x)h(x)$$

što implicira da su $k(x)$ i $h(x)$ konstantni polinomi. S druge strane, ako je $(g(x)) = F[x]$, tada je $g(x)$ konstantan polinom. U svakom slučaju iz jednadžbe (2.45) dobivamo $g(x) = c$ ili $h(x) = c$ za neki $c \in F$ što pokazuje da je $p(x)$ ireducibilan polinom. ■

Poglavlje 3

Moduli

3.1 Definicija i primjeri modula

Modul je Abelova grupa čije elemente možemo množiti elementima nekog prstena. Na primjer, vektori u $\mathbb{R}^n$ tvore modul nad poljem $\mathbb{R}$ jer vektore možemo množiti realnim brojevima. Polinomi s koeficijentima u prstenu R također tvore modul nad R jer takve polinome možemo množiti elementima prstena R.

Definicija 3.1 *Neka je R prsten, i neka je $(M, +)$ Abelova grupa. Kažemo da je M lijevi R-modul ako postoji preslikavanje $R \times M \to M$, $(r, m) \mapsto rm$, sa svojstvima*

(i) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$,

(ii) $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$,

(iii) $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$,

(iv) $1m = m$ *ako je* $1 \in R$,

za sve $r, r_1, r_2 \in R$ *i* $m, m_1, m_2 \in M$.

Ako je R polje, tada M nazivamo *vektorski prostor* nad poljem R. Operacija $(r, m) \mapsto rm$ naziva se množenje skalarom r, a prsten R se često naziva prsten skalara. Svojstva (i) i (ii) su zakoni distributivnosti u odnosu na zbrajanje u M i R, a svojstvo (iii) je zakon miješane asocijativnosti. Modul M se naziva lijevi R-modul jer je množenje rm definirano slijeva. Slično se definira desni R-modul.

Ako je R komutativan prsten i M je lijevi R-modul, tada M postaje desni R-modul ako definiramo

$$mr = rm, \quad r \in R, m \in M.$$

Lako se provjeri da za ovu definiciju vrijede aksiomi (i)-(iv) gdje je množenje skalarom definirano zdesna. Za ilustraciju dokažimo svojstvo (iii). Zbog komutativnosti u R imamo

$$m(r_1r_2) = (r_1r_2)m = (r_2r_1)m = r_2(r_1m) = r_2(mr_1) = (mr_1)r_2.$$

U ovom slučaju lijevi R-modul je istovjetan desnom R-modulu pa ih ne trebamo razlikovati. Takve module jednostavno nazivamo R-moduli ili moduli nad prstenom R. U daljnjem tekstu R-modul će uvijek značiti lijevi modul osim ako nije naglašeno drugačije.

Primjeri modula

(1) Svaki prsten R je lijevi i desni R-modul.

(2) Ako je G aditivna Abelova grupa, tada je G lijevi $\mathbb{Z}$-modul jer vrijedi

$$\begin{aligned} k(g_1 + g_2) &= kg_1 + kg_2, \\ (k_1 + k_2)g &= k_1g + k_2g, \\ (k_1k_2)g &= k_1(k_2g), \\ 1g &= g, \end{aligned}$$

za sve $k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ i $g, g_1, g_2 \in G$.

(3) Neka je $\mathbb{R}^n$ skup svih uređenih n-torki

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

Skup $\mathbb{R}$ je Abelova grupa u odnosu na zbrajanje

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Neutralni element je

$$0 = (0, 0, \ldots, 0),$$

a suprotni element je definiran s

$$-(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n).$$

Ako definiramo množenje $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s

$$r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (rx_1, rx_2, \ldots, rx_n),$$

tada $\mathbb{R}^n$ postaje modul nad poljem $\mathbb{R}$. Ovaj modul nazivamo n-dimenzionalni realni vektorski prostor.

(4) Neka je $M(n, R)$ aditivna grupa matrica reda n nad prstenom R. Definirajmo množenje $R \times M(n, R) \to M(n, R)$ s

$$r[a_{ij}] = [ra_{ij}] \tag{3.1}$$

gdje je $[a_{ij}]$ matrica u $M(n, R)$. Tada množenje dano sa (3.1) tvori strukturu lijevog R-modula na $M(n, R)$.

(5) *(Direktni umnožak modula)* Neka su M i N lijevi moduli nad prstenom R. Ako na kartezijevom umnošku $M \times N$ definiramo operacije

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$
$$r(x, y) = (rx, ry)$$

za sve $(x, y), (x', y') \in M \times N$ i $r \in R$, tada skup $M \times N$ postaje lijevi R-modul. Ovaj modul naziva se direktni umnožak modula M i N.

Navedimo neka elementarna svojstva R-modula M:

(i) $0m = 0$, $m \in M$, $0 \in R$,

(ii) $r0 = 0$, $r \in R$, $0 \in M$,

(iii) $(-r)m = -(rm) = r(-m)$, $r \in R$, $m \in M$.

Kada je iz konteksta jasno, nulu iz prstena R i nulu iz modula M označavamo istim simbolom 0. Svojstva (i)–(iii) dokazuju se slično kao kod prstena, pa dokaz izostavljamo.

3.2 Podmoduli i direktne sume

U daljnjem tekstu svi rezultati se odnose na lijeve R-module koje ćemo jednostavno nazivati R-moduli. Analogni rezultati vrijede za desne R-module.

Definicija 3.2 *Neka je M modul nad R. Neprazan podskup $N \subseteq M$ je podmodul od M ako vrijedi*

(i) $a - b \in N$ *za sve* $a, b \in N$,

(ii) $ra \in N$ *za sve* $a \in N$, $r \in R$.

Ako je R polje, tada N nazivamo *vektorski podprostor* od M. Drugim riječima podmodul je Abelova podgrupa od M koja je zatvorena na množenje elementima iz prstena R. Očigledno su $\{0\}$ i M trivijalni podmoduli od M.

Primjeri podmodula

(1) Ako je I lijevi ideal u prstenu R, tada je I podmodul R-modula R.

(2) Neka je M modul nad R i neka je $x \in M$. Tada je skup

$$Rx = \{rx \mid r \in R\}$$

podmodul od M. Doista,

$$r_1x - r_2x = (r_1 - r_2)x \in Rx,$$
$$r_1(r_2x) = (r_1r_2)x \in Rx,$$

za sve $r_1, r_2 \in R$. Podmodul Rx općenito ne sadrži x osim ako R ima jedinicu jer je tada $x = 1\,x \in Rx$.

(3) Prsten polinoma $F[x]$ je vektorski prostor nad poljem F. Neka je $F_n[x]$ skup svih polinoma iz $F[x]$ do uključivo reda n. Tada je $F_n[x]$ vektorski podprostor prostora $F[x]$.

