ZBIRKA ZADATAKA IZ ALGEBRE

GRUPE, PRSTENI, POLJA

Dr ZORAN STOJAKOVIĆ

Dr ĐURA PAUNIĆ

ZBIRKA ZADATAKA IZ ALGEBRE

GRUPE, PRSTENI, POLJA

TREĆE IZDANJE

IRO »GRAĐEVINSKA KNJIGA«
BEOGRAD, 1988.

Dr Zoran Stojaković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Dr Đura Paunić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

RECENZENTI:
Dr Janez Ušan, redovni profesor prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Dr Ratko Tošić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

ISBN 86-395-0071-1

Za IRO »GRAĐEVINSKA KNJIGA«
Milan Višnjić, glavni urednik
Milica Dodić, odgovorni urednik
Olga Vasiljević, urednik
Snežana Necić, naslovna strana
Dragan Paunović, tehnički urednik
Tiraž: 1000 primeraka

Štampa: Štamparija „Bakar" – Bor

PREDGOVOR PRVOM IZDANJU

Ova zbirka primera, zadataka i problema namenjena je pre svega studentima matematike, ali može biti od koristi i studentima drugih fakulteta, pre svega tehničkih, inženjerima, fizičarima, hemičarima i svim onima koji žele da se upoznaju sa teorijom grupa, prstena i polja.

Knjiga je podeljena u tri dela. U prvom je obradjena teorija grupa, u drugom teorija prstena i u trećem teorija polja. Na početku svakog dela naveden je pregled teorije, definicije i teoreme čije je poznavanje potrebno za rešavanje zadataka koji slede. Većina zadataka je rešena, za neke su data uputstva, a jedan deo zadataka je ostavljen čitaocu za samostalno rešavanje. Autori su nastojali da se izborom i redosledom zadataka ostvari postupnost u izlaganju materijala. U zbirku je uključen i izvestan broj zadataka iz matematičkih časopisa i uz takve zadatke navedena je literatura koja čitaocu omogućuje da se detaljnije upozna sa pojedinim problemima.

Zahvaljujemo se dr Janezu Ušanu i dr Ratku Tošiću koji su pregledali rukopis i dali niz korisnih sugestija.

Takodje se zahvaljujemo Merimi Marčićev koja je rukopis otkucala i pripremila za štampu.

U Novom Sadu,
mart 1983.

Autori

PREDGOVOR TREĆEM IZDANJU

Do trećeg izdanja ove knjige dolazi pošto su prethodna dva rasprodata u kratkom roku, što svedoči o tome da je knjiga široko prihvaćena. S obzirom na takav prijem na koji je knjiga naišla, smatramo da veće izmene teksta ne bi bile opravdane.

U ovom izdanju izvršene su neke manje izmene i ispravljene primećene štamparske greške.

Zahvaljujemo se mr Biljani Janevoj koja je ukazala na izvestan broj štamparskih grešaka.

U Novom Sadu
april 1988.

Autori

S A D R Ž A J

I GRUPE

§1.0. PREGLED DEFINICIJA I TEOREMA

1.1. Funkcija $f : S \times S \to S$, gde je S neprazan skup, naziva se binarna operacija na skupu S.

Dakle, binarna operacija f definisana na skupu S pridružuje svakom uredjenom paru elemenata iz S jedan elemenat iz S. Da uredjenom paru (a,b) odgovara elemenat c zapisujemo sa

$$f(a,b) = c,$$

ili sa

$$a\, f\, b = c.$$

Često se ovako definisana binarna operacija naziva unutrašnja binarna operacija (za razliku od spoljašnje binarne operacije koja se definiše kao preslikavanje $g : S \times T \to R$, gde su S, T i R neprazni skupovi).

1.2. Ako je n prirodan broj, S neprazan skup i $S^n = \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n \text{ puta}}$, onda se funkcija $f : S^n \to S$ naziva n-arna operacija na skupu S. Broj n naziva se dužina ili arnost operacije f. n-arna operacija se za n=1 naziva unarna, a za n=3 ternarna (za n=2 dobija se ranije definisana binarna operacija).

1.3. Ako je S skup na kome je definisana binarna operacija *, a T podskup od S takav da za svako $a,b \in T$

$$a * b \in T,$$

onda kažemo da je skup T zatvoren u odnosu na operaciju *.

1.4. Ako je na skupu G definisana binarna operacija *, onda se uredjen par (G,*) naziva grupoid. Kaže se, takodje, da je G grupoid u odnosu na operaciju *.

Često ćemo, kada se podrazumeva o kojoj je operaciji reč, govoriti samo "grupoid G" (umesto "grupoid (G,*)").

1.5. Binarna operacija * definisana na skupu G je asocijativna ako i samo ako je

$$a * (b * c) = (a * b) * c,$$

za svako $a,b,c \in G$.

Operacija * naziva se komutativna ako i samo ako je

$$a * b = b * a,$$

za svako $a,b \in G$.

1.6. Grupoid (G,*) naziva se polugrupa ako i samo ako je * asocijativna operacija.

1.7. Ako je (G,*) grupoid i postoji elemenat $e \in G$ takav da važi

$$a * e = e * a = a,$$

za svako $a \in G$, onda se e naziva neutralni (ili jedinični) elemenat grupoida (G,*).

Ako je elemenat $e' \in G$ takav da važi

$$a * e' = a,$$

za svako $a \in G$, onda se e' naziva desni neutralni elemenat, a ako je elemenat $e'' \in G$ takav da važi

$$e'' * a = a,$$

za svako $a \in G$, onda se e'' naziva levi neutralni elemenat grupoida (G,*).

1.8. Grupoid (G,*) u kome za svako $a,b \in G$ jednačine

$$a * x = b, \quad y * a = b,$$

imaju jedinstveno rešenje po x i y u G, naziva se kvazigrupa.

Kvazigrupa sa neutralnim elementom naziva se lupa.

1.9. Grupoid (G,*) se naziva grupa ako i samo ako važe sledeći aksiomi:

G1. Za svako $a,b,c \in G$

$$a*(b*c) = (a*b)*c,$$

(operacija je asocijativna).

G2. Postoji elemenat $e \in G$ tako da je za svako $a \in G$

$$e * a = a,$$

(postoji levi neutralni elemenat).

G3. Za svako $a \in G$ postoji elemenat $a^{-1} \in G$ tako da je

$$a^{-1} * a = e,$$

(svaki elemenat a ima levi inverzni elemenat a^{-1}).

1.10. Sa definicijom 1.9. je ekvivalentna definicija grupe koja se dobija iz 1.9. na sledeći način: u G2. se zahteva egzistencija desnog neutralnog elementa (umesto levog), u G3. se zahteva egzistencija desnog inverznog elementa (umesto levog), a sve ostalo u 1.9. ostaje neizmenjeno.

1.11. Grupa (G,*) u kojoj je operacija * komutativna naziva se komutativna grupa ili Abelova grupa.

1.12. Ako je $(G,\cdot)$ grupa (definicija 1.9) onda važi (pri tom, kada operaciju označavamo znakom · pisaćemo umesto $a \cdot b$ skraćeno ab):

a) Ako je e levi neutralni elemenat, onda je e i desni neutralni elemenat, tj. e je neutralni elemenat.

b) Neutralni elemenat je jedinstven.

c) Ako je a^{-1} levi inverzni elemenat elementa a, onda je a^{-1} i desni inverzni elemenat elementa a (dakle, a^{-1} je inverzni elemenat za a).

d) Svaki elemenat grupe ima jedinstven inverzni elemenat.

e) Za svako $a \in G$

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

f) Za svako $a,b \in G$

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} .$$

g) Za svako $a,b,c \in G$

$$ac = bc \Rightarrow a = b \quad i \quad ca = cb \Rightarrow a = b,$$

(važe zakoni desne i leve kancelacije (skraćivanja)).

h) Za svako $a,b \in G$ jednačine

$$ax = b \quad i \quad ya = b$$

imaju jedinstveno rešenje po x i y u G.

1.13. Red grupe G je kardinalni broj skupa G i označavamo ga sa $|G|$. Ako je $|G|$ konačan broj grupa se naziva konačna, ako to nije slučaj grupa je beskonačna.

Sa $|S|$ označavaćemo i kardinalni broj proizvoljnog podskupa S grupe G.

1.14. Red elementa a grupe G je najmanji prirodan broj n za koji je $a^n = e$, ako takvo n postoji. Ako takav prirodan broj ne postoji, a je beskonačnog reda. Red elementa a označavaćemo sa $|a|$.

1.15. Ako je $(G,\cdot)$ grupa, podskup H grupe G naziva se podgrupa grupe G ako i samo ako je H grupa u odnosu na binarnu operaciju $\cdot$.

U grupi G skup koji sadrži samo jedinični elemenat $\{e\}$ i sama grupa G su podgrupe i te podgrupe nazivaju se trivijalne. Ostale podgrupe nazivaju se netrivijalne ili prave podgrupe.

1.16. Neprazan podskup H grupe G je podgrupa ako i samo ako za svako $x,y \in H$, $xy^{-1} \in H$.

1.17. Konačan neprazan podskup H grupe G je podgrupa ako i samo ako za svako $x,y \in H$, $xy \in H$.

1.18. Homomorfizam grupe $(G_1,*)$ u grupu $(G_2,\cdot)$ je preslikavanje f skupa G_1 u skup G_2 za koje za svako $x,y \in G_1$ važi

$$f(x*y) = f(x) \cdot f(y) .$$

Jezgro homomorfizma f je skup svih elemenata iz G_1 koji se preslikavaju u neutralni elemenat e_2 grupe G_2. Jezgro homomorfizma f označavaćemo sa Ker f, dakle,

$$\text{Ker } f = \{x \mid x \in G_1 \quad i \quad f(x) = e_2\}.$$

Ako je f surjektivno preslikavanje (tj. $f(G_1) = G_2$), G_2 se naziva homomorfna slika grupe G_1. U tom slučaju homomorfizam se naziva epimorfizam.

Homomorfizam koji je injektivno preslikavanje naziva se monomorfizam.

1.19. Homomorfizam koji je epimorfizam i monomorfizam (tj. bijekcija) naziva se izomorfizam. Dve grupe G_1 i G_2 se nazivaju izomorfne ako i samo ako postoji izomorfizam $f : G_1 \to G_2$. Da su grupe G_1 i G_2 izomorfne označavaćemo sa $G_1 \simeq G_2$.

1.20. Homomorfizam kojim se grupa G preslikava u sebe naziva se endomorfizam, a izomorfizam grupe G u sebe naziva se automorfizam.

1.21. Neka je a elemenat grupe G. Tada je skup $A = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ podgrupa grupe G. A je najmanja podgrupa koja sadrži a.

Pri tome, a^n je definisano na sledeći način. Ako je n prirodan broj, $a^n = \underbrace{a\ a\ \ldots\ a}_{n \text{ puta}}$, $a^{-n} = (a^{-1})^n$, a^0 je neutralni elemenat grupe G.

1.22. Ako u grupi G postoji elemenat $a \in G$ takav da je $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, onda se G naziva ciklička grupa (generisana elementom a), a a se naziva generator grupe G. Da je grupa G generisana sa a označavaćemo sa $G = \langle a \rangle$.

1.23. Neka je G ciklička grupa generisana sa a.

Ako je G grupa konačnog reda n, onda je a^k generator grupe G ako i samo ako su k i n relativno prosti brojevi.

Ako je G beskonačna grupa, onda su a i a^{-1} jedini generatori grupe G.

1.24. Konačne cikličke grupe istog reda su izomorfne. Svake dve beskonačne cikličke grupe su izomorfne. Cikličku grupu reda n označavaćemo sa C_n.

1.25. Svaka podgrupa cikličke grupe je ciklička.

1.26. Ako je S podskup grupe G, minimalna podgrupa grupe G koja sadrži S se označava sa <S> i naziva podgrupa generisana skupom S. Kada je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tada <S> označavamo sa $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$. Elementi skupa S se nazivaju generatori grupe <S>.

<S> je presek svih podgrupa koje sadrže S.

1.27. Grupa G je generisana nepraznim skupom S ako i samo ako se svaki elemenat grupe G može prikazati u obliku proizvoda

$$a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad a_1, a_2, \ldots, a_m \in S,$$

$$k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}$$

konačnog broja stepena elemenata iz S.

1.28. Ako u grupi G postoji konačan skup S tako da je $G = \langle S \rangle$, grupa G se naziva konačno generisana grupa.

1.29. Skup generatora se naziva nezavisan ako i samo ako se ni jedan elemenat tog skupa ne može prikazati kao proizvod konačnog broja stepena sa celim eksponentima ostalih elemenata .

Skup generatora S je nezavisan ako i samo ako za svako $x \in S$, x ne pripada grupi generisanoj skupom $S \setminus \{x\}$.

1.30. Svako bijektivno preslikavanje nepraznog skupa S na S naziva se permutacija skupa S.

1.31. Skup svih permutacija nepraznog skupa S je grupa u odnosu na množenje (kompoziciju) preslikavanja.

1.32. Grupa G se naziva grupa permutacija ako i samo ako je G podgrupa grupe svih permutacija nekog skupa S.

1.33. Grupa svih permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ se naziva simetrična grupa stepena n i označava sa S_n. Ta grupa ima n! elemenata.

Permutaciju $p \in S_n$ definisanu sa $p(k) = i_k$, $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ označavaćemo sa $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ ili sa $[i_1\ i_2\ \ldots\ i_n]$.

1.34. (Kejli (Cayley)) Svaka grupa G je izomorfna sa nekom grupom permutacija skupa G.

Svaka konačna grupa reda n je izomorfna sa nekom podgrupom grupe S_n.

1.35. Permutacija $p \in S_n$ se naziva ciklus dužine k ($k \leq n$) ako i samo ako je

$$p(a_1) = a_2,\ p(a_2) = a_3, \ldots, p(a_{k-1}) = a_k,\ p(a_k) = a_1,$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ različiti elementi skupa $\{1,2,\ldots,n\}$, a ostale elemente permutacija p ostavlja neizmenjene ($p(x) = x$, $x \neq a_i$, $i=1,2,\ldots,k$). Ciklus p ćemo označavati simbolom

$$p = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)$$

(ili sa $p : a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_k \to a_1 \to$) .

1.36. Ciklus dužine 2 nazivamo transpozicija, a ciklus dužine 3 tercet.

1.37. Ciklusi $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)$, $(b_1\ b_2\ \ldots\ b_\ell) \in S_n$ se nazivaju disjunktni ako i samo ako je

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \cap \{b_1, b_2, \ldots, b_\ell\} = \emptyset .$$

1.38. Svaka permutacija grupe S_n može se prikazati kao proizvod disjunktnih ciklusa.

1.39. Skup svih transpozicija generiše grupu S_n.

1.40. Permutacija grupe S_n se naziva parna ako i samo ako se može prikazati kao proizvod parnog broja transpozicija, a u suprotnom permutacija se naziva neparna.

Skup A_n svih parnih permutacija grupe S_n je podgrupa (normalna, v. 1.56) grupe S_n. Grupa A_n ima $\frac{n!}{2}$ elemenata i naziva se alternativna grupa stepena n.

1.41. Matrica formata $n \times n$ se naziva permutaciona matrica ako i samo ako je dobijena od jedinične matrice permutovanjem njenih vrsta.

1.42. Ako je P_n skup svih permutacionih matrica formata $n \times n$, onda je P_n multiplikativna grupa.

1.43. Preslikavanje $\phi : S_n \to P_n$ definisano sa $\phi : q \mapsto A_q$ gde je A_q matrica dobijena od jedinične matrice permutovanjem njenih vrsta onako kako to propisuje permutacija q, je izomorfizam grupe S_n na grupu P_n.

1.44. Na osnovu Kejlijeve teoreme (1.34) i 1.43, sledi da je svaka konačna grupa reda n izomorfna sa nekom podgrupom grupe P_n svih permutacionih matrica formata $n \times n$.

1.45. Neka su A i B neprazni podskupovi grupe G. Proizvod AB definisan je sa

$$AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

1.46. Neka je H podgrupa grupe G i $a \in G$. Skup $aH = \{ab \mid b \in H\}$ naziva se levi suskup podgrupe H, a skup $Ha = \{ba \mid b \in H\}$ je desni suskup podgrupe H.

Elemenat a nazivamo predstavnikom suskupova aH, odnosno Ha.

1.47. Neka je H podgrupa grupe G, a aH levi suskup podgrupe H. Ako je $g \in aH$, onda je $aH = gH$, tj. svaki elemenat suskupa aH može da bude predstavnik tog suskupa. Analogno tvrdjenje važi i za desne suskupove.

1.48. Neka je H podgrupa grupe G i neka su aH i bH dva leva suskupa podgrupe H. Tada se aH i bH ili poklapaju ili su disjunktni, tj. skup levih suskupova je particija skupa G. Analogno tvrdjenje važi za desne suskupove.

1.49. Ako je H podgrupa grupe G onda je za svako $a \in G$

$$|H| = |aH| = |Ha| .$$

1.50. (Lagranž (Lagrange)) Ako je H podgrupa konačne grupe G, onda je red podgrupe H delitelj reda grupe G.

1.51. Red elementa konačne grupe je delitelj reda grupe.

1.52. Grupa reda p, gde je p prost broj, je ciklička grupa i ta grupa nema pravih podgrupa.

1.53. Ako je H podgrupa grupe G, onda je preslikavanje $f : aH \mapsto Ha$ bijekcija izmedju skupa svih levih i skupa svih desnih suskupova podgrupe H. Dakle, broj levih suskupova jednak je broju desnih suskupova podgrupe H. Ako je taj broj konačan on se naziva indeks podgrupe H u grupi G (ili indeks grupe G po podgrupi H) i označava se sa $[G : H]$.

Ako je G beskonačna grupa a H njena podgrupa takva da je skup svih levih suskupova podgrupe H beskonačan (tada je beskonačan i skup svih desnih suskupova), onda kažemo da je H beskonačnog indeksa u G.

1.54. Ako je G konačna grupa a H njena podgrupa, onda je $|G| = |H| \cdot [G : H]$.

1.55. Neka su H i K konačne podgrupe grupe G. Tada važi

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} .$$

1.56. Podgrupa H grupe G naziva se normalna podgrupa grupe G ako i samo ako za svako $x \in G$

$$x H x^{-1} = H.$$

Da je H normalna podgrupa grupe G označićemo sa $H \lhd G$.

1.57. Ako je H podgrupa grupe G, onda su svaka dva od sledećih tvrdjenja ekvivalentna:

(i) H je normalna podgrupa grupe G.

(ii) $xH = Hx$, za svako $x \in G$.

(iii) Svaki levi suskup podgrupe H je i desni suskup podgrupe H.

(iv) $xHx^{-1} \subseteq H$, za svako $x \in G$.

1.58. Presek proizvoljne familije normalnih podgrupa grupe G je normalna podgrupa grupe G.

1.59. U grupi G elemenat $a \in G$ je konjugovan sa elementom $b \in G$ ako i samo ako postoji $c \in G$ tako da je

$$a = cbc^{-1}.$$

Konjugovanost elemenata grupe je relacija ekvivalencije.

1.60. Ako je H podgrupa grupe G a $x \in G$, onda je xHx^{-1} takodje podgrupa grupe G. Podgrupa xHx^{-1} se naziva podgrupa konjugovana sa H.

1.61. Neka je H podgrupa grupe G, $x \in G$. Podgrupa xHx^{-1} je izomorfna sa H, a preslikavanje $f : a \mapsto xax^{-1}$ je izomorfizam grupa H i xHx^{-1}.

1.62. Podgrupa H grupe G je normalna podgrupa u G ako i samo ako se H poklapa sa svim svojim konjugovanim podgrupama.

1.63. Neka je H normalna podgrupa grupe G. Ako se na skupu svih suskupova podgrupe H definiše binarna operacija sa

$$(aH)\cdot(bH) = (ab)H,$$

onda taj skup suskupova u odnosu na ovako definisanu operaciju čini grupu. Ta grupa se naziva faktor grupa grupe G po podgrupi H, označava se sa G/H i njen red je $[G : H]$.

1.64. (Prva teorema o izomorfizmu) Neka je $f : G \to H$ homomorfizam grupe G u grupu H sa jezgrom $\operatorname{Ker} f = K$. Tada je K normalna podgrupa grupe G, f(G) je podgrupa grupe G i

$$G/K \simeq f(G).$$

(Svaka homomorfna slika grupe G je izomorfna sa faktor grupom grupe G.)

1.65. Neka je H normalna podgrupa grupe G. Tada je preslikavanje $\pi : G \to G/H$ definisano sa $\pi : g \mapsto gH$ homomorfizam grupe G na faktor grupu G/H čije je jezgro H. π se naziva prirodni homomorfizam grupe G na faktor grupu G/H.

1.66. Neka je $f : G_1 \to G_2$ epimorfizam grupe G_1 na grupu G_2 i neka je H_2 podgrupa grupe G_2. Tada je skup H_1 svih elemenata iz G_1 čije su slike elementi iz H_2 podgrupa grupe G_1 koja sadrži $\operatorname{Ker} f$. Ako je $H_2 \lhd G_2$ onda je i $H_1 \lhd G_1$.

1.67. (Teorema o korespodenciji) Neka je H normalna podgrupa grupe G i neka je preslikavanje $\pi : G \to G/H$ definisano sa $\pi : g \mapsto gH$. π je prirodni homomorfizam grupe G na grupu G/H. Neka je f funkcija definisana na skupu svih podgrupa grupe G koje sadrže H, odredjena na sledeći način

$$f : K \mapsto \pi(K).$$

Funkcija f je bijekcija skupa svih podgrupa grupe G koje sadrže H i skupa svih podgrupa faktor grupe G/H.

Ako je N skup svih normalnih podgrupa grupe G koje sadrže H, onda je restrikcija f na N bijekcija skupa N i skupa svih normalnih podgrupa faktor grupe G/H.

1.68. (Druga teorema o izomorfizmu) Neka je H podgrupa a K normalna podgrupa grupe G. Tada je $H \cap K \lhd H$, HK je podgrupa grupe G i

$$(HK)/K \simeq H/(H \cap K).$$

1.69. (Treća teorema o izomorfizmu) Neka je G grupa, $H \lhd G$, $K \lhd G$ i K je podgrupa grupe H. Tada je $H/K \lhd G/K$ i

$$(G/K)/(H/K) \simeq G/H.$$

1.70. Neka su $(G_1,\cdot)$ i $(G_2,*)$ grupe. Skup

$$G_1 \times G_2 = \{(a_1,a_2) \mid a_1 \in G_1,\ a_2 \in G_2\}$$

u odnosu na binarnu operaciju o definisanu sa

$$(a_1,a_2) \circ (b_1,b_2) = (a_1 \cdot b_1,\ a_2 * b_2),$$

je grupa koja se naziva direktan proizvod grupa G_1 i G_2.

Analogno se definiše direktan proizvod proizvoljnog konačnog broja grupa.

1.71. Ako su A i B grupe, grupa $G = A \times B$ sadrži podgrupu A_1 koja je izomorfna sa A i sadrži podgrupu B_1 koja je izomorfna sa B. Svaki elemenat grupe G se može na jedinstven način prikazati kao proizvod jednog elementa iz A_1 i jednog iz B_1 i taj proizvod komutira. Takodje je

$$G/A_1 \simeq B \quad \text{i} \quad G/B_1 \simeq A.$$

(Za elemente $a,b \in G$ kažemo da komutiraju ako i samo ako je $ab=ba$).

1.72. Neka su G, H i K grupe. Tada je

$$(G \times H) \times K \simeq G \times (H \times K).$$

1.73. Ako su A i B normalne podgrupe grupe G takve da je $AB = G$ i $A \cap B = \{e\}$, onda je

$$G \simeq A \times B .$$

Ako su $H_1, H_2, \ldots, H_k$ normalne podgrupe grupe G takve da je

(i) $G = H_1 H_2 \cdots H_k$,

(ii) za svako $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, $H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1} H_{i+1} \ldots H_k = \{e\}$

onda je $G \simeq H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_k$.

1.74. Centar Z(G) grupe G je skup svih elemenata koji komutiraju sa svakim elementom grupe G, tj.

$$Z(G) = \{x \mid x \in G \wedge (\forall a \in G) xa = ax\}.$$

Centar Z(G) je normalna podgrupa grupe G.

1.75. Ako je A neprazan podskup grupe G onda je centralizator C(A) skupa A skup svih elemenata iz G koji komutiraju sa svakim elementom iz A, tj.

$$C(A) = \{x \mid x \in G \wedge (\forall a \in A)\ xa = ax\} .$$

Centralizator C(A) je podgrupa grupe G.

1.76. Normalizator nepraznog podskupa A grupe G je skup

$$N(A) = \{x \mid x \in G,\ xA = Ax\}.$$

Normalizator N(A) je podgrupa grupe G.

1.77. Ako je H podgrupa grupe G, onda je normalizator N(H) maksimalna podgrupa grupe G u kojoj je H normalna podgrupa.

1.78. Podgrupa H grupe G je normalna ako i samo ako je $N(H) = G$.

1.79. Broj elemenata konjugovanih sa elementom a u grupi G jednak je $[G : N(a)]$.

1.80. Broj različitih podgrupa konjugovanih s podgrupom H grupe G jednak je $[G : N(H)]$.

1.81. Ako je G grupa, $x,y \in G$, onda se $xyx^{-1}y^{-1}$ naziva komutator elemenata x i y. Komutator elemenata x i y označavaćemo sa $[x,y]$.

1.82. Podgrupa grupe G generisana skupom svih komutatora naziva se izvod (ili komutatorska podgrupa) grupe G. Izvod grupe G označavaćemo sa G'.(Dakle,izvod je podgrupa generisana

skupom komutatora, a ne skup svih komutatora. Moguće je da neki elemenat grupe bude jednak proizvodu komutatora a da sam ne bude komutator).

1.83. U grupi G izvod G´ je normalna podgrupa.

1.84. Drugi izvod G" grupe G je izvod izvoda G´. n-ti izvod $G^{(n)}$ grupe G je izvod (n-1)-og izvoda $G^{(n-1)}$, n= =2,3,... .

1.85. Normalna podgrupa H grupe G je maksimalna normalna podgrupa ako i samo ako ne postoji prava normalna podgrupa grupe G različita od H, koja sadrži H.

1.86. Grupa G se naziva prosta ako i samo ako G nema netrivijalne normalne podgrupe.

1.87. Normalna podgrupa H grupe G je maksimalna normalna podgrupa ako i samo ako je faktor grupa G/H prosta.

1.88. Kompozicioni niz grupe G je konačan niz

$$G,H_1,H_2,\ldots,H_k = \{e\}$$

različitih podgrupa grupe G u kome je svaki član niza maksimalna normalna podgrupa prethodnog člana.

1.89. Ako je $G,H_1,H_2,\ldots,H_k = \{e\}$ kompozicioni niz grupe G, onda se niz

$$G/H_1,H_1/H_2,\ldots,H_{k-1}/H_k$$

naziva kompozicicni niz faktor grupa grupe G.

Kompozicioni niz indeksa grupe G je niz

$$m_1,m_2,\ldots,m_k$$

gde je m_i red i-te po redu faktor grupe iz kompozicionog niza faktor grupa grupe G.

1.90. Dva kompoziciona niza grupe G nazivaju se izomorfnim ako i samo ako se faktor grupe jednog niza mogu bijektivno preslikati na faktor grupe drugog niza, tako da odgovarajuće faktor grupe budu izomorfne.

1.91. (Žordan-Helder (Jordan-Hölder)) Svaka dva kompoziciona niza grupe G su izomorfna.

1.92. Grupa G se naziva rešiva ako i samo ako se njen n-ti izvod $G^{(n)}$, za neki konačan broj n, sastoji samo od neutralnog elementa.

1.93. Konačna grupa G je rešiva ako i samo ako je njen kompozicioni niz faktor grupa niz cikličnih grupa prostog reda (tj. njen kompozicioni niz indeksa je niz prostih brojeva).

1.94. Svaka komutativna grupa je rešiva.

1.95. Svaka konačna grupa neparnog reda je rešiva*).

1.96. Ako je p prost broj, grupa G se naziva p-grupa ako i samo ako je red svakog elementa grupe G neki stepen broja p.

1.97. (Koši(Cauchy)) Ako je G konačna grupa čiji je red deljiv prostim brojem p, onda G sadrži element reda p.

1.98. Konačna grupa G je p-grupa ako i samo ako je red grupe G stepen broja p.

---

*) Ovo tvrdjenje, kojim se daje potvrdan odgovor na dugi niz godina nedokazanu hipotezu Bernsajda (Burnside), dokazali su Feit (Feith) i Tompson (Thompson) 1963.g. Njihov dokaz, veoma dubok i neelementaran, objavljen je na 255 strana u radu:
Feith,W., Thompson J.G.:"Solvability of Groups of Odd Order", Pacific Journal of Mathematics, Vol. 13 (1963), 775-1029.

1.99. Neka je p prost broj. Podgrupa P grupe G se naziva p-podgrupa Silova grupe G ako i samo ako je P maksimalna p-podgrupa grupe G.

1.100. (Prva teorema Silova (Sylow)) Neka je G grupa reda $p^n q$, gde je p prost broj relativno prost sa q, $n \in \mathbb{N}$. Tada G sadrži podgrupu reda p^i za svako $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ i svaka podgrupa grupe G reda p^i $(i < n)$ je normalna u nekoj podgrupi reda p^{i+1}.

1.101. Ako u grupi G postoji tačno jedna p-podgrupa Silova, onda je ta podgrupa normalna podgrupa grupe G.

1.102. Ako je G grupa reda n, onda su p-podgrupe Silova reda p^r, gde je p^r najveći stepen p koji je delitelj n.

1.103. (Druga teorema Silova) Svake dve p-podgrupe Silova grupe G su konjugovane. Ukupan broj p-podgrupa Silova je $[G : N(P)]$, gde je P bilo koja p-podgrupa Silova.

1.104. (Treća teorema Silova) Broj različitih p-podgrupa Silova konačne grupe G je 1+kp, gde je k nenegativan ceo broj, a 1+kp je delitelj reda grupe G.

1.105. Neka je G grupa i $a \in G$. Preslikavanje $f : G \to G$ definisano sa:

$$f(x) = a x a^{-1}, \quad \text{za svako } x \in G,$$

je automorfizam grupe G. f se naziva unutrašnji automorfizam odredjen elementom a.

1.106. Automorfizam grupe koji nije unutrašnji naziva se spoljašnji automorfizam.

1.107. Skup A(G) svih automorfizama grupe G je grupa u odnosu na množenje preslikavanja. Skup U(G) svih unutrašnjih automorfizama grupe G je normalna podgrupa grupe A(G).

A(G) se naziva grupa automorfizama grupe G, a U(G) se naziva grupa unutrašnjih automorfizama grupe G.

1.108. Grupa U(G) unutrašnjih automorfizama grupe G je izomorfna faktor grupi grupe G po centru Z(G),

$$U(G) \simeq G/Z(G).$$

§1.1. PRIMERI I AKSIOMATIKA

1. Ispitati da li sledeći skupovi čine grupe u odnosu na odgovarajuće operacije (operacije +, -, $\cdot$, : su uobičajere operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja).

a) $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$,
b) $(S,+)$ gde je $S = \{-5,-4,\ldots,4,5\}$,
c) $(\mathbb{Z},-)$
d) $(\mathbb{Q},\cdot)$,
e) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$,
f) $(\mathbb{Q}^+,*)$, gde je $a * b = b : a$,
g) $(\mathbb{Q}^+,\cdot)$, $(\mathbb{R}^+,\cdot)$.

Rešenje.

a) $(\mathbb{Z},+)$ je grupa jer zadovoljava aksiome navedene u definiciji 1.9. Zaista,

- zbir dva cela broja je ceo broj (dakle, + je binarna operacija definisana na $\mathbb{Z}$),
- asocijativnost važi za sabiranje celih brojeva (G1),
- $0 \in \mathbb{Z}$ je levi neutralni elemenat: $0 + a = a$, za svako $a \in \mathbb{Z}$ (G2),
- za svako $a \in \mathbb{Z}$ postoji $-a \in \mathbb{Z}$ tako da je $(-a)+a = 0$ (G3).

Sabiranje celih brojeva je komutativno, pa je $(\mathbb{Z},+)$ Abelova grupa.

Slično se pokazuje da su i $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ i $(\mathbb{C},+)$ Abelove grupe.

b) U ovom slučaju + nije binarna operacija na S, pa (S,+) nije grupa (sabiranje jeste binarna operacija na skupu $\mathbb{Z}$ svih celih brojeva, ali skup S nije zatvoren u odnosu na sabiranje).

c) Oduzimanje je binarna operacija na $\mathbb{Z}$, ali ta operacija nije asocijativna, pa $(\mathbb{Z},-)$ nije grupa.

d) Množenje je binarna operacija na $\mathbb{Q}$, važe aksiomi G1. i G2 , ali $0 \in \mathbb{Q}$ nema inverzni elemenat $(0 \cdot a = 0 \neq 1$, za svako $a \in \mathbb{Q})$, pa $(\mathbb{Q},\cdot)$ nije grupa.

e) Skup $\mathbb{Q}$ iz koga je isključena nula čini Abelovu grupu u odnosu na množenje. Takodje i $(\mathbb{R} \setminus \{0\},\cdot)$ i $(\mathbb{C} \setminus \{0\},\cdot)$ su Abelove grupe.

f) Nije grupa.

g) Jesu grupe.

PRIMEDBA. U primeru d) grupoid $(\mathbb{Q},\cdot)$ zadovoljava sve aksiome grupe sem G3 , a u primeru f) grupoid $(\mathbb{Q}^+,*)$ zadovoljava sve aksiome sem G1. Prema tome, svaki od aksioma G3. i G1. iz definicije grupe 1.9. je nezavisan od ostalih aksioma iz te definicije.

② Da li skupovi

a) $\{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a^2 + b^2 \neq 0\}$

b) $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a,b,c \in \mathbb{Q},\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\}$

čine multiplikativne grupe ?

③ Na skupu $G = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$ je definisana binarna operacija $\square$:

$$(a,b) \square (c,d) = (ac, ad+b)$$

Dokazati da je $(G,\square)$ grupa.

④ Dokazati da sledeći skupovi čine grupe u odnosu na množenje

a) $\{-1, 1\}$,

b) $\{ 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \}$,

c) $\{1,-1,i,-i\}$,

gde je $i^2 = -1$.

(Ovo su specijalni slučajevi grupe iz zadatka 5).

⑤ Dokazati da je skup S svih n-tih korena iz jedinice (n je fiksiran prirodan broj) grupa u odnosu na množenje.

Rešenje. Kompleksan broj a je n-ti koren iz jedinice ako i samo ako je $a^n = 1$, pa su n-ti koreni iz jedinice svi kompleksni brojevi oblika

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Ako su $a,b \in S$ tada je

$$(ab)^n = a^n b^n = 1,$$

pa je i $ab \in S$ (dakle skup S je zatvoren u odnosu na množenje).

Asocijativnost važi za množenje svih kompleksnih brojeva, pa važi i u S (jer je $S \subseteq \mathbb{C}$).

$1 \in S$ i $1 \cdot a = a$, za svako $a \in S$, pa postoji levi neutralni elemenat.

Za svaki elemenat $a \in S$,

$$(\frac{1}{a})^n = \frac{1}{a^n} = 1,$$

pa i $\frac{1}{a} \in S$, a kako je $\frac{1}{a} \cdot a = 1$, svaki elemenat skupa S ima levi inverzni.

Prema tome, skup S je grupa u odnosu na množenje.

Kako je množenje kompleksnih brojeva komutativno, a S je podskup skupa kompleksnih brojeva i množenje u S je komutativno, pa je $(S,\cdot)$ Abelova grupa.
(Za n=2,3 i 4 dobijaju se grupe iz prethodnog zadatka).

PRIMEDBA. Ovim je pokazano da postoje konačne grupe bilo kog reda.

⑥ Dokazati da je skup svih korena iz jedinice, tj. skup $S = \{z \mid z \in \mathbb{C} \wedge (\exists n \in \mathbb{N}) z^n = 1\}$, multiplikativna Abelova grupa.

⑦ Dokazati da je skup svih kompleksnih brojeva čiji je modul jednak jedinici multiplikativna Abelova grupa.

⑧. Neka je p fiksiran prost broj a $\mathbb{Z}_p^\infty = \{z \mid z \in \mathbb{C} \wedge \wedge (\exists n \in \mathbb{N}) z^{p^n} = 1\}$. Dokazati da je $(\mathbb{Z}_p^\infty, \cdot)$ Abelova grupa, ako je $\cdot$ množenje kompleksnih brojeva.

PRIMEDBA. Ova grupa se naziva Priferova (Prüfer) grupa ili kvaziciklička grupa.

⑨. Da li je skup S = {a,b,c} grupa u odnosu na operaciju koja je zadana sledećom Kejlijevom tablicom:

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Rešenje. Iz tablice se lako uočava da je binarna operacija dobro definisana i da je a neutralni elemenat.