(4) *(Podmodul generiran jednim elementom)* Neka je M modul nad R i neka je $x \in M$. Skup

$$K = \{rx + nx \mid r \in R,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

je najmanji podmodul od M koji sadrži x. K nazivamo podmodul generiran elementom x. Primijetimo da ovdje nx označava sumu $x + x + \cdots + x$ za $n > 0$, odnosno $-x - x \cdots - x$ za $n < 0$. K je Abelova podgrupa od M jer za svaki $r, s \in R$ i $n, m \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$(rx + nx) - (sx + mx) = (r - s)x + (n - m)x \in K.$$

Ako je $a \in R$, tada je

$$a(rx + nx) = (ar + na)x \in Rx$$

jer je $ar + na \in R$. Time je dokazano da je K podmodul od M. Nadalje, za $r = 0$ i $n = 1$ dobivamo $x \in K$. Neka je sada L bilo koji podmodul od M koji sadrži x. Tada prema definiciji 3.2 vrijedi $rx \in L$ i $nx \in L$ za svaki $r \in R$ i $n \in \mathbb{Z}$. Stoga je $rx + nx \in L$ što povlači $K \subseteq L$. Dakle, K najmanji podmodul od M koji sadrži x.

Pretpostavimo sada da R ima jedinicu 1. Pokažimo da je u tom slučaju $K = Rx$. Doista, kako je $x = 1x$ imamo

$$rx + nx = (r + 1 + 1 + \cdots + 1)x \quad (\text{za } n > 0),$$

odnosno

$$rx + nx = (r - 1 - 1 - \cdots - 1)x \quad (\text{za } n < 0).$$

Dakle, ako R ima jedinicu, tada je $rx + nx = (r + n1)x \in Rx$ što povlači $K \subseteq Rx$. Inkluzija $Rx \subseteq K$ je trivijalna (za $n = 0$), pa zaključujemo da je $K = Rx$.

Teorem 3.1 *Neka je $\{N_i\}_{i \in I}$ familija podmodula R-modula M. Tada je $\bigcap_{i \in I} N_i$ također podmodul od M.*

Dokaz Neka su $x, y \in \bigcap_{i \in I} N_i$ i $a \in R$. Tada su $x, y \in N_i$ za svaki $i \in I$ iz čega slijedi $x - y \in N_i$ i $ax \in N_i$ za svaki $i \in I$. Dakle, $x - y \in \bigcap_{i \in I} N_i$ i $ax \in \bigcap_{i \in I} N_i$ što dokazuje da je $\bigcap_{i \in I} N_i$ podmodul od M. ■

Neka je S neprazan podskup R-modula M. Najmanji podmodul od M koji sadrži skup S nazivamo podmodul generiran skupom S i označavamo sa (S). Ako je $S =$

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, tada koristimo oznaku $(S) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Podmodul generiran skupom S tvori se na sljedeći način. Neka je $\mathcal{F} = \{N_k\}_{k\in J}$ familija podmodula od M koji sadrže skup S, $N_k \supseteq S$. $\mathcal{F}$ je neprazan skup jer je $M \in \mathcal{F}$. Prema teoremu 3.1 presjek $\bigcap_{k\in J} N_k$ je podmodul od M i $S \subseteq \bigcap_{k\in J} N_k$. Ako je N bilo koji podmodul koji sadrži S, tada je $N \in \mathcal{F}$ pa je $\bigcap_{k\in J} N_k \subset N$. Dakle, $\bigcap_{k\in J} N_k$ je najmanji podmodul koji sadrži S, tj.

$$(S) = \bigcap_{k\in J} N_k.$$

Definicija 3.3 *Kažemo da je R-modul M konačno generirani modul ako je $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ za neke $x_i \in M$, $1 \leq i \leq n$. Elemente x_i nazivamo generatori modula M. Ako je $M = (x)$ za neki $x \in M$, tada M nazivamo ciklički modul.*

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$. Izraz

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n \tag{3.2}$$

nazivamo *linearna kombinacija* elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Skup svih takvih linearnih kombinacija označavamo s

$$\sum_{i=1}^{n} Rx_i = \big\{r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n \mid r_i \in R, x_i \in M\big\}.$$

Sljedeći rezultat pokazuje da ako R ima jedinicu, tada se konačno generirani R-moduli sastoje točno od linearnih kombinacija (3.2).

Teorem 3.2 *Neka je R prsten s jedinicom i neka je M modul nad R. Ako je M konačno generiran elementima $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tada je*

$$M = \sum_{i=1}^{n} Rx_i. \tag{3.3}$$

Dokaz Pokažimo da je skup $\sum_{i=1}^{n} Rx_i$ podmodul od M. Neka su $m_1 = \sum_{i=1}^{n} r_ix_i$ i $m_2 = \sum_{i=1}^{n} s_ix_i$. Tada je

$$m_1 - m_2 = \sum_{i=1}^{n}(r_i - s_i)x_i \in \sum_{i=1}^{n} Rx_i.$$

Ako je $a \in R$, tada je

$$am_1 = \sum_{i=1}^{n}(ar_i)x_i \in \sum_{i=1}^{n} Rx_i.$$

Dakle, $\sum_{i=1}^{n} Rx_i$ je podmodul od M. Nadalje, svi generatori modula M su sadržani u $\sum_{i=1}^{n} Rx_i$ jer je $x_k = 1x_k \in \sum_{i=1}^{n} Rx_i$ za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$. Stoga je

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subseteq \sum_{i=1}^{n} Rx_i \tag{3.4}$$

jer je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ najmanji modul koji sadrži sve generatore $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Po pretpostavci je $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pa iz relacije (3.4) slijedi $M = \sum_{i=1}^{n} Rx_i$. ■

Dakle, svaki element m konačno generiranog modula je linearna kombinacija $m = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$. Generatori nekog modula ne moraju biti jedinstveni. Neka je $F_n[x]$ vektorski prostor polinoma nad poljem F do uključivo stupnja n. Tada su

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \quad \text{i} \quad \{1, 1+x, x^2, \ldots, x^n\}$$

dva različita skupa generatora prostora $F_n[x]$.

Definicija 3.4 *Neka su $N_1, N_2, \ldots, N_k$ podmoduli R-modula M. Podmodul generiran unijom $\bigcup_{i=1}^{k} N_i$ nazivamo suma podmodula N_i i označavamo s $\sum_{i=1}^{k} N_i$.*

Prema ovoj definiciji je

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{k} N_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} N_i. \tag{3.5}$$

Ako je $M = \sum_{i=1}^{k} N_i$, tada kažemo da je M *generiran podmodulima* N_i. Struktura podmodula (3.5) karakterizirana je sljedećim teoremom (koji ujedno objašnjava oznaku $\sum_{i=1}^{k} N_i$).

Teorem 3.3 *Neka su $N_1, N_2, \ldots, N_k$ podmoduli R-modula M. Tada je*

$$\sum_{i=1}^{k} N_i = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} x_i \mid x_i \in N_i \Big\}. \tag{3.6}$$

Dokaz Neka je S skup svih konačnih suma $\sum_{i=1}^{k} x_i$, $x_i \in N_i$. Pokažimo da je S podmodul od M. Neka su $\sum_{i=1}^{k} x_i, \sum_{i=1}^{k} y_i \in S$, i neka je $a \in R$. Tada je

$$\sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=1}^{k} y_i = \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i) \in S$$

jer je $x_i - y_i \in N_i$ za svaki $1 \leq i \leq k$, i

$$a\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} ax_i \in S$$

jer je $ax_i \in N_i$ za svaki $1 \leq i \leq n$. Očigledno je $\bigcup_{i=1}^{k} N_i \subseteq S$ jer je $N_i \subseteq S$ za svaki $1 \leq i \leq n$. Pokažimo da je S najmanji podmodul od M koji sadrži $\bigcup_{k=1}^{k} N_i$. Neka je K podmodul od M takav da $K \supseteq \bigcup_{i=1}^{k} N_i$. Tada K sadrži sve elemente oblika $\sum_{i=1}^{k} x_i$, $x_i \in N_i$, pa je $S \subseteq K$. Dakle, S je podmodul generiran skupom $\bigcup_{i=1}^{k} N_i$, pa je $\sum_{i=1}^{k} N_i$ dan izrazom (3.6). ■

Definicija 3.5 *Neka su $N_1, N_2, \ldots, N_k$ podmoduli R-modula M. Suma podmodula $\sum_{i=1}^{k} N_i$ naziva se direktna suma ako se svaki element $x \in \sum_{i=1} N_i$ može na jedinstven način zapisati kao $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$, $x_i \in N_i$. Direktnu sumu označavamo s*

$$N_1 \oplus N_2 \cdots \oplus N_k.$$

Ako direktna suma generira cijeli modul M, tada pišemo

$$M = N_1 \oplus N_2 \cdots \oplus N_k.$$

Za ilustraciju promotrimo vektorski prostor $V = \mathbb{R}^3$ nad poljem $\mathbb{R}$. Odaberimo vektore $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$. Svaki vektor $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$ se može na jedinstven način napisati kao

$$x = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

Stoga je $V = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$, direktna suma podprostora $\mathbb{R}e_i = \{re_i \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Teorem 3.4 *Neka su N_1 i N_2 podmoduli R-modula M. Tada je $M = N_1 \oplus N_2$ ako i samo ako je $M = N_1 + N_2$ i $N_1 \cap N_2 = \{0\}$.*

Dokaz Pretpostavimo da je $M = N_1 \oplus N_2$. Tada je očigledno $M = N_1 + N_2$. Ako je $x \in N_1 \cap N_2$, tada x možemo rastaviti na sume

$$x = x + 0, \quad x \in N_1,\ 0 \in N_2 \quad \text{i} \quad x = 0 + x, \quad 0 \in N_1,\ x \in N_2.$$

Kako suma mora biti jedinstvena zaključujemo da je $x = 0$. Dakle $N_1 \cap N_2 = \{0\}$.

Pretpostavimo sada da je $M = N_1 + N_2$ i $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. Tada se svaki $x \in M$ može napisati kao $x = x_1 + x_2$, $x_i \in N_i$. Pokažimo da je suma jedinstvena. Ako je $x = y_1 + y_2$ za neke $y_i \in N_i$, tada je $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, odnosno $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$. Ovo povlači da je $x_1 - y_1 \in N_1 \cap N_2$ i $y_2 - x_2 \in N_1 \cap N_2$. Kako je $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ zaključujemo da je $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$. Time je dokazano da je $M = N_1 \oplus N_2$. ■

Na sličan način se pokazuje da je $M = N_1 \oplus N_2 \cdots \oplus N_k$ ako i samo ako je

$$M = \sum_{i=1}^{k} N_i \quad \text{i} \quad \bigcap_{i=1}^{k} N_i = \{0\}.$$

3.3 Homomorfizmi modula i kvocijentni moduli

Definicija 3.6 *Neka su M i N moduli nad prstenom R, i neka je $f\colon M \to N$ preslikavanje koje zadovoljava*

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

(ii) $f(rx) = rf(x)$,

za svaki $x, y \in M$, $r \in R$. Tada se f naziva linearno preslikavanje ili homomorfizam iz modula M u modul N. Ako je R polje, tada kažemo da je f linearna transformacija iz vektorskog prostora M u vektorski prostor N.

Skup svih homomorfizama $f\colon M \to N$ označavamo s $Hom_R(M, N)$. Ako je $M = N$, tada kažemo da je f endomorfizam modula M. Skup svih endomorfizama modula M označavamo s $End_R(M)$. Svaki homomorfizam modula $f\colon M \to N$ je također homomorfizam Abelovih grupa M i N, pa vrijedi

(i) $f(0) = 0$,

(ii) $f(-x) = -f(x)$,

(iii) $f(x-y) = f(x) - f(y)$,

za svaki $x, y \in M$. Jezgra homomorfizma

$$Ker(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$$

je podmodul modula M, a slika homomorfizma

$$Im(f) = \{f(x) \mid x \in M\}$$

je podmodul modula N. Homomorfizam $f\colon M \to N$ je injekcija ako i samo ako je $Ker(f) = \{0\}$. Ako je homomorfizam $f\colon M \to N$ bijekcija, tada kažemo da je f izomorfizam modula. U tom slučaju su moduli M i N izomorfni i pišemo $M \simeq N$.

Primjeri homomorfizama

(1) Neka je R komutativni prsten, i neka je M modul nad R. Odaberimo $a \in R$ i definirajmo $f_a\colon M \to M$ s

$$f_a(x) = ax.$$

Tada je f_a homomorfizam. Doista, $f_a(x+y) = f_a(x) + f_a(y)$ slijedi trivijalno, a zbog komutativnosti prstena imamo

$$f_a(rx) = a(rx) = (ar)x = (ra)x = rf_a(x)$$

za svaki $x \in M$, $r \in R$.

(2) Definirajmo preslikavanje $\lambda_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s

$$\lambda_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i.$$

λ_i je linearna transformacija iz $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}$ koji nazivamo projekcija na i-tu komponentu vektora x.

(3) Neka je $C^k(a,b)$ vektorski prostor funkcija $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ koje imaju neprekidnu derivaciju do uključivo k-tog reda. Tada je derivacija $D\colon C^k(a,b) \to C^{k-1}(a,b)$,

$$D(f) = \frac{df}{dx}$$

linearna transformacija iz prostora $C^k(a,b)$ na prostor $C^{k-1}(a,b)$. ■

Skup $Hom_R(M,N)$ je Abelova grupa u kojoj je zbrajanje definirano po točkama,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in M. \tag{3.7}$$

Ako je R komutativan prsten, tada možemo definirati množenje $R \times Hom_R(M,N) \to Hom_R(M,N)$ s

$$(rf)(x) = rf(x), \quad x \in M. \tag{3.8}$$

Doista, rf je linearno preslikavanje jer za svaki $x, y \in M$ i $a \in R$ vrijedi

$$(rf)(x+y) = rf(x+y) = rf(x) + rf(y) = (rf)(x) + (rf)(y), \tag{3.9}$$

$$(rf)(ax) = rf(ax) = (ra)f(x) = (ar)f(x) = a(rf)(x). \tag{3.10}$$

Primijetimo da je relacija (3.10) posljedica komutativnosti prstena R. Lako se pokazuje da zbrajanje i množenje definirano izrazima (3.7) i (3.8) zadovoljavaju aksiome modula, pa je $Hom_R(M,N)$ modul nad komutativnim prstenom R.