S obzirom da se neutralni elemenat a nalazi u svakoj koloni tablice, zaključujemo da svaki elemenat skupa S ima levi inverzni.

Da ispitamo da li je operacija asocijativna potrebno je da proverimo da li je

a(aa) = (aa)a
a(ab) = (aa)b
a(ac) = (aa)c
a(ba) = (ab)a
. . . . . .

itd. za sve moguće uredjene trojke elemenata iz S (takvih trojki ima n^3 za skup od n elemenata, u našem primeru $3^3 = 27$). Ako izračunamo sve ove proizvode videćemo da važi asocijativnost,pa je S grupa.

Pošto je gornja tablica simetrična u odnosu na glavnu (padajuću) dijagonalu, operacija je komutativna, pa je skup S u odnosu na tu operaciju Abelova grupa.

Da je $(S,\cdot)$ grupa može se proveriti i na sledeći način. Važi naime stav:

Skup G na kome je definisana binarna operacija je grupa u odnosu na tu operaciju ako i samo ako važi:

(i) za svako a,b ∈ G, jednačine

$$ax = b, \quad ya = b$$

imaju u G bar jedno rešenje po x,y,

(ii) a(bc) = (ab)c

za svako a,b,c ∈ G, takvo da je $a \neq b \neq c \neq a$, (dakle, asocijativnost važi za svaku uredjenu trojku različitih elemenata).

(A.Wagner: On the associative law of groups, Rend.mat.e applic. Roma, 21 (1962), 60-76).

Prema tome dovoljno je proveriti:

(i) da li se u svakoj vrsti i koloni tablice nalaze svi elementi skupa S (što je ispunjeno),

(ii) da li važi asocijativnost za sve uredjene trojke različitih elemenata (za skup od n elemenata takvih trojki ima n(n-1)(n-2), u našem primeru 3(3-1)(3-2) = 6), tj. da li je

a(bc) = (ab)c	b(ca) = (bc)a
a(cb) = (ac)b	c(ab) = (ca)b
b(ac) = (ba)c	c(ba) = (cb)a,

što je takodje ispunjeno, pa je i na ovaj način pokazano da je S grupa.

Korišćenjem ovog stava olakšava se proveravanje asocijativnosti - za grupoid od n elemenata treba izračunati $4n(n-1)\cdot(n-2)$ proizvoda (umesto $4n^3$ koliko je potrebno kad se asocijativnost proverava za sve uredjene trojke).

(Napominjemo da se u definiciji grupe 1.9. aksiom G1. ne može zameniti ovako oslabljenom asocijativnošću).

⑩. Ispitati da li su skupovi

A = {a,b}, B = {x,y,z} , C = {1,2,3,4}

grupe u odnosu na operacije zadane ovim Kelijevim tablicama:

	a	b
a	a	b
b	b	a

	x	y	z
x	x	y	z
y	z	x	y
z	y	z	x

	1	2	3	4
1	3	1	4	2
2	1	2	3	4
3	4	3	2	1
4	2	4	1	3

(11). U skupu ostataka po modulu m,

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{m-1}\},$$

definisano je sabiranje i množenje:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad , \quad \bar{a}\cdot\bar{b} = \overline{ab} \, .$$

Da li su $(\mathbb{Z}_m, +)$, $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ i $(\mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$ grupe ?

PRIMEDBA. Ako je m fiksiran prirodan broj, skup celih brojeva se može razložiti na klase ekvivalencije tako da su dva cela broja u istoj klasi ako i samo ako su kongruentni po modulu m (tj. ako je njihova razlika deljiva sa m ili, što je isto, ako daju isti ostatak pri deobi sa m). Ove klase se nazivaju klase ostataka po modulu m, a skup svih klasa skup (ili sistem) ostataka po modulu m (označavaćemo ga sa $\mathbb{Z}_m$). Sa $\bar{a}$ označavamo klasu u kojoj se nalazi ceo broj a. Da su celi brojevi a i b kongruentni po modulu m zapisivaćemo sa $a \equiv b \pmod m$.

Rešenje. Najpre ćemo pokazati da su gornje operacije dobro definisane, tj. da je rezultat sabiranja (odnosno množenja) $\overline{a+b}$ (odnosno $\overline{ab}$) uvek isti bez obzira na to koje predstavnike klasa $\bar{a}$ i $\bar{b}$ uzimamo.

Uzmimo bilo koji elemenat klase $\bar{a}$, on mora biti oblika $a+k_1m$, $(k_1 \in \mathbb{Z})$, slično neka je $b+k_2m$ $(k_2 \in \mathbb{Z})$ proizvoljan elemenat klase $\bar{b}$. Tada je

$$(\overline{a+k_1m}) + (\overline{b+k_2m}) = \overline{a+k_1m+b+k_2m} = \overline{a+b+(k_1+k_2)m} \, .$$

Kako je $a+b \equiv a+b+(k_1+k_2)m \pmod m$,

sledi da je

$$(\overline{a+k_1m}) + (\overline{b+k_2m}) = \overline{a+b+(k_1+k_2)m} = \overline{a+b} \, .$$

Da je množenje dobro definisano dokazuje se slično:

$$(\overline{a+k_1m}) \cdot (\overline{b+k_2m}) = \overline{ab+(k_1b+k_2a+k_1k_2m)m} = \overline{ab} \, .$$

Sada ćemo pokazati da je $(\mathbb{Z}_m, +)$ grupa:

- očevidno je da je operacija unutrašnja,
- $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c} = \overline{(a+b)+c} = \overline{a+(b+c)} = \bar{a}+\overline{(b+c)} = \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$, za svako $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$,

pa je sabiranje asocijativno,

- $\bar{0}$ je neutralni elemenat,
- $\overline{m-a}$ je inverzni elemenat za $\bar{a}$,

i kako je još

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \quad , \quad \text{za svako } a, b \in \mathbb{Z}_m \, ,$$

$(\mathbb{Z}_m, +)$ je Abelova grupa.

$(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ nije grupa jer $\bar{0}$ nema inverzni elemenat $(\bar{a}\cdot\bar{0} = \bar{0} \neq \bar{1}$, za svako $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m)$.

Ispitajmo sada da li je $(\mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$ grupa.

Ako je m složen broj, m=pq, tada je $\bar{p}\bar{q} = \bar{m} = \bar{0}$, pa u tom slučaju množenje nije unutrašnja operacija, odnosno $(\mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$ nije grupa.

Ako je m prost broj, onda je množenje unutrašnja operacija, asocijativnost važi, $\bar{1}$ je neutralni elemenat. Za svako $\bar{a} \neq \bar{0}$ a i m su relativno prosti brojevi, pa postoje celi brojevi r i s tako da je

$$ra + sm = 1 \, .$$

Inverzni elemenat za $\bar{a}$ je $\bar{r}$, jer je

$$\bar{r}\bar{a} = \overline{ra} = \overline{1-sm} = \bar{1} \, .$$

Prema tome, $(\mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$ je grupa ako i samo ako je m prost broj.

(12). a) Dokazati da skup $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$ ostataka po modulu 10 čini grupu u odnosu na množenje po modulu 10.

b) Dokazati da je skup ostataka po modulu n onih celih brojeva koji su uzajamno prosti sa n, u odnosu na množenje po modulu n Abelova grupa.

(13). Dokazati da je skup svih polinoma s koeficijentima iz $\mathbb{Z}_n$ u odnosu na sabiranje polinoma Abelova grupa.

(14). Skup svih permutacija skupa M (bijektivnih preslikavanja skupa M na sebe) čini grupu u odnosu na operaciju množenja (kompozicije) preslikavanja (ako su p, q permutacije onda je njihov proizvod pq preslikavanje definisano sa $(pq)(x) = p(q(x))$, za svako $x \in M$).

Dokazati.

PRIMEDBA. Ako je $M=\{1,2,\ldots,n\}$, grupa permutacija sa ovako definisanim množenjem se naziva simetrična grupa stepena n i označava sa S_n. Ta grupa ima n! elemenata.

15. Naći grupu simetrija

a) ravnostranog trougla,
b) kvadrata,
c) pravougaonika,
d) pravilnog n-tougla,
e) pravilnog tetraedra,
f) kocke.

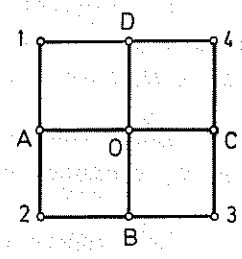
PRIMEDBA. Simetrija neke geometrijske figure je svako bijektivno preslikavanje tačaka te figure na tačke te figure koje ne menja rastojanje tačaka (tj. rastojanje bilo koje dve tačke jednako je rastojanju slika tih tačaka)*. Skup svih simetrija neke figure čini grupu u odnosu na množenje preslikavanja definisano kao uzastopno primenjivanje preslikavanja. (Zašto? Objasniti!)

Ova definicija simetrije je šira od uobičajene geometrijske definicije simetrije i može da obuhvati pored centralne, osne i ravanske simetrije i sva druga preslikavanja sa navedenom osobinom (rotacije, translacije i sl.)**

Rešenje.

b) Svaka od simetrija kvadrata potpuno je odredjena slikama njegovih temena, pa ćemo te simetrije prikazati kao permutacije temena.

Označimo temena kvadrata sa 1,2,3,4, središte sa O, a sa A,B,C,D središta stranica 12,23,34 i 41 (sl.1).



Slika 1.

Grupu simetrija kvadrata čine sledeće permutacije:

*) Kada je geometrijska figura koja se preslikava ravan odnosno ceo prostor onda se ovako definisana simetrija naziva izometrija (ili transformacija podudarnosti) ravni odnosno prostora.

**) Može se dokazati da za ovako definisanu simetriju važi: svaka simetrija ravne figure može se prikazati kao proizvod najviše tri osne simetrije, a svaka simetrija prostorne figure može se prikazati kao proizvod najviše četiri ravanske simetrije (v. na primer, M.Prvanović: Osnovi geometrije, Beograd, 1980).

- rotacije kvadrata u ravni oko tačke O za uglove $0,\pi/2,\pi$ i $3\pi/2$:

$$e=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\qquad a=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},$$

$$b=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\qquad c=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix},$$

- simetrije u odnosu na prave AC, BD, 13 i 24:

$$d=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\qquad f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix},$$

$$g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix},\qquad h=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}.$$

Lako se proverava da drugih simetrija kvadrata nema i da ovih osam permutacija zaista čine grupu.

d) Elementi grupe simetrija pravilnog n-tougla su sledeće transformacije:

- n rotacija oko središta O opisane kružnice za uglove $0,\ 2\pi/n,\ 2(2\pi/n),\ldots,(n-1)(2\pi/n)$,
- n simetrija u odnosu na n pravih koje spajaju tačku O sa temenima i središtima stranica n-tougla.

Sem ovih transformacija pravilni n-tougao drugih simetrija nema.

Grupa simetrija pravilnog n-tougla se naziva diedarska grupa i ima 2n elemenata. Ranije konstruisana grupa simetrija kvadrata je diedarska grupa od 8 elemenata (n=4).

16. Naći grupe permutacija skupa $\{1,2,3,4\}$ za koje sledeće realne funkcije ostaju nepromenjene:

a) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_3x_4$,

b) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_2$,

c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2x_3x_4$.

17. Ispitati da li sledeći skupovi funkcija koje preslikavaju $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ u $\mathbb{R}$

a) $\{f_1(x)=x,\ f_2(x)=-x,\ f_3(x)=\frac{1}{x},\ f_4(x)=-\frac{1}{x}\}$,

b) $\{f_1(x)=x,\ f_2(x)=\frac{1}{x},\ f_3(x)=1-x,\ f_4(x)=\frac{1}{1-x},$
$f_5(x)=\frac{x-1}{x},\ f_6(x)=\frac{x}{x-1}\}$,

čine grupe u odnosu na operaciju *:

$$(f_i * f_j)(x) = f_i(f_j(x)) .$$

Uputstvo. Formirati Kejlijevu tablicu i zatim kao u zadatku 9. iz tablice utvrditi da je operacija dobro definisana, postojanje neutralnog elementa i inverznih elemenata. Ovako definisano množenje funkcija je asocijativno za sve funkcije uopšte (što se lako može pokazati), pa je asocijativno i za date skupove funkcija.

18. Da li sledeći skupovi čine grupe u odnosu na odgovarajuće operacije:

a) Skup L svih realnih funkcija oblika

$f(x)=ax+b, \qquad a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$

u odnosu na množenje funkcija

$$(fg)(x) = f(g(x)),$$

b) isti skup L u odnosu na sabiranje funkcija

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

c) skup P svih periodičnih realnih funkcija sa periodom $\omega\in\mathbb{R}$ u odnosu na sabiranje funkcija,

d) isti skup P u odnosu na množenje funkcija.

Koje od navedenih operacija su komutativne?

19. Neka je S bilo koji skup, a (G,*) bilo koja grupa. Kako se može definisati množenje preslikavanja pa da skup svih preslikavanja skupa S u G bude grupa ?

20. Dokazati da sledeći skupovi matrica sa realnim (kompleksnim) elementima čine multiplikativne grupe:

a) sve regularne matrice formata n x n,

b) sve ortogonalne matrice formata n x n,

c) sve matrice formata n x n čije su determinante jednake 1.

21. Da li skup matrica

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-i\\-i&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-i&0\\0&i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix}\right\},$$

($i^2=-1$), čini grupu u odnosu na množenje matrica?

Da li neki podskupovi ovog skupa čine grupu?

22. Ako je neki skup matrica grupa u odnosu na množenje matrica, pokazati da su tada ili sve matrice tog skupa singularne ili su sve regularne.

PRIMEDBA. Neutralni elemenat te grupe ne mora biti jedinična matrica

$$E=\begin{bmatrix}1&0&..&0\\0&1&..&0\\.&.&..&.\\.&.&..&.\\0&0&..&1\end{bmatrix}.$$

Na primer, skup matrica

$$\left\{\begin{bmatrix}x&x\\0&0\end{bmatrix}\;\middle|\;x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$$

je grupa u odnosu na matrično množenje, a neutralni elemenat nije

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

23. U skupu svih uredjenih parova realnih brojeva preslikavanja $(x,y)\mapsto(x',y')$ definisana su sa

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta ,$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta .$$

Dokazati da skup svih preslikavanja tog oblika čini grupu u odnosu na operaciju množenja (uzastopnog primenjivanja) preslikavanja. Dati geometrijsku interpretaciju.

(24). U skupu $\mathbb{Z}^3$ svih uredjenih trojki celih brojeva definisano je množenje

$$(a,b,c)(x,y,z)=(a+(-1)^b x,\ b+(-1)^c y,\ (-1)^x c+z).$$

Dokazati da je $\mathbb{Z}^3$ u odnosu na ovo množenje grupa.

(25). Neka je G skup svih beskonačnih nizova celih brojeva i neka je na G definisana operacija * sa

$$(f_o,f_1,\ldots,f_n,\ldots)*(g_o,g_1,\ldots,g_n,\ldots) =$$
$$= (f_o+g_o,(-1)^{g_o}f_1+g_1,(-1)^{g_o+g_1}f_2+g_2,\ldots,(-1)^{g_o+\ldots+g_{n-1}}f_n+$$
$$+g_n,\ldots)\ .$$

Dokazati da je (G,*) grupa.

(26). Neka je $G=\{(a,b,c)\mid a,b,c\in\{0,1,2,\ldots,p-1\}\}$ gde je p prost broj i

$$(a_1,b_1,c_1)*(a_2,b_2,c_2) = (a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2-b_1a_2),$$

gde su operacije + i · sabiranje i množenje po modulu p.

Dokazati da je (G,*) nekomutativna grupa reda p^3.

(27). Neka je $G=\{(a,b)\mid a\in\{0,1,\ldots,p-1\},\ b\in\{0,1,\ldots,p^2-1\}\}$, gde je p prost broj, a operacija * definisana sa

$$(a_1,b_1)*(a_2,b_2) = (a_1+a_2,b_1+b_2+b_1a_2p),$$

pri čemu su operacije + i · u prvoj koordinati po modulu p, a u drugoj po modulu p^2.

Dokazati da je (G,*) nekomutativna grupa reda p^3.

28. Neka je p prost broj, $G=\{(a,b,c,d)\mid a,b,c,d\in\{0,1,\ldots,p^2-1\}\}$ i

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)*(a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1+a_2+pc_1a_2,b_1+b_2+$$
$$+pd_1b_2,c_1+c_2+pc_1b_2,d_1+d_2+pb_1a_2),$$

gde su + i · po modulu p^2.

Dokazati da je (G,*) grupa.

(29). Neka je p prost broj a $\mathbb{Q}_p=\{\frac{a}{b}\mid \frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ i b je uzajamno prost sa p$\}$. Dokazati da je $(\mathbb{Q}_p,+)$ Abelova grupa (+ je sabiranje racionalnih brojeva).

(30). Neka je p prost broj, $\mathbb{Q}^p=\{\frac{a}{b}\mid \frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ i postoji $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ tako da je $b=p^n\}$. Dokazati da je $(\mathbb{Q}^p,+)$ Abelova grupa (+ je sabiranje racionalnih brojeva).

(31). Neka je S proizvoljan neprazan skup. Definišimo operaciju Δ na partitivnom skupu $P(S)$ skupa S na sledeći način:

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

Dokazati da je $(P(S),\Delta)$ grupa.
($A\Delta B$ se obično naziva simetrična razlika skupova A i B).

Rešenje. Operacija Δ je očigledno dobro definisana.

Dokažimo asocijativnost te operacije. Neka je χ_A karakteristična funkcija skupa A ($\chi_A: S\to\{0,1\}$, $\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{ako } x\in A\\ 0, & \text{ako } x\notin A\end{cases}$). Ako definišemo sabiranje karakterističnih funkcija sa

$$(\chi_A+\chi_B)(x) = \chi_A(x)+\chi_B(x),\quad \text{za svako}\quad x\in S,$$

gde je sabiranje na desnoj strani jednakosti po modulu 2, onda se neposredno proverava da je za svako $A,B\subseteq S$

$$\chi_A+\chi_B = \chi_{A\Delta B}\ .$$

S obzirom da je ovako definisano sabiranje karakterističnih funkcija asocijativno, neposredno sledi da je

$$\chi_{A\Delta(B\Delta C)} = \chi_{(A\Delta B)\Delta C}\ .$$

Dva skupa čije su karakteristične funkcije jednake moraju biti jednaki, dakle,

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C.$$

Neposredno se proverava da je prazan skup ϕ neutralni elemenat za operaciju Δ i da je $A^{-1}=A$, tj. $A\Delta A=\phi$.

32. Dokazati da su definicije 1.9. i 1.10. ekvivalentne.

33. Dokazati da je skup G na kome je definisana binarna operacija grupa ako i samo ako je

(i) operacija asocijativna,

(ii) za svako $a,b \in G$ jednačine

$$a \cdot x = b, \quad y \cdot a = b$$

imaju u G rešenja po x i y.

34. Na skupu G je definisana binarna operacija $(a,b) \mapsto ab$ i unarna operacija $a \mapsto a^{-1}$, tako da važe sledeći aksiomi:

G1′. za svako $a,b,c \in G$

$$(ab)c = a(bc),$$

G2′. za svako $a,b \in G$

$$a^{-1}(ab) = b = (ba)a^{-1}.$$

Dokazati da je ovaj sistem aksioma ekvivalentan sa sistemom aksioma G1-3 kojima je definisana grupa u 1.9.

Rešenje. Iz aksioma G1-3 navedenih u 1.9. očevidno slede gornji aksiomi. Pokazaćemo da i obrnuto, iz gornjih aksioma slede aksiomi G1-3.

Ako u jednakosti

$$b = (ba)a^{-1}, \quad (G2')$$

zamenimo b sa $c^{-1}c$, dobijamo

$$c^{-1}c = ((c^{-1}c)a)a^{-1} = (c^{-1}c)(aa^{-1}) =$$

$$= c^{-1}(c(aa^{-1})) = aa^{-1}.$$

Za $c = a$ odavde sledi da je $a^{-1}a = aa^{-1}$ i da elemenat $a^{-1}a$ ne zavisi od a. Uvedimo oznaku

(1) $$a^{-1}a = e.$$

Kako je

$$eb = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = b,$$

važi aksiom G3.a iz (1) sledi da važi i G4, pa je time dokazana ekvivalentnost ova dva sistema aksioma.

35. Dokazati da je skup G na kome je definisana binarna operacija Abelova grupa u odnosu na tu operaciju ako i samo ako važe sledeći aksiomi:

G"1. za svako $a,b,c \in G$

$$a(bc) = (ba)c,$$

G2". ≡ G2.

G3". ≡ G3.

36. Ako je na skupu G definisana jedna binarna operacija $(a,b) \mapsto ab$ i jedna unarna operacija $a \mapsto a'$ i ako za svako $a,b,c,d,f \in G$ iz

$$(ab)c = (ad)f$$

sledi

$$b = d(fc'),$$

onda je G grupa. Dokazati.
(Slater M., A single postulate for groups, Amer.Math.Monthly, 68 (1961), 346-347).

Rešenje. Kako je $(ab)c = (ab)c$, sledi

(2) $$b = b(cc') \text{ , za svako } b,c \in G.$$

Označimo proizvod aa' sa a^*. Tada je prema (2)

$$a = ab^* = ad^* \quad \text{i} \quad (ab^*)c = (ad^*)c,$$

a odatle sledi

$$b^* = d^*c^* = d^*.$$

Dakle, za svako $a \in G$, $aa' = e$, pa je na osnovu svega pokazanog e desni neutralni elemenat i a' je desni inverzni elemenat za a.

Preostaje, prema tome, još da dokažemo da je binarna operacija asocijativna. Radi toga ćemo prethodno izvesti neke posledice datog aksioma.

Ako je $ab=ad$, onda je

$$(ab)c = (ad)c,$$

a odatle

$$b = d(cc') = d,$$

što znači da važi leva kancelacija.

Iz $(ae)b = (ab)e$

sledi

$$e = b(eb').$$

Kako je $e = bb'$ dobijamo da je (primenjujući levu kancelaciju) $b' = eb'$. Specijalno $e' = ee' = e$.

Dalje je

$$(ab)e = (ae)b,$$

odakle imamo

$$b = e(be') = eb,$$

(tj. e je i levi neutralni elemenat).

Iz

$$(ec)c' = (ed)d'$$

dobija se

$$c = d(d'c") .$$

Stavljajući $d = e$ imaćemo da je $c = c"$, pa je

$$c = d(d'c).$$

To znači da jednačina $a=bx$, za svako $a,b \in G$ ima rešenje $x=b'a$.

Sada se može dokazati da važi asocijativnost.

Ako su a,b,c bilo koji elementi skupa G, možemo izabrati d tako da bude

$$(a(bc))d = (ab)c,$$

odakle

$$bc = b(cd') ,$$

pa je dalje

$$ce = c = cd' , \quad e = d' \quad i \quad d = e.$$

Dobili smo da je

$$a(bc) = (ab)c , \quad \text{za svako } a,b,c \in G,$$

a time je i dokaz dovršen.

37. Neka je G skup na kome je definisana binarna operacija $\cdot$ tako da važi

(i) $a(bc) = (ab)c$, za svako $a,b,c \in G$,

(ii) postoji $e \in G$ tako da je $ae = ea = a$, za svako $a \in G$,

(iii) za svako $a \in G$ postoji $a' \in G$ tako da je $aa' = e$ ili $a'a = e$.

Da li je $(G,\cdot)$ grupa ?

(Quazi Zameeruddin, Surjeet Singh , Problem E 2026, Amer.Math. Monthly, 74 (1967), 1133.)

Rešenje. Neka a ima desni inverzni elemenat a':

$$aa' = e.$$

Pokažimo da a' mora tada biti i levi inverzni elemenat. Označimo sa $b = a'a$. Tada je

$$b^2 = (a'a)(a'a) = a'(aa')a = a'(ea) = a'a = b.$$

Elemenat b ima desni ili levi inverzni elemenat b', pa ako jednakost $b^2 = b$ pomnožimo sleva (ako je b' levi inverzni) ili zdesna (ako je b' desni inverzni) sa b', dobijamo u oba slučaja

$$a'a = b = e.$$

Prema tome a' je i levi inverzni elemenat, a to znači da je $(G,\cdot)$ grupa.

38. Primerom pokazati da se aksiom (ii) u prethodnom zadatku ne može zameniti slabijim aksiomom:

(ii)' postoji $e \in G$ tako da je $ea = a$, za svako $a \in G$.

(Colonel Johnson, A mixed non-group, Amer.Math. Monthly, 71 (1964), 785).

Rešenje. Neka je

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ x & y \end{bmatrix} \;\middle|\; x,y \in \mathbb{R}, \quad x+y \neq 0 \right\},$$

a algebarska operacija množenje matrica.

Lako se proverava da je skup M zatvoren u odnosu na množenje.

(i) Množenje matrica je asocijativno.

(ii) Matrica $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pripada M i kako je

$$IA = A, \quad \text{za svako } A \in M,$$

I je levi neutralni elemenat.

(iii) Za svaku matricu $A = \begin{bmatrix} x & y \\ x & y \end{bmatrix}$ iz M, matrica

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x+y} \\ 0 & \frac{1}{x+y} \end{bmatrix}$$

pripada skupu M i $AB = I$, tj. B je desni inverzni elemenat za matricu A.

Medjutim, I nije desni neutralni elemenat, pa M nije multiplikativna grupa.

Još jedan primer za isto tvrdjenje je grupoid $(\{a,b\},\cdot)$ čija je operacija definisana sledećom Kejlijevom tablicom:

	a	b
a	a	b
b	a	b

39. Dokazati da je konačna polugrupa G u kojoj važe zakoni kancelacije grupa.

Rešenje. Neka je

$$G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

konačna polugrupa u kojoj važe zakoni kancelacije. Tada su za bilo koje $a_i \in G$

$$a_1a_i,\ a_2a_i, \ldots, a_na_i$$

različiti elementi skupa G (jer pretpostavka da je $a_ka_i = a_\ell a_i$ zbog kancelacije dovodi do protivrečnosti $a_k = a_\ell$), a kako ih ima n sledi da su to svi elementi skupa G.

Prema tome, za svako $a_i, a_j \in G$ postoji elemenat $x \in G$ tako da je

$$xa_i = a_j,$$

tj. jednačina

$$xa = b,$$

za svako $a,b \in G$ ima rešenje u G.

Analogno se pokazuje da i jednačina

$$ay = b,$$

za svako $a,b \in G$ ima rešenje u G, pa je, prema definiciji grupe iz zadatka 33, G grupa.

PRIMEDBA. Pretpostavka da je polugrupa konačna je bitna jer, na primer, skup prirodnih brojeva u odnosu na sabiranje je polugrupa sa kancelacijom ali nije grupa.

Primerom pokazati da stav ne važi ako se pretpostavi da važi samo leva (ili samo desna) kancelativnost.

40. Polugrupa S ima osobinu da za svako $x \in S$ postoji elemenat $x' \in S$ takav da je za svako $y \in S$

$$yxx' = y.$$

Da li je S grupa ?

41. Neka je S polugrupa u kojoj važe zakoni kancelacije. Ako za svako $a \in S$ postoji prirodan broj $n_a > 1$ takav da je

$$a^{n_a} = a,$$

da li je S grupa ?
(G.A.Heuer, B.Erickson, Problem E1873, Amer.Math.Monthly, 73 (1966), 310).

Rešenje. Kako je za $a,b \in S$

$$a^{n_a} \cdot b = a \cdot a^{n_a-1} \cdot b = ab,$$

sledi

$$a^{n_a-1} \cdot b = b, \quad \text{za svako } b \in S.$$

Analogno je

$$ba^{n_a-1} = b, \quad \text{za svako } b \in S,$$

što znači da je a^{n_a-1} neutralni elemenat.

Dva različita neutralna elementa e_1, e_2 u S ne mogu postojati jer je $e_1 = e_1e_2 = e_2$, pa je za svako $a \in S$

$$a^{n_a-1} = e.$$

Za $n_a > 2$ je $a^{-1} = a^{n_a-2}$,

a za $n=2$ je $a^2 = a = e$,

tj. $a^{-1} = a$. Prema tome, S ima neutralni elemenat i za svaki elemenat postoji inverzni, a to znači da je S grupa.

42. Na skupu svih realnih brojeva definisana je operacija $\square$:

$$x \square y = ax + by + c,\ a,b,c \in \mathbb{R},\ ab \neq 0.$$

Dokazati da je $(\mathbb{R}, \square)$ kvazigrupa. Koje uslove treba da zadovoljavaju a,b,c pa da $(\mathbb{R}, \square)$ bude grupa ?

43. Dokazati da su lupe reda 1,2,3,4 grupe i naći lupu reda 5 koja nije grupa.

44. Neka je G skup na kome je definisana ternarna operacija $f : G \times G \times G \to G$ koja zadovoljava sledeće aksiome:

1. $f(x,y,f(z,u,v)) = f(x,f(u,z,y),v) = f(f(x,y,z),u,v)$,
2. $f(x,y,y) = f(y,y,x) = x$,

za svako $x,y,z,u,v \in G$.

Koristeći se ternarnom operacijom f, definisati jednu binarnu operaciju $\cdot$ na skupu G tako da $(G,\cdot)$ bude grupa.

Rešenje. Uočimo proizvoljan elemenat e skupa G i definišimo binarnu operaciju $\cdot$ na G na sledeći način:

$$a \cdot b = f(a,e,b).$$

Tada je

$$a\cdot(b\cdot c) = f(a,e,f(b,e,c)) = f(f(a,e,b),e,c) = (a\cdot b)\cdot c,$$

i

$$a\cdot e = f(a,e,e) = a.$$

Ako uvedemo oznaku $a^{-1} = f(e,a,e)$, onda je

$$a\cdot a^{-1} = f(a,e,f(e,a,e)) = f(f(a,e,e),a,e) = f(a,a,e) = e,$$

pa je $(G,\cdot)$ grupa.

PRIMEDBA. Ako je data proizvoljna grupa $(G,\cdot)$ onda se na G može definisati ternarna operacija f sa gornjim osobinama na sledeći način:

$$f(x,y,z) = x\cdot y^{-1}\cdot z\ .$$

O strukturi definisanoj u zadatku i nekim njenim generalizacijama videti: А.Г.Нурош, Общая алгебра, лекции 1969-1970 учебного года, Наука, Москва, 1974, стр.34-38.

45. Neka u grupoidu $(G,*)$ važe sledeći identiteti:

1. $(x*z)*(y*z) = x*y$,
2. $x*(y*y) = x$,
3. $(x*x)*(y*z) = z*y$.

Koristeći se operacijom * definisati na G binarnu operaciju $\cdot$ tako da $(G,\cdot)$ bude grupa.

Rešenje. Definisaćemo unarnu operaciju $x \mapsto x^{-1}$ i binarnu operaciju $\cdot$ na sledeći način:

$$x^{-1} = (x*x)*x, \qquad x\cdot y = x*((y*y)*y) = x*y^{-1}.$$

Na osnovu 1. i 2. sledi

$$(x*y)*y^{-1} = (x*y)*((y*y)*y) = x*(y*y) = x,$$

a iz gornje jednakosti i 1. i 2. dobija se

$$(x*y^{-1})*y = (x*y^{-1})*((y*y)*y^{-1}) = x*(y*y) = x\ .$$

Iz 3. sledi

$$(x*y)^{-1} = ((x*y)*(x*y)) * (x*y) = y*x\ .$$

Dokazaćemo da je operacija $\cdot$ asocijativna:

$$x\cdot(y\cdot z) = x*(y*z^{-1})^{-1} = x*(z^{-1}*y) = ((x*y^{-1})*y)*(z^{-1}*y) =$$
$$= (x*y^{-1})*z^{-1} = (x\cdot y)\cdot z\ .$$

Neka je x proizvoljan elemenat iz G. Ako uvedemo oznaku $e=x*x$, onda elemenat e ne zavisi od x. Zaista, iz 3. sledi $(x*x)*(y*y) = y*y$, a iz 2. je $(x*x)*(y*y) = x*x$, pa je za svako $x,y \in G$, $x*x = y*y$.

Iz 2. sledi da je e desni neutralni elemenat za operaciju $\cdot$.

S obzirom da iz 2. i 3. sledi

$$(x^{-1})^{-1} = (((x*x)*x)*((x*x)*x))*((x*x)*x) = x*(x*x) = x,$$

onda je

$$x\cdot x^{-1} = x*(x^{-1})^{-1} = x*x = e,$$

tj. x^{-1} je desni inverzni elemenat za x, pa je $(G,\cdot)$ grupa.

PRIMEDBA. Ako se u proizvoljnoj grupi $(G,\cdot)$ definiše operacija $*$ sa $x*y=x\cdot y^{-1}$ onda grupoid $(G,*)$ zadovoljava aksiome 1, 2. i 3.

46. Dokazati da se u prethodnom zadatku aksiomi 2. i 3. mogu zameniti aksiomom

$$2'.\quad (x*x)*((y*y)*y) = y.$$

PRIMEDBA. U radu Higman G., Neumann B.H., Groups as groupoids with one law, Publ.Math. Debrecen, 2(1952), 215-221, je dokazano da se aksiome 1. i 2'. mogu zameniti jednom jedinom aksiomom

$$x*((((x*x)*y)*z)*(((x*x)*x)*z)) = y.$$

§ 1.2. OSNOVNE OSOBINE

47. Dokazati da iz definicije grupe 1.9. slede stavovi navedeni u 1.12.

48. U grupi G naći jedno rešenje jednačine

$$x\,a\,x = b\,b\,a^{-1},\quad a,b \in G .$$

49. Dokazati da je jednačina $x^2 a\,x = a^{-1}$ rešiva po x u grupi G ako i samo ako postoji $b \in G$ takvo da je $b^3 = a$.

Uputstvo. Dokazati da iz $x^2 a\,x\,a = e$ sledi $x\,a\,x\,a\,x = e$.

50. Neka je G grupa u kojoj za svako a,b,c,x,y $\in$ G iz

$$x\,a\,y = b\,a\,c \quad \text{sledi} \quad xy = bc.$$

Dokazati da je G Abelova grupa.

Rešenje. Iz $(xy)xe = ex(yx)$ sledi $xy = yx$.

51. Dokazati da je grupa G Abelova ako i samo ako je za svako a,b $\in$ G

$$(ab)^2 = a^2 b^2 .$$

Rešenje. U Abelovoj grupi G je

$$(ab)^2 = (ab)(ab) = a(ba)b = (aa)(bb) = a^2 b^2 .$$

Obrnuto, neka je za svako a,b $\in$ G

$$(ab)^2 = a^2 b^2 .$$

Odavde sledi

$$(ab)(ab) = (aa)(bb).$$

ili

$$a(ba)b = a(ab)b.$$

Pomnožimo li ovu jednakost sleva sa a^{-1}, a zdesna sa b^{-1}, dobijamo

$$ba = ab,$$

za svako a,b $\in$ G.

52. Ako u grupi G za svako a,b $\in$ G važi jednakost

$$(ab)^i = a^i b^i ,$$

za tri uzastopna cela broja i, onda je G Abelova grupa. Dokazati.

Rešenje. Neka su ta tri uzastopna cela broja n-1, n i n+1. Ako jednakost

$$(ab)^{n+1} = a^{n+1} b^{n+1}$$

pomnožimo sleva sa a^{-1} i zdesna sa b^{-1}, biće

$$(ba)^n = a^n b^n .$$

Kako je

$$(ab)^n = a^n b^n ,$$

sledi

$$(ba)^n = (ab)^n . \tag{1}$$

Slično, iz

$$(ab)^n = a^n b^n$$

sledi da je

$$(ba)^{n-1} = (ab)^{n-1},$$

pa, s obzirom da za svaki elemenat grupe postoji jedinstven inverzni elemenat, mora biti

$$((ba)^{n-1})^{-1} = ((ab)^{n-1})^{-1} \tag{2}$$

Množeći leve i desne strane jednakosti (1) i (2) dobija se

$$ba = ab.$$

PRIMEDBA. Primerom pokazati da se gornji zaključak ne može izvesti iz pretpostavke da identitet

$$(ab)^i = a^i b^i,$$

važi samo za dva uzastopna cela broja (medju kojima se ne nalazi 2 ili -1).

53. Neka je G grupa u kojoj za svako $x,y \in G$ važi $(xy)^3 = x^3y^3$ i $(xy)^8 = x^8y^8$. Dokazati da je G Abelova grupa.

54. Neka je G konačna grupa reda n. Ako je n parno, onda je broj rešenja u G jednačine $x^2=e$ paran (tj. u G ima neparan broj elemenata reda 2). Dokazati.

Rešenje. $x^2 = e$ ako i samo ako je $x = x^{-1}$. To znači da treba odrediti broj skupova $\{x,x^{-1}\}$ koji su jednočlani. S obzirom da je $e = e^{-1}$ i $G = \{e\} \cup \{x,x^{-1}\} \cup \{y,y^{-1}\} \cup \ldots$ a G ima paran broj elemenata, sledi da jednačina $x^2 = e$ ima u G paran broj rešenja. (Svako rešenje jednačine $x^2 = e$, sem e, je elemenat reda 2, pa prema tome u G ima neparan broj elemenata reda 2).