Definirajmo sada pojam kvocijentnog modula. Konstrukcija kvocijentnog modula sasvim je analogna konstrukciji kvocijentne grupe ili kvocijentnog prstena. Stoga su neki detalji ostavljeni čitatelju za provjeru. Neka je N podmodul R-modula M. Definirajmo relaciju ekvivalencije $\sim$ na M s

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \in N.$$

Klasa ekvivalencije koja sadrži element $a \in M$ je skup

$$\overline{a} = \{a + x \mid x \in N\} = a + N.$$

Skup svih klasa ekvivalencije na M označavamo s M/N,

$$M/N = \{a + N \mid a \in M\}.$$

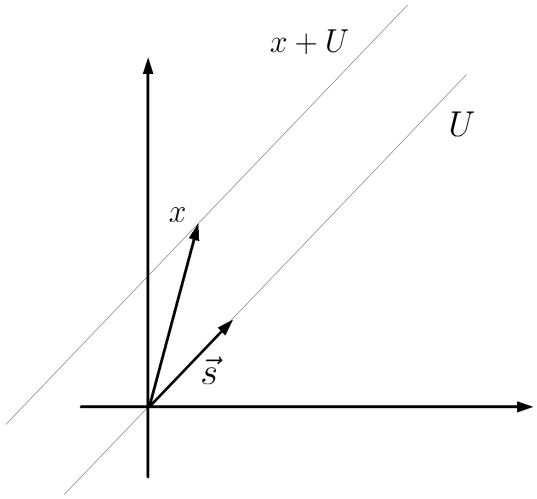
Na skupu M/N možemo definirati zbrajanje i množenje na sljedeći način:

$$(a+N) + (b+N) = (a+b) + N, \tag{3.11}$$

$$r(a+N) = ra + N, \tag{3.12}$$

za svaki $a, b \in M$, $r \in R$. Može se pokazati da su operacije (3.11) i (3.12) dobro definirane, odnosno da ne ovise o predstavniku klase ekvivalencije. Ove operacije zadovoljavaju aksiome modula na skupu M/N kojeg nazivamo *kvocijentni modul*. Ako je R polje, tada M/N nazivamo *kvocijentni prostor*. Preslikavanje $\varphi\colon M \to M/N$,

$$\varphi(x) = x + N$$



Slika 3.1: Kvocijentni prostor se sastoji od pravaca koji su paralelni s pravcem U.

naziva se *kanonska projekcija*. Zbog relacija (3.11) i (3.12) kanonska projekcija je očigledno homomorfizam iz modula M na modul M/N.

Kao primjer promotrimo podprostor vektorskog prostora $V = \mathbb{R}^3$ definiran s

$$U = \{(ts_1, ts_2, ts_3) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Potprostor U prestavlja pravac koji prolazi ishodištem i ima vektor smjera $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ (vidi sliku 3.1). Opišimo kvocijentni prostor

$$V/U = \{x + U \mid x \in \mathbb{R}^3\}.$$

Klasa ekvivalencije

$$x + U = \{(x_1 + ts_1, x_2 + ts_2, x_3 + ts_3) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

predstavlja pravac koji prolazi točkom $x = (x_1, x_2, x_3)$ i ima vektor smjera $\vec{s}$. Dakle, kvocijentni prostor V/U se sastoji od svih pravaca koji su paraleleni sa zadanim pravcem U.

Sljedeći rezultat je analogan fundamentalnom teoremu o homomorfizmima grupa ili prstena.

Teorem 3.5 *Neka su M i N moduli nad R i neka je $f\colon M \to N$ homomorfizam modula. Tada je*

$$M/Ker(f) \simeq Im(f).$$

Dokaz Dokaz je sličan dokazu teorema 2.10 pa detalje izostavljamo. Definirajmo podmodul $K = Ker(f)$ i preslikavanje

$$\varphi\colon M/K \to N, \quad \varphi(x+K) = f(x).$$

Preslikavanje φ je dobro definirano. Ako je $x + K = y + K$, tada je $x - y \in K$ što implicira $f(x-y) = 0$, odnosno $f(x) = f(y)$. Lako se pokazuje da je φ homomorfizam modula:

$$\varphi\big((x+K)+(y+K)\big) = f(x+y) = f(x)+f(y) = \varphi(x+K)+\varphi(y+K),$$
$$\varphi\big(r(x+K)\big) = f(rx) = rf(x) = r\varphi(x+K),$$

za sve $x, y \in M$, $r \in R$. Nadalje, φ je injekcija jer $\varphi(x+K) = \varphi(y+K)$ povlači $f(x) = f(y)$, odnosno $f(x-y) = 0$ pa je $x - y \in K$. Odavde slijedi $x + K = y + K$. Kako je $Im(\varphi) = Im(f)$ preslikavanje $\varphi\colon M/K \to Im(f)$ je bijekcija. Stoga su moduli $M/Ker(\varphi)$ i $Im(f)$ izomorfni. ■

Kao primjenu teorema 3.5 navedimo sljedeći rezultat.

Teorem 3.6 *Neka je R prsten s jedinicom $1 \in R$, i neka je M modul nad R. Tada je M ciklički modul ako i samo ako je $M \simeq R/I$ za neki ideal $I \subseteq R$.*

Dokaz Pretpostavimo da je $M = Rx$ ciklički modul. Definirajmo preslikavanje $f\colon R \to Rx$ gdje R promatramo kao R-modul. Očigledno je f surjekcija i homomorfizam modula jer je $f(r+s) = rx+sx = f(r)+f(s)$ i $f(rs) = r(sx) = rf(x)$. Prema teoremu 3.5 je $R/Ker(f) \simeq Rx$. Jezgra homomorfizma f, $Ker(f) = \{r \in R \mid rx = 0\}$, naziva se anihilator elementa $x \in M$ i označava s $Ann(x)$. Dakle,

$$R/Ann(x) \simeq Rx = M.$$

Pretpostavimo sada da je $M \simeq R/I$ za neki ideal $I \subseteq R$. R-modul R/I je generiran elementom $1 + I$ jer je $R/I = \{r(1+I) \mid r \in R\} = R(1+I)$. Stoga je M ciklički modul. ■

Poglavlje 4

Pregled ostalih algebarskih struktura

U ovom poglavlju dajemo pregled nekih algebarskih struktura koje su važne u različitim granama matematike i fizike. Poglavlje je isključivo informativnog karaktera i služi da studenta upozna s osnovnim pojmovima iz teorije asocijativnih algebri, Liejevih i Weylovih algebri. Stoga je prezentacija nužno nepotpuna i donosi samo letimičan pregled ideja vezanih za ove algebarske strukture prema autorovom odabiru.

4.1 Asocijativne algebre

Definicija 4.1 *Asociativna algebra nad poljem $\mathbb{F}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ na kojem je definirano bilinearno preslikavanje $m\colon A \times A \to A$, $m(a,b) = ab$, koje zadovoljava $a(bc) = (ab)c$ za sve $a, b, c \in A$.*

Preslikavanje $m\colon A \times A \to A$ nazivamo množenje u algebri A. Primijetimo da bilinearnost množenja povlači da za sve $a, b, c \in A$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi

(i) $(a+b)c = ac + bc$,

(ii) $a(b+c) = ab + ac$,

(iii) $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$.

Asocijativnost i distributivnost množenja povlače da je A prsten u kojem su zbrajanje i množenje isti kao u algebri A.

Definicija 4.2 *Kažemo da je A unitalna algebra ili algebra s jedinicom ako postoji element $1 \in A$ takav da je $1a = a1 = a$ za svaki $a \in A$.*

Ako postoji, jedinični element je jedinstven. Napomenimo da se definicija algebre ponešto razlikuje ovisno o literaturi. Neki autori podrazumijevaju da algebra A uvijek ima jedinicu ili da je $\mathbb{F}$ komutativni prsten s jedinicom.

Primjeri

(1) Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $End_{\mathbb{F}}(V)$ skup svih linearnih transformacija na prostoru V. Na $End_{\mathbb{F}}(V)$ su definirane operacije zbrajanja i kompozicije, te množenja skalarom:

$$\begin{aligned}(f+g)(u) &= f(u)+g(u),\\ (f\circ g)(u) &= f(g(u)),\\ (\lambda f)(u) &= \lambda f(u),\end{aligned}$$

za sve $\lambda \in \mathbb{F}$ i $u \in V$. $End_{\mathbb{F}}(V)$ je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ u odnosu na ove operacije. Množenje definirano kompozicijom $m(f,g) = f \circ g$ je bilinearno jer su f i g linearna preslikavanja. $End_{\mathbb{F}}(V)$ je algebra nad $\mathbb{F}$ s jedinicom id_V gdje je $id_V(x) = x$ za svaki $x \in V$.

(2) Skup $M(n,\mathbb{F})$ matrica reda n nad poljem $\mathbb{F}$ je algebra nad $\mathbb{F}$ s operacijama zbrajanja i množenja matrica, te množenja matrica skalarom. Jedinica u $M(n,\mathbb{F})$ je jedinična matrica I_n.

(3) Prsten polinoma $\mathbb{F}[x]$ je algebra nad poljem $\mathbb{F}$ gdje je množenje skalarom definirano s

$$\lambda\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k\Big) = \sum_{k=0}^{n}(\lambda\,\alpha_k)x^k.$$

Konstantni polinom $p(x) = 1$ je jedinica u algebri $\mathbb{F}[x]$.

(4) Prsten kvaterniona $\mathbb{H}$ je algebra nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$.

(5) Neka je $G = \{g_1 = e, g_2, \ldots, g_n\}$ konačna grupa i neka je $\mathbb{F}$ polje. Neka je $\mathbb{F}[G]$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ čija baza je skup G. Elementi prostora $\mathbb{F}[G]$ su konačne

linearne kombinacije $\sum_i \alpha_i g_i$, $\alpha_i \in \mathbb{F}$. Zbrajanje i množenje skalarom je definirano na prirodan način, dok je umnožak u $\mathbb{F}[G]$ definiran s

$$\big(\sum_i \alpha_i g_i\big)\big(\sum_j \beta_j g_j\big) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (g_i g_j).$$

Algebra $\mathbb{F}[G]$ s ovako definiranim operacijama zbrajanja i množenja naziva se algebra konačne grupe. Jedinica u algebri $\mathbb{F}[G]$ je jedinica u grupi G, tj. $1 = e$. ■

Algebra A je *komutativna* ako je $ab = ba$ za svaki $a, b \in A$. Algebre $End_{\mathbb{F}}(V)$, $M(n, \mathbb{F})$ i $\mathbb{H}$ su nekomutativne, dok je $\mathbb{F}[x]$ komutativna algebra.

Dimenzija algebre A je dimenzija vektorskog prostora A nad poljem $\mathbb{F}$. Algebre mogu biti konačno i beskonačno dimenzionalne. Na primjer, $M(n, \mathbb{F})$ je n^2-dimenzionalna algebra s bazom

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

gdje se element 1 nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu, a ostali elementi su jednaki nuli. S druge strane, algebra polinoma $\mathbb{F}[x]$ je beskonačno dimenzionalna jer je prostor $\mathbb{F}[x]$ razapet monomima $\{1, x, x^2, \ldots\}$.

Definicija 4.3 *Neka je A algebra nad poljem $\mathbb{F}$. Podskup $B \subseteq A$ je podalgebra od A ako je B podprsten prstena A i podprostor vektorskog prostora A.*

Primjer

Neka je $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ kvaternionska algebra s tablicom množenja

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \tag{4.1}$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \tag{4.2}$$

$\mathbb{H}$ je algebra nad poljem $\mathbb{R}$ s bazom $\{1, i, j, k\}$. Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ je podalgebra algebre $\mathbb{H}$. ■

Definicija 4.4 *Neka su A i B algebre nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $\varphi\colon A \to B$ koje za sve elemente $a, b \in A$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ zadovoljava*

(i) $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$,

(ii) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$,

(iii) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$,

naziva se homomorfizam algebri. Ako je φ bijekcija, tada je φ izmorfizam algebri.

Od posebnog su značaja homomorfizmi algebri koje nazivamo *reprezentacije*.

Definicija 4.5 *Neka je A asocijativna algebra nad poljem $\mathbb{F}$. Reprezentacija algebre A je uređeni par (ρ, V) gdje je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $\rho\colon A \to End_{\mathbb{F}}(V)$ je homomorfizam algebri. Ako A ima jedinicu 1, tada je $\rho(1) = id_V$.*

Neka je A unitalna algebra nad poljem $\mathbb{F}$. Svakom elementu $a \in A$ možemo pridružiti linearno preslikavanje $a_L \in End_{\mathbb{F}}(A)$ dano s $a_L(x) = ax$. Definirajmo $\rho\colon A \to End_{\mathbb{F}}(A)$, $\rho(a) = a_L$. Pokažimo da je ρ homomorfizam algebri. Za sve $a, b, x \in A$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ imamo

$$\begin{aligned}\rho(a+b)(x) &= (a+b)x = ax + bx = \rho(a)(x) + \rho(b)(x),\\ \rho(\lambda a)(x) &= (\lambda a)x = \lambda(ax) = \lambda\rho(a)(x),\\ \rho(ab)(x) &= (ab)x = a(bx) = \rho(a)\big(\rho(b)(x)\big) = \rho(a)\circ\rho(b)(x).\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $\rho(a + b) = \rho(a) + \rho(b)$, $\rho(\alpha a) = \alpha\rho(a)$ i $\rho(ab) = \rho(a) \circ \rho(b)$, stoga je ρ reprezentacija algebre A na vektorskom prostoru A. Preslikavanje $a \mapsto \rho(a)$ je injektivno jer je A unitalna algebra. Doista, ako je $\rho(a) = \rho(b)$, tada $\rho(a)(1) = \rho(b)(1)$ implicira $a1 = b1$, odnosno $a = b$. Ovu reprezentaciju nazivamo *regularna reprezentacija*.

Pretpostavimo da je A konačno dimenzionalna algebra dimenzije n. Tada svakoj linearnoj transformaciji a_L možemo pridružiti matricu $[a_L]$ s obzirom na odabranu bazu prostora A. U tom slučaju homomorfizam $\rho\colon A \to M(n, \mathbb{F})$, $\rho(a) = [a_L]$, nazivamo regularna matrična reprezentacija od A.