55. Neka je G konačna grupa reda n. Dokazati da je n neparan broj ako i samo ako je svaki elemenat iz G kvadrat (tj. ako za svako $a \in G$ postoji $b \in G$ tako da je $a = b^2$).
(Alan Schwartz: Problem E1794, Amer.Math. Monthly, 74(1965),545).

Rešenje. Ako je $n = 2k+1$, onda je za svako $a \in G$

$$a^{2k+1} = e,$$

tj.

$$(a^{k+1})^2 = a.$$

Obrnuto, pretpostavimo da za svako $a \in G$ postoji $b \in G$ tako da je $a = b^2$. Ako pretpostavimo da je n paran broj, onda na osnovu prethodnog zadatka sledi da postoji $a_1 \in G$ takvo da je $a_1^2 = e$ i $a_1 \neq e$. To znači da se u nizu kvadrata svih elemenata grupe G

$$e^2,\ a_1^2,\ a_2^2, \ldots, a_{n-1}^2$$

element e pojavljuje dva puta, dakle, postoji elemenat $a_i \in G$ koji se u gornjem nizu uopšte ne pojavljuje tj. a_i nije kvadrat. Iz ove protivrečnosti sledi da je n neparan broj.

56. Neka je G grupa i neka su $a,b \in G$.

a) Ako važi $a^2 = e$ i $b^2a = ab^3$, dokazati da je $b^5 = e$.

b) Ako važi $a^k = e$ i $b^r a = ab^s$, gde su k, r i s prirodni brojevi i $r \neq s$, dokazati da tada postoji prirodan broj n takav da je $b^n = e$ i naći bar jedan takav prirodan broj.

Rešenje.

a) $b^5 = b^5a^2 = b^3ab^3a = bab^6a = bab^4ab^3 = bab^2ab^6 = ba^2b^9 = b^{10}$,

odakle sledi $b^5 = e$.

b) Ovo je generalizacija tvrdjenja pod a) i u njenom dokazivanju primenićemo postupak sličan prethodnom.

Neka je $s > r$.

$$b^{r^k} = b^{r^k}e = b^{r^k}a^k = ab^{r^k-1}s a^{k-1} = a^2b^{r^k-2}s^2 a^{k-2} = \ldots =$$

$$= a^{k-1}b^{rs^{k-1}}a = b^{s^k},$$ odakle sledi

$$b^{s^k - r^k} = e.$$

57. Neka za elemente a,b grupe G važi $ab^3 = b^2a$ i $ba^3 = a^2b$. Dokazati da je $a = b = e$.

Rešenje. Primenjujući date relacije dobijamo da važe sledeće jednakosti

(1) $$a^2b^3 = ba^3b^2 = ba\,ba\,ba^3,$$

$$a^2b^3 = ab^2a,$$

pa je

$$bababa^3 = ab^2a,$$

tj.

$$bababa^2 = ab^2,$$

(2) $$abababa^2 = a^2b^2.$$

Dalje je

(3) $$a^2b^2 = ba^3b = baba^3,$$

pa iz (2) i (3) sledi

$$ababab = baba,$$

a odavde je

$$bababab = b^2aba = ab^4a = ab^2ab^3 = a^2b^6.$$

Iz poslednjeg niza jednakosti se dobija

(4) $\qquad bababa = a^2b^5.$

Iz (1) sledi

$$a^2b^5 = bababa^3b^2 = bababababa^3b = (ba)^4ba^3 ,$$

pa odavde i iz (4) imamo

$$e = baba^3,$$

i na osnovu (3)

$$e = a^2b^2,$$

tj. $a^2 = b^{-2}$. Stavljajući u drugu od datih jednakosti b^{-2} umesto a^2 biće

$$b^{-1}a = b^{-1},$$

tj. $a = b = e$.

58 U grupi G elementi

a) a i a^{-1},

b) a i $b^{-1}ab$,

c) ab i ba,

imaju isti red. Dokazati.

Rešenje.

a) $\qquad (a^{-1})^{|a|} = (a^{|a|})^{-1} = e^{-1} = e,$

odakle sledi da je

$$|a^{-1}| \leq |a|,$$

(sa $|a|$ označavamo red elemenata a). Slično

$$a^{|a^{-1}|} = ((a^{-1})^{-1})^{|a^{-1}|} = ((a^{-1})^{|a^{-1}|})^{-1} = e^{-1} = e,$$

odakle je

$$|a| \leq |a^{-1}| .$$

Iz ovih dveju nejednakosti sledi

$$|a| = |a^{-1}| .$$

b) Lako se može dokazati da je za svako $n \in \mathbb{Z}$

$$(b^{-1}ab)^n = b^{-1}a^nb,$$

pa je

$$(b^{-1}ab)^{|a|} = b^{-1}a^{|a|}b = e,$$

tj.

$$|b^{-1}ab| \leq |a|.$$

Takodje je

$$a^{|b^{-1}ab|} = bb^{-1}a^{|b^{-1}ab|}bb^{-1} = b(b^{-1}ab)^{|b^{-1}ab|}b^{-1} = e,$$

tj.

$$|a| \leq |b^{-1}ab|,$$

pa je

$$|b^{-1}ab| = |a|.$$

c) Elementi ab i ba su konjugovani ($ab = b^{-1}(ba)b$), pa iz stava dokazanog pod b) sledi traženi zaključak.

59. Neka je u grupi G elemenat a reda p, a elemenat b reda q. Ako je $ab = ba$ i p i q su relativno prosti brojevi, dokazati da je tada elemenat ab reda pq.

60. Ako grupa G sadrži tačno jedan elemenat a reda 2, onda je za svako $x \in G$

$$xa = ax.$$

Dokazati.

Rešenje. Elementi a i $x^{-1}ax$ za svako $x \in G$ imaju isti red (zadatak 58). To znači da je $x^{-1}ax$ reda 2, a kako je a po pretpostavci jedini elemenat reda 2 u grupi G, sledi da je

$$a = x^{-1}ax, \quad \text{tj.} \quad xa = ax, \quad \text{za svako} \quad x \in G .$$

61. Neka su a,b elementi grupe G, za koje važi $a^3 = b^4 = e$ i $ba = ab^3$. Izračunati red elemenata ab i ba.

Rezultat. Red ab i ba je 6.

62. Neka je G konačna grupa reda n a k ceo broj relativno prost sa n. Dokazati da je preslikavanje $f : G \to G$ definisano sa $f(x) = x^k$ permutacija skupa G. (Drugim rečima, ako se svaki elemenat grupe G stepenuje brojem k dobija se opet ceo skup G).

Rešenje. Pretpostavimo da postoje a,b ∈ G tako da je

$$a^k = b^k, \quad a \neq b.$$

Ako je p red elementa a, a q red elementa b, onda je

$$(a^k)^p = (b^k)^p = e,$$

odakle sledi da je q delitelj broja kp. Kako je red elementa delitelj reda grupe (1.51) q i k su relativno prosti brojevi, pa je q delitelj broja p.

Analognim postupkom se može pokazati da je i p delitelj q, što znači da je p=q.

k i p su relativno prosti brojevi, dakle, postoje celi brojevi s i t tako da je

$$sk + tp = 1,$$

pa je

$$a^{ks-1} = a^{tp} = e,$$

odakle je

$$a = a^{ks}.$$

Slično je i

$$b = b^{ks},$$

pa je konačno

$$(a^k)^s = (b^k)^s, \quad \text{tj.} \quad a = b.$$

Pokazali smo da u skupu svih k-tih stepena elemenata iz G nema jednakih, to je konačan skup sa n elemenata, pa sledi traženi zaključak.

63. Ako je G grupa sa bar dva elementa i svi elementi iz G različiti od neutralnog imaju isti konačan red n, onda je n prost broj. Dokazati.

Uputstvo. Pretpostaviti da je n = pq, 1 < p < n i naći red elementa $a^p \neq e$.

64. (Fermatov stav) Ako je a ceo broj a p prost broj, onda je

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

Dokazati.

Rešenje. Grupa $(\mathbb{Z}_p \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$ ima p-1 elemenat, pa je, s obzirom da red svakog elementa deli red grupe (1.51), za svaki ceo broj a za koji je $\bar{a} \neq \bar{0}$

$$(\bar{a})^{p-1} = \bar{1},$$

ili

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p, \quad (a \not\equiv 0 \pmod p).$$

Množeći sa a gornju kongruenciju dobijamo

$$a^p \equiv a \pmod p, \quad \text{za svako} \quad a \not\equiv 0 \pmod p.$$

Medjutim ova kongruencija očevidno važi i za $a \equiv 0 \pmod p$, pa je time teorema u potpunosti dokazana.

65. Dokazati da u grupi mogu da postoje elementi konačnog reda čiji je proizvod beskonačnog reda.

Rešenje. U multiplikativnoj grupi regularnih matrica formata 2 x 2 takvi elementi su matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

66. Dati primer grupe beskonačnog reda čiji svi elementi imaju konačan red.

Rešenje. Priferova grupa definisana u zadatku 8. ima to svojstvo.

67. Grupa G u kojoj svaki elemenat sem neutralnog ima red 2 mora biti Abelova. Dokazati.

Rešenje. Iz

$$(ab)^2 = e,$$

množenjem zdesna sa b a sleva sa a (i koristeći da je $a^2=b^2=e$) dobijamo za svako a,b ∈ G

$$ab = ba.$$

68. Neprazan podskup H grupe G je podgrupa ako i samo ako iz $x,y \in H$ sledi $xy^{-1} \in H$.

Dokazati.

69. Neprazan podskup H grupe G je podgrupa ako i samo ako je $hH = H$, za svako $h \in H$. Dokazati.

(70). Konačan neprazan podskup H grupe G je podgrupa ako i samo ako iz $x,y \in H$ sledi $xy \in H$. Dokazati.

(71). Neka je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ podskup grupe G za koji važi

$$x_i x_j \in X \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Dokazati da je X podgrupa grupe G.

Uputstvo. Dokazati najpre da $x_i^m \in X$ za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ i svako $m \in \mathbb{N}$, i da iz toga sledi $x_i^{-1} \in X$. Dokazati zatim da ako je $x_i X = X$ tada je i $x_i^{-1} X = X$. Na kraju dokazati da je $x_j X = X$ za svako $j \in \{1, \ldots, n\}$ i primeniti zadatak 69.

(72). Dokazati da elementi konačnog reda Abelove grupe čine podgrupu.

Rešenje. U Abelovoj grupi G skup svih elemenata konačnog reda označimo sa H. Ako su $a,b \in H$, onda je $a^n = e$, $b^m = e$, pa je

$$(ab^{-1})^{nm} = a^{nm}(b^{-1})^{nm} = a^{nm}(b^{nm})^{-1} = e,$$

što znači da je

$$|ab^{-1}| < \infty.$$

Prema tome, $ab^{-1} \in H$, pa je H podgrupa.

(73). Ako svi elementi beskonačnog reda Abelove grupe G zajedno sa neutralnim elementom čine podgrupu H, dokazati da tada G nema elemente konačnog reda (osim e).

Rešenje. Neka je elemenat $a \in G$ konačnog reda, a $b \in G$ beskonačnog reda. Lako se proverava da je $c = ab$ beskonačnog reda. Tada je $a = cb^{-1} \in H$, tj. $a = e$.

§ 1.3. HOMOMORFIZAM, IZOMORFIZAM

(74). Dokazati da je preslikavanje $f : x \mapsto i^x$ homomorfizam grupe $(\mathbb{Z},+)$ u grupu $(\{1,-1,i,-i\},\cdot)$ i naći jezgro tog homomorfizma $(i^2 = -1)$.

Rešenje. $f(a+b) = i^{a+b} = i^a \cdot i^b = f(a) \cdot f(b)$, za svako $a,b \in \mathbb{Z}$, a to znači da je f homomorfizam grupe $(\mathbb{Z},+)$ u grupu $(\{1,-1,i,-i\},\cdot)$. Preslikavanje je očevidno surjektivno, pa je f epimorfizam.

Jezgro Ker f ovog homomorfizma je skup svih $a \in \mathbb{Z}$ za koje je $f(a) = 1$ (tj. $i^a = 1$). Dakle,

$$\operatorname{Ker} f = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

(75). Grupa $(\mathbb{Z},+)$ se preslikava na grupu $(\mathbb{Z}_6,+)$ funkcijom $f : a \mapsto \bar{a}$. Dokazati da je f homomorfizam.

(76). Sledeće funkcije preslikavaju multiplikativnu grupu nenula racionalnih brojeva u sebe. Koje od tih funkcija predstavljaju homomorfizme:

a) $x \mapsto \frac{1}{x}$ b) $x \mapsto |x|$,

c) $x \mapsto x^n$, n fiksiran ceo broj, d) $x \mapsto -x$.

Opisati homomorfne slike i jezgra. Koje funkcije su epimorfizmi, a koje monomorfizmi ?

(77). Neka je G multiplikativna grupa kompleksnih brojeva čiji je modul jednak jedinici. Dokazati da je preslikavanje

$$e^{i\theta} \mapsto e^{ki\theta}, \quad k \text{ fiksiran ceo broj},$$

endomorfizam i odrediti jezgro.

(78). Grupa G_2 je homomorfna slika grupe G_1. Tada :

a) Ako je G_1 Abelova i G_2 je Abelova grupa.

b) Slika neutralnog elementa grupe G_1 je neutralni elemenat grupe G_2.

c) Ako je a^{-1} inverzni elemenat elementa $a \in G_1$, onda je $f(a^{-1})$ inverzni elemenat elementa $f(a) \in G_2$. (f je homomorfizam grupe G_1 na grupu G_2).

Rešenje.

a) Za svako $a_2, b_2 \in G_2$ postoje $a_1, b_1 \in G_1$ tako da je

$$f(a_1) = a_2, \quad f(b_1) = b_2 ,$$

pa je

$$a_2 b_2 = f(a_1)f(b_1) = f(a_1 b_1) = f(b_1 a_1) = f(b_1)f(a_1) = b_2 a_2 .$$

b) Za svako $a_2 \in G_2$ postoji $a_1 \in G_1$ tako da je $f(a_1) = a_2$, pa ako je e_1 neutralni elemenat grupe G_1 iz

$$a_1 e_1 = e_1 a_1 = a_1,$$

sledi

$$f(a_1)f(e_1) = f(e_1)f(a_1) = f(a_1)$$

ili

$$a_2 f(e_1) = f(e_1) a_2 = a_2 ,$$

što znači da je slika neutralnog elementa e_1 grupe G_1 neutralni elemenat e_2 grupe G_2.

c) Iz $aa^{-1} = e_1$,

sledi

$$f(a)f(a^{-1}) = f(e_1) = e_2,$$

tj.

$$(f(a))^{-1} = f(a^{-1}) .$$

79. Neka je $f : G_1 \to G_2$ izomorfizam grupa G_1 i G_2. Ako je $g_2 = f(g_1)$ dokazati da je red elementa $g_1 \in G_1$ jednak redu elementa $g_2 \in G_2$.

80. Dokazati da je u skupu grupa istog reda izomorfizam relacija ekvivalencije.

Rešenje. (i) Identičko preslikavanje grupe G na sebe je izomorfizam, pa je uvek $G \simeq G$.

(ii) Neka je f izomorfizam grupe G_1 na grupu G_2. Tada je inverzno preslikavanje f^{-1} takodje bijekcija. Ako su b_1,

$b_2 \in G_2$, onda, s obzirom da je f surjektivno preslikavanje, postoje $a_1, a_2 \in G_1$ tako da je

$$f(a_1) = b_1 , \quad f(a_2) = b_2,$$

tj.

$$f^{-1}(b_1) = a_1, \quad f^{-1}(b_2) = a_2.$$

Kako je

$$f(a_1 a_2) = f(a_1)f(a_2) = b_1 b_2,$$

biće

$$f^{-1}(b_1 b_2) = f^{-1}(f(a_1 a_2)) = a_1 a_2 = f^{-1}(b_1) f^{-1}(b_2),$$

što znači da je f^{-1} izomorfizam grupe G_2 na grupu G_1, dakle $G_2 \simeq G_1$.

(iii) Neka je f izomorfizam grupe G_1 na grupu G_2, a h izomorfizam grupe G_2 na grupu G_3. Tada funkcija $g = hf$ bijektivno preslikava grupu G_1 na grupu G_3. Ako su $a_1, a_2 \in G_1$ onda je

$$g(a_1 a_2) = (hf)(a_1 a_2) = h(f(a_1)f(a_2)) = (hf)(a_1)(hf)(a_2) = g(a_1)g(a_2),$$

a to znači da je $G_1 \simeq G_3$.

Time je pokazano da je izomorfizam grupa refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija.

81. Dokazati da je grupa $(\mathbb{Z}_4, +)$ izomorfna grupi $(G, *)$ gde je $G = \{a, b, c, d\}$ a operacija $*$ je zadata sledećom Kejlijevom tablicom:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

.

Rešenje. Formiraćemo Kejlijevu tablicu za grupu $(\mathbb{Z}_4, +)$:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Ako je $f : \mathbb{Z}_4 \to G$ izomorfizam, onda na osnovu zadatka 78. mora biti $f(\bar{0}) = a$ (a je neutralni elemenat grupe G). Elemenat $\bar{2}$ je sam sebi inverzan, pa na osnovu zadatka 78. njegova slika mora biti elemenat koji je sam sebi inverzan, jedini takav elemenat u G je c, dakle $f(\bar{2}) = c$. Prema tome, f preslikava

$$\bar{1} \mapsto b, \quad \bar{3} \mapsto d \quad \text{ili} \quad \bar{1} \mapsto d, \quad \bar{3} \mapsto b.$$

Ispitajmo da li je funkcija koja preslikava

$$\bar{0} \mapsto a, \quad \bar{1} \mapsto b, \quad \bar{2} \mapsto c, \quad \bar{3} \mapsto d$$

izomorfizam dveju datih grupa. Da to utvrdimo proverićemo da li je $f(x+y) = f(x) * f(y)$ za svaki par elemenata iz $\mathbb{Z}_4$. Na primer,

$$\bar{1} + \bar{2} = \bar{3},$$

a

$$f(\bar{1}) * f(\bar{2}) = b * c = d,$$

pa treba utvrditi da li je $f(\bar{3}) = d$?

U našem primeru ova jednakost je tačna i nastavljajući taj postupak za sve parove elemenata iz $\mathbb{Z}_4$ vidimo da je ovako definisana funkcija f zaista izomorfizam.

Na sličan način se može pokazati da je i funkcija

$$g : \bar{0} \mapsto a, \quad \bar{1} \mapsto d, \quad \bar{2} \mapsto c, \quad \bar{3} \mapsto b$$

takodje jedan izomorfizam grupa $(\mathbb{Z}_4, +)$ i $(G, *)$.

82. Dokazati da su grupe $(\mathbb{Z}_4, +)$ i $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$ izomorfne.

83. Kako se grupa $(\mathbb{Z}_3, +)$ može homomorfno preslikati u grupu $(\mathbb{Z}_2, +)$?

84. Dati su skupovi

$$G = \{1, -1, i, -i\} \quad \text{i} \quad A = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\} \subseteq \mathbb{Z}_8.$$

Dokazati da grupa $(G, \cdot)$ nije izomorfna sa grupom $(A, \cdot)$, pri čemu je u G $\cdot$ množenje kompleksnih brojeva, a $\cdot$ u A je množenje klasa ostataka po modulu 8.

85. Dokazati da se simetrična grupa S_n može homomorfno preslikati na grupu sa dva elementa.

86. Homomorfizam grupe G_1 u grupu G_2 je monomorfizam ako i samo ako je jezgro tog homomorfizma neutralni elemenat e_1 grupe G_1. Dokazati.

Rešenje. Pretpostavimo da je f monomorfizam i da jezgro sadrži neki elemenat $a \neq e_1$.

Tada je

$$f(a) = f(e_1) = e_2,$$

(e_2 je neutralni elemenat grupe G_2), a to je u protivrečnosti sa pretpostavkom da je f monomorfizam (dva različita elementa imaju istu sliku). Prema tome, $\operatorname{Ker} f = \{e_1\}$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $\operatorname{Ker} f = \{e_1\}$ i da f nije monomorfizam, tj. da je $f(a) = f(b)$, $a \neq b$. Onda je

$$f(ab^{-1}) = f(a) \cdot (f(b))^{-1} = e_2,$$

pa elemenat ab^{-1} pripada jezgru, što znači da mora biti $ab^{-1} = e_1$, tj. $a = b$. Ovo je protivrečnost, pa je, dakle, f monomorfizam.

87. Neka je f homomorfizam grupe G_1 u grupu G_2, a g homomorfizam grupe G_2 u grupu G_3. Ako je fg izomorfizam, dokazati da onda f mora biti epimorfizam a g mora biti monomorfizam.

88. Dokazati da je grupa G Abelova ako i samo ako je preslikavanje $f : a \mapsto a^{-1}$ automorfizam.

Rešenje. Neka je G Abelova grupa. f je injektivno preslikavanje, jer iz $f(a) = f(b)$, tj. $a^{-1} = b^{-1}$, sledi $a = b$. f je surjektivno preslikavanje jer je svaki elemenat a slika elementa a^{-1}. Za svako $a, b \in G$ je

$$f(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1} = f(a)f(b),$$

pa je f automorfizam.

Obrnuto, ako je preslikavanje $f : a \mapsto a^{-1}$ automorfizam onda je $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, za svako $a, b \in G$, a s obzirom da je u svakoj grupi $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, sledi $a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, a odatle je za

svako $a,b \in G$

$$ab = ba.$$

89. Na skupu

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\},$$

definisati operaciju $\square$ tako da bude $(\mathbb{R},+) \simeq (A,\square)$.

Rešenje. Ako je f izomorfizam $\mathbb{R} \to A$, onda je inverzno preslikavanje f^{-1} izomorfizam $A \to \mathbb{R}$, tj. za svako $a,b \in A$

$$f^{-1}(a \square b) = f^{-1}(a) + f^{-1}(b),$$

što je ekvivalentno sa

$$a \square b = f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b)).$$

Dovoljno je, prema tome, naći bilo koju funkciju koja bijektivno preslikava $\mathbb{R}$ na A i pomoću nje kao što je pokazano definisati operaciju $\square$.

Na primer, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ preslikava bijektivno $\mathbb{R}$ na A, pa je

$$a \square b = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b).$$

Lako se proverava da je funkcija $\operatorname{arctg} x$ izomorfizam grupa $(\mathbb{R},+)$ i $(A,\square)$.

90. Dokazati da je multiplikativna grupa n-tih korena iz jedinice (zadatak 5) izomorfna sa grupom $(\mathbb{Z}_n,+)$ (zadatak 11).

91. Skup matrica

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

je multiplikativna grupa. Dokazati ovo uspostavljajući izomorfizam grupoida $(A,\cdot)$ sa multiplikativnom grupom nenula kompleksnih brojeva.

92. Skup svih regularnih matrica formata 2×2 sa elementima iz $\mathbb{Z}_2$ je grupa izomorfna simetričnoj grupi S_3. Dokazati.

93. Dokazati da je skup svih regularnih linearnih transformacija n-dimenzionalnog vektorskog prostora nad poljem F u odnosu na kompoziciju preslikavanja grupa izomorfna multiplikativnoj grupi regularnih kvadratnih matrica formata nxn nad poljem F.

PRIMEDBA. Taj izomorfizam, kao što je poznato, zavisi od izbora baze u vektorskom prostoru, pa, u opštem slučaju, postoji više različitih izomorfizama izmedju ove dve grupe.

94. Dokazati da grupe $(\mathbb{Q}_p,+)$ i $(\mathbb{Q}^p,+)$ nisu izomorfne (zadaci 29. i 30).

Uputstvo. Pretpostaviti suprotno, tj. da je $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}^p$ izomorfizam grupe $\mathbb{Q}_p$ na $\mathbb{Q}^p$. Koristiti da za svako $x \in \mathbb{Q}_p$ i za svaki prost broj q različit od p, postoji $y \in \mathbb{Q}_p$ takvo da je $\underbrace{y+y+\ldots+y}_{q} = x$. Tada bi bilo

$$f(\underbrace{y+y+\ldots+y}_{q}) = f(y)+\ldots+f(y) = f(x),$$

tj. svako $z \in \mathbb{Q}^p$ bi se moglo napisati kao zbir q sabiraka što je nemoguće.

95. Dokazati da grupe iz zadataka 26. i 27. nisu izomorfne.

Uputstvo. Grupa iz zadatka 27. ima elemenat reda p^2. Koristiti zadatak 79.

96. Skup $\operatorname{Hom}(G,A)$ definišemo kao skup svih homomorfizama grupe G u Abelovu grupu A. Kako se množenje homomorfizama može pogodno definisati pa da $\operatorname{Hom}(G,A)$ bude Abelova grupa?

97. Naći grupu permutacija izomorfnu sa grupom $(\mathbb{Z}_4,+)$.

Rešenje. Na osnovu Kejlijeve teoreme grupa $\mathbb{Z}_4$ je izomorfna sa podgrupom grupe S_4. Označimo sa $f_{\bar{0}}$, $f_{\bar{1}}$, $f_{\bar{2}}$, $f_{\bar{3}}$ permutacije grupe S_4 koje odgovaraju respektivno elementima $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ grupe $\mathbb{Z}_4$. Tada je $f_{\bar{1}}$ permutacija koja elemente $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ preslikava respektivno u

$$\bar{1}+\bar{0}\ ,\quad \bar{1}+\bar{1}\ ,\quad \bar{1}+\bar{2},\quad \bar{1}+\bar{3}\ ,$$

tj. u $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{0}$,

($f_{\bar{1}}(x) = \bar{1} + x$, za svako $x \in \mathbb{Z}_4$).

Slično dobijamo i ostale permutacije:

$$f_{\bar{1}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix},$$

$$f_{\bar{2}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix},$$

$$f_{\bar{3}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix},$$

$$f_{\bar{0}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix}.$$

Ako ove permutacije skupa $\mathbb{Z}_4$ interpretiramo kao permutacije skupa $\{1,2,3,4\}$ biće

$$f_1 = [2\ 3\ 4\ 1], \quad f_2 = [3\ 4\ 1\ 2]$$

$$f_3 = [4\ 1\ 2\ 3], \quad f_0 = [1\ 2\ 3\ 4].$$

Na osnovu Kejlijeve teoreme skup permutacija $\{f_{\bar{0}}, f_{\bar{1}}, f_{\bar{2}}, f_{\bar{3}}\}$ čini grupu u odnosu na množenje permutacija izomorfnu grupi $(\mathbb{Z}_4,+)$.

98. Za grupu $(\{1,-1,i,-i\},\cdot)$ naći izomorfnu grupu permutacija.

99. Naći podgrupu simetrične grupe S_6 izomorfnu simetričnoj grupi S_3.

100. Naći grupu nesingularnih matrica formata 3×3 izomorfnu simetričnoj grupi S_3.

Rešenje. Svaka grupa permutacija skupa od n elemenata izomorfna je nekoj multiplikativnoj grupi permutacionih*) matrica

*) Matrica u kojoj se u svakoj vrsti i koloni nalazi tačno jedna jedinica a svi ostali elementi su nule naziva se permutaciona matrica (to je ,dakle, matrica dobijena od jedinične matrice permutovanjem njenih vrsta).

formata $n \times n$. (Odavde na osnovu Kejlijeve teoreme odmah sledi da je svaka konačna grupa reda n izomorfna sa nekom grupom permutacionih matrica formata $n \times n$).

Formirajmo sada grupu matrica izomorfnu grupi

$$S_3 = \{ [123], [231], [132], [321], [231], [312] \}.$$

Permutaciji $[123]$ odgovara jedinična matrica

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

permutaciji $[213]$ odgovara matrica koja se dobija od jedinične kada se njene vrste permutuju onako kako to propisuje permutacija (1 se preslikava u 2 - to znači da se prva vrsta jedinične matrice premešta na mesto druge itd.):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na ovaj način dobijamo i preostale matrice:

$$[132] \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [321] \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[231] \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [312] \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ovih šest matrica čine multiplikativnu grupu izomorfnu grupi S_3.

101. Naći grupu matrica izomorfnu grupi $(\mathbb{Z}_4,+)$.

Uputstvo. Koristiti zadatke 97. i 100.

§ 1.4. CIKLIČKE GRUPE

102. Koje od sledećih grupa su cikličke:

$(\mathbb{Z},+)$, $(\{1,-1,i,-i\},\cdot)$, $(\mathbb{Q},+)$,

$(\mathbb{Z}_n,+)$, $(\{\bar{1},\bar{3},\bar{5},\bar{7}\},\cdot)$, $\{\bar{1},\bar{3},\bar{5},\bar{7}\} \subseteq \mathbb{Z}_8$?

103. Cikličke grupe istog reda su izomorfne. Sve beskonačne cikličke grupe su medjusobno izomorfne. Dokazati.

Rešenje. Ako je a generatorni elemenat cikličke grupe G_1 reda n, a b generatorni elemenat cikličke grupe G_2 istog reda, onda je preslikavanje $a^k \mapsto b^k$, $k=1,2,\ldots,n$, izomorfizam grupa G_1 i G_2.

Funkcija f koja beskonačnu cikličku grupu sa generatornim elementom a preslikava na aditivnu grupu celih brojeva $f: a^k \mapsto k$, je izomorfizam. Prema tome, sve beskonačne cikličke grupe su izomorfne grupi $(\mathbb{Z},+)$.

104. Dokazati da beskonačna ciklička grupa ima prebrojivo mnogo elemenata. Da li je $(\mathbb{R},+)$ ciklička grupa ?

105. Red elemenata a konačne grupe G je delitelj reda grupe. Dokazati.

Rešenje. Ciklička podgrupa generisana elementom a je reda jednakog redu elemenata a, pa na osnovu Lagranžove teoreme sledi da je red elementa a delitelj reda grupe G.

106. Svaka grupa čiji je red prost broj je ciklička. Dokazati.

107. U cikličkoj grupi C_n reda n generisanoj elementom a, elemenat a^m je generator ako i samo ako su m i n relativno prosti brojevi. Dokazati.

Rešenje. Ako je $(n,m)=1$, onda su sledećih n elemenata medjusobno različiti

$$a^m, a^{2m}, \ldots, a^{nm} = e.$$

Zaista, iz

$$a^{im} = a^{jm}, \quad 1 \leq j < i \leq n,$$

sledi

$$a^{(i-j)m} = e,$$

tj. n mora biti delitelj broja $(i-j)m$, a to je, s obzirom na pretpostavku, kontradikcija. Prema tome a^m je generator grupe C_n.

Neka je sada a^m generator grupe C_n i pretpostavimo da je $(n,m)=d>1$. Tada je

$$(a^m)^{n/d} = (a^n)^{m/d} = e,$$

a kako je $(n/d) < n$, elemenat a^m ne može biti generator grupe C_n. Pretpostavka od koje smo pošli stoga ne važi, pa je $(n,m)=1$.

108. Svaka podgrupa cikličke grupe je takodje ciklička. Dokazati.

Rešenje. Neka je $H \neq \{e\}$ podgrupa cikličke grupe C generisane elementom a. Neka je najmanji pozitivan stepen elementa a koji se nalazi u H, $a^k \in H$ (s obzirom da je H podgrupa takvo k uvek postoji). Ako je a^ℓ proizvoljan elemenat podgrupe H, mora biti

$$\ell = kq + r, \quad q,r \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r < k,$$

pa je, prema tome,

$$a^r = a^{\ell - kq} = a^\ell (a^k)^{-q},$$

odakle sledi da $a^r \in H$.

Kako je k bio minimalan pozitivan stepen, mora biti $r=0$, a to znači da je ℓ deljivo sa k, tj. $a^\ell = (a^k)^q$, pa je a^k generator podgrupe H, koja je, prema tome, ciklička.

109. U cikličkoj grupi C preslikavanje f je endomorfizam ako i samo ako je za svako $x \in C$

$$f(x) = x^c,$$

c fiksiran ceo broj. Dokazati.

110. Naći sve endomorfizme grupe $(\mathbb{Z},+)$.

111. U cikličkoj grupi C_n reda n preslikavanje $f(x) = x^m$ je automorfizam ako i samo ako su m i n relativno prosti brojevi.

Uputstvo. Koristiti zadatak 107.

112. Navesti sve endomorfizme cikličke grupe reda 12. Koji od njih su automorfizmi ?

113. Naći red svakog elementa cikličke grupe reda 30.

114. Neka je C_n ciklička grupa reda n. Ako je m delitelj broja n, dokazati da onda C_n ima jednu i samo jednu podgrupu reda m.

Rešenje. Ako je a generator grupe C_n onda element $a^{n/m}$ generiše podgrupu H reda m. Pretpostavimo da postoji još jedna podgrupa K reda m. Ona mora biti ciklička (zadatak 108) i neka je njen generator a^{ℓ}.

Tada je

$$a^{\ell m} = e,$$

što znači da je ℓm deljivo sa n, $\frac{\ell m}{n} = k$, pa je odatle

$$a^{\ell} = a^{kn/m} = (a^{n/m})^{\ell}.$$

Prema tome, $a^{\ell} \in H$, $|H| = |K|$, odakle sledi da je $H = K$.

115. Naći sve podgrupe cikličke grupe reda 30.

Uputstvo. Koristiti zadatke 108. i 114.

116. Dokazati da klase ostataka $\overline{(2i+1)}$ modulo 16, $i=0,1,2,\ldots,7$ čine multiplikativnu grupu i naći njene podgrupe.

117. Mora li grupa G da bude ciklička ako su sve njene prave podgrupe cikličke ?

Rezultat. Priferova grupa (zadatak 8) nije ciklička, a sve njene prave podgrupe su cikličke.

§ 1.5. GRUPE PERMUTACIJA

118. Sledeće permutacije napisati kao proizvod disjunktnih ciklusa:

a) $p = [4512367]$ b) $q = [1325647]$

c) $r = [238451967]$ d) $s = [654321]$.

Rešenje. a) Kako je $p(1) = 4$, $p(4) = 2$, $p(2) = 5$, $p(5) = 3$, $p(3) = 1$ i $p(6) = 6$, $p(7) = 7$, imamo

$$p = [4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 6\ 7] = (1\ 4\ 2\ 5\ 3).$$

S obzirom na definiciju ciklusa očevidno je da se p može pisati i u jednom od sledećih oblika:

$$p = (14253) = (42531) = (25314) =$$
$$= (53142) = (31425) = (14253)(6) =$$
$$= (7)(14253) = (14253)(6)(7).$$

(Ovde ciklus koji se sastoji od samo jednog simbola označava da je taj simbol nepromenjen).

Koristeći se drugom notacijom može se pisati

$$p :\cdot 1 \to 4 \to 2 \to 5 \to 3 \to 1 \to .$$

b) $q = [1325647] = (23)(456) = (23)(456)(1)(7)$, ili

$q = c_1 c_2$, gde je

$c :\cdot 2 \to 3 \to 2 \to$, $c_2 :\cdot 4 \to 5 \to 6 \to 4 \to$.

119. Sledeće permutacije izraziti kao proizvod disjunktnih ciklusa

a) $(234)(125)(3617)$ b) $(1234)(123)(12)$

c) $(123)(435)(1346)$ d) $(12)(23)(34)(45)$

Rešenje. a) $(234)(125)(3617) = (17425)(36)$.

(S obzirom da argument pišemo zdesna računanje počinjemo od krajnjeg desnog ciklusa).

Ovo isto ćemo izračunati koristeći drugu notaciju:

Neka je $p = c_1 c_2 c_3$, gde je

$c_1 :\cdot 2 \to 3 \to 4 \to 2 \to$, $c_2 :\cdot 1 \to 2 \to 5 \to 1 \to$, $c_3 :\cdot 3 \to 6 \to 1 \to 7 \to 3 \to$.

Proizvod ovih ciklusa predstavićemo tablicom

c_3	c_2	c_1	
1	7	7	7
7	3	3	4
4	4	4	2
2	2	5	5
5	5	1	1
3	6	6	6
6	1	2	3

U ovoj tablici u kolonu ispod oznake ciklusa pišemo argument, a njegovu sliku odgovarajućim ciklusom u susednu desnu kolonu. Tada krajnja leva kolona predstavlja argumente a krajnja desna njihove slike permutacijom p. Dakle, $p = c_1' c_2'$, gde je

$c_1' :\cdot\ 3 \to 6 \to 3 \to$, $c_2' :\cdot\ 1 \to 7 \to 4 \to 2 \to 5 \to 1 \to$.

b) $(1234)(123)(12) = (14)(23)$.