Primjer

Neka je $\mathbb{H}$ kvaternionska algebra nad $\mathbb{R}$ s bazom $\mathcal{B} = \{1, i, j, k\}$ gdje elementi baze zadovoljavaju relacije (4.1)-(4.2). Odredimo regularnu matričnu reprezentaciju $\rho\colon \mathbb{H} \to M(4, \mathbb{R})$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$. Neka je $u = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$. Matrica transformacije $\rho(u) = u_L$ je dana s

$$[u_L] = [u_L(1) \mid u_L(i) \mid u_L(j) \mid u_L(k)]$$

gdje se u stupcima nalaze komponente vektora $u_L(b) = ub$, $b \in \mathcal{B}$. Nalazimo

$$\begin{aligned} u_L(1) &= u\,1 = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \\ u_L(i) &= u\,i = -a_1 + a_0 i + a_3 j - a_2 k, \\ u_L(j) &= u\,j = -a_2 - a_3 i + a_0 j + a_1 k, \\ u_L(k) &= u\,k = -a_3 + a_2 i - a_1 j + a_0 k. \end{aligned}$$

Dakle, regularna reprezentacija je dana s

$$\rho(u) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

4.2 Liejeve algebre

Liejeve algebre su neasocijativne algebre koje imaju važnu primjenu u matematici i teorijskoj fizici. Otkriće Liejevih algebri vezano je uz pojam Liejevih grupa koje je uveo norveški matematičar Sophus Lie u proučavanju neprekidnih simetrija diferencijalnih jednadžbi. U daljnjem tekstu $\mathbb{F}$ označava polje realnih ili kompleksnih brojeva.

Definicija 4.6 *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ na kojem je definirano preslikavanje $[\,,\,]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ koje zadovoljava sljedeće uvjete:*

(i) linearnost

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z] \text{ za sve } a, b \in \mathbb{F} \text{ i } x, y, z \in \mathfrak{g},$$

Slika 4.1: Marius Sophus Lie, 1805-1865. Lie je tvorac teorije neprekidnih simetrija koje su našle primjenu u proučavanju diferencijalnih jednadžbi.

(ii) antisimetričnost

$$[x, y] = -[y, x] \text{ za sve } x, y \in \mathfrak{g},$$

(iii) Jacobijev indentitet

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \text{ za sve } x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Preslikavanje $[\,,\,]$ nazivamo Liejeva zagrada. Iz uvjeta (i) i (ii) slijedi da je Liejeva zagrada bilinearno preslikavanje, dok uvjet (ii) povlači da je

$$[x, x] = 0 \quad \text{za svaki} \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), tada kažemo da je $\mathfrak{g}$ realna (kompleksna) Liejeva algebra. Dimenzija Liejeve algebre je dimenzija vektorskog prostora $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{F}$. Liejevu algebru možemo interpretirati kao algebru čiji je umnožak $[x, y]$ antikomutativan, a umjesto asocijativnosti zadovoljava Jacobijev identitet.

Primjeri

(1) Neka je A asocijativna algebra. Tada $[a,b] = ab - ba$ definira Liejevu zagradu na A. Jacobijev identitet slijedi iz asocijativnosti množenja u A:

$$\begin{aligned}[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] &= a(bc-cb) - (bc-cb)a \\ &\quad + b(ca-ac) - (ca-ac)b \\ &\quad + c(ab-ba) - (ab-ba)c = 0.\end{aligned}$$

Posebno važan primjer je $End_{\mathbb{F}}(V)$, algebra linearnih operatora na vektorskom prostoru V s operacijama zbrajanja i kompozicije operatora. Tada je $[A,B] = A \circ B - B \circ A$ Liejeva zagrada na $End_{\mathbb{F}}(V)$.

(2) Ako je $A = M(n,\mathbb{F})$ algebra matrica reda n nad poljem $\mathbb{F}$, onda je A n^2-dimenzionalna Liejeva algebra sa zagradom $[A,B] = AB - BA$. U tom slučaju Liejevu zagradu nazivamo komutator matrica A i B.

(3) Neka je $\mathbb{R}^3$ realni vektorski prostor s elementima $\vec{u} = (u_1\, u_2\, u_3)^t$, gdje t označava transponiranje, na kojem je zagrada definirana kao vektorski umnožak

$$[\vec{u},\vec{v}] = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Linearnost i antisimetričnost zagrade su očigledni iz svojstava vektorskog umnoška, dok Jacobijev slijedi iz vektorskog identiteta

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0} \quad \text{za sve} \quad \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^3.$$

Prostor $\mathbb{R}^3$ sa zagradom $[\vec{u},\vec{v}] = \vec{u} \times \vec{v}$ je trodimenzionalna Liejeva algebra.

(4) Neka je $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ prostor glatkih funkcija $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$,

$$f(q,p) = f(q_1,q_2,\ldots,q_n,p_1,p_2,\ldots,p_n).$$

Definirajmo zagradu na $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ s

$$[f,g] = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \Big). \tag{4.4}$$

Slika 4.2: Simeon Denis Poisson, 1781-1840, francuski matematičar i fizičar.

Zagrada (4.4) naziva se Poissonova zagrada i igra važnu ulogu u fizici, naročito u teorijskoj mehanici. Poissonova zagrada je bilinearna jer su parcijalne derivacije linearni operatori, dok je antisimetričnost zagrade očigledna. Izravnim računom se provjeri da Jacobijev identitet vrijedi jer parcijalne derivacije drugog reda komutiraju,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_i}.$$

Prostor $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ s Poissonovom zagradom (4.4) je primjer beskonačno dimenzionalne Liejeve algebre.

(5) *Heisenbergova Liejeva algebra.* Neka je $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z)$ baza vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}$. Na V možemo definirati strukturu Liejeve algebre tako da definiramo zagradu sa

$$[x_i, y_i] = -[y_i, x_i] = z$$

i gdje su zagrade ostalih elemenata jednake nuli. Element z komutira sa svim elementima baze pa ga nazivamo centralni element. Heisenbergova algebra se može prikazati pomoću matrica na sljedeći način. Definirajmo redak vektore $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{F}^n$ gdje se 1 nalazi na i-tom mjestu. Elementima baze

pridružimo matrice

$$X_i = \begin{pmatrix} 0 & e_i & 0 \\ 0 & 0_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_n & e_i^t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

gdje je 0_n nul–matrica reda n. Lako se provjeri da matrice (4.5) zadovoljavaju komutacijske relacije Heisenbergove algebre. Opći element algebre možemo prikazati kao linearnu kombinaciju

$$X = \sum_{i=1}^{n} u_i X_i + \sum_{i=1}^{n} v_i Y_i + cZ = \begin{pmatrix} 0 & u & c \\ 0 & 0_n & v^t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_i, v_i, c \in \mathbb{F}.$$

Neka je $\mathfrak{g}$ n-dimenzionalna Liejeva algebra nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ baza prostora $\mathfrak{g}$. Tada je

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k \, E_k \tag{4.6}$$

za neke konstante $C_{ij}^k \in \mathbb{F}$ koje nazivamo *strukturne konstante* algebre $\mathfrak{g}$. Kažemo da je $\mathfrak{g}$ Lijeva algebra generirana elementima $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Antisimetričnost i Jacobijev identitet povlače da strukturne konstante zadovoljavaju

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k, \tag{4.7}$$

$$\sum_{m=1}^{n} \left(C_{ij}^m \, C_{mk}^r + C_{jk}^m \, C_{mi}^r + C_{ki}^m \, C_{mj}^r \right) = 0. \tag{4.8}$$

Struktura algebre $\mathfrak{g}$ potpuno je određena konstantama C_{ij}^k. Ako su poznati koeficijenti C_{ij}^k, tada zbog bilinearnosti Lijeve zagrade iz jednadžbe (4.6) možemo izračunati $[x, y]$ za sve $x, y \in \mathfrak{g}$. Obrnuto, bilo koji skup konstanti C_{ij}^k koji zadovoljava uvjete (4.7) i (4.8) definira Liejevu algebru sa zagradom (4.6) koja se bilinearno proširuje na cijelu algebru $\mathfrak{g}$.

Definicija 4.7 *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra sa zagradom $[\,,\,]$ i neka je $\mathfrak{h}$ vektorski podprostor od $\mathfrak{g}$. Ako je $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ za sve $X, Y \in \mathfrak{h}$, tada kažemo da je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$.*

Definicija 4.8 *Neka su* $\mathfrak{g}$ *i* $\mathfrak{h}$ *Liejeve algebre nad poljem* $\mathbb{F}$. *Linearno preslikavanje* $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *koje zadovoljava uvjet*

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

za sve $x, y \in \mathfrak{g}$ *naziva se homomorfizam Liejevih algebri. Ako je* φ *bijektivno preslikavanje, tada* φ *nazivamo izomorfizam Liejevih algebri.*

Važan primjer homomorfizma Liejevih algebri je adjungirana reprezentacija

$$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to End_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}).$$

Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ operator $\mathrm{ad}(x)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ je definiran s

$$\mathrm{ad}(x)(y) = [x,y].$$

Zbog bilinearnosti Liejeve zagrade operator $\mathrm{ad}(x)$ je linearan. Iz istog razloga je preslikavanje $x \mapsto \mathrm{ad}(x)$ linearno. Da bismo pokazali da je adjungirana reprezentacija homomorfizam Liejevih algebri potrebno je provjeriti da je

$$\mathrm{ad}([x,y]) = \mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y) \circ \mathrm{ad}(x),$$

odnosno

$$[[x,y],z] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \quad \text{za svaki} \quad z \in \mathfrak{g}.$$

Primijetimo da je ovo svojstvo ekvivalentno Jacobijevom identitetu. Iz Jacobijevog identiteta također slijedi da $\mathrm{ad}(x)$ zadovoljava Leibnizovo pravilo u odnosu na zagradu $[y,z]$:

$$\mathrm{ad}(x)([y,z]) = [\mathrm{ad}(x)(y), z] + [y, \mathrm{ad}(x), z].$$

Linearno preslikavanje $D\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ za koje vrijedi $D([a,b]) = [D(a), b] + [a, D(b)]$ nazivamo derivacija, a preslikavanje $\mathrm{ad}(x)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ naziva se unutarnja derivacija.

Promotrimo vektorski prostor antisimetričnih matrica

$$\mathfrak{h} = \{X \in M(3,\mathbb{R}) \mid X^t = -X\}. \tag{4.9}$$

Pokažimo da je komutator $[X,Y] = XY - YX$ zatvoren u $\mathfrak{h}$ što implicira da je $\mathfrak{h}$ podalgebra Liejeve algebre $M(3,\mathbb{R})$. Ako su $X, Y \in \mathfrak{h}$, tada je $X^t = -X$ i $Y^t = -Y$ što povlači

$$[X,Y]^t = (XY)^t - (YX)^t = Y^tX^t - X^tY^t = (-Y)(-X) - (-X)(-Y) = -[X,Y].$$

Dakle, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ za sve $X, Y \in \mathfrak{h}$. Svaka matrica $X \in \mathfrak{h}$ se može napisati u obliku

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

za neke $a, b, c \in \mathbb{R}$. Stoga se X može rastaviti na jedinstvenu linearnu kombinaciju

$$X = aL_1 + bL_2 + cL_3$$

gdje su

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice L_1, L_2, L_3 tvore bazu vektorskog prostora $\mathfrak{h}$. Komutatori matrica L_i su dani s

$$[L_1, L_2] = L_3, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = L_2 \tag{4.10}$$

što kraće možemo zapisati kao

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} L_k \tag{4.11}$$

gdje je ε_{ijk} Levi-Civita simbol

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (ijk) \text{ je parna permutacija od } (1\,2\,3), \\ -1, & (ijk) \text{ je neparna permutacija od } (1\,2\,3), \\ 0, & \text{ako se indeks } i, j \text{ ili } k \text{ ponavlja.} \end{cases}$$

Iz jednadžbe (4.11) vidimo da su strukturne konstante algebre (4.9) dane s $C_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}$. Algebra (4.9) je primjer klasične Liejeve algebre koju nazivamo $so(3)$.

Algebra $so(3)$ je izomorfna Liejevoj algebri $\mathbb{R}^3$ sa zagradom $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{u} \times \vec{v}$. Neka su $\vec{e}_1 = (1\ 0\ 0)^t$, $\vec{e}_2 = (0\ 1\ 0)^t$ i $\vec{e}_3 = (0\ 0\ 1)^t$ vektori koji tvore kanonsku bazu prostora $\mathbb{R}^3$. Vektorski umnožak elemenata baze dan je s

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2. \tag{4.12}$$

Usporedba s jednadžbom (4.10) sugererira da vektor $\vec{e}_i$ ima istu ulogu kao matrica L_i. Definirajmo linearno preslikavanje $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to so(3)$ s $\varphi(\vec{e}_i) = L_i$. Tada je φ izomorfizam Liejevih algebri jer iz relacija (4.10) i (4.12) dobivamo

$$\varphi([\vec{e}_i, \vec{e}_j]) = [L_i, L_j]$$

što povlači da je $\varphi([\vec{u}, \vec{v}]) = [\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})]$ za sve $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

4.2.1 Klasične Liejeve algebre

Klasične Liejeve algebre javljaju se u proučavanju određenih simetrija u matematici i teorijskoj fizici. Ovdje ćemo dati kratak opis nekih od njih.

Opća i specijalna linearna Liejeva algebra

Algebru $M(n, \mathbb{F})$ s matričnim komutatorom $[A, B] = AB - BA$ nazivamo opća linearna Liejeva algebra nad poljem $\mathbb{F}$ i označavamo s $gl(n, \mathbb{R})$.

Trag matrice $A = [a_{ij}]$ je funkcija $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Primijetimo da je $Tr(AB) = Tr(BA)$ što implicira $Tr([A, B]) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$ za sve $A, B \in M(n, \mathbb{R})$. Stoga je vektorski prostor

$$sl(n, \mathbb{F}) = \{X \in M(n, \mathbb{F}) \mid Tr(X) = 0\} \tag{4.13}$$

zatvoren na matrični komutator, pa tvori Liejevu podalgebru od $M(n, \mathbb{F})$. Algebra (4.13) naziva se specijalna linearna Liejeva algebra nad poljem $\mathbb{F}$.

Ortogonalne Liejeve algebre

Neka su $p, q \geq 0$ cijeli brojevi i neka je $p + q = n$. Neka je I_{pq} blok matrica reda n

$$I_{pq} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

gdje su I_p i I_q jedinične matrice reda p i q, redom. Specijalna ortogonalna Liejeva algebra $so(p, q)$ je definirana s

$$so(p, q) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X^t I_{pq} = -I_{pq} X\}. \tag{4.15}$$

Ako je $p = n$, tada $so(p, q)$ postaje algebra antisimetričnih matrica

$$so(n, \mathbb{F}) = \{X \in M(n, \mathbb{F}) \mid X^t = -X\}.$$

Simplektička Liejeva algebra

Neka je J antisimetrična matrica reda $2n$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

gdje je I_n jedinična matrica reda n. Algebra

$$sp(n, \mathbb{F}) = \{X \in M(2n, \mathbb{F}) \mid X^t J = -JX\}$$

naziva se simplektička Liejeva algebra ranga n.