120. Bilo koje dve permutacije koje pomeraju disjunktne skupove simbola komutiraju. Dokazati.

121. Ciklus dužine n je reda n. Dokazati.
(Red permutacije je njen red kao elementa simetrične grupe S_m).

Rešenje. Neka je q ciklus dužine n:

$q(a_1) = a_2$, $q(a_2) = a_3, \ldots, q(a_n) = a_1$, $q(x) = x$, $x \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Tada je $q^2(a_i) = a_{i+2}$ i, uopšte, $q^k(a_i) = a_{i+k}$, za svako $k \in \mathbb{N}$ (gde su svi indeksi redukovani na najmanji pozitivan ostatak po modulu n). q^k će biti identičko preslikavanje ako i samo ako je $a_i = a_{i+k}$, tj. ako i samo ako je $k \equiv 0 \pmod n$. Najmanji takav pozitivan broj k je n, pa je, prema tome, ciklus q reda n.

122. Dokazati da je permutacija p stepen jednog ciklusa koji pomera sve simbole ako i samo ako je p proizvod ciklusa iste dužine.

123. Neka je $q = (12 \ldots m)$ ciklus dužine m. Dokazati:
a) q^n je ciklus dužine m ako i samo ako su m i n uzajamno prosti brojevi.
b) Ako je d najveći zajednički delitelj za m i n tada je q^n proizvod d ciklusa.

124. Dokazati da je red permutacije najmanji zajednički sadržalac dužina njenih disjunktnih ciklusa.

Rešenje. Neka je permutacija p prikazana kao proizvod disjunktnih ciklusa, $p = q_1 q_2 \ldots q_k$. Disjunktni ciklusi komutiraju, pa je

$$p^n = q_1^n q_2^n \cdots q_k^n .$$

Odavde sledi da je p^n identičko preslikavanje ako i samo ako je svaki od ciklusa q_i^n takodje identičko preslikavanje, pa je prema zadatku 121. red permutacije p zaista najmanji zajednički sadržalac dužina ciklusa $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

125. Naći red permutacija

a) $(2\ 4\ 5)(1\ 8)(6\ 7\ 3\ 9)$,
b) $(1\ 3\ 4)(2\ 3\ 6)$.

Rešenje. a) Ova permutacija je proizvod disjunktnih ciklusa dužine 3,2 i 4, pa je njen red 12.

b) Najpre ćemo datu permutaciju prikazati kao proizvod disjunktnih ciklusa:

$$(1\ 3\ 4)(2\ 3\ 6) = (1\ 3\ 6\ 2\ 4),$$

pa je red ove permutacije 5.

126. U simetričnoj grupi S_n opisati sve elemente čiji je red prost broj p.

127. Naći elemenat najvećeg reda u grupi S_n za $n = 2, 3, \ldots, 10$.

128. Dokazati da je $(1\ 2 \ldots n)^{-1} = (n\ n\text{-}1 \ldots 2\ 1)$.

129. Ako je

$$p = (a_{11}a_{12}\cdots a_{1k_1})(a_{21}a_{22}\cdots a_{2k_2})\cdots(a_{\ell 1}a_{\ell 2}\cdots a_{\ell k_\ell}),$$

dokazati da je tada

$$p^{-1} = (a_{\ell k_\ell}\cdots a_{\ell 2}a_{\ell 1})\cdots(a_{2k_2}\cdots a_{22}a_{21})(a_{1k_1}\cdots a_{12}a_{11}) .$$

130. Neka su $(a_1 \ldots a_k)$ i $(b_1 \ldots b_\ell)$ ciklusi koji imaju zajednički jedan i samo jedan simbol. Dokazati da je $(a_1 \ldots a_k) \cdot (b_1 \ldots b_\ell)$ takodje ciklus i naći njegovu dužinu.

Uputstvo. Najpre pokazati da se može pretpostaviti da je $a_1 = b_1$.

131. U grupi S_n naći sve permutacije koje komutiraju sa ciklusom $p = (a_1 a_2 \dots a_n)$.

Rešenje. Neka je $q \in S_n$ tako da je $pq = qp$. Ako je $q(a_1) = a_\ell$, biće

$$(qp)(a_1) = q(a_2)$$

i

$$(pq)(a_1) = p(a_\ell) = a_{\ell+1},$$

pa kako je $pq = qp$, mora biti $q(a_2) = a_{\ell+1}$. Indukcijom se lako dokazuje da je

$$q(a_k) = a_{\ell+(k-1)}, \quad k = 1,2,\dots,n,$$

(svi indeksi u ovom razmatranju su redukovani na najmanji pozitivan ostatak po modulu n). To znači da je $q = p^{\ell-1}$, a kako je $p^k \cdot p = p \cdot p^k$ sledi da sa ciklusom p komutiraju stepeni tog ciklusa i samo oni.

132. Neka je

$$a = (x_1 x_2 \dots x_m)(x_{m+1})(x_{m+2})\dots(x_n)$$

jedan elemenat grupe S_n. Ako elemenat b ($b \in S_n$) zadovoljava uslov $ba = ab$, onda b ima oblik $a^k \cdot p$, gde je k prirodan broj i p ($\in S_n$) sa fiksnim tačkama $x_1, x_2, \dots, x_m$. Dokazati.

(Prešić S.: Problem 131, Matematički vesnik, 5(20), sveska 2, 1968, 243).

Rešenje. Pretpostavimo da je $b(x_i) = x_j$,

$$x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\} = A, \quad x_j \in \{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n\} = B.$$

Tada je

$$ab(x_i) = x_j, \quad ba(x_{(i-1)'}) = x_j,$$

gde je

$$(i-1)' = \begin{cases} i-1, & \text{za } i > 1 \\ m, & \text{za } i = 1 \end{cases},$$

što zbog $ab = ba$ ne može biti, pa sledi da je

$$(\forall x_i \in A) b(x_i) \in A \quad \text{i} \quad (\forall x_j \in B)\ b(x_j) \in B.$$

Prema tome, $b = qp$, gde permutacija q ima za fiksne tačke $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ a fiksne tačke permutacije p su $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Svaka permutacija sa fiksnim tačkama $x_1, x_2, \dots, x_m$ je komutativna sa a i q, pa još treba odrediti oblik permutacije q.

S obzirom da je a ciklus dužine m sa fiksnim tačkama $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, a q permutacija čije su fiksne tačke takodje $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ i kako mora biti $aq = qa$, na osnovu prethodnog zadatka sledi da je $q = a^k$, gde je k prirodan broj.

Prema tome, mora biti $b = a^k \cdot p$, gde je k prirodan broj a p permutacija sa fiksnim tačkama $x_1, x_2, \dots, x_m$.

133. Dokazati da je

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_1 a_n)(a_1 a_{n-1})\dots(a_1 a_2).$$

Rešenje. Proverom se neposredno utvrdjuje da je gornja jednakost tačna.

134. Dokazati da je ciklus dužine n parna permutacija ako je n neparan broj, a neparna permutacija ako je n paran broj.

Rešenje. Posledica prethodnog zadatka.

135. Permutaciju $p = [2\ 1\ 5\ 7\ 3\ 4\ 6]$ napisati kao proizvod

a) transpozicija,

b) terceta.

Rešenje. a) Permutaciju ćemo prikazati kao proizvod ciklusa a zatim primeniti zadatak 133.

$$p = [2157346] = (12)(35)(476) = (12)(35)(46)(47).$$

b) Pokazano je da je $p = (12)(35)(46)(47)$ parna permutacija, pa se ona, prema tome, može prikazati kao proizvod terceta. Kako je

$$(12)(35) = (12)((23)^{-1}(23))(35) =$$

$$= (12)((23)(23))(35) = ((12)(23))((23)(35)) = (123)(352),$$

$$(46)(47) = (476),$$

biće

$$p = (123)(352)(476).$$

136. Ako je permutacija $p \in S_n$ proizvod k disjunktnih ciklusa (uzimajući u obzir i sve cikluse dužine 1), onda je

permutacija p parna ili neparna prema tome da li je n-k paran ili neparan broj. Dokazati.

137. Permutacija koja je prikazana kao proizvod ciklusa je parna ili neparna prema tome da li sadrži paran ili neparan broj ciklusa parne dužine. Dokazati.

138. Dokazati da je svaka permutacija $p \in S_{10}$ reda 20 neparna.

Rešenje. Permutaciju p rastavimo u proizvod disjunktnih ciklusa. Kako je red permutacije najmanji zajednički sadržalac dužina njenih disjunktnih ciklusa (zadatak 124), ciklusi koji čine permutaciju p mogu biti samo dužina 1,2,4,5,10. Zbir dužina ciklusa je 10 (jer je p permutacija skupa od 10 simbola), pa treba utvrditi kako se 10 može prikazati kao zbir nekih od brojeva 1,2,4,5,10, ali tako da najmanji zajednički sadržalac tih sabiraka bude 20. Postoji samo jedan način da se to učini: 5+4+1= =10, pa je, prema tome, p proizvod ciklusa dužine 5,4 i 1. Na osnovu zadataka 137. (ili 136) permutacija p je neparna.

139. Permutacije $p,q \in S_n$ su konjugovane u grupi S_n ako i samo ako se mogu rastaviti na jednak broj disjunktnih ciklusa i medju tim ciklusima se može uspostaviti bijektivno preslikavanje tako da su odgovarajući ciklusi iste dužine. Dokazati.

140. Neka je permutacija p prikazana u obliku proizvoda ciklusa a q proizvoljna permutacija. Ako u ciklusima koji čine p sve simbole zamenimo onako kako to propisuje permutacija q, dobićemo permutaciju qpq^{-1}. Dokazati.

141. Koristeći se prethodnim zadatkom izračunati qpq^{-1} i $r^{-2}sr^2$, gde je

$q = (123)(4568)$, $r = (874312)(56)$

$p = (82143)(12)(15)$, $s = (134)(2357)(1846)$.

Rezultat. $qpq^{-1} = (43251)(23)(26)$,

$r^{-2}sr^2 = (847)(7523)(8641)$.

142. Dokazati da se transpozicijama

(12), (13) ,..., (1n)

može generisati grupa S_n.

Rešenje. Bilo koja transpozicija (ab) grupe S_n može se prikazati kao proizvod datih transpozicija jer je

$(ab) = (1b)(1a)(1b)$, $a,b \neq 1$.

Svaka permutacija grupe S_n se može prikazati kao proizvod transpozicija, a pokazali smo da se svaka transpozicija može prikazati pomoću datih, pa otuda sledi da transpozicije

(12), (13) ,..., (1n)

generišu grupu S_n.

143. Dokazati da se grupa S_n može generisati permutacijama

$p = (23...n)$, $q = (12)$.

Rešenje. Neposredno (koristeći zadatak 140) možemo izračunati sledeće proizvode:

$$pqp^{-1} = (13),$$
$$p^2qp^{-2} = p(pqp^{-1})p^{-1} = (14),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p^{n-2}qp^{-(n-2)} = (1n),$$

pa sada na osnovu prethodnog zadatka sledi da permutacije p i q generišu grupu S_n.

144. Permutaciju [4231] prikazati kao proizvod transpozicije [2134] i terceta [1342] .

Uputstvo. Koristiti prethodni zadatak.

145. Odrediti broj elemenata u svakoj klasi konjugovanih elemenata grupe S_n.

Rezultat. U klasi čiji su elementi permutacije koje se rastavljene u proizvod disjunktnih ciklusa sastoje se od j_1 ciklusa dužine 1, j_2 ciklusa dužine 2,...,j_k ciklusa dužine k, ima $\dfrac{n!}{1^{j_1}\cdot 2^{j_2}\cdots n^{j_n}\cdot j_1!j_2!\cdots j_n!}$ elemenata.

146. Navesti podgrupe reda 6

a) simetrične grupe S_4,

b) alternativne grupe A_4 .

147. Dokazati da n-2 terceta:

(123), (124),...,(12n)

generišu alternativnu grupu A_n $(n \geq 3)$.

Uputstvo. Koristiti

$$(abc) = (1ca)(1ab)$$

i

$$(1xy) = (1y2)(12x)(12y), ((1y2) = (12y)^{-1}).$$

148. Dokazati da se podgrupa parnih permutacija A_n simetrične grupe S_n može generisati permutacijama (123) i (12...n) ako je n neparan broj, a permutacijama (123) i (23...n) ako je n paran broj.

149. Neka je G podgrupa grupe permutacija S_n generisana ciklusima:

$$(a_1a_2\ldots a_ma_{m+1}), (a_1a_2\ldots a_ma_{m+2}), \ldots, (a_1a_2\ldots a_ma_n),$$

gde je $m < n-1$.

Dokazati da je $G = S_n$ ako je m neparan broj, a $G = A_n$ ako je m paran broj.

Uputstvo. Označimo ciklus $(a_1a_2\ldots a_ma_i)$ sa P_i, $i=m+1,\ldots,n$. Ako je $m = 2r+1$ pokazati da je za $i \neq j$

$$(P_iP_j)^rP_i^2P_j = (a_1a_2),$$

$$(P_iP_j)^{r+1}P_j = (a_1a_i),$$

$$(P_iP_j)^{r+1}P_j^{2r+3-t}P_i^{t-1}P_j = (a_1a_t) \text{ za } t = 3,4,\ldots,m .$$

Ako je $m=2s$ pokazati da je

$$(P_iP_j)^{s-1}P_i^3P_j = (a_1a_2a_3),$$

$$(P_iP_j)^sP_j^2 = (a_1a_2a_i),$$

$$(P_iP_j)^sP_j^{2s+3-t}P_i^tP_j = (a_1a_2a_t) \text{ za } t \neq 3.$$

(Videti L.Miller, Generators of the symmetric and alternating group, Amer.Math.Monthly, 48 (1941), p. 43-44.)

150. Ako prava normalna podgrupa N grupe S_n sadrži jedan tercet, dokazati da N sadrži sve tercete. Na osnovu toga pokazati da je $N = A_n$.

§ 1.6. PODGRUPE, GENERATORI

151. Neka su H i K podgrupe grupe G, a x,y elementi grupe G. Dokazati da iz $Hx = Ky$ sledi $H = K$.

Rešenje. Iz $Hx = Ky$ sledi da postoji elemenat $k \in K$ takav da je $ex = ky$, tj. $yx^{-1} = k^{-1} \in K$, pa iz $Hx = Ky$ sledi $H = Kyx^{-1} = K$.

152. Neka su H i K podgrupe grupe G. Dokazati da je $H \cup K$ podgrupa grupe G ako i samo ako je $H \subseteq K$ ili $K \subseteq H$.

Rešenje. Ako je $H \subseteq K$ onda je $H \cup K = K$ podgrupa grupe G, a ako je $K \subseteq H$ onda je $H \cup K = H$ podgrupa.

Ako pretpostavimo da nijedna od datih podgrupa ne sadrži drugu, onda postoje elementi $a \in H \setminus K$ i $b \in K \setminus H$. Iz $ab \in H$ sledi $a^{-1}(ab) = b \in H$, a to je protivrečnost. Iz $ab \in K$ analogno dolazimo do protivrečnosti, pa, prema tome, $H \cup K$ nije podgrupa.

153. Ako je A podgrupa grupe G takva da je $(G \setminus A) \cup \{e\}$ takodje grupa, dokazati da je ili $A = \{e\}$ ili $A = G$. (Micheal Gemignani: Problem E 1764, Amer.Math. Monthly, 72 (1965), 183).

Uputstvo. Primeniti stav dokazan u prethodnom zadatku.

154. Dokazati da je grupa konačna ako i samo ako sadrži konačno mnogo podgrupa.

155. Naći levu (desnu) dekompoziciju grupe simetrija kvadrata

$G = \{[1234], [2341], [3412], [4123], [2143], [4321], [3214], [1432]\}$

(v. zadatak 15. b)) po podgrupi $H = \{[1234], [1432]\}$.

Rešenje. Permutacije koje čine grupu G označimo (onim redom kojim su u tekstu zadatka navedene, tj. isto kao u zadatku 15. b)) slovima e, a, b, c, d, f, g, h.

Tada je podgrupa $H = \{e,h\}$. Elemenat $a \notin H$, pa je aH levi suskup različit od H. Kako je $ae = a$,

$$ah = [2341][1432] = [2143] = d,$$

sledi

$$aH = \{a,d\}.$$

(Kada se permutacije ovako označavaju onda se proizvod dve permutacije najjednostavnije izračunava tako što se elementi prve permutacije napišu u rezultatu onim redom kako to propisuje druga permutacija - u našem primeru najpre prvi elemenat prve permutacije, pa zatim četvrti, treći i na kraju drugi elemenat prve permutacije). Produžujući ovaj postupak dobijamo suskupove:

$$bH = \{b,g\}$$

i

$$cH = \{c,f\},$$

pa je

$$G = H \cup aH \cup bH \cup cH.$$

Naravno, s obzirom da predstavnik jednog suskupa može biti bilo koji elemenat tog suskupa (na primer $aH = dH$) ova ista dekompozicija se može prikazati i u ovom obliku:

$$G = H \cup dH \cup gH \cup fH .$$

Kako je $aH = \{a,d\}$ a $Ha = \{a,f\}$ vidimo da je $aH \neq Ha$, pa H nije normalna podgrupa, dakle, desna dekompozicija se razlikuje od leve dekompozicije (desna dekompozicija grupe G po podgrupi H jednaka je levoj ako i samo ako je H normalna podgrupa grupe G). Desna dekompozicija je:

$$G = H \cup Hc \cup Hb \cup Ha.$$

156. Naći levu i desnu dekompoziciju simetrične grupe S_3 po podgrupi $H = \{[123], [213]\}$. Da li se te dve dekompozicije razlikuju ?

157. Ako je

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \ldots \cup a_nH$$

leva dekompozicija grupe G po podgrupi H, dokazati da je onda

$$G = Ha_1^{-1} \cup Ha_2^{-1} \cup \ldots \cup Ha_n^{-1} .$$

desna dekompozicija grupe G po podgrupi H.

158. Dokazati da za neprazan podskup K grupe G iz $a, b, c \in K$ sledi $ab^{-1}c \in K$ ako i samo ako je K levi suskup za neku podgrupu H grupe G.

Rešenje. Neka je $H = \{x \mid x = a^{-1}b,\ a,b \in K\}$. Ako $x,y \in H$ onda postoje $a,b,c,d \in K$ tako da je $x = a^{-1}b$ i $y = c^{-1}d$, pa je

$$xy^{-1} = a^{-1}b(c^{-1}d)^{-1} = a^{-1}(bd^{-1}c) \in H$$

jer je $bd^{-1}c \in K$. Dakle, H je podgrupa.

Za fiksno $a \in K$ $aH \subseteq K$, a i $aa^{-1}b = b \in aH$ za svako $b \in K$, pa $K \subseteq aH$ i, prema tome, $K = aH$.

Obrnuto, neka je $K = xH$ za neku podgrupu H. Ako su $a,b,c \in K$ tada je

$$ab^{-1}c = xh_1(xh_2)^{-1}xh_3 = xh_1h_2^{-1}x^{-1}xh_3 = xh_1h_2^{-1}h_3 \in xH,$$

gde $h_1,h_2,h_3 \in H$.

PRIMEDBA. Potpuno analogno tvrdjenje važi ako se u zadatku reč "levi" zameni sa "desni". U tom slučaju, uzimajući skup $H_1 = \{x \mid x = ab^{-1},\ a,b \in K\}$ dobijaju se desni suskupovi po podgrupi H_1.

159. Ako su H i K podgrupe grupe G onda je HK podgrupa ako i samo ako je $HK = KH$. Dokazati.

Rešenje. Pretpostavimo da je $HK = KH$ i neka su $x,y \in HK$. Tada je

$$x = h_1k_1, \quad y = h_2k_2, \quad h_1,h_2 \in H, \quad k_1,k_2 \in K,$$

pa iz

$$xy = h_1k_1h_2k_2,$$

s obzirom da je

$$k_1h_2 = h_3k_3, \quad h_3 \in H, \quad k_3 \in K \quad (\text{zbog } HK = KH),$$

sledi

$$xy = (h_1h_3)(k_3k_2) \in HK.$$

Pošto je i

$$x^{-1} = (h_1k_1)^{-1} = k_1^{-1}h_1^{-1} \in KH = HK,$$

dokazali smo da je skup HK podgrupa grupe G.

Obrnuto, ako je HK podgrupa, onda za svako $h \in H$ i svako $k \in K$ $h,k \in HK$ (jer i H i K sadrže neutralni elemenat), pa $kh \in HK$ a to znači da je

$$KH \subseteq HK.$$

Za svako $x \in HK$, $x^{-1} \in HK$, tj. $x^{-1} = hk$, odakle

$$x = k^{-1}h^{-1} \in KH, \text{ pa smo dobili da je}$$

$$HK \subseteq KH.$$

Prema tome,

$$HK = KH.$$

160. Neka su A,B i C podgrupe grupe G takve da je $AB = BA$ i $A \subseteq C$. Dokazati da je

$$C \cap (AB) = A(C \cap B).$$

Rešenje. Na osnovu prethodnog zadatka AB je podgrupa grupe G. Neka je $M = C \cap (AB)$. M je, kao presek dve podgrupe, takodje podgrupa. Očevidno je $(AB) \cap B = B$, pa je i $M \cap B = C \cap (AB) \cap B = C \cap B$. Treba pokazati da je $A(M \cap B) = M$.

$M \supseteq A$, jer $C \supseteq A$ i $AB \supseteq A$, a i $M \supseteq M \cap B$ pa, pošto je M podgrupa, sledi $M \supseteq A(M \cap B)$.

S druge strane $AB \supseteq M$, pa je svako $m \in M$ oblika $m = ab$, $a \in A$, $b \in B$, tj. $b = a^{-1}m$ što znači da $b \in M$, jer $M \supseteq A$, pa $b \in M \cap B$.

Prema tome, $m = ab \in A(M \cap B)$, tj. $M \subseteq A(M \cap B)$.

161. Dokazati:

a) Presek svake dve netrivijalne podgrupe grupe $(\mathbb{Z},+)$ je netrivijalna podgrupa.

b) Presek svake dve netrivijalne podgrupe grupe $(\mathbb{Q},+)$ je netrivijalna podgrupa.

Uputstvo. a) Ako su H i K podgrupe grupe $\mathbb{Z}$, onda postoje celi brojevi h i k tako da je $H = \{x \mid x = zh, z \in \mathbb{Z}\}$, $K = \{x \mid x = zk, z \in \mathbb{Z}\}$. Tada je $H \cap K = \{x \mid x = zhk, z \in \mathbb{Z}\}$.

b) Koristiti a) i činjenicu da ako je H podgrupa grupe $\mathbb{Q}$ onda iz $\frac{a}{b} \in H$ sledi $a \in H$ $(a,b \in \mathbb{Z})$.

162. Neka su $(\mathbb{Q}^p,+)$ i $(\mathbb{Q}_p,+)$ podgrupe (definisane u zadacima 29. i 30) aditivne grupe racionalnih brojeva $(\mathbb{Q},+)$. Dokazati da je

a) $\mathbb{Q}^p \cap \mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}$,

b) $\mathbb{Q}^p + \mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}$,

c) $\mathbb{Q}^p \cap \mathbb{Q}^q = \mathbb{Z}$, za proste brojeve p,q, $p \neq q$.

163. Neka je $H_1 \subseteq H_2 \subseteq H_3 \subseteq \ldots \subseteq H_n \subseteq \ldots$ niz podgrupa grupe G. Dokazati da je

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

podgrupa grupe G.

164. Naći bar tri skupa nezavisnih generatornih elemenata grupe $(\mathbb{Z},+)$.

Rešenje. Grupa $(\mathbb{Z},+)$ je ciklička pa ima skup generatora koji se sastoji od jednog elementa: $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$. Elemenat -1 takodje generiše grupu $\mathbb{Z}$, pa je $\mathbb{Z} = \langle -1 \rangle$. Lako se može proveriti da je $\mathbb{Z} = \langle 2,3 \rangle$. Kako se ni jedan od elemenata 2 i 3 ne može prikazati kao umnožak onog drugog, skup generatora $\{2,3\}$ je nezavisan.

Analogno se pokazuje da je $\mathbb{Z} = \langle k,\ell \rangle$, gde su k i ℓ proizvoljni uzajamno prosti celi brojevi.

165. Svaka konačna grupa ima skup nezavisnih generatora. Dokazati.

166. Odrediti koliko ima različitih skupova nezavisnih generatora od po 2 elementa u cikličkoj grupi reda 20.

Rezultat. 16.

167. Naći skup nezavisnih generatora multiplikativne grupe pozitivnih racionalnih brojeva.

Rezultat. Skup svih prostih brojeva.

168. Dokazati da je skup

$$M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots\right\}$$

skup generatora za aditivnu grupu racionalnih brojeva. Da li je svaki beskonačni podskup skupa M takodje skup generatora te grupe ?

169. U multiplikativnoj grupi nenula racionalnih brojeva naći podgrupu generisanu skupom $\{2,3\}$.

170. Ako je G konačno generisana grupa i $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots \subseteq H_n \subseteq \ldots$ niz podgrupa grupe G takav da je $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, dokazati da postoji prirodan broj k takav da je $G = \bigcup_{n=1}^{k} H_n$.

171. Dokazati:

a) $(\mathbb{Q},+)$ nije konačno generisana grupa.

b) $(\mathbb{Z}_p^{\infty},\cdot)$ nije konačno generisana grupa.

Uputstvo. Koristiti prethodni zadatak, pošto se prethodno dokaže

a) da je $(\mathbb{Q},+) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, gde je $H_n = \{x \mid x = \frac{a}{n!}, a \in \mathbb{Z}\}$,

b) da je $(\mathbb{Z}_p^{\infty},\cdot) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, gde je $H_n = \{x \mid x \in \mathbb{C}, x^{p^n} = 1\}$.

172. Homomorfna slika grupe s konačnim brojem generatora je takodje grupa s konačnim brojem generatora. Dokazati.

Uputstvo. Ako je $G_1 = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ a f homomorfizam grupe G_1 na grupu G_2, onda je

$$G_2 = \langle f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n) \rangle .$$

173. Svaka beskonačna grupa sa konačnim brojem generatora je prebrojiva. Dokazati.

174. Ako su u konačnoj grupi G svi elementi sem neutralnog reda 2, onda je red grupe G stepen broja 2.

Rešenje. Već smo pokazali u zadatku 67. da grupa G mora biti Abelova. Kako je grupa konačna ona ima konačan skup nezavisnih generatornih elemenata,

$$G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle .$$

Bilo koji elemenat g grupe G može se, prema tome, napisati u obliku

$$(1) \quad g = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}, \quad k_i \in \{0,1\}, \quad i=1,2,\ldots,n ,$$

i to na jedinstven način, jer iz pretpostavke da se neki elemenat iz G može prikazati na dva različita načina dobili bismo da elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nisu nezavisni.

S obzirom da eksponenata u (1) ima n i oni uzimaju samo vrednosti 0 i 1, sledi da u G ima 2^n elemenata.

175. Neka je G grupa čije su sve konačno generisane podgrupe cikličke.

a) Dokazati da je G Abelova grupa.

b) Dokazati da za proizvoljne podgrupe A,B,C grupe G važi

$$A(B \cap C) = (AB) \cap (AC).$$

Rešenje. a) G je Abelova grupa, jer za svako $x,y \in G$, $\langle x,y \rangle = \langle z \rangle$, pa je $x = z^r$, $y = z^s$ $(r,s \in \mathbb{Z})$ i

$$xy = z^r z^s = z^s z^r = yx .$$

b) Nadalje ćemo koristiti aditivnu notaciju za operaciju u grupi G (tj. operaciju grupe ćemo umesto sa $\cdot$ označavati sa +), jer je G komutativna grupa.

$B \cap C \subseteq B$ pa je $A + (B \cap C) \subseteq A + B$,

analogno je

$B \cap C \subseteq C$ pa je $A + (B \cap C) \subseteq A + C$

i sledi da je

$$A + (B \cap C) \subseteq (A + B) \cap (A+C) .$$

Neka je $x \in (A+B) \cap (A+C)$. Tada je $x = a_1 + b = a_2 + c$, gde $a_1, a_2 \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. $\langle b,c \rangle = \langle d \rangle$ po pretpostavci, pa je $b = md$ i $c = nd$, $m,n \in \mathbb{Z}$.

Neka je najveći zajednički delitelj za m i n broj ℓ. Tada je $m = m_1 \ell$ i $n = n_1 \ell$, gde su m_1 i n_1 uzajamno prosti brojevi, pa postoje celi brojevi r i s takvi da je $rm_1 + sn_1 = 1$.

Tada je

$$x = rm_1 x + sn_1 x = rm_1(a_2+c) + sn_1(a_1 + b) =$$

$$= rm_1 a_2 + sn_1 a_1 + rm_1 c + sn_1 b = a_3 + rm_1 nd + sn_1 md =$$

$$= a_3 + rm_1 n_1 \ell d + sn_1 m_1 \ell d = a_3 + (r+s) m_1 n_2 \ell d .$$

No

$$m_1 n_1 \ell d = m_1 nd = m_1 c \in C,$$

a i

$$m_1 n_1 \ell d = n_1 mc = n_1 b \in B,$$

pa

$$m_1 n_1 \ell d \in B \cap C, \quad \text{tj.} \quad x \in A + (B \cap C).$$

176. Naći sve neizomorfne grupe reda 1,2,3,4,5,6 i 7.

Rešenje. Svaka grupa čiji je red prost broj je ciklička, pa su cikličke grupe jedine grupe reda 1,2,3,5 i 7.

(i) Neka je G grupa reda 4, $G = \{e,a,b,c\}$. Red elementa je delitelj reda grupe pa su a,b i c reda 2 ili 4.

Ako u G postoji elemenat reda 4, G je ciklička grupa reda 4.

Ako u G nema elemenata reda 4, onda je

$$a^2 = b^2 = c^2 = e.$$

Na osnovu zadatka 67. grupa G mora biti Abelova. Posmatrajmo elemenat ab. Svaka od pretpostavki

$$ab = e, \quad ab = a, \quad ab = b,$$

dovodi do kontradikcije, pa sledi da mora biti $ab = c$. Sada se

mogu lako izračunati preostali proizvodi, pa se dobija Kejlijeva tablica:

	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Iz tablice se utvrdjuje da je G zaista grupa.

Ova grupa se naziva Klajnova (Klein) četvorna grupa.

(ii) Posmatrajmo sada grupu G sa 6 elemenata. Svi njeni elementi sem neutralnog su reda 2,3 ili 6.

Ako grupa ima elemenat reda 6 ona je ciklička.

Ako u grupi G nema elemenata reda 6, onda su svi elementi sem neutralnog reda 2 ili 3. Na osnovu zadatka 174. zaključujemo da svi elementi grupe ne mogu biti reda 2 (jer je $|G| = 6 \neq 2^n$), pa, prema tome, u G postoji elemenat a reda 3. Dakle, e,a i a^2 su različiti elementi grupe G. Neka je b elemenat iz G različit od e,a i a^2. Pokažimo da su tada

$$e, a, a^2, b, ab, a^2 b$$

medjusobno različiti elementi. Pretpostavke da je

$$ab = e, \quad ab = a, \quad ab = a^2, \quad ab = b$$

očevidno dovode do kontradikcije, pa je ab različito od e,a, a^2 i b.

Svaka od pretpostavki

$$a^2 b = e, \quad a^2 b = a, \quad a^2 b = a^2, \quad a^2 b = b, \quad a^2 b = ab$$

takodje dovodi do protivrečnosti, pa su

$$e, a, a^2, b, ab, a^2 b$$

zaista različiti elementi, a kako ih ima 6 sem njih grupa G nema drugih elemenata.

Da bi formirali multiplikativnu tablici grupe G odredićemo proizvode elemenata te grupe. b^2 je jedan od elemenata grupe, ako pretpostavimo da je

$$b^2 = b, \quad b^2 = ab, \quad b^2 = a^2 b ,$$

skraćivanjem ovih jednakosti odmah dolazimo do kontradikcije. Iz $b^2 = a$ sledi da je b reda 3, pa množenjem sa b dobijamo

$b^3 = e = ab$ što je kontradikcija. Analogno pokazujemo da je $b^2 \neq a^2$, pa preostaje da mora biti $b^2 = e$.

Slično kao ranije, svaka od jednakosti

$$ba = e, \quad ba = a, \quad ba = a^2, \quad ba = b$$

odmah dovodi do kontradikcije. Ako je $ba = ab$, onda je

$$(ab)^2 = a^2b^2 = a^2 \neq e$$

i

$$(ab)^3 = a^3b^3 = b \neq e,$$

pa je ab reda 6, što ne može biti. Prema tome $ba = a^2b$, (tj. $(ab)^2 = e$).

Preostali proizvodi se sada mogu lako izračunati, pa se dobija Kejlijeva tablica:

	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	e	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	a^2b	ab	e	a^2	a
ab	ab	b	a^2b	a	e	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^2	a	e

Iz tablice se utvrdjuje da je G zaista grupa.

Ova grupa je nekomutativna, generisana je elementima a i b koji zadovoljavaju relacije

$$a^3 = b^2 = (ab)^2 = e \ .$$

(Videli smo da ove relacije potpuno odredjuju grupu).

177. Naći Kejlijevu tablicu za grupu generisanu elementima a i b koji zadovoljavaju sledeće relacije

$$a^4 = b^2 = (ab)^2 = e.$$

Dokazati da je ta grupa izomorfna sa grupom simetrija kvadrata (zadatak 15. b).

178. Dokazati da je simetrična grupa S_3 izomorfna sa nekomutativnom grupom reda 6 navedenom u zadatku 176.

§1.7. NORMALNE PODGRUPE I FAKTOR GRUPE

179. Podgrupa H grupe G je normalna ako i samo ako za svako $a,b \in G$ iz $ab \in H$ sledi $ba \in H$. Dokazati.

Rešenje. Ako $h \in H$ tada $g^{-1}(gh) \in H$, pa sledi $ghg^{-1} \in H$.

Obrnuto, neka je H normalna podgrupa, $a,b \in H$ i neka $abeH$. Tada je $a^{-1}(ab)a = ba \in H$.

Literatura:

F.E.Masat, A useful characterization of a normal subgroup, Math.Magazine, 52(1979), 171-173.

180. Ako u grupi G normalne podgrupe H i K imaju zajednički samo neutralni elemenat, onda svaki elemenat iz H komutatira sa svakim elementom iz K. Dokazati.

Uputstvo. Neka $a \in H$, $b \in K$. Posmatrati

$$(aba^{-1})b^{-1} = a(ba^{-1}b^{-1})$$

i iskoristiti da $aba^{-1} \in K$, $ba^{-1}b^{-1} \in H$ zbog normalnosti podgrupa H i K.

181. Dokazati da je skup xHx^{-1} podgrupa grupe G za svako $x \in G$, ako i samo ako je H podgrupa grupe G.

PRIMEDBA. xHx^{-1} se naziva podgrupa konjugovana sa podgrupom H.

182. Podgrupa grupe G je normalna ako i samo ako se poklapa sa svim svojim konjugovanim podgrupama. Dokazati.

183. a) Dokazati da konjugovane podgrupe imaju isti red.

b) H je podgrupa grupe G. Ako je K podgrupa grupe G konjugovana sa H onda, ako je H komutativna mora i K biti komutativna. Dokazati.

c) U grupi G podgrupa H je ciklička i njen generator je a. Ako je K podgrupa grupe G konjugovana sa H, $K = xHx^{-1}$, onda je i K ciklička podgrupa i njen generator je xHx^{-1}. Dokazati.

Uputstvo. Preslikavanje $f : H \to K$ podgrupe H na podgrupu $K = xHx^{-1}$ grupe G dato sa $f : a \mapsto xax^{-1}$ je izomorfizam.

184. Ako je u grupi G svaka podgrupa normalna, dokazati da svaka dva elementa čiji su redovi uzajamno prosti komutiraju.

Uputstvo. Posmatrati cikličke podgrupe generisane tim elementima.

185. Dokazati da je u grupi G podgrupa generisana kvadratima elemenata iz G normalna (elemenat $x \in G$ je kvadrat ako i samo ako postoji $g \in G$ tako da je $x = g^2$).

186. Odrediti normalne podgrupe simetrija kvadrata (v. zadatke 15.b, 155).

187. Ako se izvrši particija grupe G na disjunktne podskupove, kada će familija podskupova biti grupa u odnosu na operaciju množenja skupova definisanu u 1.45. ?

188. U aditivnoj grupi celih brojeva $(\mathbb{Z},+)$ sa H je označena podgrupa svih brojeva deljivih sa 4. Izvršiti razlaganje grupe $\mathbb{Z}$ po podgrupi H i naći faktor grupu $\mathbb{Z}/H$.

Rešenje. H je normalna podgrupa jer je $(\mathbb{Z},+)$ komutativna grupa, pa se leva i desna dekompozicija grupe $\mathbb{Z}$ po H poklapaju.