Unitarne Liejeve algebre

Neka su $p, q \geq 0$ cijeli brojevi, $p + q = n$, i neka je I_{pq} matrica dana izrazom (4.14). Algebra

$$u(p, q) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) \mid X^* I_{pq} = -I_{pq} X\},$$

gdje je $X^* = \overline{X}^t$ adjungirana matrica matrice X, naziva se unitarna Liejeva algebra. Specijalna unitarna algebra definirana je kao $su(p, q) = u(p, q) \cap sl(n, \mathbb{C})$, odnosno

$$su(p, q) = \{X \in u(p, q) \mid Tr(X) = 0\}.$$

Osim navedenih algebri postoje i kvaternionske Liejeve algebre koje su definirane nad prstenom kvaterniona $\mathbb{H}$.

4.3 Weylove algebre

Weylove algebre, nazvane po njemačkom matematičaru Hermannu Weylu, uvedene su početkom 20. stoljeća kao algebre koje opisuju operatore položaja i impulsa u kvantnoj mehanici. Ovdje ćemo dati kratak opis Weylovih algebri kao prsten diferencijalnih operatora.

Neka je $\mathbb{F}$ polje realnih ili kompleksnih brojeva i neka je $\mathbb{F}[x] = \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ prsten polinoma u varijablama $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Prsten $\mathbb{F}[x]$ je beskonačno dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Bazu prostora tvore monomi

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}, \quad k_i \geq 0,$$

Slika 4.3: Hermann Weyl, 1885-1955. Jedan od najznačajnijih matematičara 20. stoljeća čiji rad je imao veliki utjecaj na razvoj matematičke fizike.

gdje je $x_i^0 = 1$. Neka su $\hat{x}_i$ i ∂_i linearni operatori na $\mathbb{F}[x]$ definirani s

$$\hat{x}_i(f) = x_i f, \quad \partial_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Definicija 4.9 *Weylova algebra $\mathcal{A}_n$ je podalgebra algebre $End_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x])$ generirana operatorima $\hat{x}_i$ i ∂_i, $1 \leq i \leq n$. Za $n = 0$ definiramo $\mathcal{A}_0 = \mathbb{F}$.*

Elementi algebre $\mathcal{A}_n$ su linearne kombinacije monoma u generatorima $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$ i $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$. Algebra $\mathcal{A}_n$ nije komutativna jer operatori $\hat{x}_i$ i ∂_i ne komutiraju. Promotrimo kako operator $\partial_i \hat{x}_j$ djeluje na polinom $f \in \mathbb{F}[x]$:

$$(\partial_i \hat{x}_j)(f) = \partial_i(x_j f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j f) = \delta_{ij} f + x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gdje je δ_{ij} Kroneckerov simbol. Iz ove jednadžbe dobivamo

$$(\partial_i \hat{x}_j)(f) = (\delta_{ij} 1 + x_j \partial_i)(f) \tag{4.16}$$

gdje 1 označava operator identitete dan sa $1(f) = f$ za svaki $f \in \mathbb{F}[x]$. Relaciju (4.16) možemo zapisati kao komutacijsku relaciju

$$[\partial_i, \hat{x}_j] = \delta_{ij} 1, \quad 1 \leq i, j \leq n, \tag{4.17}$$

gdje definiramo $[a, b] = a \circ b - b \circ a$ za sve $a, b \in End_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x])$. Očigledno je da ostali operatori komutiraju,

$$[\partial_i, \partial_j] = [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Kada je iz konteksta jasno da se radi o operatoru množenja, $\hat{x}_i$ ćemo identificirati s varijablom x_i. Također, operator $\delta_{ij}1$ identificiramo s δ_{ij}.
Neka je $f \in \mathbb{F}[x]$. Promotrimo kako operator $[\partial_i, f]$ djeluje na polinom $h \in \mathbb{F}[x]$. Prema definiciji komutatora,

$$\begin{aligned}[\partial_i, f]h = (\partial_i f)h - (f\partial_i)h &= \frac{\partial}{\partial x_i}(fh) - f\frac{\partial h}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}h + f\frac{\partial h}{\partial x_i} - f\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}h.\end{aligned}$$

Dakle,

$$[\partial_i, f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{4.18}$$

što znači da je $[\partial_i, f]$ operator množenja polinomom $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Ako f ne ovisi o varijabli x_i, tada ∂_i i f komutiraju, $[\partial_i, f] = 0$. Iz relacije imamo (4.17) imamo

$$\partial_i x_j = x_j \partial_i + \delta_{ij},$$

što pokazuje da svaki monom u ∂_i i x_i možemo napisati kao linearnu kombinaciju monoma u kojima su varijable x_i slijeva a derivacije ∂_i zdesna. Na primjer,

$$\begin{aligned}\partial_2\, x_2^2\, \partial_1\, x_1^3 &= (x_2^2\, \partial_2 + 2x_2)(x_1^3\, \partial_1 + 3x_1^2) \\ &= x_2^2\, \partial_2\, x_1^3\, \partial_1 + 2x_2\, x_1^3\, \partial_1 + 3x_2^2\, \partial_2\, x_1^2 + 6x_2\, x_1^2 \\ &= x_2^2\, x_1^3\, \partial_2\, \partial_1 + 2x_2\, x_1^3\, \partial_1 + 3x_2^2\, x_1^2\, \partial_2 + 6x_2\, x_1^2. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Ako je monom zapisan u obliku (4.19), tada kažemo da je zapisan u kanonskoj bazi. Za opisivanje baze Weylove algebre korisno je uvesti multi-indeks $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Monom $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ kraće zapisujemo kao x^α, a stupanj monoma je duljina multi-indeksa $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Može se pokazati da je baza Weylove algebre dana s

$$\mathcal{B} = \{x^\alpha \partial^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\},$$

stoga je $\mathcal{A}_n$ beskonačno dimenzionalna algebra nad poljem $\mathbb{F}$.

Literatura

(1) D.S. Summit, R.M. Foote, *Abstract algebra*, treće izdanje, John Wiley and Sons Inc., Hoboken, 2004.

(2) P.B. Bhattacharya, S.K. Jain, S.R. Nagapaul, *Basic Abstract Algebra*, drugo izdanje, Cambridge University Press, 1994.

(3) N. Jacobson, *Basic Algebra I*, drugo izdanje, W.H. Freeman and Company, New York, 1985.

(4) S. MacLane, G. Birkhoff, *Algebra*, treće izdanje, AMS Chelsea Publishing, Providence, 1999.

(5) S. Lang, *Algebra*, revidirano treće izdanje, Springer, New York, 2002.

(6) K. Erdmann, M.J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer, London, 2006.

(7) R. Goodman, N.R. Wallach, *Symmetry, Representations, and Invariants*, Springer, New York, 2009.