U H se nalaze svi brojevi oblika 4k, $k \in \mathbb{Z}$, pa ćemo izabrati bilo koji elemenat koji ne pripada H, recimo 1, i sabrati ga sa svakim elementom iz H, tako dobijamo suskup

$$1 + H = \{1 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\} .$$

Ako sada uzmemo bilo koji elemenat koji nije ni u H ni u 1+H, recimo 2, i saberemo ga sa H dobijamo suskup

$$2 + H = \{2 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\} .$$

Produžujući ovaj postupak dobijamo i suskup

$$3 + H = \{3 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\} .$$

Unija navedenih suskupova je cela grupa G, pa je time dovršeno razlaganje grupe $\mathbb{Z}$ po podgrupi H :

$$\mathbb{Z} = H \cup (1+H) \cup (2+H) \cup (3+H) .$$

Ovi suskupovi su elementi faktor grupe $\mathbb{Z}/H$. (Faktor grupa $(\mathbb{Z}/H,+)$ je ustvari grupa $(\mathbb{Z}_4,+)$ ostataka po modulu 4 (zadatak 11)).

189. Neka je $C_{12} = \{a, a^2, \ldots, a^{12} = e\}$ ciklička grupa reda 12, a $H = \{e, a^4, a^8\}$ njena podgrupa. Naći faktor grupu C_{12}/H i formirati Kejlijevu tablicu te grupe.

Rešenje.

$$H = \{e, a^4, a^8\} ,$$
$$aH = \{a, a^5, a^9\} ,$$
$$a^2H = \{a^2, a^6, a^{10}\} ,$$
$$a^3H = \{a^3, a^7, a^{11}\} ,$$

su suskupovi koji predstavljaju elemente faktor grupe

$$C_{12}/H = \{H, aH, a^2H, a^3H\} .$$

S obzirom da je $aH \cdot bH = abH$, jednostavno se formira Kejlijeva tablica (na primer, $aH \cdot a^3H = a^4H = H$ itd.).

190. Dokazati da je svaka faktor grupa cikličke grupe ciklička.

Uputstvo. Ako je a generatorni elemenat cikličke grupe G a H njena podgrupa, pokazati da onda suskup aH generiše faktor grupu C/H.

191. Ako je u aditivnoj grupi kompleksnih brojeva $(\mathbb{C},+)$, $\mathbb{R}$ podgrupa svih realnih brojeva naći faktor grupu $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.

Rezultat.

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{\mathbb{R} + bi \mid b \in \mathbb{R}\} .$$

Kako se elementi ove faktor grupe mogu grafički predstaviti u kompleksnoj ravni ?

192. Naći sve neizomorfne homomorfne slike cikličke grupe C_6 reda 6.

Rešenje. Prema prvoj teoremi o izomorfizmu grupa (1.64) svaka homomorfna slika grupe G je izomorfna nekoj faktor-grupi grupe G. Prema tome, da bi našli sve homomorfne slike grupe $C_6 = \{a, a^2, \ldots, a^6 = e\}$ odredićemo sve faktor grupe te grupe. Podgrupe grupe C_6 su

$$H_1 = \{e\},\ H_2 = \{e, a^3\},\ H_3 = \{e, a^2, a^4\},\ C_6\ ,$$

drugih podgrupa nema (zadatak 114), ove podgrupe su normalne jer je grupa komutativna, pa su faktor grupe

$$C_6/H_1,\ \ C_6/H_2,\ \ C_6/H_3\ \ \text{i}\ \ C_6/C_6\ ,$$

tražene neizomorfne homomorfne slike.

Na primer, preslikavanje $f : x \mapsto xH_2$ je homomorfizam grupe C_6 na grupu $C_6/H_2 = \{H_2, aH_2, a^2H_2\}$.

193. Neka je p prost broj. Dokazati da je $\mathbb{Z}_p^\infty \simeq \mathbb{Q}^p/\mathbb{Z}$.

194. Dokazati da je svaka podgrupa indeksa 2 normalna podgrupa.

195. Neka je H podgrupa simetrične grupe S_n $(n > 1)$. Ako H sadrži bar jednu neparnu permutaciju, dokazati da H sadrži podgrupu K takvu da je $[H : K] = 2$.

Rešenje. Ako H sadrži bar jednu neparnu permutaciju, tada je $HA_n = S_n$. Iskoristimo drugu teoremu o izomorfizmu (1.68):

$H/H \cap A_n \simeq HA_n/A_n \simeq S_n/A_n \simeq C_2$, pa je $H \cap A_n = K$ podgrupa grupe H indeksa 2.

196. Dokazati da grupa S_3 nema pravih normalnih podgrupa različitih od A_3.

197. Navesti primer grupe G u kojoj postoje podgrupe A i B takve da je $A \subseteq B$, A je normalna podgrupe grupe B, B je normalna podgrupa grupe G, ali A nije normalna podgrupa grupe G.

198. Neka je grupa G_2 homomorfna slika grupe G_1 .

a) Ako je $H_1 \lhd G_1$, onda je i slika podgrupe H_1 normalna podgrupa grupe G_2.

b) Ako je $H_2 \lhd G_2$, onda je skup svih elemenata iz G_1 koji se preslikavaju na elemente iz H_2 normalna podgrupa grupe G_1. Dokazati.

199. Ako je A podgrupa a N normalna podgrupa grupe G dokazati da je tada

a) AN podgrupa

b) $A \cap N \lhd A$

c) $A/A \cap N \simeq AN/N$.

Dokazati.

Uputstvo. Posmatrati restrikciju f_A homomorfizma $f : G \to G/N$ na A. Dokazati da je $A \cap N$ jezgro a AN/N slika homomorfizma f_A i primeniti prvu teoremu o izomorfizmu (1.64).

200. Neka su K i H normalne podgrupe grupe G takve da je $K \subseteq H$. Tada je

a) H/K normalna podgrupa grupe G/K,

b) $G/H \simeq (G/K)/(H/K)$.

Dokazati.

Uputstvo. Definisati preslikavanje $f : G/K \to G/H$ sa $f : Ka \mapsto Ha$. Dokazati da je f funkcija, homomorfizam, da je H/K jezgro f, da je G/H slika homomorfizma f i primeniti prvu teoremu o izomorfizmu (1.64).

201. Neka je K normalna podgrupa grupe G i $f : G \to G/K$ preslikavanje definisano sa $f : g \mapsto gK$. Dokazati da:

a) f preslikava bijektivno podgrupe grupe G koje sadrže K na podgrupe grupe G/K.

b) f preslikava bijektivno normalne podgrupe grupe G koje sadrže K na normalne podgrupe grupe G/K.

202. Neka je H normalna podgrupa konačne grupe G takva da su joj red $|H|$ i indeks $[G:H]$ uzajamno prosti brojevi. Dokazati da je H jedina podgrupa grupe G koja ima red $|H|$.

Uputstvo. Pretpostaviti da postoji podgrupa K takva da je $|K| = |H|$. U šta se preslikava K pri preslikavanju $f : G \to G/H$, $f : x \mapsto xH$?

203. Dokazati da konačna grupa reda $2n$ koja sadrži elemenat reda n ima najmanje $\tau(n)+1$ normalnih podgrupa. Sa $\tau(n)$ je označen broj svih delitelja broja n.
(Lindner C.C., Problem 5406, Amer.Math.Monthly,73(1966),674).

204. Ako je grupa G unija (skupovna) familije pravih normalnih podgrupa, takvih da je neutralni elemenat jedini zajednički elemenat za bilo koje dve od tih podgrupa, onda je G Abelova grupa. Dokazati.
(T.J.Head, Problem 5200,Amer.Math.Monthly,71(1964), 561).

Rešenje. Neka je $G = \bigcup N_i$, $i \in I$ i neka su $a \in N_i$, $b \in N_j$, $i \neq j$. Ako je

$$c = aba^{-1}b^{-1} = a(ba^{-1}b^{-1}) = (aba^{-1})b^{-1},$$

onda, s obzirom da su N_i i N_j normalne podgrupe,

$$ba^{-1}b^{-1} \in N_i, \quad aba^{-1} \in N_j,$$

pa $c \in N_i$, $c \in N_j$. Prema tome $c = e$, odnosno $ab = ba$.

Pretpostavimo sada da $a,b \in N_i$. Kako je N_i prava podgrupa postoji $g \in G$, $g \notin N_i$ i elemenat $ga \notin N_i$. Na osnovu onoga što smo ranije dokazali g i ga komutiraju sa svakim elementom iz N_i, pa i sa ba, dakle,

$$e = (ga)(ba)(ga)^{-1}(ba)^{-1} = aba^{-1}b^{-1},$$

tj.

$$ab = ba.$$

205. Neka je K normalna podgrupa grupe G takva da je faktor grupa G/K reda n. Dokazati :

a) $x^n \in K$ za svako $x \in G$.

b) Ako $x \in G$ i $x^k \in K$ za neki ceo broj k koji je uzajamno prost sa n, tada $x \in K$.

Rešenje. a) Faktor grupa G/K je reda n, pa je $(xK)^n = x^nK = K$, tj. $x^n \in K$.

b) Ako su n i k uzajamno prosti, tada postoje celi brojevi r i s tako da je $rk + sn = 1$, pa je

$$x^{rk+sn} = (x^k)^r \cdot (x^n)^s = x.$$

$x^k \in K$ i $x^n \in K$, pa i $x \in K$.

206. Neka je $(G,+)$ Abelova grupa u kojoj za svaki prirodan broj n i svako $x \in G$ postoji $y \in G$ tako da je $ny = x$. Dokazati:

a) G je beskonačna grupa.

b) Ako je H podgrupa grupe G, tada i faktor grupa G/H ima navedenu osobinu.

c) Podgrupa grupe G ne mora da ima tu osobinu.

Rešenje. a) Ako pretpostavimo da je G konačna grupa, $n = |G|$, onda je $ny = 0$ za svako $y \in G$, pa za $x \neq 0$ ne postoji $y \in G$ tako da bude $ny = x$. Iz ove protivrečnosti sledi da je grupa G beskonačna.

b) Neka je $X \in G/H$, tj. $X = x + H$ za neko $x \in G$. U G postoji takvo y da je $ny = x$, pa tada za klasu $y + H = Y$ važi

$$nY = n(y+H) = ny + nH = x + H = X,$$

tj. G/H ima navedenu osobinu.

c) $(\mathbb{Q},+)$ zadovoljava dati uslov, a njena podgrupa $(\mathbb{Q}^p,+)$ (zadatak 30) ne zadovoljava (za $x = \frac{1}{p}$ i $n \neq p^k$, $k \in \mathbb{N}$).

207. Neka su A,B i C normalne podgrupe grupe G takve da je $A \subseteq B$, $AC = BC$ i $A \cap C = B \cap C$. Dokazati da je tada $A = B$.

Rešenje. Lako se proverava da je $B = B \cap (BC)$ i $A = A \cap (AC)$ i da važe sledeće jednakosti:

$$A = A \cap (AC) = A(A \cap C) = A(A \cap B) = B \cap (AC) = B \cap (BC) = B.$$

208. Neka je G konačna grupa u kojoj za fiksiran prirodan broj $n > 1$ važi $(xy)^n = x^n y^n$ za svako $x,y \in G$. Neka je $G_n = \{x \mid x \in G,\ x^n = e\}$ i $G^n = \{x \mid (\exists z \in G)\ x = z^n\}$. Dokazati:

a) G_n i G^n su normalne podgrupe grupe G.

b) Red podgrupe G^n je jednak indeksu podgrupe G_n u G.

Uputstvo. Primeniti prvu teoremu o izomorfizmu (1.64) na homomorfizam $f : G \to G$ dat sa $f : x \mapsto x^n$.

209. Neka je H podgrupa indeksa k grupe G. Dokazati da postoji homomorfizam $h : G \to S_k$ takav da je jezgro homomorfizma h maksimalna normalna podgrupa grupe G sadržana u H.

Rešenje. Posmatrajmo skup $X = \{H, g_2H, \ldots, g_kH\}$ svih levih suskupova grupe H u G. Lako se proverava da je za svako $a \in G$ preslikavanje $f_a : X \to X$ definisano sa

$$f_a = \begin{pmatrix} H & g_2H & \ldots & g_kH \\ aH & ag_2H & \ldots & ag_kH \end{pmatrix}$$

permutacija skupa X. Ako označimo sa S_X grupu svih permutacija skupa X, onda je preslikavanje $h : G \to S_X \simeq S_k$ definisano sa $h : a \mapsto f_a$ homomorfizam. Zaista,

$$h(ab) = f_{ab} = f_a f_b = h(a)h(b) .$$

Neka $a \in \mathrm{Ker}h$, tada je f_a identičko preslikavanje, tj. $abH = bH$ za svako $b \in G$. Za $b = e$ je

$$aH = aeH = eH = H ,$$

pa $a \in H$. Prema tome, $\mathrm{Ker}h \subseteq H$.

Neka je N proizvoljna normalna podgrupa grupe G sadržana u H. Tada je $x^{-1}yx \in N \subseteq H$ za svako $y \in N$ i svako $x \in G$, pa je $x^{-1}yxH = H$, a odatle je $yaH = aH$, tj. $y \in \mathrm{Ker}h$. Dokazali smo da je $N \subseteq \mathrm{Ker}h$, $\mathrm{Ker}h$ je normalna podgrupa grupe G (jer je jezgro svakog homomorfizma normalna podgrupa), pa je, prema tome, $\mathrm{Ker}h$ maksimalna normalna podgrupa grupe G sadržana u H.

210. Ako beskonačna grupa G sadrži pravu podgrupu H konačnog indeksa, tada G sadrži i pravu normalnu podgrupu konačnog indeksa. Dokazati .

Rešenje. Neka je $[G : H] = k$. Na osnovu prethodnog zadatka sledi da postoji homomorfizam $h : G \to S_k$ čije je jezgro sadržano u H. Pošto je $\mathrm{Ker}h$ jezgro homomorfizma, ono je podgrupa grupe G, a faktor grupa $G/\mathrm{Ker}h$ je izomorfna sa nekom podgrupom konačne grupe S_n. Prema tome, normalna podgrupa $\mathrm{Ker}h$ je konačnog indeksa u G.

211. Ako je G konačna grupa reda n, H prava podgrupa indeksa k grupe G i n nije delitelj k!, dokazati da H sadrži netrivijalnu normalnu podgrupu grupe G.

Rešenje. S obzirom da n nije delitelj k! na osnovu Lagranžove teoreme (1.50) sledi da S_k nema podgrupu reda n, tj. homomorfizam h definisan u rešenju zadatka 209. ne može biti izomorfizam. Dakle, jezgro tog homomorfizma koje je normalna podgrupa grupe G, nije trivijalna podgrupa {e} .

212. Ako je u grupi G reda 99 H podgrupa reda 11, dokazati da je H normalna podgrupa.

Rešenje. S obzirom da je $[G:H] = 9$ i 99 nije delitelj 9!, na osnovu prethodnog zadatka H sadrži netrivijalnu normalnu podgrupu N grupe G. Kako je red podgrupe H prost broj, H nema netrivijalnih podgrupa, prema tome, $N = H$, tj. H je normalna podgrupa grupe G.

§1.8. DIREKTAN PROIZVOD GRUPA

213. Ako su A i B grupe, direktan proizvod tih grupa,

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\},$$

je grupa u odnosu na operaciju

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2,\ b_1b_2) .$$

Grupa $A \times B$ sadrži podgrupe A' i B' izomorfne grupama A i B. Svaki elemenat grupe $A \times B$ se može na jedinstven način prikazati kao proizvod jednog elementa iz A' i jednog iz B' i elementi u tom proizvodu komutiraju. Dokazati.

Rešenje. S obzirom da su A i B grupe, lako se može pokazati da je $A \times B$ grupa.

Skup $A' = A \times \{e_B\} = \{(a,e_B) \mid a \in A\}$ je podgrupa grupe $A \times B$ izomorfna sa A, a $B' = \{e_A\} \times B = \{(e_A,b) \mid b \in B\}$ je podgrupa izomorfna sa B (sa e_A i e_B označili smo neutralne elemente redom grupa A i B).

Ako je (a,b) bilo koji elemenat grupe $A \times B$ onda je

$$(a,b) = (a,e_B)(e_A,b) = (e_A,b)(a,e_B)$$

i kako je ovo očevidno jedini način da se (a,b) napiše kao proizvod jednog elementa iz A' i jednog elementa iz B', teorema je u potpunosti dokazana.

PRIMEDBA. Analogno se definiše direktan proizvod bilo kog konačnog broja grupa.

214. Ako su $C_2 = \{a, a^2 = e_1\}$ i $C_3 = \{b, b^2, b^3 = e_2\}$ cikličke grupe reda dva i tri, naći $C_2 \times C_3$.

Rešenje. Elementi grupe $C_2 \times C_3$ su sledećih šest uredjenih parova

$$(e_1,e_2), \quad (e_1,b), \quad (e_1,b^2)$$
$$(a,e_2), \quad (a,b), \quad (a,b^2).$$

Kako je

$$(a,b)^2 = (e_1,b^2), \quad (a,b)^3 = (a,e_2),$$
$$(a,b)^4 = (e_1,b), \quad (a,b)^5 = (a,b^2),$$
$$(a,b)^6 = (e_1,e_2),$$

grupa $C_2 \times C_3$ je ciklička, a njen generator je (a,b).

PRIMEDBA. U opštem slučaju direktan proizvod cikličkih grupa ne mora biti ciklička grupa. Naći potreban i dovoljan uslov da direktan proizvod cikličkih grupa bude ciklička grupa.

215. Naći sledeće direktne proizvode

a) $C_3 \times C_3$,

b) $C_2 \times C_2 \times C_2$,

c) $(\mathbb{R},+) \times (\mathbb{R},+)$.

216. Ako je grupa G direktan proizvod grupa A i B, dokazati da su podgrupe A' i B' definisane u rešenju zadatka 213. normalne, $A \simeq A'$, $B \simeq B'$, i

$$G/A' = B, \quad G/B' = A.$$

217. Neka je G grupa i neka je $\tilde{G} = \{x \mid x = (g,g), g \in G\}$ podskup direktnog proizvoda $G \times G$. Dokazati:

a) $\tilde{G}$ je podgrupa grupe $G \times G$ i $\tilde{G} \simeq G$.

b) $\tilde{G}$ je normalna podgrupa grupe $G \times G$ ako i samo ako je G Abelova grupa.

Rešenje. b) Neka je $\tilde{G}$ normalna podgrupa grupe $G \times G$. Tada je za svako $a,g \in G$ $(e,a)(g,g)(e,a)^{-1} = (g,aga^{-1}) \in \tilde{G}$, pa je $g = aga^{-1}$, tj. $ag = ga$. Obrnuto važi očigledno.

218. Navesti primer grupe G koja ima normalne podgrupe H i K tako da važi

a) $H \simeq K$, a $G/H \neq G/K$.

b) $H \neq K$, a $G/H \simeq G/K$.

Rezultat.

a) $G = C_2 \times C_4$, $H = C_2 \times 1$, $K = 1 \times C_2$.

b) $G = C_2 \times C_4$, $H = C_2 \times C_2$, $K = 1 \times C_4$.

(Sa 1 je označena grupa koja se sastoji samo od neutralnog elementa.)

219. Navesti primer dve neizomorfne grupe G_1 i G_2, pri čemu grupa G_1 ima normalnu podgrupu K_1 a grupa G_2 ima normalnu podgrupu K_2, tako da je

$$K_1 \simeq K_2 \quad \text{i} \quad G_1/K_1 \simeq G_2/K_2.$$

Rezultat.

$$G_1 = C_2 \times C_2, \quad G_2 = C_4, \quad K_1 = C_2 \times 1, \quad K_2 = C_2.$$

220. Ako su A i B podgrupe grupe G takve da je $AB = G$, jedini zajednički elemenat podgrupa A i B je neutralni elemenat e i ako svaki elemenat iz A komutira sa svakim elementom iz B, onda je $G \simeq A \times B$. Dokazati.

Rešenje. S obzirom da je $G = AB$ svaki elemenat g grupe G može se prikazati u obliku $g = ab$, $a \in A$, $b \in B$ i to na jedinstven način, jer iz pretpostavke

$$ab = a_1 b_1, \quad a, a_1 \in A, \quad b, b_1 \in B,$$

sledi

$$a_1^{-1} a = b_1 b^{-1},$$

pa kako je $A \cap B = \{e\}$, mora biti

$$a_1^{-1} a = b_1 b^{-1} = e,$$

tj.

$$a = a_1, \quad b = b_1 .$$

Preslikavanje $f : ab \mapsto (a,b)$ je izomorfizam grupe G na grupu $A \times B$ jer je to preslikavanje očevidno bijekcija i ako su $x, y \in G$, onda je

$$x = a_1 b_1, \quad y = a_2 b_2, \quad a_1, a_2 \in A, \quad b_1, b_2 \in B,$$

pa je

$$f(xy) = f(a_1 b_1 a_2 b_2) = f(a_1 a_2 b_1 b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) =$$
$$= (a_1, b_1)(a_2, b_2) = f(x) f(y) .$$

Dakle, $G \simeq A \times B$.

221. Ako su A i B normalne podgrupe grupe G takve da im je neutralni elemenat jedini zajednički elemenat i ako je $G = AB$ onda je $G \simeq A \times B$. Dokazati.

Uputstvo. Koristiti zadatke 180. i 220.

222. Dokazati da je skup klasa ostataka relativno prostih sa 21 po modulu 21 multiplikativna grupa izomorfna sa direktnim proizvodom cikličkih grupa reda 6 i 2.

Rešenje. Ranije (zadatak 12. b) je pokazano da skup

$$G = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\} \subseteq \mathbb{Z}_{21}$$

mora činiti multiplikativnu grupu.

Skup $A = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{16}, \overline{11}, \bar{1}\}$

je ciklička podgrupa reda 6 (jedan njen generator je $\bar{2}$), a skup $B = \{\bar{1}, \overline{13}\}$ ciklička podgrupa reda 2, pa kako je G komutativna

grupa i $A \cap B = \{\bar{1}\}$, $AB = G$, na osnovu zadatka 220. sledi da je $G \simeq A \times B$.

223. Koje od sledećih multiplikativnih grupa su izomorfne netrivijalnom direktnom proizvodu:

a) $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\} \subseteq \mathbb{Z}_8$,
b) $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{9}, \overline{11}\} \subseteq \mathbb{Z}_{16}$,
c) $\{\bar{1}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{15}\} \subseteq \mathbb{Z}_{16}$.

224. Da li je ciklička grupa reda 25 izomorfna netrivijalnom direktnom proizvodu ?

Rešenje. Ne, jer ima samo jednu netrivijalnu podgrupu (v.1.71.).

§1.9. KOMUTATORI, REŠIVE GRUPE

225. Skup $Z(G)$ svih elemenata grupe G koji komutiraju sa svakim elementom grupe naziva se centar grupe G. Dokazati da je $Z(G)$ normalna podgrupa grupe G.

226. Neka su x i y elementi grupe G takvi da xy pripada centru grupe G.

Dokazati da je $xy = yx$.

Rešenje.

$$xy = e(xy) = (yy^{-1})(xy) = y(xy)y^{-1} = yx .$$

227. Za grupu simetrija kvadrata (zadatak 15. b) naći centar.

228. Odrediti centar multiplikativne grupe G realnih nesingularnih matrica formata 2×2.

Rešenje. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrica koja pripada centru. Ona komutira sa svim matricama iz

G, pa je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

odakle dobijamo da je $b = c = 0$. Takodje mora biti

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},$$

odakle je $a = d$.

Prema tome, $A = aE$, $a \neq 0$ (E je jedinična matrica), a kako je očevidno za svako $B \in G$

$$(aE)B = B(aE),$$

to se centar grupe G zaista sastoji od svih matrica oblika aE (takve matrice se nazivaju skalarne).

PRIMEDBA. Može li se gornji zaključak uopštiti za grupu nesingularnih matrica formata $n \times n$?

229. Neka je $Z(G)$ centar grupe G. Ako je faktor grupa $G/Z(G)$ ciklička onda je grupa G Abelova. Dokazati.

Rešenje. Neka je $aZ(G)$ generatorni elemenat cikličke grupe $G/Z(G)$. Tada se svaki elemenat grupe $G/Z(G)$ može prikazati u obliku $a^n Z(G)$, za neki ceo broj n. Prema tome, svaki elemenat grupe G može se prikazati u obliku $a^n x$, $x \in Z(G)$. Ako su p,q dva proizvoljna elementa grupe G, onda je

$$p = a^n x, \quad q = a^m y, \quad x,y \in Z(G),$$

pa je

$$pq = a^n x a^m y = a^n a^m xy = a^m a^n yx = a^m y a^n x = qp,$$

što znači da je grupa G zaista Abelova.

230. Ako je A neprazan podskup grupe G, onda je centralizator $C(A)$ skupa A u G skup svih elemenata iz G koji komutiraju sa svakim elementom iz A, tj.

$$C(A) = \{x \mid x \in G \wedge (\forall y \in A)xy = yx\}.$$

Ako $A,B \subseteq G$, dokazati

a) $C(A)$ je podgrupa grupe G,

b) Iz $A \subseteq B$ sledi $C(A) \supseteq C(B)$,

c) $A \subseteq C(C(A))$,

d) $C(A) = C(C(C(A)))$.

231. Koji elementi simetrične grupe S_3 su komutatori? Naći izvod grupe S_3.

Rešenje. S obzirom da je komutator proizvod 4 permutacije od kojih su dve i dve iste parnosti, sledi da svaki komutator mora biti parna permutacija. Prema tome, komutatori mogu biti jedino permutacije

$$[1\ 2\ 3],\ [2\ 3\ 1],\ [3\ 1\ 2].$$

Ove permutacije zaista su komutatori, jer je

$$[2\ 1\ 3][2\ 1\ 3][2\ 1\ 3]^{-1}[2\ 1\ 3]^{-1} = [1\ 2\ 3],$$
$$[1\ 3\ 2][2\ 1\ 3][1\ 3\ 2]^{-1}[2\ 1\ 3]^{-1} = [2\ 3\ 1],$$
$$[3\ 2\ 1][2\ 1\ 3][3\ 2\ 1]^{-1}[2\ 1\ 3]^{-1} = [3\ 1\ 2],$$

pa kako one čine grupu (to je A_3, podgrupa svih parnih permutacija) dobijamo da je izvod grupe S_3 alternativna podgrupa A_3.

232. Dokazati da je u grupi G izvod G' normalna podgrupa.

233. Neka je H normalna podgrupa grupe G. Dokazati da je faktor grupa G/H Abelova ako i samo ako H sadrži izvod G'.

Rešenje.

Neka je G/H Abelova grupa i $x,y \in G$. Tada je

$$xyx^{-1}y^{-1}H = (xH)(yH)(x^{-1}H)(y^{-1}H) =$$
$$= (xH)(yH)(xH)^{-1}(yH)^{-1} = (xH)(xH)^{-1}(yH)(yH)^{-1} = H,$$

pa je $[xy] = xyx^{-1}y^{-1} \in H$. Prema tome, $G' \subseteq H$.

Obrnuto, neka je $G' \subseteq H$. To znači da je za svako $x,y \in G$, $xyx^{-1}y^{-1} \in H$, tj. $xyx^{-1}y^{-1}H = H$. Poslednja jednakost je ekvivalentna sa $(xH)(yH)(xH)^{-1}(yH)^{-1} = H$, tj.

$$(xH)(yH) = (yH)(xH),$$

pa je G/H Abelova grupa.

PRIMEDBA. Direktna posledica ovog stava je da je G/G' Abelova grupa.

234. Naći izvod G' grupe G nesingularnih matrica formata 2×2 nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Rešenje. Neka je ϕ preslikavanje grupe G u multiplikativnu grupu ne nula realnih brojeva $\mathbb{R}^x$, definisano sa $\phi(A) = \det(A)$. ϕ je homomorfizam jer je $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ za proizvoljne matrice A,B iz G. Jezgro homomorfizma ϕ su matrice iz G za koje važi $\det(A) = 1$.

Pošto je $\mathbb{R}^x$ Abelova grupa, na osnovu zadatka 233. sledi $G' \subseteq \operatorname{Ker}\phi$.

Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker}\phi$. Tada je ili

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a-1}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{d-1}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{kad je } c \neq 0, \text{ ili}$$

je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ kad je $c = 0$. Matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = X^{-1}Y^{-1}XY$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{bmatrix} = U^{-1}V^{-1}UV$$

$$\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & 2t \\ 2t^2 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}t & \frac{2}{3}t^2 \\ \frac{2}{3}t & -\frac{1}{3}t^2 \end{bmatrix} = W^{-1}Z^{-1}WZ$$

su komutatori pa je $A \in G'$. Dakle, $G' = \operatorname{Ker}\phi$, odnosno $G' = \{A \mid A \in G \text{ i } \det(A) = 1\}$.

235. Dokazati da su u grupi $(G,*)$ iz zadatka 28. elementi $x=(p,0,0,0)$ i $y=(0,p,0,0)$ komutatori, a xy nije komutator.

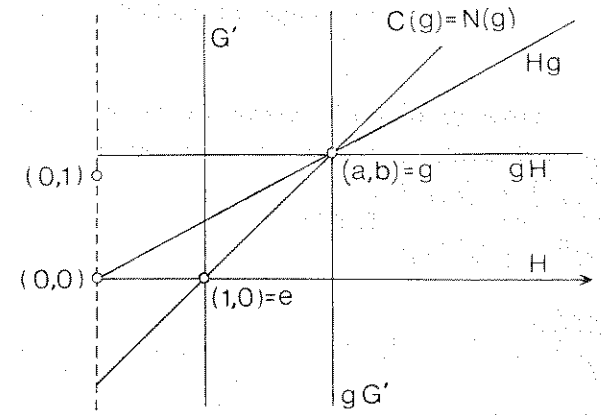
236. Neka je G multiplikativna grupa matrica formata 2x2 nad poljem realnih brojeva sledećeg oblika

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R},\ a > 0 \right\}.$$

Identifikovati matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sa tačkom (a,b) u ravni $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

a) Šta odgovara komutatorskoj podgrupi G' ?
b) Šta odgovara faktor grupi G/G' ?
c) Šta odgovara podgrupi $H = \{x \mid x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } a > 0\}$?
d) Šta odgovara levim a šta desnim suskupovima po podgrupi H ?
e) Šta odgovara normalizatoru N(g) i centralizatoru C(g) elemen-

Rezultat. Na sledećoj slici su prikazani traženi skupovi.



Literatura:

G.Dobbins, G.Strate, Matrix examples in modern algebra, Amer. Math. Monthly, 85(1978), p.377-380.

237. Dokazati da je u grupi G svaka podgrupa H koja sadrži izvod grupe G ($H \supseteq G'$) normalna podgrupa grupe G.

Uputstvo. Koristiti da je faktor grupa G/G' Abelova, da je svaka podgrupa Abelova grupe normalna i zadatak 201.b .

238. Neka je G grupa koja nema elemenata reda 2. Ako je $(xy)^2 = (yx)^2$ za svako $x,y \in G$ dokazati da je tada G Abelova grupa. (E.Just, Problem E 1996, Amer.Math.Monthly, 75(1968), 904.)

Rešenje. Primetimo najpre da je $x^2 = ((xy^{-1})y)^2 = (y(xy^{-1}))^2 = yx^2y^{-1}$, što je ekvivalentno sa $x^2y = yx^2$. Dalje u G važi

$$x^{-1}y^{-1}x = x(x^{-1})^2y^{-1}x = xy^{-1}(x^{-1})^2x = xy^{-1}x^{-1}.$$

Analogno važi i $y^{-1}x^{-1}y = yx^{-1}y^{-1}$.

Neka je z komutator elemenata x i y, $z = xyx^{-1}y^{-1}$. Tada je

$$z^2 = xy(x^{-1}y^{-1}x)yx^{-1}y^{-1} = xy(xy^{-1}x^{-1})yx^{-1}y^{-1} =$$
$$= xyx(y^{-1}x^{-1}y)x^{-1}y^{-1} = xyx(yx^{-1}y^{-1})x^{-1}y^{-1} =$$
$$= (xy)^2((yx)^2)^{-1} = (yx)^2((yx)^2)^{-1} = e.$$

Pošto u G nema elemenata reda 2 iz $z^2 = e$ sledi $z = e$, tj. $xy = yx$.

239. Neka je $(G,*)$ grupa iz zadatka 28. Dokazati da je $G' \subseteq Z(G)$.

240. Neka je grupa G takva da je $G' \subseteq Z(G)$. Dokazati da za svako $x,y \in G$ i svaki prirodan broj n važi:

a) $[x^n,y^n] = [x,y]^{n^2}$,

b) $(yx)^n = y^n x^n [x,y]^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Rešenje.

a) $[x^n,y^n] = x^n y^n x^{-n} y^{-n} = \underbrace{xx \ldots x}_{n}(xy)\underbrace{y \ldots yx^{-n}y^{-n}}_{n} =$

$= \underbrace{x \ldots x}_{n-1}([x,y]yx)\underbrace{y \ldots y}_{n-1}x^{-n}y^{-n} =$

$= \underbrace{x \ldots x}_{n-1}y(xy)\underbrace{y \ldots y}_{n-2}x^{-n}y^{-n}[x,y] =$

$= \ldots = x^{n-1}y^n x^{-n+1}y^{-n}[x,y]^n = \ldots = [x,y]^{n^2}$.

b) Primenimo indukciju po n. Za n=1 tvrdjenje očigledno važi. Ako pretpostavimo da važi za n, onda je

$$(yx)^{n+1} = (yx)^n yx = y^n x^n [x,y]^{\frac{n(n-1)}{2}} yx =$$

$$= y^n x^n yx [x,y]^{\frac{n(n-1)}{2}} .$$

Ako sad na $y^n x^n yx$ primenimo isti postupak koji je pod a) primenjen na $x^n y^n x^{-n} y^{-n}$, dobićemo da je

$$y^n x^n yx = y^{n+1} x^{n+1} [x,y]^n ,$$

pa je

$$(yx)^{n+1} = y^{n+1} x^{n+1} [x,y]^{n+\frac{n(n-1)}{2}} = y^{n+1} x^{n+1} [x,y]^{\frac{n(n+1)}{2}} .$$

241. Neka je u grupi G G' izvod a Z(G) centar. Ako za normalnu podgrupu $N \neq Z(G)$ važi $N \cap G' = \{e\}$, tada je $N \subseteq Z(G)$. Dokazati.

Rešenje. Pošto je N normalna podgrupa za svako $g \in G$ i svako $x \in N$, $gxg^{-1} \in N$, pa je i $[g,x] = (gxg^{-1})x^{-1} \in N$. S obzirom da $[g,x] \in G'$, mora biti $gxg^{-1}x^{-1} = e$, tj. $gx = xg$, što znači da $x \in Z(G)$. Prema tome, $N \subseteq Z(G)$.

242. Neka je centar Z(G) grupe G podgrupa indeksa n. Dokazati da G ima najviše n^2 različitih komutatora.

Rešenje. Neka su $x,y,u,v \in G$. Ako x i u pripadaju suskupu $aZ(G)$, a y i v pripadaju suskupu $bZ(G)$, dokazaćemo da je onda $[x,y] = [u,v]$. Tada je $x = ac_1$, $u = ac_2$, $c_1, c_2 \in Z(G)$, pa je

$$xu^{-1} = ac_1(ac_2)^{-1} = ac_1 c_2^{-1} a^{-1} = aa^{-1} c_1 c_2^{-1} = c_1 c_2^{-1} \in Z(G).$$

Analogno, iz $y,v \in bZ(G)$ sledi da $yv^{-1} \in Z(G)$. Prema tome,

$$xyx^{-1}y^{-1} = (xu^{-1})u(yv^{-1})vu^{-1}(xu^{-1})^{-1}v^{-1}(yv^{-1})^{-1} =$$

$$= uvu^{-1}v^{-1}.$$

Dva elementa se iz n skupova mogu izabrati na n^2 različitih načina, dakle, u G ima najviše n^2 različitih komutatora.

243. Neka je G grupa, a $f : G \to G$ homomorfizam koji komutira sa svakim unutrašnjim automorfizmom grupe G. Neka je $K = \{x \mid x \in G \text{ i } f(f(x)) = f(x)\}$. Dokazati da je K normalna podgrupa grupe G koja sadrži G'.
(B.L.T. Dufa Scio, Problem 4987, Amer.Math. Monthly, 69 (1962),1015.)

Rešenje. Pošto f komutira sa svim unutrašnjim automorfizmima grupe G, onda je $f(a^{-1}xa) = a^{-1}f(x)a$ za svako $a \in G$.

Skup K očigledno nije prazan jer $e \in K$. Neka $a,b \in K$, tada je

$$f(f(ab^{-1})) = f(f(a)f(b^{-1})) = f(f(a))f(f(b^{-1})) = f(a)f((f(b))^{-1}) =$$

$$= f(a)(f(f(b)))^{-1} = f(a)(f(b))^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) ,$$

pa je K podgrupa. Neka je $x \in G$, tada je

$$f(f(xyx^{-1})) = f(x\, f(a)x^{-1}) = x\, f(f(a))x^{-1} = x\, f(a)x^{-1} =$$

$$= f(xax^{-1}),$$

pa je K normalna podgrupa.

Neka $x,y \in G$, tada je

$$f(f(xyx^{-1}y^{-1})) = f(f(xyx^{-1})f(y)^{-1}) = f(x\, f(y)x^{-1}f(y)^{-1}) =$$

$$= f(x)f(\, f(y)\, x^{-1}(f(y)\,^{-1}) = f(x)\, f(y)\, f(x)^{-1}f(y)^{-1} = f(xyx^{-1}y^{-1})$$

pa K sadrži sve komutatore, dakle, sadrži i G'.

244. (i) Grupa G se naziva rešiva ako se njen n-ti izvod $G^{(n)}$, za neki konačan broj n, sastoji samo od neutralnog ele-

menta.

(ii) Konačna grupa je rešiva ako je njen kompozicioni niz faktor grupa niz cikličkih grupa prostog reda (tj. ako je njen kompozicioni niz indeksa niz prostih brojeva).

Dokazati da su za konačne grupe ove dve definicije ekvivalentne.

245. Svaka komutativna grupa je rešiva. Dokazati.

Rešenje. Ako je G komutativna grupa svi komutatori su jednaki neutralnom elementu, pa je $G' = \{e\}$. Time je teorema dokazana.

Dokazaćemo ovu teoremu za konačne grupe još jedanput koristeći se samo definicijom (ii) iz prethodnog zadatka.

Neka je G konačna komutativna grupa, a H neka njena maksimalna normalna podgrupa. Prema poznatom stavu (H je maksimalna normalna podgrupa ako i samo ako je G/H prosta grupa) sledi da je G/H prosta grupa (grupa se naziva prosta ako nema netrivijalne normalne podgrupe). Grupa G/H je Abelova pa prema tome G/H uopšte nema netrivijalne podgrupe, odakle odmah sledi da je G/H ciklička grupa prostog reda.

Produžujući ovaj postupak, analognim rasudjivanjem dobijamo da je kompozicioni niz faktor grupa niz cikličkih grupa prostog reda, a to znači da je grupa G rešiva.

246. Dokazati da je grupa reda p^2, gde je p prost broj, rešiva grupa.

Uputstvo. Koristiti zadatak 267.

PRIMEDBA. Generalizacija ovog zadatka je zadatak 251.

247. Svaka podgrupa rešive grupe je rešiva. Dokazati.

248. Svaka faktor grupa rešive grupe je rešiva. Dokazati.

249. Dokazati da je konačna grupa G rešiva ako i samo ako je njen kompozicioni niz faktor grupa niz Abelovih grupa.

250. Neka je N normalna podgrupa konačne grupe G. Ako su N i G/N rešive grupe dokazati da je tada i G rešiva grupa.

Rešenje. Pošto su N i G/N rešive grupe, postoje prirodni brojevi m_1 i m_2 takvi da je $N^{(m_1)} = \{e\}$ i $(G/H)^{(m_2)} = N$. Neka je $m = \max(m_1, m_2)$. Neka je $f : G \to G/N$ prirodni homomorfizam. Lako se proverava da je za svako $n \in \mathbb{N}$ $f(G^{(n)}) \subseteq (G/H)^{(n)}$, pa je $f(G^{(m)}) \subseteq N$, tj. $G^{(m)} \subseteq N$. Tada je $G^{(2m)} = (G^{(m)})^{(m)} \subseteq N^{(m)} = \{e\}$, pa je G rešiva grupa.

PRIMEDBA. Ovo tvrdjenje može se dokazati na drugi način koristeći direktno teoreme o korespodenciji podgrupa 1.67. i 1.69.

251. Dokazati da je svaka grupa G reda p^n, gde je p prost broj, rešiva ($n \in \mathbb{N}$).

Uputstvo. Primeniti indukciju po n, koristeći zadatak 246, G/Z(G) i činjenicu da je Z(G) rešiva grupa.

252. Neka je G konačna grupa i neka je f netrivijalan automorfizam grupe G takav da je za svako $x \in G$, $f(x) = x$ ili $f(x) = x^{-1}$. Dokazati da je G rešiva grupa.

(W.A.McWorter, Problem 5471, Amer.Math. Monthly, 75(1968), 307.)

Rešenje. Neka je $H = \{x \mid x \in G \text{ i } f(x) = x\}$. H je podgrupa grupe G, jer ako $x, y \in H$ onda $f(x) = x$ i $f(y) = y$, pa je i $f(x)f(y) = xy$, tj. $f(xy) = xy$, i na osnovu 1.17. konačan skup H je podgrupa.

Neka $h \in H$ i $a \notin H$, tada je $f(ah) = f(a)h = a^{-1}h$, a sa druge strane $f(ah)$ je ili ah ili $(ah)^{-1}$, pa je ili $ah = a^{-1}h$ ili $(ah)^{-1} = a^{-1}h$. Iz $ah = a^{-1}h$ sledi $a = a^{-1}$, pa bi bilo $f(a) = a^{-1} = a$, tj. $a \in H$ što je kontradikcija. Dakle, $(ah)^{-1} = a^{-1}h$, tj. $a^{-1}ha = h^{-1}$. Iz ovoga sledi da je H normalna podgrupa grupe G.

Neka je $h, k \in H$ i $a \notin H$. Tada je

$$h^{-1} = (ak)^{-1}h(ak) = k^{-1}a^{-1}hak = k^{-1}h^{-1}k ,$$

$hk = kh$, pa je H Abelova grupa.

Neka je $a, b \notin H$. Proizvod ab ili pripada ili ne pripada H. Ako $ab \notin H$, tada je

$$f(a^{-1}b^{-1}) = (a^{-1}b^{-1})^{-1} = f(a^{-1})f(b^{-1}) = (a^{-1})^{-1}(b^{-1})^{-1},$$

pa je $ba = ab$ i tada je $aHbH = abH = bHaH$. Ako $ab \in H$, tada i ba pripada H (jer ako $ba \notin H$ tada je $ba = ab \notin H$, što je kontradikcija) pa je $aHbH = abH = H = bHaH$. Dakle, G/H je Abelova grupa. H i G/H su rešive grupe pa je na osnovu zadatka 250. i G rešiva grupa.

253. Dokazati da je direktan proizvod rešivih grupa rešiva grupa.

254. Za cikličku grupu C_{60} naći bar dva kompoziciona niza faktor grupa i proveriti izomorfnost tih nizova.

Rešenje. Neka je $C_{60} = \{a, a^2, \ldots, a^{60} = e\}$. Ova grupa je komutativna pa su sve njene podgrupe normalne.

$$H_{30} = \{a^2, a^4, \ldots, a^{60} = e\}$$ je jedna maksimalna normalna podgrupa grupe C_{60}.

$$H_{10} = \{a^6, a^{12}, \ldots, a^{60} = e\}$$

je maksimalna normalna podgrupa grupe H_{30}, a

$$H_5 = \{a^{12}, a^{24}, \ldots, a^{60} = e\}$$

je maksimalna normalna podgrupa grupe H_{10}. Na kraju,

$$H_1 = \{e\}$$

je maksimalna normalna podgrupa grupe H_5, pa je kompozicioni niz faktor grupa:

$$C_{60}/H_{30},\ H_{30}/H_{10},\ H_{10}/H_5,\ H_5/H_1,$$

a kompozicioni niz indeksa:

$$2,\ 3,\ 2,\ 5\ .$$

Ako posmatramo sada niz podgrupa grupe C_{60}:

$$C_{60},\ H_{20} = \{a^3, a^6, \ldots, a^{60} = e\},\ H_{10},\ H_2 = \{a^{30}, a^{60} = e\},\ H_1,$$

vidimo da je svaka podgrupa tog niza maksimalna normalna podgrupa prethodne, pa je to kompozicioni niz grupe C_{60} a kompozicioni niz faktor grupa je

$$C_{60}/H_{20},\ H_{20}/H_{10},\ H_{10}/H_2,\ H_2/H_1\ ,$$

dok je kompozicioni niz indeksa

$$3,\ 2,\ 5,\ 2.$$

Na osnovu Žordan-Helderove (Jordan-Hölder) teoreme, faktor grupe jednog kompozicionog niza faktor grupa se mogu obostrano jednoznačno preslikati na faktor grupe drugog niza, tako da odgovarajuće faktor grupe budu izomorfne. Zaista,

$$C_{60}/H_{30} \simeq H_{20}/H_{10},\quad H_{30}/H_{10} \simeq C_{60}/H_{20},$$

$$H_{10}/H_5 \simeq H_2/H_1,\quad H_5/H_1 \simeq H_{10}/H_2\ .$$

255. Da li dve grupe koje imaju izomorfne kompozicione nizove faktor grupa moraju biti izomorfne ?

Rešenje. Ciklička grupa reda 6 i nekomutativna grupa reda 6 imaju izomorfne kompozicione nizove faktor grupa ali nisu izomorfne.

256. Svaki prirodan broj n može se na jedinstnen način prikazati kao proizvod prostih brojeva (ne uzimajući u obzir poredak). Dokazati ovo koristeći Žordan-Helderovu teoremu.

Uputstvo. Posmatrati grupu $(\mathbb{Z}_n, +)$.

§1.10. TEOREME SILOVA

257. Normalizator nepraznog podskupa S grupe G je skup

$$N(S) = \{x \mid x \in G,\ xS = Sx\}\ .$$

Dokazati da je $N(S)$ podgrupa grupe G.

Rešenje. Ako je $a, b \in N(S)$, tj. $aS = Sa$ i $bS = Sb$, onda je

$$abS = aSb = Sab,$$

a to znači da je $ab \in N(S)$. Iz jednakosti $aS = Sa$ množenjem sleva i zdesna sa a^{-1} dobijamo

$$Sa^{-1} = a^{-1}S,\quad \text{pa}\quad a^{-1} \in N(S)\ .$$

Time je dokazano da je $N(S)$ podgrupa.

258. Neka je G grupa i $\tilde{G} = \{x \mid x = (g,g),\ g \in G\}$ podgrupa direktnog proizvoda $G \times G$ (zadatak 217). Dokazati da je $N(\tilde{G}) = \tilde{G}$ ako i samo ako je $Z(G) = \{e\}$.

259. Dokazati da postoji bijektivno preslikavanje izmedju skupa svih elemenata konjugovanih sa elementom a grupe G i skupa svih levih suskupova normalizatora N(a).

Rešenje. Definišimo preslikavanje f skupa svih levih suskupova normalizatora N(a) na skup svih elemenata konjugovanih sa a, na sledeći način

$$f(xN(a)) = xax^{-1}.$$

Dokažimo najpre da je f dobro definisana funkcija. Ako je $yN(a) = xN(a)$, onda je $y = xn$, $n \in N(a)$, pa je

$$yay^{-1} = (xn)a(xn)^{-1} = x(nan^{-1})x^{-1} = xax^{-1},$$

(koristili smo da je $nan^{-1} = a$).

Funkcija f je očigledno surjektivna, pa preostaje da se dokaže da je i injektivna. Pretpostavimo da je $f(xN(a)) = f(yN(a))$, tj.

$$xax^{-1} = yay^{-1}.$$

Onda je

$$(y^{-1}x)a = a(y^{-1}x),$$

pa $y^{-1}x \in N(a)$, što znači da x i y pripadaju istom suskupu normalizatora N(a), tj. $xN(a) = yN(a)$.

260. Broj elemenata konjugovanih sa elementom a u grupi G jednak je indeksu normalizatora N(a) u toj grupi. Dokazati.

Rešenje. Posledica prethodnog zadatka.

PRIMEDBA. Primenom Lagranžove teoreme odavde dobijamo da je broj elemenata u klasi medjusobno konjugovanih elemenata konačne grupe uvek delitelj reda grupe.

261. Broj različitih podgrupa konjugovanih s podgrupom H grupe G jednak je indeksu normalizatora N(H) u grupi G. Dokazati

Uputstvo. Dokaz analogan dokazu u zadacima 259. i 260.

262. Jedina konačna grupa koja ima tačno dve klase konjugovanih elemenata je grupa reda 2. Dokazati.

Uputstvo. Uzeti u obzir da neutralni elemenat sam čini jednu klasu konjugovanih elemenata a zatim koristiti primedbu uz zadatak 260.

263. Odrediti sve neizomorfne konačne grupe koje imaju tačno tri klase konjugovanih elemenata.

Rešenje. Neka konačna grupa G ima 3 klase konjugovanih elemenata G_0, G_1, G_2. Neka je G_0 klasa koja sadrži samo neutralan elemenat, $|G_0| = 1$.

Ako se u centru Z(G) grupe G nalazi elemenat $a(\neq e)$, tada a čini posebnu klasu, tj. $|G_1| = 1$, pa se dobija $1 + 1 + n_2 = n$ gde je $|G_2| = n_2$. Pošto je $|G_2| = n_2$ indeks normalizatora nekog elementa iz G_2, to je n_2 delitelj reda $n = |G|$ grupe G (1.54), pa je zbog $2 = n - n_2$, n_2 delitelj broja 2, tj. n_2 je 1 ili 2. $n_2 = 2$ ne može biti jer bi tada bilo $|G| = 4$, a sve grupe reda 4 su komutativne pa imaju 4 klase konjugovanih elemenata, dakle, $n_2 = 1$ i G je ciklička grupa reda 3.

Ako je $Z(G) = \{e\}$, tada je i $n_1 > 1$ i $n_2 > 1$. Pošto su n_1 i n_2 delitelji broja n, a $1 + n_1 + n_2 = n$, imamo da je n_2 delitelj $1 + n_1$, a i n_1 delitelj $1 + n_2$. Rešavajući sistem jednačina $1 + n_1 = kn_2$ i $1 + n_2 = \ell n_1$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, uz uslov $n_1 > 1$ i $n_2 > 1$, dobija se rešenje $n_1 = 2$ i $n_2 = 3$, pa je G nekomutativna grupa reda 6, tj. $G \cong S_3$.

264. Red svakog elementa a konačne grupe G je stepen fiksnog prostog broja p ako i samo ako je red grupe G stepen prostog broja p. Dokazati.

Uputstvo. Koristiti Košijev stav (1.97).

265. Neka je H normalna podgrupa grupe G. Ako su H i G/H p-grupe dokazati da je i G p-grupa.

266. Ako je G konačna grupa reda p^n (p prost broj, n prirodan broj), onda centar te grupe ima bar dva elementa. Dokazati.

Rešenje. Neka su $K_1, K_2, \ldots, K_m$ klase medjusobno konjugovanih elemenata. S obzirom da je broj elemenata svake od tih klasa delitelj reda grupe (zadatak 260) onda te klase imaju respektivno

$$p^{n_1}, p^{n_2}, \ldots, p^{n_m}, \quad n \geq n_i \geq 0$$

elemenata, pa je

$$p^n = p^{n_1} + p^{n_2} + \ldots + p^{n_m}.$$

Kako medjutim jedna od klasa, recimo K_i, ima samo jedan elemenat (neutralni), biće

$$p^n - (p^{n_1} + p^{n_2} + \ldots + p^{n_{i-1}} + p^{n_{i+1}} + \ldots + p^{n_m}) = 1.$$

Leva strana je deljiva sa p a desna nije, pa to znači da bar jedno n_j, $j=1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,m$ mora biti 0, odnosno u grupi G postoji još jedna klasa konjugovanih elemenata koja se sastoji samo od jednog elementa (različitog od neutralnog). Taj elemenat očevidno pripada centru, pa je time tvrdjenje dokazano.

267. Grupa reda p^2 (p prost broj) mora biti Abelova. Dokazati.

Rešenje. Centar Z(G) ove grupe je podgrupa, pa je prema tome (na osnovu Lagranžove teoreme) red centra 1, p ili p^2. Na osnovu prethodnog zadatka red centra nije 1. Ako pretpostavimo da Z(G) ima p elemenata, onda faktor grupa G/Z(G) ima p elemenata, a kako je p prost broj grupa G/Z(G) je ciklička. Medjutim, na osnovu zadatka 229, sledi da je G Abelova grupa, pa centar te grupe ima p^2 elemenata što je kontradikcija.

Prema tome, centar je reda p^2, a to znači da je G Abelova grupa.

268. Naći sve neizomorfne grupe reda 8.

269. Naći sve neizomorfne grupe reda 9.

Uputstvo. Koristiti zadatak 267.

270. Neka je grupa G reda p^n (p prost broj). Dokazati da za svako $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ postoji normalna podgrupa H grupe G takva da je $|H| = p^k$.

Rešenje. Dokaz ćemo dati indukcijom po n. Za n=1 tvrdjenje je očevidno tačno. Pretpostavimo da je tačno za svako $m<n$ tj. u svakoj grupi reda p^m postoji normalna podgrupa reda p^k za svako $k \in \{0,1,\ldots,m\}$.

Na osnovu zadatka 266. $Z(G) \neq \{e\}$. S obzirom da je $|Z(G)|$ delitelj reda grupe G, biće $|Z(G)| = p^r$, pa na osnovu Košijevog stava (1.97) Z(G) sadrži elemenat a reda p. Ako je K ciklička podgrupa reda p generisana elementom a, onda je K normalna podgrupa grupe G (jer je svaka podgrupa centra Z(G) normalna podgrupa grupe G). Prema tome, $|G/K| = p^{n-1}$.

Na osnovu indukcijske pretpostavke G/K ima normalnu podgrupu $\bar{H}$ reda p^k za svako $k \in \{0,1\ldots,n-1\}$. Prema 1.69. postoji normalna podgrupa H grupe G koja sadrži K takva da je $H/K = \bar{H}$. Red podgrupe H je p^{k+1}. Dakle, dokazali smo da G sadrži normalnu podgrupu reda p^k za svako $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Za k=0 takva podgrupa je {e}, pa je time dokaz završen.

271. Neka je G konačna p-grupa i neka je H netrivijalna normalna podgrupa grupe G. Dokazati da je $|H \cap Z(G)| > 1$.

272. Dokazati da je u nekomutativnoj grupi reda p^3 centar reda p.

Uputstvo. Koristiti zadatak 229.

273. Neka je G nekomutativna grupa reda p^3, gde je p prost broj. Dokazati da je $G' = Z(G)$.

Rešenje. Na osnovu prethodnog zadatka $|Z(G)| = p$, a tada je $|G/Z(G)| = p^2$, pa je na osnovu zadatka 267. G/Z(G) Abelova grupa, tj. $G' \subseteq Z(G)$ (zadatak 233). Pošto je G nekomutativna $G' \neq \{e\}$, pa je $G' = Z(G)$ (jer je Z(G) grupa prostog reda pa nema netrivijalne podgrupe).

274. Naći sve podgrupe Silova simetrične grupe S_4.

Rezultat. $|S_4| = 3\cdot 2^3$, ima četiri podgrupe Silova reda 3

$H_1 = \{(1),(123),(132)\}$,

$H_2 = \{(1),(124),(142)\}$,

$H_3 = \{(1),(134),(143)\}$,

$H_4 = \{(1),(234),(243)\}$,

i tri podgrupe Silova reda 8

$K_1 = \{(1),(1234),(13)(24),(1432),(14)(23),(12)(34),(13),(24)\}$,

$K_2 = \{(1),(1243),(14)(23),(1342),(13)(24),(12)(34),(23),(14)\}$,

$K_3 = \{(1),(1324),(12)(34),(1423),(13)(24),(14)(32),(12),(34)\}$.

275. Ako je P p-podgrupa Silova konačne grupe G, dokazati da je $N(N(P)) = N(P)$.

Rešenje. Neka $x \in N(N(P))$, tada je

$$xN(P)x^{-1} = N(P) ,$$

odakle, pošto je $P \subseteq N(P)$, sledi

$$xPx^{-1} \subseteq N(P).$$

P je normalna podgrupa grupe N(P) (1.77), pa je na osnovu 1.103. P jedina podgrupa Silova u N(P). Konjugovanje sa $x \in N(N(P))$ prevodi P u podgrupu Silova grupe N(P), a pošto je P jedina takva podgrupa mora biti $xPx^{-1} = P$, tj. $x \in N(P)$.

Dokazali smo da je $N(N(P)) \subseteq N(P)$, da važi $N(N(P)) \supseteq N(P)$ očigledno je, pa je $N(N(P)) = N(P)$.

276. Ako je u konačnoj grupi G svaka p-podgrupa Silova normalna podgrupa za svaki prost broj p, dokazati da je G direktni proizvod svojih podgrupa Silova.

277. Neka je H p-podgrupa Silova konačne grupe G. Dokazati da su svi elementi normalizatora N(H) koji su reda p^k, $k \in \mathbb{N}$, sadržani u H.

Uputstvo. Koristiti da je svaka podgrupa reda p^k sadržana u nekoj p-podgrupi Silova i da je H normalna podgrupa u N(H).

278. Neka je G grupa reda $11^2 \cdot 13^2$. Dokazati da je G Abelova grupa.

Rešenje. Po teoremama Silova (1.102, 1.103, 1.104) G ima 1+11k podgrupa reda 11^2 i 1+13ℓ podgrupa reda 13^2. Pošto su 1+11k i 1+13ℓ indeksi odgovarajućih normalizatora, to 1+11k, odnosno 1+13ℓ, moraju biti delitelji $11^2 \cdot 13^2$, a to je moguće jedino kad je $k=\ell=0$. Znači, postoji tačno jedna podgrupa H reda 11^2 i tačno jedna podgrupa K reda 13^2.

Pošto su sve podgrupe koje su konjugovane sa podgrupom Silova takodje podgrupe Silova istog reda, a H i K su jedine podgrupe Silova reda 11^2 i 13^2 sledi da su H i K normalne podgrupe grupe G.

Na osnovu zadatka 267, podgrupe H i K su komutativne.

Pošto su 11 i 13 uzajamno prosti brojevi mora biti $H \cap K = \{e\}$. Ako $a,b \in H$, $c,d \in K$, iz $ac=bd$ sledi $b^{-1}a = dc^{-1} \in H \cap K = \{e\}$, tj. $a=b$ i $c=d$, prema tome, $HK = G$.

Ako $h \in H$, $k \in K$, onda $hkh^{-1}k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1}) \in H$ jer je H normalna podgrupa, a takodje je $hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k \in K$, jer je i K normalna podgrupa, dakle, $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = \{e\}$, tj. $hk = kh$.

Pošto je $G = HK$, a za svako $h \in H$, $k \in K$, $hk = kh$, grupa G je Abelova.

279. Dokazati da je svaka grupa reda 15 ciklička.

280. Odrediti sve neizomorfne grupe reda 99.

Rezultat. Ako je G grupa reda 99, onda je

$G \simeq C_3 \times C_3 \times C_{11}$ ili $G \simeq C_9 \times C_{11}$.

281. Dokazati da grupa G reda 72 sadrži bar jednu netrivijalnu normalnu podgrupu.

Rešenje. $72 = 2^3 \cdot 3^2$, pa na osnovu 1.104. sledi da ima 1+3k podgrupa reda 3^2. 1+3k je činilac broja 72 za k=0 i k=1.

Dakle, G ima jednu ili četiri podgrupe Silova reda 3^2. Ako G ima jednu podgrupu Silova H reda 3^2, onda, s obzirom da su sve podgrupe Silova istog reda konjugovane, podgrupa H je normalna.

Ako G ima četiri podgrupe Silova reda 3^2 onda su te podgrupe konjugovane a drugih sa njima konjugovanih nema, pa na osnovu zadatka 261. sledi da je indeks u G normalizatora svake od tih podgrupa 4. S obzirom da 72 nije delitelj 4!, na osnovu zadatka 211. normalizator sadrži netrivijalnu normalnu podgrupu grupe G.

282. Ako je grupa G reda $p^n q$, gde su p i q prosti brojevi i $p > q$, dokazati da tada G sadrži jedinstvenu normalnu podgrupu indeksa q.

283. Neka je G grupa reda 48. Dokazati da G ima bar jednu netrivijalnu normalnu podgrupu.

Rešenje. Pošto je $48 = 2^4 \cdot 3$ G sadrži 1+2k 2-podgrupa Silova reda 16. 1+2k je delitelj broja 48 za k=0 i k=1. Za k=0 G sadrži tačno jednu podgrupu Silova reda 16 koja mora biti normalna.

Za k=1 ima 3 podgrupe Silova reda 16. Neka su H i K dve različite podgrupe Silova reda 16. Posmatrajmo podgrupu $H \cap K$. To je podgrupa čiji je red delitelj broja 16, dakle, 1,2,4 ili 8. Mogućnosti 1,2 i 4 ne dolaze u obzir jer je tada (na osnovu 1.55)

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} \geq 64 ,$$

a u G ima samo 48 elemenata.

Neka je $|H \cap K| = 8$. Tada je $H \cap K$ podgrupa indeksa 2 i u H i u K, pa je $H \cap K$ normalna podgrupa u H i u K. Normalizator $N(H \cap K)$ sadrži HK, pa je

$$|N(H \cap K)| \geq |HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = 32.$$

Normalizator je podgrupa u G, pa je red $N(H \cap K)$ delitelj 48 (1.50). Jedini činilac 48 veći od 32 je 48, pa je $N(H \cap K) = G$.

Pošto je svaka podgrupa normalna podgrupa svog normalizatora (1.77), $H \cap K$ je netrivijalna normalna podgrupa u G.

284. Dokazati da grupa G reda 56 ima pravu normalnu podgrupu.

Rešenje. Pošto je $56 = 2^3 \cdot 7$, u G postoji podgrupa Silova H reda 8. Posmatrajmo podgrupe Silova reda 7, njih ima 1+7k i 1+7k je delitelj 56. Dakle, ima jedna (k=0) ili osam (k=1) podgrupa Silova reda 7. Ako ima jedna, ona je normalna podgrupa. Ako ima osam podgrupa $K_1, K_2, \ldots, K_8$, onda je $K_i \cap K_j = \{e\}$, $i \neq j$, pa je $|\bigcup_{i=1}^{8} K_i| = 49$, tj. u G ima 48 elemenata reda 7. Podgrupa H ima 8 elemenata (od kojih nijedan nije reda 7), pa kako je $48 + 8 = 56$, postoji samo jedna podgrupa reda 8 i ona je u tom slučaju normalna podgrupa.

285. Svaka grupa reda 12, 28 i 200 mora sadržati normanu podgrupu Silova. Dokazati.

§1.11. AUTOMORFIZMI GRUPA

286. Skup A(G) svih automorfizama grupe G u odnosu na množenje preslikavanja čini grupu. Dokazati.

287. Dokazati da je grupa automorfizama grupe $(\mathbb{Z}_n, +)$ izomorfna grupi ostataka po modulu n relativno prostih sa n u odnosu na množenje.

Uputstvo. Koristiti zadatak 111.

288. Dokazati da je grupa automorfizama grupe $(\mathbb{Q}, +)$ izomorfna grupi $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

289. Naći grupu automorfizama A(G) nekomutativne grupe G reda 6.

Rešenje. Grupa G je generisana elementima a,b i pritom je $a^3 = b^2 = (ab)^2 = e$ (zadatak 176). Svaki automorfizam će biti potpuno odredjen ako znamo slike elemenata a i b. Kako slika elementa

a^3 (=e) mora biti e, sledi da slika elementa a ima red 3 i, analogno, slika od b je reda 2 (nijedna od tih slika ne može biti e jer je automorfizam injektivno preslikavanje). Prema tome, slike od a mogu biti samo a i a^2, a slike od b elementi b,ab,a^2b, tj. automorfizama može biti 6 (elementi u koloni ispod oznake funkcije predstavljaju slike elemenata grupe dobijene tom funkcijom):

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
e	e	e	e	e	e	e
a	a	a	a	a^2	a^2	a^2
a^2	a^2	a^2	a^2	a	a	a
b	b	ab	a^2b	b	ab	a^2b
ab	ab	a^2b	b	a^2b	b	ab
a^2b	a^2b	b	ab	ab	a^2b	b

Svako od preslikavanja f_i, i=1,2,...,6, prikazanih u tabeli je zaista automorfizam. Kako je

$$f_3^3 = f_4^2 = (f_3 f_4)^2 = f_1,$$

grupa automorfizama A(G) je nekomutativna grupa sa 6 elemenata, tj. izomorfna je grupi G.

290. Naći grupu automorfizama Klajnove četvorne grupe (zadatak 176).

291. Dokazati da je u grupi G preslikavanje

$$f_a : x \mapsto axa^{-1},$$ automorfizam.

(Takav automorfizam naziva se unutrašnji.)

Rešenje. Dokažimo najpre da je f_a bijekcija. Ako je $f_a(x) = f_a(y)$, tj. $axa^{-1} = aya^{-1}$, onda mora biti $x = y$, pa je f injektivno preslikavanje.

Svaki elemenat $x \in G$ je slika elementa $a^{-1}xa$, jer je $f_a(a^{-1}xa) = a(a^{-1}xa)a^{-1} = x$, tj. f je surjektivno. Kako je i

$$f_a(x)f_a(y) = (axa^{-1})(aya^{-1}) = a(xy)a^{-1} = f_a(xy),$$

za svako $x,y \in G$, preslikavanje f_a je zaista automorfizam.

292. Dokazati da je skup unutrašnjih automorfizama normalna podgrupa grupe svih automorfizama.

293. Naći sve unutrašnje automorfizme grupe simetrija kvadrata (zadatak 15. b).

294. Dokazati da je grupa U(G) svih unutrašnjih automorfizama grupe G homomorfna slika grupe G.

Rešenje. Ako sa f_a označimo unutrašnji automorfizam koji je odredjen elementom a, $f_a : x \mapsto axa^{-1}$, onda funkcija $\Phi : a \mapsto f_a$ preslikava G na skup U(G) svih unutrašnjih automorfizama. Kako je

$$(f_a \cdot f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = a(f_b(x))a^{-1} =$$

$$= a(bxb^{-1})a^{-1} = abx(ab)^{-1} = f_{ab}(x),$$

biće

$$\Phi(ab) = f_{ab} = f_a \cdot f_b = \Phi(a)\Phi(b),$$

pa je time pokazano da je Φ homomorfizam. Homomorfna slika grupe je grupa, pa je, prema tome, U(G) grupa.

295. Odrediti jezgro homomorfizma Φ definisanog u rešenju zadatka 294.

Rešenje. Neutralni elemenat grupe unutrašnjih automorfizama je identičko preslikavanje, pa jezgro homomorfizma Φ čine svi elementi a za koje je preslikavanje

$$f_a(x) = axa^{-1}$$

identičko, $x = axa^{-1}$, za svako $x \in G$, tj. $ax = xa$, za svako $x \in G$.

Prema tome, jezgro ovog homomorfizma je centar Z(G) grupe G, pa je prema prvoj teoremi o izomorfizmu grupa (1.64)

$$G/Z(G) \simeq U(G).$$

296. Ako je grupa U(G) unutrašnjih automorfizama grupe G ciklička grupa, onda je U(G) trivijalna grupa. Dokazati.

Rešenje. Na osnovu zadatka 295. $U(G) \simeq G/Z(G)$, pa je na osnovu zadatka 229. G Abelova grupa.

297. Neka je f automorfizam konačne grupe G takav da je $f(x) = x$ samo za $x = e$. Dokazati :

a) Preslikavanje $g : G \to G$ definisano sa $g(x) = f(x)x^{-1}$, je bijekcija.

b) Ako je f^2 identičko preslikavanje, tada je G Abelova grupa neparnog reda.

Rešenje. a) Iz pretpostavke $g(x) = g(y)$, tj.

$$f(x)x^{-1} = f(y)y^{-1},$$

sledi

$$(f(y))^{-1}f(x) = y^{-1}x,$$

tj.

$$f(y^{-1}x) = y^{-1}x .$$

Dakle, $y^{-1}x = e$, tj. $x = y$, pa je g injektivno. S obzirom da je G konačan skup g mora biti bijekcija.

b) Za svako $x \in G$ je

$$f(g(x)) = f(f(x)x^{-1}) = xf(x^{-1}) = (f(x)x^{-1})^{-1} = (g(x))^{-1}.$$

S obzirom da je g bijekcija, onda za svako $x \in G$ $f(x) = x^{-1}$, pa je

$$y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1} = f(xy) = f(x)f(y) = x^{-1}y^{-1},$$

odakle sledi $xy = yx$, za svako $x, y \in G$.

Ako bi red grupe bio paran broj, onda bi na osnovu zadatka 54. postojao u G elemenat z reda 2, dakle bilo bi $z^{-1} = z$, $z \neq e$, tj. $f(z) = z$, što je protivrečnost. Prema tome, grupa G je neparnog reda.

298. Ako je G konačna grupa a k prirodni broj koji je uzajamno prost sa $|G|$ i ako je za svako $a, b \in G$

$$(ab)^k = a^k b^k$$

dokazati da je

a) $f : x \mapsto x^k$ automorfizam grupe G,

b) za svako $a \in G$, $a^{k-1} \in Z(G)$.

Rešenje. a) Preslikavanje f je homomorfizam jer je

$$f(ab) = (ab)^k = a^k b^k = f(a)f(b).$$

Neka je $a \in \operatorname{Ker} f$, tada je $f(a) = e$, tj. $a^k = e$, a pošto je k uzajamno prosto sa $|G|$ to je $a = e$ (jer bi inače postojala podgrupa čiji red ne deli red grupe) i f je monomorfizam (zadatak 85). Monomorfizam konačne grupe je i epimorfizam, pa je f automorfizam.

b) Iz $a^k b^k = (ab)^k$ sledi $a^{k-1}b^{k-1} = (ba)^{k-1}$, pa je

$$a^{k-1}b^k a = (ba)^k = b^k a^k ,$$

tj.

$$a^{k-1}b^k = b^k a^{k-1} .$$

S obzirom na a) za svako $x \in G$ postoji $b \in G$ tako da je $x = b^k$, dakle, za svako $x \in G$ $a^{k-1}x = xa^{k-1}$, tj. $a^{k-1} \in Z(G)$.

299. Grupa automorfizama nekomutativne grupe ne može biti ciklička. Dokazati.

Uputstvo. Koristiti zadatke 229 , 295. i 108.

300. Ako je grupa G bez centra (tj. centar se sastoji samo od neutralnog elementa) onda je i njena grupa automorfizama bez centra. Dokazati.

Rešenje. Neka je f automorfizam grupe G različit od identičkog preslikavanja i neka je elemenat $a \in G$ takav da je $f(a) = b$, $b \neq a$. Ako pretpostavimo da f pripada centru grupe automorfizama, onda f komutira sa unutrašnjim automorfizmom proizvedenim elementom a, tj. za svako $g \in G$

$$af(g)a^{-1} = f(aga^{-1}) = bf(g)b^{-1}.$$

Odavde je

$$(a^{-1}b)f(g) = f(g)(a^{-1}b),$$

pa pošto f(g) prolazi kroz celu grupu G kad g prolazi kroz G, sledi da elemenat $a^{-1}b$ $(\neq e)$ pripada centru grupe G. To je protivrečno sa pretpostavkom da G nema centra, pa sledi da ni grupa A(G) ne može imati centar.

(301). Bijektivno preslikavanje f grupe G na grupu G naziva se antiautomorfizam ako je za svako $x,y \in G$

$$f(xy) = f(y)f(x).$$

Dokazati da je f antiautomorfizam grupe G ako i samo ako je f=gh, gde je $g(x) = x^{-1}$, za svako $x \in G$, a h je automorfizam grupe G.

Rešenje. Označimo sa g funkciju koja preslikava $x \mapsto x^{-1}$, (u zadatku 87. je pokazano da je g bijekcija grupe G na sebe). S obzirom da su elementi x i x^{-1} jedan drugom inverzni, zaključujemo da se inverzno preslikavanje g^{-1} poklapa sa g, tj. $g = g^{-1}$.

Neka je f antiautomorfizam grupe G. Onda za svako $x,y \in G$ iz

$$f(xy) = f(y)f(x),$$

sledi

$$(f(xy))^{-1} = (f(x))^{-1}(f(y))^{-1},$$

ili drugačije napisano

$$(gf)(xy) = (gf)(x)(gf)(y),$$

a kako je gf bijekcija (jer su g i f bijekcije) sledi da je gf automorfizam grupe G. Označimo li taj automorfizam sa h, imamo $gf = h$, ili $f = g^{-1}h$, pa kako smo ranije videli da je $g^{-1} = g$, dobijamo da je $f = gh$, što je trebalo dokazati.

Obrnuto, neka je $f = gh$, gde je h automorfizam grupe G, $g : x \mapsto x^{-1}$. f je bijekcija jer je proizvod dve bijekcije. Pored toga je

$$f(xy) = (gh)(xy) = (h(x)h(y))^{-1} = (h(y))^{-1}(h(x))^{-1} =$$

$$= (gh)(y)(gh)(x) = f(y)f(x),$$

za svako $x,y \in G$, što znači da je f antiautomorfizam.

II PRSTENI

§2.0. PREGLED DEFINICIJA I TEOREMA

2.1. Neka je R neprazan skup na kome su definisane dve binarne operacije + i · (koje ćemo nazivati "sabiranje" i "množenje" respektivno). Tada se uredjena trojka $(R,+,\cdot)$ naziva prsten ako i samo ako važi:

R1. $(R,+)$ je Abelova grupa.

R2. Za svako $a,b,c \in R$ $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ (množenje je asocijativno).

R3. Za svako $a,b,c \in R$ $a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$,

(leva distributivnost množenja u odnosu na sabiranje),

$$(a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c),$$

(desna distributivnost množenja u odnosu na sabiranje).

Često ćemo, kada to ne dovodi do nejasnoće, umesto prsten $(R,+,\cdot)$ pisati samo prsten R. Kao i kod grupa, obično ćemo izostavljati znak · i pisati ab umesto a·b. Takodje ćemo umesto (ab)+(ac) pisati ab+ac, podrazumevajući da se najpre primenjuje operacija · pa tek onda operacija +.

Neutralni element za sabiranje u prstenu R ćemo označavati sa 0 (ili sa 0_R). Inverzni element elementa $a \in R$ u odnosu na operaciju + označavaćemo sa -a i nazivaćemo ga suprotni element elementa a. Umesto a+(-b) pisaćemo a-b.

2.2. Prsten $(R,+,\cdot)$ se naziva komutativan prsten ako i samo ako je operacija · komutativna, tj. za svako $a,b \in R$ ab=ba.

2.3. Prsten $(R,+,\cdot)$ se naziva prsten sa jedinicom ako i samo ako postoji element $1 \in R$ takav da je za svako $a \in R$

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Element 1 nazivamo jedinica prstena (jedinicu prstena R označavaćemo u nekim slučajevima sa 1_R ili sa e).

Ako je R prsten sa jedinicom sa bar dva elementa onda je uvek $1 \neq 0$. Ubuduće ćemo kad god kažemo "prsten sa jedinicom" podrazumevati da je reč o prstenu sa bar dva elementa.

2.4. U prstenu $(R,+,\cdot)$ za svako $a,b,c \in R$ i svako $n \in \mathbb{Z}$ važi

(i) $a0 = 0a = 0$,

(ii) $a(b-c) = ab - ac$, $(a-b)c = ac - bc$,

(iii) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$,

(iv) $(-a)(-b) = ab$,

(v) $(na)b = a(nb) = n(ab)$,

pri tom, ako je x element prstena R, a n ceo broj, onda je nx definisano sa

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x+x+\ldots+x}_{n \text{ sabiraka}}, & \text{za } n > 0, \\ 0_R, & \text{za } n = 0, \\ (-n)(-x), & \text{za } n < 0. \end{cases}$$

2.5. U prstenu R element a se naziva levi (desni) delitelj elementa $b \neq 0$ ako i samo ako postoji element $c \in R$ tako da je $b = ac$ $(b=ca)$. Element a prstena R koji je levi ili desni delitelj elementa $b \in R$ se naziva delitelj elementa b.

Da je u komutativnom prstenu R element a delitelj elementa b zapisivaćemo sa $a|b$, a da a nije delitelj b zapisivaćemo sa $a \nmid b$.

Element $a \neq 0$ se naziva levi (desni) delitelj nule ako i samo ako postoji element $b \neq 0$ takav da je $ab = 0$ $(ba=0)$. Element prstena koji je levi ili desni delitelj nule naziva se delitelj nule.

2.6. U prstenu R važe zakoni levog i desnog skraćivanja (kancelacije) za množenje (1.12.g) ako i samo ako prsten R nema delitelje nule.

2.7. Komutativan prsten sa jedinicom bez delitelja nule se naziva domen integriteta (ili integralni domen ili samo domen).

2.8. Element $x \neq 0$ prstena R se naziva levo (desno) regularan ako i samo ako za element x važi zakon leve (desne) kancelacije, tj. iz $xa = xb$ sledi $a = b$ (iz $ax = bx$ sledi $a = b$). Element koji je levo i desno regularan naziva se regularan.

2.9. Prsten R u kome su regularni svi elementi različiti od nule, nema delitelja nule.

2.10. Ako je u prstenu sa jedinicom R element $a \in R$ takav da postoji element $b \in R$ tako da je $ba = 1$ $(ab = 1)$ onda se b naziva levi (desni) multiplikativan inverzni element za a.

Ako je b takvo da je

$$ab = ba = 1,$$

onda se b naziva multiplikativan inverzni (ili samo inverzni) element za a. Tada je b jedini multiplikativan inverzni element elementa a i označava se sa a^{-1}.

Ako za element a postoji multiplikativan inverzni elemenat a^{-1}, onda se a naziva invertibilan element.

2.11. Ako u prstenu R element a ima levi (desni) inverzni element, tada je a levo (desno) regularan.

2.12. Najmanji pripodan broj n (ako takav broj postoji) takav da je za svaki element x prstena R

$$nx = 0$$

naziva se karakteristika prstena R. Ukoliko takav broj ne postoji kažemo da je prsten R karakteristike nula. Karakteristiku prstena R označavaćemo sa CharR.

Prsten s jedinicom je karakteristike n ako i samo ako je $n1=0$ i $k1 \neq 0$ za svako $k \in \{1,\ldots,n-1\}$.

2.13. Prsten s jedinicom u kome je svaki element različit od nule invertibilan se naziva telo (ili prsten sa deljenjem).

2.14. Prsten $(R,+,\cdot)$ je telo ako i samo ako je $(R\setminus\{0\},\cdot)$ grupa.

2.15. Komutativan prsten s jedinicom u kome je svaki element različit od nule invertibilan se naziva polje.

2.16. Prsten $(R,+,\cdot)$ je polje ako i samo ako je $(R\setminus\{0\},\cdot)$ Abelova grupa.

2.17. Element x prstena R se naziva idempotentan (ili idempotent) ako i samo ako je $x^2 = x$.

2.18. Prsten sa jedinicom u kome su svi elementi idempotentni se naziva Bulov (Boole) prsten. Svaki Bulov prsten je komutativan i ima karakteristiku 2.

2.19. Prsten sa jedinicom R u kome za svako $x \in R$ postoji $y \in R$ takvo da je

$$xyx = x$$

se naziva fon Nojmanov (von Neumann) regularan prsten.

2.20. Svako telo, svako polje i svaki Bulov prsten su fon Nojmanovi regularni prsteni.

2.21. Element x prstena R se naziva nilpotentan ako i samo ako postoji prirodan broj n takav da je $x^n = 0$.

2.22. Prsten u kome je jedini nilpotentan element 0 nazivaćemo prsten bez nilpotentnih elemenata.

2.23. U komutativnom prstenu sa jedinicom R element $c \neq 0$ naziva se nesvodljiv ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(i) c nije invertibilan element u R,

(ii) ako je $c = ab$ tada je ili a ili b invertibilan element prstena R, tj. c se ne može prikazati u obliku proizvoda dva neinvertibilna elementa.

2.24. Domen integriteta R se naziva domen sa jednoznačnom faktorizacijom ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(i) svaki element $r \in R$, $r \neq 0$, koji nije invertibilan u R

može se prikazati u obliku

$$r = c_1 c_2 \dots c_n ,$$

gde su c_i, $i=1,2,\dots,n$, nesvodljivi elementi iz R.

(ii) iz

$$r = c_1 c_2 \dots c_n = d_1 d_2 \dots d_m ,$$

gde su c_i, $i=1,\dots,n$, d_j, $j=1,\dots,m$, nesvodljivi elementi iz R, sledi da je $n = m$, da postoji permutacija σ skupa $\{1,2,\dots,n\}$ i invertibilni elementi u_i, $i=1,\dots,n$, tako da je

$$c_i = u_i d_{\sigma(i)}, \quad i=1,\dots,n .$$

2.25. Domen integriteta R se naziva Euklidov prsten (ili Euklidov domen) ako i samo ako je svakom elementu $a \in R$, $a \neq 0$, pridružen nenegativan ceo broj $\phi(a)$, tj. definisana je funkcija

$$\phi : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\},$$

tako da važe sledeći uslovi:

E1. Za svako $a,b \in R \setminus \{0\}$

$$\phi(ab) \geq \phi(a) .$$

E2. Za svako $a,b \in R$, $b \neq 0$, postoje $q,r \in R$ (q -"količnik", r - "ostatak") tako da je

$$a = bq + r,$$

gde je $\phi(r) < \phi(b)$ ili je $r = 0$.

2.26. Neka je $(R,+,\cdot)$ prsten, a S neprazan podskup od R. S se naziva potprsten prstena R ako i samo ako je $(S,+,\cdot)$ prsten (u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$ definisane na R).

2.27. Neka je $(R,+,\cdot)$ prsten a S neprazan podskup od R. S je potprsten prstena R ako i samo ako za svako $a,b \in S$, $a-b \in S$ i $ab \in S$.

2.28. U prstenu R skup

$$C(R) = \{x \in R \mid xa = ax, \text{ za svako } a \in R\}$$

se naziva centar prstena R.

$C(R)$ je potprsten prstena r.

2.29. Neka su A i B podskupovi prstena R. Sa A + B označićemo skup

$$A+B = \{x \mid x = a+b,\ a \in A,\ b \in B\} ,$$

a sa AB skup

$$AB = \{x \mid x = a_1b_1 + \ldots + a_kb_k,\ k \in \mathbb{N},\ a_i \in A,\ b_i \in B,\ i = 1,\ldots,k\} ,$$

tj. AB je skup svih konačnih suma proizvoda a_ib_i, $a_i \in A$, $b_i \in B$.

Umesto $\{x\}+A$ pisaćemo $x+A$, a umesto $\{x\}\cdot A$ pisaćemo xA.

2.30. Neprazan podskup I prstena R se naziva levi (desni) ideal u R ako i samo ako važi:

(i) $(I,+)$ je podgrupa grupe $(R,+)$,

(ii) za svako $x \in I$ i svako $r \in R$

$$rx \in I \quad (xr \in I).$$

2.31. Ako je I i levi i desni ideal u prstenu R, I se naziva ideal u R.

2.32. Presek proizvoljne familije ideala prstena R je ideal u R.

2.33. U prstenu R skup $\{0\}$ i sam skup R su ideali i ti ideali se nazivaju trivijalni. Ostali ideali se nazivaju netrivijalni (ili pravi).

2.34. Ideal M, $M \neq R$, prstena R je maksimalan ideal ako i samo ako ne postoji pravi ideal u R različit od M a koji sadrži M, tj. za svaki ideal I za koji je $M \subseteq I \subseteq R$ sledi $I = M$ ili $I = R$.

Analogno se definiše maksimalan levi (desni) ideal, a takodje i minimalni ideal, odnosno minimalan levi (desni) ideal.

2.35. Neka je R prsten sa jedinicom. Tada je svaki ideal sadržan u nekom maksimalnom idealu prstena R.

Analogno tvrdjenje važi za leve (desne) ideale.

2.36. U prstenu R ideal $P \neq R$ se naziva prost ideal ako i samo ako za svaka dva ideala I,J u R važi

$$IJ \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P \text{ ili } J \subseteq P .$$

2.37. U komutativnom prstenu R ideal $P \neq R$ je prost ako i samo ako za svako $a,b \in R$

$$ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ ili } b \in P .$$

2.38. Neka je S podskup prstena R. Presek svih ideala koji sadrže S (tj. minimalan ideal koji sadrži S) naziva se ideal generisan skupom S i označava se sa (S). Elementi skupa S se nazivaju generatori ideala (S). Ako je $S = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ umesto $(\{x_1,x_2,\ldots,x_n\})$ pisaćemo $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Analogno se definiše levi (desni) ideal generisan skupom S.

2.39. Ideal generisan jednim elementom nazivamo glavni ideal. Glavni ideal generisan elementom a označavaćemo sa (a), a u slučaju komutativnog prstena sa jedinicom R i sa Ra (ako je R komutativan prsten sa jedinicom glavni ideal (a) se sastoji od svih proizvoda oblika ra, $r \in R$).

2.40. Prsten u kome je svaki ideal glavni se naziva prsten glavnih ideala.

2.41. U komutativnom prstenu sa jedinicom R skup svih nilpotentnih elemenata je ideal koji je jednak preseku svih prostih ideala prstena R.

2.42. Homomorfizam prstena $(R,+,\cdot)$ u prsten $(S,*,\circ)$ je preslikavanje $f : R \to S$ za koje za svako $x,y \in R$ važi

(i) $f(x+y) = f(x) * f(y)$,

(ii) $f(x\cdot y) = f(x) \circ f(y)$.

2.43. Jezgro homomorfizma f prstena R u prsten S je skup svih elemenata iz R koji se preslikavaju u nulu prstena S. Jezgro homomorfizma f označavaćemo sa Kerf, dakle,

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in R \mid f(x) = 0\} .$$

Sa Imf (ili sa f(R)) označavaćemo skup

$$\mathrm{Im} f = f(R) = \{y \in S \mid (\exists r \in R)\ f(r) = y\} ,$$

i taj skup nazivamo slika homomorfizma f.

2.44. Homomorfizam prstena koji je injektivno preslikavanje se naziva monomorfizam, homomorfizam koji je surjektivno preslikavanje se naziva epimorfizam, dok se homomorfizam koji je bijekcija naziva izomorfizam.

Dva prstena R i S se nazivaju izomorfnim ako i samo ako postoji izomorfizam $f : R \to S$. Da su prsteni R i S izomorfni označavaćemo sa $R \simeq S$.

Ako je f epimorfizam prstena R na prsten S, onda se S naziva homomorfna (ili epimorfna) slika prstena R.

2.45. Ako je f homomorfizam prstena R u sebe, onda se f naziva endomorfizam, a ako je f izomorfizam prstena R u sebe onda se f naziva automorfizam.

2.46. Ako je f homomorfizam prstena R u prsten S, onda je jezgro Kerf ideal prstena R a slika Imf je potprsten prstena S.

2.47. Neka je R prsten i I ideal u R. Ako je (R/I,+) aditivna faktor grupa i ako se na skupu R/I definiše množenje sa

$$(a+I)\cdot(b+I) = ab + I,$$

onda je (R/I,+,·) prsten koji se naziva faktor prsten prstena R po idealu I.

2.48. Ako je R prsten a I ideal u R, onda faktor prsten (R/I,+,·)

(i) je komutativan ako je R komutativan,
(ii) ima jedinicu ako R ima jedinicu.

2.49. Neka je I ideal prstena R. Tada je preslikavanje $\pi : R \to R/I$ definisano sa $\pi : r \mapsto r + I$ epimorfizam prstena R na prsten R/I čije je jezgro I. π se naziva prirodni epimorfizam (ili prirodni homomorfizam) prstena R na faktor prsten R/I.

2.50. (Prva teorema o izomorfizmu prstena) Ako je $f : R \to S$ homomorfizam prstena R u prsten S onda je

$$R/\mathrm{Ker} f \simeq \mathrm{Im} f .$$

2.51. (Druga teorema o izomorfizmu prstena) Neka su I i J ideali prstena R. Tada je

$$(I+J)/J \simeq I/(I \cap J) .$$

2.52. (Treća teorema o izomorfizmu prstena) Neka su I i J ideali prstena R i neka je $I \subseteq J$. Tada je J/I ideal u R/I i

$$(R/I)/(J/I) \simeq R/J .$$

2.53. Neka je I ideal prstena R. Tada je svaki ideal faktor prstena R/I oblika J/I, gde je J ideal prstena R koji sadrži I. Funkcija f koja preslikava skup svih ideala prstena R koji sadrže I na skup svih ideala prstena R/I, definisana sa

$$f : J \mapsto J/I ,$$

je bijekcija.

2.54. U komutativnom prstenu sa jedinicom R ideal P je prost ideal ako i samo ako je R/P domen integriteta.

2.55. U komutativnom prstenu sa jedinicom R ideal M je maksimalan ideal ako i samo ako je R/M polje.

2.56. Ako je M maksimalan ideal komutativnog prstena sa jedinicom R onda je M prost ideal prstena R.

2.57. Neprazan podskup S komutativnog prstena sa jedinicom se naziva multiplikativno zatvoren (ili zatvoren u odnosu na množenje) ako i samo ako važi:

(i) $1 \in S$,

(ii) $a,b \in S \Rightarrow ab \in S$.

2.58. Neka je S multiplikativno zatvoren podskup komutativnog prstena sa jedinicom R.

(i) Relacija $\sim$ definisana na $R \times S$ sa

$$(r_1,s_1) \sim (r_2,s_2) \iff (\exists s \in S)s(r_1s_2-r_2s_1) = 0,$$

je relacija ekvivalencije.

Skup $(R \times S)/\sim$ označićemo sa $S^{-1}R$ a klasu ekvivalencije elementa (r,s) sa r/s.

(ii) $S^{-1}R$ je komutativan prsten sa jedinicom ako se sabiranj i množenje definišu na sledeći način:

$$(r_1/s_1)+(r_2/s_2) = (r_1s_2+r_2s_1)/s_1s_2 ,$$

$$(r_1/s_1)\cdot(r_2/r_2) = (r_1r_2)/s_1s_2 .$$

Prsten $S^{-1}R$ se naziva prsten razlomaka prstena R sa imeniocima iz S.

(iii) Preslikavanje $f : R \to S^{-1}R$ definisano sa

$$f(r) = r/1$$

je monomorfizam R u $S^{-1}R$.

2.59. Neka je R domen integriteta i $S = R \setminus \{0\}$. $S^{-1}R$ je tada polje koje se naziva polje razlomaka domena R.

U specijalnom slučaju, kada je R prsten celih brojeva $\mathbb{Z}$, polje razlomaka prstena $\mathbb{Z}$ je polje racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

2.60. Neka je R prsten. Beskonačan niz $(a_0,a_1,\dots)$ elemenata iz R, medju kojima je samo konačan broj različit od nule, nazivamo polinom*) nad R (ili polinom sa koeficijentima iz R). Skup svih takvih polinoma označavaćemo sa $R[x]$. Elemente $a_0,a_1,\dots$ nazivamo koeficijentima polinoma $(a_0,a_1,\dots)$. Polinom $(0,0,\dots)$

*) U 2.62. ćemo definisati polinom x, ali dotle čitalac koji se nije sretao sa ovakvom definicijom polinoma može da posmatra polinom $(a_0,a_1,\dots,a_n,0,0,\dots)$ kao formalni izraz $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

(čiji su svi koeficijenti nule) nazivamo nula-polinom (ili nula).

2.61. Neka je R prsten. Ako se u $R[x]$ definiše sabiranje i množenje polinoma sa

$$(a_0,a_1,\dots)+(b_0,b_1,\dots) = (a_0+b_0, a_1+b_1,\dots) ,$$

$$(a_0,a_1,\dots)\cdot(b_0,b_1,\dots) = (c_0,c_1,\dots),$$

gde je $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$, $k=0,1,\dots$, onda je $R[x]$ prsten koji se naziva prsten polinoma nad R (ili prsten polinoma sa koeficijentima iz R).

Ako je R komutativan prsten (ili prsten sa jedinicom ili prsten bez delitelja nule ili domen integriteta), onda odgovarajuće svojstvo ima i prsten polinoma $R[x]$.

Preslikavanje $f : R \to R[x]$ definisano sa

$$f(r) = (r,0,0,\dots)$$

je monomorfizam prstena R u prsten $R[x]$ (tj. prsten R se može izomorfno potopiti u prsten $R[x]$).

2.62. Neka je R prsten sa jedinicom i označimo sa x element

$$x = (0,1,0,0,\dots) \in R[x].$$

Tada je

$$x = (0,1,0,0,\dots),$$
$$x^2 = (0,0,1,0,\dots),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x^n = (0,0,\dots,0,1,0,\dots), \text{ gde je } (n+1)\text{-va koordinata } 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Ako se polinom $(r,0,0,\dots)$ označi sa r, onda je

$$r(a_0,a_1,\dots) = (r,0,0,\dots)(a_0,a_1,\dots) = (ra_0,ra_1,\dots) ,$$

i

$$rx^n = x^n r = (0,0,\dots,0,r,0,\dots), \text{ gde je r } (n+1)\text{-va koordinata.}$$

Tada se svaki polinom $f = (a_0,a_1,\dots,a_n,0,0,\dots)$ može napisati u obliku

$$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n .$$

Kada polinom f pišemo u ovom obliku, umesto f pisaćemo i $f(x)$.

2.63. Ako je R prsten a $S = R[x]$,onda se prsten $S[y]$ označava sa $R[x,y]$.

Sa $R[x_1,\ldots,x_n]$ označavamo prsten $S[x_n]$, gde je

$$S = R[x_1,\ldots,x_{n-1}], \quad n \geq 2.$$

2.64. Polinom $f \in F[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, gde je F polje, se naziva simetrični polinom ako i samo ako je za svaku premutaciju $p \in S_n$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(x_{p(1)},x_{p(2)},\ldots,x_{p(n)}) .$$

2.65. Elementarni simetrični polinomi $\sigma_i \in F[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, i=1,2,...,n, gde je F polje, su polinomi:

$$\sigma_1 = x_1+x_2+\ldots+x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+$$

$$+x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j ,$$

$$\sigma_3 = \sum_{1\leq i<j<k\leq n} x_ix_jx_k ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_n = x_1x_2\ldots x_n .$$

2.66. Ako je $f=(a_o,a_1,\ldots)$ nenula polinom , onda se nenegativan ceo broj n takav da je $a_n \neq 0$ i $a_k = 0$ za svako $k > n$, naziva stepen polinoma f i označava sa degf. a_n se naziva vodeći koeficijent polinoma f, a ako je $a_n = 1$ polinom se naziva normalizovan. a_o nazivamo konstantni (ili slobodan) član polinoma f. Stepen nula polinoma nije definisan. Polinom stepena 0 nazivamo konstanta.

2.67. Polinom $f \in R[x]$, gde je R komutativan prsten sa jedinicom,se naziva nesvodljiv nad R ako i samo ako je f nesvodljiv elemenat prstena $R[x]$ (v. 2.23).

Ako je F polje, onda je polinom $f(x) \in F[x]$, $\deg f(x) \geq 1$, nesvodljiv nad F ako i samo ako iz $h(x) \mid f(x)$ sledi da je $h(x) = c$ ili $h(x) = cf(x)$, gde je c konstanta (tj. f(x) je nesvodljiv nad F ako i samo ako f(x) nije jednak proizvodu dva polinoma pozitivnog stepena sa koeficijentima iz F).

2.68. (Algoritam deljenja) Neka je R prsten sa jedinicom, $f,h \in R[x]$ nenula polinomi takvi da je vodeći koeficijent polinoma h invertibilan elemenat u R. Tada postoje jedinstveni polinomi $q,r \in R[x]$ takvi da je

$$f = qh + r,$$

gde je $\deg r < \deg h$ ili je r nula.

2.69. Neka je R prsten sa jedinicom i $f(x) = a_o + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$. Tada za svako $c \in R$ postoji jedinstven polinom $q(x) \in R[x]$ takav da je

$$f(x) = q(x)(x-c) + f(c) .$$

2.70. Ako je R domen integriteta sa jednoznačnom faktorizacijom tada je i prsten polinoma $R[x]$ domen integriteta sa jednoznačnom faktorizacijom.

2.71. (Ajzenštajnov (Eisenstein) kriterijum nesvodljivosti) Neka je R domen integriteta sa jednoznačnom faktorizacijom, F polje razlomaka domena R, $f(x) = a_o+a_1x+\ldots+a_nx^n \in R[x]$ a p nesvodljiv elemenat prstena R. Ako važi

(i) p nije delitelj a_n,

(ii) p je delitelj $a_o,a_1,\ldots,a_{n-1}$,

(iii) p^2 nije delitelj a_o,

onda je f(x) nesvodljiv nad F.

U specijalnom slučaju, ako je $R = \mathbb{Z}$, nesvodljiv elemenat p je prost broj i ako je f(x) polinom sa celim koeficijentima takav da važi (i),(ii) i (iii), onda je polinom f(x) nesvodljiv nad poljem $\mathbb{Q}$.

2.72. Neka je R potprsten komutativnog prstena S i $f(x) = a_o+a_1x+\ldots+a_nx^n \in R[x]$. Reći ćemo da je elemenat $c \in S$ nula (ili koren) polinoma f(x) (ili da je rešenje jednačine f(x)=0) ako i samo ako je

$$f(c) = a_o + a_1c + \ldots + a_nc^n = 0 .$$

2.73. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom i $f(x) \in R[x]$. Elemenat $c \in R$ je nula polinoma f(x) ako i samo ako

postoji polinom $g(x) \in R[x]$ takav da je

$$f(x) = (x-c)g(x).$$

2.74. Neka je R domen integriteta koji je sadržan u domenu integriteta S i neka je $f \in R[x]$ polinom stepena n. Tada f ima najviše n različitih korena u S.

2.75. Neka je R domen integriteta i $f(x) \in R[x]$. Ako je $c \in R$ koren polinoma f(x) onda postoji najveći nenegativan ceo broj m takav da je

$$f(x) = (x-c)^m g(x),$$

gde je $g(x) \in R[x]$, $g(c) \neq 0$. Pri tom je $0 < m \leq \deg f(x)$.

Nenegativan ceo broj m nazivamo višestrukost korena c. Ako je m=1 onda se c naziva prost (ili jednostruk) koren jednačine $f(x) = 0$, a ako je $m > 1$ c je višestruki koren.

2.76. Neka je R domen integriteta sa jedinstvenom faktorizacijom čije je polje razlomaka F, $f(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ i neka je $u = \frac{c}{d} \in F$, pri čemu su c i d uzajamno prosti. Ako je u nula polinoma f(x) onda je c delitelj a_o, a d delitelj a_n.

2.77. Neka je R domen integriteta i $f(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R[x]$. Sa $f'(x)$ označićemo polinom

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}$$

i nazivati ga izvod (formalni) polinoma f(x).

2.78. Neka je R domen integriteta. Tada za svako $f, g \in R[x]$ i $c \in R$ važi:

(i) $(f+g)' = f' + g'$,

(ii) $(cf)' = cf'$,

(iii) $(fg)' = f'g + fg'$.

2.79. Neka je R domen integriteta koji je sadržan u domenu integriteta S, $f \in R[x]$ i $c \in S$.

(i) c je višestruki koren polinoma f ako i samo ako je $f(c) = f'(c) = 0$.

(ii) Ako je R polje i polinom f relativno prost sa f', onda f nema višestruke korene u S.

2.80. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni polinoma $f(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in F[x]$, gde je F polje. Tada je

$$\sigma_i = (-1)^i a_{n-i}/a_n, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

gde su σ_i elementarni simetrični polinomi (def. 2.65).

2.81. Neka je $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ simetrični polinom sa koeficijentima iz polja F. Tada postoji jedinstveni polinom $q(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ sa koeficijentima iz F, takav da je

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

2.82. Simetrični polinomi $s_k \in F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $k \in \mathbb{N}$, gde je F polje, definisani sa

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

se nazivaju Njutnove(Newton) sume.

§2.1. PRIMERI I AKSIOMATIKA

302. Ispitati da li sledeći skupovi čine prstene u odnosu na odgovarajuće operacije:

a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$,

b) $(\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$,

c) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$,

d) $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$.

Rezultat.

a) Komutativan prsten s jedinicom,

b) komutativan prsten bez jedinice,

c) komutativni prsteni s jedinicom,

d) komutativni prsten s jedinicom (v. zadatak 11).

303. Ispitati da li sledeći skupovi čine prstene u odnosu na odgovarajuće operacije:

a) $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ u odnosu na uobičajeno sabiranje i množenje racionalnih brojeva.

b) $\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z},\ i^2=-1\}$ (Gausovi celi brojevi) u odnosu na sabiranje i množenje kompleksnih brojeva.

c) $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ u odnosu na operacije + i · definisane sa

$$(a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d),$$
$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac+bd,\ ad+bc).$$

d) Skup svih vektora trodimenzionalnog Euklidovog prostora u odnosu na sabiranje vektora i vektorsko množenje.

Rezultat. a), b), c) komutativni prsteni sa jedinicom, d) ne, jer vektorsko množenje nije asocijativno.

304. Neka je S neprazan skup, $P(S)$ skup svih podskupova skupa S. Dokazati da je $(P(S),+,\cdot)$ Bulov prsten ako su + i · definisani sa

$$A+B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$A \cdot B = A \cap B.$$

Uputstvo. Koristiti zadatak 31.

305. Dokazati da skup svih matrica formata $n \times n$ sa realnim (kompleksnim) elementima u odnosu na sabiranje i množenje matrica čini nekomutativan prsten sa jedinicom $(n \geq 2)$.

306. Neka je $R = \{a,b,c,d\}$ a binarne operacije + i · definisane tablicama

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

·	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	a	a	a
d	a	b	c	d

Dokazati da je $(R,+,\cdot)$ prsten.

Rešenje. $(R,+)$ je Abelova grupa jer je izomorfna sa Klajnovom četvornom grupom $(C_2 \times C_2)$.

Proverićemo da li je množenje asocijativno, tj. da li je

$$x(yz) = (xy)z,$$

za svako $x,y,z \in R$.

Ako je x jednako a ili c, onda je

$$x(yz) = a = (xy)z.$$

Ako je x jednako b ili d, onda je

$$x(yz) = yz = (xy)z,$$

što znači da je množenje zaista asocijativno.

Na sličan način može se dokazati da važe oba distributivna zakona, pa je $(R,+,\cdot)$ prsten.

Iz tablice kojom je definisano množenje odmah se vidi da je prsten nekomutativan i da nema jedinicu.

307. Dat je skup $R = \{x,y,z,u\}$. Kompletirati tablice operacija + i · tako da $(R,+,\cdot)$ bude prsten.

+	x	y	z	u
x	x	y	z	u
y	y	z	u	x
z	z	u	x	y
u	u	x	y	z

·	x	y	z	u
x	x	x	x	x
y	x	y	·	·
z	x	·	·	z
u	x	u	z	·

308. Ako je $(G,+)$ Abelova grupa, $|G| > 1$, i ako u G definišemo množenje sa

$$ab = 0, \quad \text{za svako } a,b \in G,$$

onda je $(G,+,\cdot)$ komutativan prsten bez jedinice. Dokazati.

PRIMEDBA. Prsten sa ovako definisanim množenjem naziva se nula-prsten.

309. Dokazati da je skup $End(G)$ svih endomorfizama Abelove grupe G, prsten u odnosu na operacije sabiranja, definisanog sa

$$f,g \in End(G),\ (f+g)(a) = f(a)+g(a), \text{ za svako } a \in G,$$

i množenja, definisanog sa

$$(f\cdot g)(a) = f(g(a)), \quad \text{za svako } a \in G.$$

Rešenje. Neka su $f,g \in End(G)$. Tada je za svako $a,b \in G$

$$(f+g)(a+b) = f(a+b)+g(a+b) = f(a)+f(b)+g(a)+g(b) =$$
$$= f(a)+g(a)+f(b)+g(b) = (f+g)(a)+(f+g)(b),$$

pa je preslikavanje f+g takodje endomorfizam, tj. operacija sabiranja endomorfizama je unutrašnja. Iz asocijativnosti i komutativnosti sabiranja u G odmah sledi asocijativnost i komutativnost sabiranja u End(G). Endomorfizam koji sve elemente grupe G preslikava u neutralni element te grupe je neutralni elemenat za sabiranje u End(G), za endomorfizam f suprotan elemenat je endomorfizam ^{-}f definisan sa:

$$(-f)(a) = -f(a), \quad \text{za svako } a \in G.$$

Prema tome, (End(G),+) je Abelova grupa.

Da je proizvod dva endomorfizma endomorfizam dokazuje se slično kao što je to učinjeno za sabiranje .

Asocijativnost množenja u End(G) je neposredna posledica asocijativnosti kompozicije preslikavanja, pa preostaje da se dokaže da važe zakoni distributivnosti.

$$(f(g+h))(a) = f((g+h)(a)) = f(g(a)+h(a)) = f(g(a))+f(h(a)) =$$
$$= (fg)(a)+(fh)(a) = (fg+fh)(a)$$

za svako $a \in G$ i svako $f,g,h \in \mathrm{End}(G)$.

Slično se dokazuje da važi desna distributivnost, pa je (End(G),+,·) prsten.

Identičko preslikavanje grupe G je endomorfizam te grupe, taj endomorfizam je jedinica u prstenu End(G), dakle, End(G) je prsten sa jedinicom.

310. Odrediti prstene endomorfizma za:

a) cikličku grupu reda n,

b) beskonačnu cikličku grupu,

c) aditivnu grupu racionalnih brojeva.

Rezultat. a) $\mathrm{End}(G) \simeq (\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$

b) $\mathrm{End}(G) \simeq (\mathbb{Z},+,\cdot)$

c) $\mathrm{End}(G) \simeq (\mathbb{Q},+,\cdot)$

311. Ako se u prstenu sa jedinicom (R,+,·) definišu operacije * i · sa

$a*b = a+b-1, \quad a\cdot b = a+b-ab,$

dokazati dą je (R,*,·) prsten izomorfan prstenu (R,+,·) .

312. Neka je R prsten. Označimo s R´ skup svih beskonačnih nizova s elementima iz R. U skupu R´ definišimo operacije + i · na sledeći način:

$$(a_o,a_1,\ldots,a_k,\ldots)+(b_o,b_1,\ldots,b_k,\ldots)=(a_o+b_o,a_1+b_1,\ldots,a_k+b_k,\ldots),$$
$$(a_0,a_1,\ldots,a_k,\ldots)\cdot(b_o,b_1,\ldots,b_k,\ldots) = (a_ob_o,a_ob_1+a_1b_0,\ldots$$
$$\ldots, a_ob_k+a_1b_{k-1}+\ldots+a_kb_o,\ldots) .$$

Dokazati da je (R´,+,·) prsten.

PRIMEDBA. Prsten polinoma R[x] definisan u 2.60, 2.61. i 2.62. je potprsten prstena R´.

313. Neka je R prsten. Označimo s R[[x]] skup svih formalnih stepenih redova sa koeficijentima R, tj.

$$f \in R[[x]] \iff f = a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots = \sum_{k=o}^{\infty} a_kx^k .$$

Neka su $f = \sum_{k=o}^{\infty} a_kx^k$ i $g = \sum_{k=o}^{\infty} b_kx^k$ elementi R[[x]]. $f = g$ ako i samo ako je $a_k = b_k$ za svako $k = 0,1,2,\ldots$.

Na skupu R[[x]] uvedimo operacije + i · na sledeći način:

$$f+g = \sum_{k=o}^{\infty} (a_k+b_k)x^k,$$

$$f\cdot g = \sum_{k=o}^{\infty} c_kx^k, \text{ gde je } c_k = \sum_{\ell=o}^{k} a_\ell b_{k-\ell} .$$

Dokazati da je (R[[x]],+,·) prsten.

314. Dokazati da je prsten (R´,+,·) iz zadatka 312. izomorfan prstenu (R[[x]],+,·) iz zadatka 313.

315. Neka je R prsten. Označimo s R<x> skup svih proširenih formalnih stepenih redova sa koeficijentima iz R,

$$f \in R\langle x\rangle \iff f = a_{-k}x^{-k}+a_{-k+1}x^{-k+1}+\ldots+a_{-1}x^{-1}+a_o+a_1x+\ldots$$
$$+\ldots+a_nx^n+\ldots, \quad \text{(pri čemu k zavisi od f)},$$

pisaćemo $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_nx^n$, gde se podrazumeva da je samo konačno mnogo koeficijenata s negativnim indeksima različito od nule.

Neka su $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$, $g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n x^n \in R\langle x\rangle$.

$f = g \Leftrightarrow a_n = b_n$ za svako $n \in \mathbb{Z}$.

U skupu $R\langle x\rangle$ uvedimo operacije + i $\cdot$ na sledeći način:

$$f + g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n+b_n)x^n ,$$

$$f \cdot g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n x^n, \text{ gde je } c_n = \sum_{k=-\infty}^{n} a_k b_{n-k} .$$

Dokazati da je $(R\langle x\rangle,+,\cdot)$ prsten.

316. Ako je R komutativan prsten, tada su i prsteni $R[[x]]$ iz zadatka 313. i $R\langle x\rangle$ iz zadatka 315. komutativni prsteni. Dokazati.

317. Neka su R_1 i R_2 prsteni. U skupu $R_1 \times R_2$, Dekartovom proizvodu R_1 i R_2, definišimo operacije + i $\cdot$ na sledeći način:

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2) = (a_1+b_1,a_2+b_2) ,$$

$$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2) = (a_1\cdot a_2,b_1\cdot b_2) .$$

Dokazati da je $(R_1 \times R_2,+,\cdot)$ prsten.

PRIMEDBA. Prsten $R_1 \times R_2$ naziva se direktan proizvod prstena R_1 i R_2. Analogno se definiše direktan proizvod bilo kog konačnog broja prstena.

318. Neka je $\{R_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ familija prstena. Označimo sa $\prod_{i=1}^{\infty} R_i$ skup svih nizova $(a_1,a_2,\dots)$ takvih da je $a_i \in R_i$ za $i=1,2,\dots$. Na skupu $\prod_{i=1}^{\infty} R_i$ definišimo operacije + i $\cdot$ na sledeći način:

$$(a_1,a_2,\dots)+(b_1,b_2,\dots) = (a_1+b_1,a_2+b_2,\dots) ,$$

$$(a_1,a_2,\dots)\cdot(b_1,b_2,\dots) = (a_1b_1,a_2b_2,\dots) .$$

Dokazati da je $(\prod_{i=1}^{\infty} R_i,+,\cdot)$ prsten.

PRIMEDBA. Prsten $\prod_{i=1}^{\infty} R_i$ se naziva direktan proizvod prstena R_i, $i=1,2,\dots$.

319. Dokazati da su sledeći prsteni fon Nojmanovi regularni prsteni:

a) Bulov prsten.

b) Prsten matrica formata $n \times n$ nad poljem.

c) $\prod_{i=1}^{\infty} R_i$ (zadatak 318), gde je svaki od prstena R_i, $i=1,2,\dots$, fon Nojmanov regularan prsten.

Rešenje. a) U Bulovom prstenu za svaki element x važi

$$x^3 = x^2x = x^2 = x,$$

pa je za $y = x$, $xyx = x$.

b) Dati prsten matrica je prsten sa jedinicom (jedinična matrica je jedinica prstena). Za svaku matricu A formata $n \times n$ ranga k postoje regularne matrice P i Q takve da je

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde je E_k jedinična matrica formata $k \times k$. Tada je

$$PAQPAQ = \begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = PAQ,$$

pa pošto su P i Q regularne matrice, sledi da je

$$AQPA = A,$$

tj. za $B = QP$ je

$$ABA = A.$$

c) Neka je $x = (x_1,x_2,\dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} R_i$. Za niz $y = (y_1,y_2,\dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} R_i$ definisan sa $y_i = x_i'$, gde je $x_ix_i'x_i = x_i$, $i=1,2,\dots$, važi $xyx = x$.

320. Dokazati:

a) Prsten celih brojeva $\mathbb{Z}$ je Euklidov prsten ako se ϕ definiše sa $\phi(x) = |x|$.

b) Prsten polinoma $F[x]$, gde je F polje, je Euklidov prsten ako se ϕ definiše sa $\phi(f(x)) = \deg f(x)$ (sa $\deg f(x)$ označavamo

stepen polinoma f(x)).

c) Proizvoljno polje F je Euklidov prsten ako se ϕ definiše sa $\phi(x) = 1$ za svako $x \neq 0$.

321. Neka je $R = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ prsten Gausovih celih brojeva (zadatak 303.b). Dokazati da je R Euklidov prsten, (2.25), ako se ϕ definiše sa $\phi : a+bi \mapsto a^2+b^2$, $a,b \in \mathbb{Z}$.

Rešenje. Neposredno sledi da je $\phi(a+bi) \geq 1$ za $a+bi \neq 0$ i da je

$$\phi((a+bi)(c+di)) = \phi(ac-bd+(ad+bc)i) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 =$$
$$= (a^2+b^2)(c^2+d^2) = \phi(a+bi)\phi(c+di) ,$$

pa sledi da je $\phi((a+bi)(c+di)) \geq \phi(a+bi)$, tj. važi El. iz 2.25.

Neka su $z_1, z_2 \in R$, $z_2 \neq 0$. Pošto je $z_2 \neq 0$, neka je $z_1 z_2^{-1} = s_1+s_2 i$, gde su s_1 i s_2 racionalni brojevi. Očigledno, postoje celi brojevi n_1 i n_2 takvi da je

$$|s_1-n_1| \leq \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad |s_2-n_2| \leq \frac{1}{2} .$$

Tada je

$$z_1 = z_2(s_1+s_2 i) = z_2(n_1+n_2 i+(s_1-n_1)+(s_2-n_2)i) = z_2 q + r ,$$

gde je $q = n_1+n_2 i$, a $r = z_2(s_1-n_1+(s_2-s_2)i)$. $r \in R$ jer je $r = z_1-z_2 q$.

$$\phi(r) = r\bar{r} = z_2\bar{z}_2(s_1-n_1+(s_2-n_2)i)\overline{(s_1-n_1+(s_2-n_2)i)} =$$
$$= \phi(z_2)((s_1-n_1)^2+(s_2-n_2)^2) \leq \phi(z_2)(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\phi(z_2) < \phi(z_2) .$$

Dakle, ili je $r = 0$ ili je $\phi(r) < \phi(z_2)$.

322. Neka je $(R,+,\cdot)$ algebarska struktura koja zadovoljava sve aksiome prstena izuzev komutativnosti sabiranja. Ako R ima desnu jedinicu dokazati da je R prsten.
(S.Stern, Problem E 1812, Am.Math.Monthly, 72 (1965), 782).

Rešenje. Ako je 1 desna jedinica tada je

$$0 = b(1+(-1)) = b1 + b(-1) = b + b(-1),$$

pa je

$$-b = b(-1).$$

Dalje je

$$0 = (-b)+(-a)+a+b = b(-1)+a(-1)+a+b = (b+a)(-1)+a+b ,$$

tj.

$$a+b = -((b+a)(-1)).$$

Kako je

$$(b+a)+(b+a)(-1) = (b+a)1+(b+a)(-1) = (b+a)(1+(-1)) = 0,$$

tj.

$$b+a = -((b+a)(-1)),$$

mora biti

$$a+b = b+a .$$

323. Ako prsten R ima samo jednu levu jedinicu 1_ℓ, dokazati da je onda 1_ℓ jedinica (dvostrana).

Rešenje. Kako je za svako $a,b \in R$

$$(a\,1_\ell - a + 1_\ell)b = (1_\ell b) - ab + 1_\ell b = b,$$

s obzirom da postoji samo jedna leva jedinica mora biti za svako $a \in R$

$$a\,1_\ell - a + 1_\ell = 1_\ell,$$

pa je

$$a\,1_\ell = a,$$

tj. 1_ℓ je i desna jedinica.

324. Neka je R komutativan prsten bez delitelja nule u kome važi El. i E2. iz 2.25. Dokazati da je R domen integriteta, tj. da R ima jedinicu.

Rešenje. Neka je a elemenat iz prstena R za koji je $\phi(a)$ najmanji prirodan broj skupa nenegativnih celih brojeva $\{\phi(x) \mid x \in R \wedge x \neq 0\}$. Tada je za proizvoljno $b \in R$, $b = aq + r$, gde je $r = 0$ ili je $\phi(r) < \phi(a)$. Pošto ne može da bude $\phi(r) < \phi(a)$, jer je $\phi(a)$ minimum, mora biti $r = 0$. Ako uzmemo da je b=a, tada postoji $e \in R$ takvo da je $a = ea = ae$. Neka je b proizvoljan element iz R. Tada je $b = qa$ za neko $q \in R$, pa je

$$be = qae = qa = b = eb,$$

tj. e je jedinica u prstenu R.

325. Dokazati da se u definiciji 2.25. Euklidovog prstena aksioma E2. može zameniti aksiomom

E2´. Za svako $a,b \in R$, ako je $\phi(a) \geq \phi(b)$, onda postoji $c \in R$ takvo da je

$$\phi(a-bc) < \phi(a) \quad \text{ili} \quad a = bc.$$

§2.2. OSNOVNE OSOBINE

326. Dokazati da u prstenu R za svaka dva elementa $a,b \in R$ važi:

1) $a0 = 0a = 0$,
2) $-(-a) = a$,
3) $-(a+b) = (-a)+(-b) = -a-b$,
4) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$,
5) $(-a)(-b) = ab$,
6) $n(ab) = (na)b = a(nb)$, za svaki ceo broj n.

Rešenje. 1) $a0 = a(0+0) = a0 + a0$, pa sledi da je $a0 = 0$. Slično se dokazuje da je $0a = 0$.

2) i 3) važe u svakoj Abelovoj grupi.

4) $0 = a0 = a(b+(-b)) = ab + a(-b)$, pa sledi da je $a(-b) = -(ab)$. Analogno se dobija $(-a)b = -(ab)$.

U daljem ćemo $-(ab)$ označavati sa $-ab$.

5) Prema prethodnom je

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab.$$

6) Po definiciji je $0a = 0$ (ovde je prva nula ceo broj, a druga neutralni elemenat prstena), pa zato za n=0 tvrdjenje važi. Pretpostavimo da je

$$k(ab) = (ka)b, \quad k \geq 0.$$

Tada je

$$(k+1)(ab) = k(ab) + ab = (ka)b + ab = (ka+a)b = ((k+1)a)b,$$

pa je $n(ab) = (na)b$, za svaki nenegativan ceo broj n. Kako je po

definiciji

$$n(ab) = (-n)(-(ab)), \quad \text{za} \quad n < 0,$$

iz prethodnog i 4) sledi da je

$$n(ab) = (na)b,$$

za svaki ceo broj n.

Analogno je i $n(ab) = a(nb)$, za svako $n \in \mathbb{Z}$.

327. Ako neki element prstena sa jedinicom ima multiplikativni inverzni element, onda je taj inverzni element jedinstven. Dokazati.

328. Konačan prsten u kome postoji elemenat a koji nije levi delitelj nule i elemenat b koji nije desni delitelj nule je prsten sa jedinicom. Dokazati.

Rešenje. Preslikavanje $x \mapsto ax$ je injektivno (jer iz $ax = ay$, $x \neq y$, sledi $a(x-y) = 0$, a to protivreči pretpostavci da a nije levi delitelj nule), a kako je prsten konačan to preslikavanje je surjektivno, dakle, ono je bijekcija. Slično, i preslikavanje $x \mapsto xb$ je bijekcija prstena na sebe.

Prema tome, postoje elementi e_1 i e_2 takvi da je $a = ae_1$ i $b = e_2b$. Za svaki elemenat x prstena je

$$ax = ae_1x,$$

pa je

$$a(x-e_1x) = 0,$$

odakle je $x = e_1x$. Slično, iz

$$xb = xe_2b,$$

sledi

$$xe_2 = x.$$

Iz ovih jednakosti za $x = e_1$ i $x = e_2$ dobijamo

$$e_1 = e_1e_2 = e_2,$$

pa je e_1 jedinica prstena.

PRIMEDBA. Primerom pokazati da za beskonačne prstene ovaj stav ne važi.

329. U prstenu R za svako a,b,c∈ R, a ≠ 0, važi

$$ab = ac \Rightarrow b = c \quad i \quad ba = ca \Rightarrow b = c,$$

(tj. važe zakoni kancelacije za množenje elementom različitim od nule) ako i samo ako prsten nema delitelje nule. Dokazati.

330. Neka je R konačan prsten u kome postoji bar jedan element koji nije delitelj nule. Dokazati:

a) R je prsten sa jedinicom.

b) Ako b ∈ R nema multiplikativni inverzni element tada je b delitelj nule.

(D.Singmeister, Problem 5258, Am.Math. Monthly, 73 (1966),p.95.)

Rešenje. a) Neka je a element koji nije delitelj nule. Tada postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $a^m = a^n$, jer je R konačan skup. Neka je $m < n$. Tada je $a^{m-1}(a-a^{n-m+1}) = 0$, pa je $a = a^{n-m+1}$.

Neka je b proizvoljan element iz R. Tada je $ba = ba^{n-m+1}$, što je ekvivalentno sa $(b-ba^{n-m})a = 0$, pa je $b = ba^{n-m}$ jer bi inače a bio delitelj nule.

Analogno se dobija $b = a^{n-m}b$, pa je a^{n-m} jedinica prstena R.

b) Iz a) sledi da svaki element a koji nije delitelj nule ima inverzni element $a^{-1} = a^{n-m-1}$. Ako b nema inverzni element onda b mora biti delitelj nule.

331. Neka je R prsten sa p elemenata, gde je p prost broj. Ako R sadrži bar jedan proizvod različit od 0, dokazati da je onda prsten R izomorfan prstenu $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$.

Rešenje. S obzirom da je p prost broj aditivna grupa (R,+) mora da bude ciklička (zadatak 106). Ako je a jedan generator te grupe, onda je

$$R = \{a, 2a, \ldots, pa = 0\} .$$

Neka je

$$a^2 = ka, \quad 1 \leq k \leq p .$$

Ukoliko je k jednako p svi proizvodi u prstenu R su jednaki 0, što je protivrečnost, dakle $k \neq p$. k i p su relativno prosti brojevi, pa postoje celi brojevi ℓ i m tako da je

$$\ell k + mp = 1.$$

Preslikavanje $f : \mathbb{Z}_p \to R$ definisano sa

$$f(\bar{i}) = i\ell a,$$

je izomorfizam prstena $\mathbb{Z}_p$ na prsten R. Zaista, f je injektivno preslikavanje (jer iz $i\ell a = j\ell a$, $\bar{i} \neq \bar{j}$, sledi $(i-j)\ell a = 0$, tj. $(i-j)\ell \equiv 0 \pmod p$, što je kontradikcija), a kako je R konačan skup preslikavanje f je surjektivno,dakle, f je bijekcija. Takodje, za svako $\bar{i},\bar{j} \in \mathbb{Z}_p$ važi

$$f(\bar{i})+f(\bar{j}) = i\ell a + j\ell a = (i+j)\ell a = f(\bar{i}+\bar{j}) ,$$

$$f(\bar{i})\cdot f(\bar{j}) = (i\ell a)\cdot(j\ell a) = ij\ell^2 a^2 = ij\ell^2 ka = ij\ell(1-mp)a = ij\ell a = f(\bar{i}\cdot\bar{j}) ,$$

pa je f izomorfizam.

PRIMEDBA. Prema tome, svaki prsten sa p elemenata, gde je p prost broj, je izomorfan nula-prstenu (zadatak 308) čija je aditivna grupa ciklička, ili prstenu $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ (koji je polje).

332. Koliko načina postoji da se na skupu $S = \{0,1,2,3\}$ definiše operacija množenja · tako da $(S,+,\cdot)$ postane prsten ako je + sabiranje po modulu 4 ?

Uputstvo. Ako je u nekom prstenu $(R,+,\cdot)$ $(R,+)$ ciklička grupa, i ako je a generator te grupe, onda je množenje potpuno odredjeno ako se zna a^2. Zaista, za svako $x,y \in R$ postoje $m,n \in \mathbb{Z}$ tako da je $x = ma$, $y = na$, pa je

$$xy = (ma)(na) = mna^2.$$

Ako sada podjemo od neke cikličke grupe (C,+) sa generatorom a, za a^2 uzmemo neki elemenat te grupe i definišemo množenje gornjom jednakošću, onda se lako proverava da je tako definisano množenje asocijativno i distributivno u odnosu na sabiranje, tj. $(C,+,\cdot)$ je prsten.

Rezultat.

$\cdot_1$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0

$\cdot_2$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$\cdot_3$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	2	0	2
2	0	0	0	0
3	0	2	0	2

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	3	2	1
2	0	2	0	2
3	0	1	2	3

333. Naći koliko neizomorfnih prstena postoji čija je aditivna grupa ciklička grupa reda m.
(S.Warner, Problem 5100, Amer.Math. Monthly, 71 (1964),449-450).

Rešenje. Neka je R prsten reda m čija je aditivna grupa ciklička grupa reda m i neka je x generator te grupe. Lako se proverava da je tada R komutativan prsten.

S obzirom na ono što je rečeno u uputstvu za rešavanje prethodnog zadatka, množenje u prstenu R je potpuno odredjeno ako je poznato x^2. x^2 može biti svaki od elemenata prstena R, dakle, ne može postojati više od m neizomorfnih prstena čija je aditivna grupa ciklička grupa reda m. Ispitaćemo sada koji od tih prstena su izomorfni.

Neka je u prstenu R $x^2 = nx$, $n \in \mathbb{N}$, i neka je S neki drugi prsten čija je aditivna grupa ciklička grupa reda m sa generatorom y i $y^2 = ry$, $r \in \mathbb{N}$. Razmotrićemo pod kojim uslovima su prsteni R i S izomorfni.

Da bi preslikavanje $f : R \to S$ bilo izomorfizam potrebno je da se generator aditivne grupe preslikava u generator aditivne grupe, dakle, $f(x) = ky$, za neko $k \in \mathbb{N}$, gde je k relativno prost sa m (1.23). Ako je f izomorfizam i multiplikativnih polugrupa,onda je

$$nky = nf(x) = f(nx) = f(x^2) = f(x)^2 = (ky)^2 = k^2y^2 = k^2ry ,$$

tj. $n \equiv kr \pmod m$. Nije teško proveriti da su ova dva uslova (postoji k takvo da su k i m relativno prosti i $n \equiv kr \pmod m$) ne samo potrebni nego i dovoljni da preslikavanje f bude izomorfizam prstena R i S. Ako su zadovoljena oba ova uslova,onda neposredno sledi da je najveći zajednički delitelj (n,m) za n i m jednak najvećem zajedničkom delitelju (r,m) za r i m.

Obrnuto, neka je $(n,m) = (r,m)$. Tada je $\frac{r}{(r,m)}$ relativno prost sa $\frac{m}{(r,m)}$, pa postoje $s,t \in \mathbb{Z}$ tako da je

$$s\,\frac{r}{(r,m)} + t\,\frac{m}{(r,m)} = 1.$$

Množeći gornju jednakost sa n dobijamo

$$s\,\frac{n}{(r,m)}\,r + t\,\frac{n}{(r,m)}\,m = n,$$

tj.

$$kr \equiv n \pmod m ,$$

pri čemu smo sa k označili broj $s \cdot \frac{n}{(r,m)} = s \cdot \frac{n}{(n,m)}$ koji je relativno prost sa m, jer bi inače bilo $(\frac{n}{(n,m)}, \frac{m}{(n,m)}) \neq 1$.

Dakle, $R \cong S$ ako i samo ako je $(n,m) = (r,m) = \ell$, pri čemu je ℓ delitelj broja m. Prema tome, biće onoliko neizomorfnih prstena koliko broj m ima različitih delitelja. Ako je $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, p_i, $i=1,\ldots,k$, su različiti prosti brojevi,pa će tada postojati $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$ različitih neizomorfnih prstena čija je aditivna grupa ciklička grupa reda m.

334. Neka je R konačan prsten reda $n > 1$ pri čemu je n proizvod različitih prostih brojeva. Dokazati da je R komutativan prsten.

Rešenje. Ako je $n = p_1p_2 \cdots p_k$, gde su $p_1,p_2,\ldots,p_k$ različiti prosti brojevi, onda je Abelova grupa (R,+) reda n ciklička. Zaista,na osnovu Košijeve teoreme (1.97) u grupi (R,+) za svako $i=1,2,\ldots,k$ postoji elemenat a_i reda p_i. S obzirom da su $p_1,p_2,\ldots,p_k$ različiti prosti brojevi jednostavno se dokazuje da je elemenat $x = a_1+a_2+\ldots+a_k$ reda $p_1p_2 \cdots p_k$, (v. zadatak 59), tj. (R,+) je ciklička grupa.

Pošto je (R,+) ciklička grupa sa generatorom x, onda za

svaki element $a \in R$ postoji $m_a \in \mathbb{N}$ takvo da je $a = m_a x$. Neka je $b = m_b x$, tada je

$$ab = (m_a x)(m_b x) = (m_a m_b)x^2 = (m_b m_a)x^2 = (m_b x)(m_a x) = ba,$$

tj. prsten R je komutativan.

PRIMEDBA. U vezi sa zadacima 334 , 335. i 336. videti D.B.Erickson, Orders for finite noncommutative rings, Am. Math. Monthly, 73 (1966), 376-377 .

335. Dokazati da za svaki prost broj p postoji nekomutativan prsten reda p^2.

Uputstvo. Neka je $R = \{(x,y) \mid x,y = 0,1,\ldots,p-1\}$. Sabiranje u R definišimo sa $(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$, gde je sabiranje komponenata po modulu p. Množenje definišemo sa $(x_1,x_2)*(y_1,y_2) = (x_1(y_1+y_2),\ x_2(y_1+y_2))$, gde je množenje komponenata po modulu p.

Dokazati da je $(R,+,*)$ nekomutativan prsten reda p^2.

336. Neka je m prirodan broj, $m > 1$. Dokazati da postoji nekomutativan prsten R reda m ako i samo ako je m deljivo kvadratom.

Uputstvo. Neka je $m = p^2 n$, gde je p prost broj. Posmatrati prsten $R_1 \times R_2$ gde je R_1 prsten iz prethodnog zadatka, a $R_2 \simeq (\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ i koristiti zadatke 334. i 335.

337. Naći sve neizomorfne prstene koji imaju najviše 7 elemenata.

Delimičan odgovor.

red	1	2	3	4	5	6	7
broj prstena	1	2	2	11	2	4	2

Ovo je detaljno razmotreno u C.R.Fletcher, Rings of small order, Math. Gazette, 64 (1980) pp. 9-22.

338. Ako su m i n uzajamno prosti brojevi veći od jedan, dokazati da $\mathbb{Z}_{mn}$ sadrži bar dva idempotentna elementa različita od $\bar{0}$ i $\bar{1}$.

Rešenje. Ako su m i n uzajamno prosti brojevi, onda postoje celi brojevi r i s takvi da je $rm + sn = 1$. Ako prethodnu jednakost pomnožimo sa rm dobijamo

$$(rm)^2 + rsmn = rm,$$

pa je

$$(rm)^2 \equiv rm \pmod{mn},$$

tj. $(\bar{r}\,\bar{m})^2 = \bar{r}\,\bar{m}$, i $\overline{rm}$ je idempotent različit od $\bar{0}$ i $\bar{1}$.

Zaista, ako bi bilo $rm \equiv 0 \pmod{mn}$, tada bi zbog pretpostavke o m i n, r bilo deljivo sa n, recimo $r = kn$, $k \in \mathbb{Z}$, pa bi bilo

$$1 = rm + sn = knm + sn = n(km+s),$$

što je protivrečnost.

Analogno se dobija protivrečnost ako se pretpostavi da je $rm \equiv 1 \pmod{mn}$.

Na sličan način se pokazuje da je $\overline{sn}$ takodje idempotent različit od $\bar{0}$ i $\bar{1}$. Iz $rm + sn = 1$ neposredno sledi da je $\overline{sn} \neq \overline{rm}$.

339. Za koje prirodne brojeve n $\mathbb{Z}_n$ nema idempotente različite od $\bar{0}$ i $\bar{1}$?

Rezultat. $n = p^k$, gde je p prost broj.

340. Za koje $n \in \mathbb{N}$ prsten $\mathbb{Z}_n$ nema nilpotentnih elemenata različitih od nule ?

Rezultat. $n = p_1 p_2 \ldots p_k$, gde su p_i različiti prosti brojevi.

341. Dokazati da je neprazan podskup S prstena $(R,+,\cdot)$ potprsten ako i samo ako za svako $a,b \in S$

$$a-b \in S \text{ i } a \cdot b \in S.$$

342. Dokazati da je u prstenu $(R,+,\cdot)$ podskup

$$C(R) = \{x \in R \mid xa = ax, \quad \text{za svako} \quad a \in R\}$$

potprsten ($C(R)$ se naziva centar prstena R).

343. Označimo sa $\sum_{i=1}^{\infty} R_i$ podskup onih nizova iz prstena $\prod_{i=1}^{\infty} R_i$ definisanog u zadatku 318. koji imaju samo konačan broj komponenata različitih od nule. Dokazati :

a) $(\sum_{i=1}^{\infty} R_i, +, \cdot)$ je potprsten prstena $(\prod_{i=1}^{\infty} R_i, +, \cdot)$.

b) Svi elementi prstena $\sum_{i=1}^{\infty} R_i$ različiti od nule su delitelji nule.

c) $\sum_{i=1}^{\infty} R_i$ nema jedinicu.

Uputstvo. b) Neka je $f = (f_1, f_2, \ldots) \in \sum_{i=1}^{\infty} R_i$. Tada postoji prirodan broj n takav da je $f_k = 0$, za $k > n$. Neka je $g = (g_1, g_2, \ldots) \in \sum_{i=1}^{\infty} R_i$ takav da je $g_{n+1} \neq 0$ i $g_k = 0$, za $k \neq n+1$.
Proveriti da je $f \cdot g = 0$.

344. Neka je $\prod_{i=1}^{\infty} R_i$ prsten definisan u zadatku 318, pri čemu je $R_i \simeq \mathbb{R}$ za $i=1,2,\ldots$. Posmatrajmo podskup S skupa $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$ onih nizova $x = (x_1, x_2, \ldots)$ za koje postoji prirodan broj p takav da je $|x_i| < p$ za $i=1,2,\ldots$ (p zavisi od x) i podskup T onih nizova $y = (y_1, y_2, \ldots)$ za koje je $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Dokazati:

a) da je S potprsten prstena $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$, a T potprsten prstena S.

b) Svaki od prstena $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}, S, T$ sadrži beskonačno mnogo potprstena izomorfnih samom sebi.

c) $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$ (definisan u prethodnom zadatku) je potprsten i prstena S i prstena T.

345. Neka je R prsten matrica formata $n \times n$ sa elementima iz polja. Dokazati da je skup gornjih (donjih) trougaonih matrica potprsten prstena R.

346. Dokazati:

(i) Potprsten prstena sa jedinicom ne mora biti prsten sa jedinicom.

(ii) Potprsten prstena bez jedinice može da ima jedinicu.

(iii) Potprsten može da ima jedinicu različitu od jedinice prstena.

347. Ako je n prirodan broj, $n \geq 2$, konstruisati prsten sa jedinicom R koji ima niz potprstena $R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots \supseteq R_n$ takvih da R_{2k+1} nema jedinicu, a R_{2k} ima jedinicu, $k=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]$.

Uputstvo. $n = 2$.

$R = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}\}$, prsten matrica formata 2×2,

$R_1 = \{\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid b,d \in \mathbb{Z}\}$, potprsten bez jedinice,

$R_2 = \{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid d \in \mathbb{Z}\}$, potprsten od R_1 sa jedinicom.

Za $n > 2$ koristiti blok matrice odgovarajućeg formata.

348. Neka je L potprsten prstena R. Ako L ima jedinični element, a R nema jedinični element, tada R ima delitelje nule.

Rešenje. Neka je e jedinični element prstena L. Tada postoji $a \in R$, $a \notin L$, tako da je $ea = b \neq a$. Kako je

$$eb = e(ea) = (ee)a = ea = b,$$

onda je

$ea = eb$, što daje $e(a-b) = 0$.

$a \neq b$, $e \neq 0$ (v. 2.3), pa je e delitelj nule u R.

349.a) Dokazati da se svaki prsten R može potopiti u prsten sa jedinicom.

b) Dokazati da se svaki prsten R karakteristike k može potopiti u prsten sa jedinicom karakteristike k.

Uputstvo. a) U skupu uredjenih parova $\mathbb{Z} \times R = \{(m,a) \mid m \in \mathbb{Z},\ a \in R\}$ definišimo operacije + i · sa

$$(m,a)+(n,b) = (m+n,a+b),$$
$$(m,a)\cdot(n,b) = (mn,ab+na+mb).$$

Dokazati da je $(\mathbb{Z} \times R,+,\cdot)$ prsten sa jedinicom (1,0) i da je podskup elemenata oblika (0,a) potprsten prstena $\mathbb{Z} \times R$ izomorfan prstenu R.

b) Ako je karakteristika prstena R nula, tada se primenjuje konstrukcija data pod a), a ako je $\mathrm{Char}R = k \neq 0$ primeniti postupak iz a) na $\mathbb{Z}_k \times R$.

350. Konačan domen integriteta D je polje. Dokazati.

Rešenje. Ako je

$$ab = ac,\quad a,b,c \in D,\quad a \neq 0,$$

onda iz

$$ab - ac = a(b-c) = 0,$$

sledi b=c. Dakle, u konačnoj komutativnoj podgrupi $(D\setminus\{0\},\cdot)$ važi zakon kancelacije, pa je na osnovu zadatka 39. $(D\setminus\{0\},\cdot)$ komutativna grupa.

Prema tome, $(D,+,\cdot)$ je polje.

PRIMEDBA. Prethodno tvrdjenje se može dokazati i pod znatno slabijim uslovima (bez pretpostavki o komutativnosti i postojanju jedinice u D). Gornji dokaz se može primeniti i na proizvoljan konačan prsten R bez delitelja nule, pa je, prema tome, svaki takav prsten telo. S obzirom na teoremu Vederberna (Wedderburn): svako konačno telo je polje; sledi da je i prsten R polje.
(Videti: M.Stojaković, Teorija jednačina, Naučna knjiga, Beograd, 1973, str.130, ili V.Perić, Algebra II, Svjetlost, Sarajevo, 1980, str.100.)

351. Neka je R prsten sa jedinicom bez nilpotentnih elemenata. Ako za svako $x \in R$, $x \neq 0$, postoje $a,b \in R$ takvi da je $axb = 1$, tada je R telo. Dokazati.

352. Konstruisati prsten razlomaka $S^{-1}R$ (2.58) ako je $R = \mathbb{Z}$ i

a) $S = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.
b) $S = \{1,p,\ldots,p^k,\ldots\}$, p je prost broj.
c) $S = \{a \in \mathbb{Z} \mid p \nmid a,\ p \text{ je prost broj}\}$.

Rešenje. Pošto je $\mathbb{Z}$ domen integriteta, a S u sva tri slučaja ne sadrži 0, uslov 2.58 (i), tj.

$$(r_1,s_1) \sim (r_2,s_2) \Leftrightarrow (\exists s \in S)\ s(r_1s_2-r_2s_1) = 0,$$

gde $r_1,r_2 \in R$, $s_1,s_2 \in S$ se svodi na

$$(r_1,s_1) \sim (r_2,s_2) \Leftrightarrow r_1s_2 = r_2s_1 .$$

Detaljno ćemo rešiti a), dok se b) i c) rešavaju analogno.

Lako se proverava da je $\sim$ refleksivna i simetrična relacija, dokažimo da je i tranzitivna. Neka je

$$(r_1,s_1) \sim (r_2,s_2) \quad \text{i} \quad (r_2,s_2) \sim (r_3,s_3),$$

tj. $r_1s_2 = r_2s_1$ i $r_2s_3 = r_3s_2$, pa je $r_1s_2s_3 = r_2s_1s_3$ i $r_2s_3s_1 = r_3s_2s_1$ odakle sledi $r_1s_2s_3 = r_3s_2s_1$. Kako je $s_2 \neq 0$ važi $r_1s_3 = r_3s_1$, tj. $(r_1,s_1) \sim (r_3,s_3)$, pa je $\sim$ tranzitivna relacija, dakle, relacija ekvivalencije. Ubuduće ćemo klasu u kojoj se nalazi elemenat (r,s) označavati sa r/s.

Treba dokazati da su operacije definisane u 2.58 (i) na skupu $\mathbb{Z} \times S/\sim = S^{-1}\mathbb{Z}$ dobro definisane, tj. da iz

$$(r_1,s_1) \sim (r_1',s_1') \quad \text{i} \quad (r_2,s_2) \sim (r_2',s_2')$$

sledi

$$(r_1s_2 + r_2s_1, s_1s_2) \sim (r_1's_2' + r_2's_1',\ s_1's_2')$$

i

$$(r_1r_2, s_1s_2) \sim (r_1'r_2', s_1's_2'),$$

što se lako proverava. Na taj način dobili smo prsten razlomaka $S^{-1}\mathbb{Z}$.

Proverimo da je preslikavanje $f : \mathbb{Z} \to S^{-1}\mathbb{Z}$ definisano sa $f : r \mapsto r/1$ homomorfizam.

Jasno je da je $r_1 = r_2 \Leftrightarrow (r_1,1) \sim (r_2,1) \Leftrightarrow r_1/1 = r_2/1$ pa je f dobro definisano, a i injektivno.

$$f(r_1+r_2) = (r_1+r_2)/1 = r_1/1 + r_2/1 = f(r_1)+f(r_2)$$

i

$$f(r_1r_2) = (r_1r_2)/1 = (r_1/1)(r_2/1) = f(r_1)f(r_2)\ ,$$

pa je f monomorfizam. Dakle, $S^{-1}\mathbb{Z}$ sadrži potpsrten izomorfan sa $\mathbb{Z}$, tj. $\mathbb{Z}$ se može potopiti u $S^{-1}\mathbb{Z}$.

Neposredno se proverava da je 1/1 jedinica u $S^{-1}\mathbb{Z}$ i da svako $s/1 \in S^{-1}\mathbb{Z}$, (tj. $s \neq 0$), ima multiplikativni inverzni element 1/s, tj. $S^{-1}\mathbb{Z}$ je polje i to polje je, što nije teško videti, ustvari polje racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

U slučaju b) dobija se prsten izomorfan prstenu $\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid b = p^k,\ k \in \mathbb{N}\}$, a u slučaju c) prsten izomorfan prstenu $\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid (b,p) = 1\}$.

353. Dokazati da se svaki domen integriteta R može potopiti u polje.

Uputstvo. Konstruisati $S^{-1}R$, gde je S multiplikativan skup $R \setminus \{0\}$.

354. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom, S multiplikativno zatvoren skup u R i preslikavanje $f : R \to S^{-1}R$ dato sa $f : r \to r/1$, gde su $S^{-1}R$ definisani u 2.58. Dokazati:

a) f je homomorfizam R u $S^{-1}R$.

b) $\mathrm{Ker} f = \{r \in R \mid \text{postoji } s \in S \text{ tako da je } sr = 0\}$.

c) Ako S ne sadrži delitelje nule, f je monomorfizam.

d) Svaki element iz f(S) ima inverzni element u $S^{-1}R$.

355. Konstruisati $S^{-1}R$ (2.58) ako je $R = F[[x]]$, gde je F polje (zadatak 313), a $S = \{1,x,\ldots,x^k,\ldots\}$.

Rezultat. $S^{-1}R \simeq F\langle x\rangle$ (videti zadatak 315).

356. Dokazati da je prsten R komutativan ako i samo ako za svako $a,b \in R$ važi

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\ .$$

357. Dokazati da je svaki Bulov prsten komutativan prsten karakteristike 2.

Rešenje. Ako je R Bulov prsten, onda za svako $a \in R$ važi

$$a+a = (a+a)^2 = a^2+a^2+a^2+a^2 = a+a+a+a\ ,$$

odakle je

$$a + a = 0,$$

tj. R ima karakteristiku 2. Iz

$$a+b = (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a+ab+ba+b$$

sledi $ab + ba = 0$, a kako je $ab + ab = 0$ (jer prsten ima karakteristiku 2) mora biti

$$ab = ba,$$

za svako $a,b \in R$, tj. prsten R je komutativan.

PRIMEDBA. Primer Bulovog prstena je prsten iz zadatka 304.

358. Ako u prstenu s jedinicom R važi za svako $a,b \in R$ $(a+b)^2 = a^2+b^2$, tada je R komutativan prsten. Dokazati.

Rešenje. Iz

$$(1+1)^2 = 1^2+1^2+1^2+1^2 = 1^2+1^2 \quad \text{sledi} \quad 1+1=0,\ \text{tj.}\ 1 = -1,$$

pa je $-a = (-1)a = 1a = a$ za svako $a \in R$.

Za svako $a,b \in R$ iz

$$(a+b)^2 = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+b^2$$

sledi

$$ab + ba = 0, \quad \text{pa je} \quad ab = -ba = ba\ .$$

359. Dokazati da je prsten R . komutativan ako važi bar jedan od uslova:

a) $a^2 + a \in C(R)$ za svako $a \in R$

b) $a^2 - a \in C(R)$ za svako $a \in R$.

Rešenje. a) Ako je $(a+b)^2 + a + b \in C(R)$ tada i

$$(a+b)^2 + a + b - (a^2+a) - (b^2+b) = ab + ba \in C(R).$$

Odatle sledi

$$a(ab+ba) = (ab+ba)a \text{ tj. } a^2b = ba^2,$$

pa $a^2 \in C(R)$, a tada i $a \in C(R)$, pa je $C(R) = R$.

360. Neka je R prsten u kome važi $x^3 = x$ za svako $x \in R$. Dokazati da je R komutativan prsten.

Rešenje. Iz $(x+x)^3 = x+x$ za svako $x \in R$ se neposredno dobija da je za svako $x \in R$ $6x = 0$, a iz

$$x^2-x = (x^2-x)^3 = x^6-3x^5+3x^4-x^3 = x^2-3x+3x^2-x ,$$

sledi da je $3x^2 = 3x$ za svako $x \in R$.

Neka je $T = \{3x \mid x \in R\}$. Dokazaćemo da je T komutativan potprsten prstena R. Ako su $a,b \in T$, onda postoje $x,y \in R$ tako da je $a = 3x$, $b = 3y$, pa je

$$a-b = 3(x-y) \in T,$$
$$ab = 3(3xy) \in T.$$

Prema tome, na osnovu 2.27 , T je potprsten. Kako je

$$a^2 = (3x)^2 = 9x^2 = 3x^2 = 3x = a,$$

na osnovu zadatka 357. T je komutativan prsten. Dakle, $(3x)(3y) = (3y)(3x)$, odakle sledi

(1) $$3xy = 3yx.$$

Kako je

$$(x+y)^3 = (x^2+xy+yx+y^2)(x+y) = x^3+xyx+yx^2+y^2x+x^2y+xy^2+yxy+y^3,$$

iz $(x+y)^3 = (x+y)$ dobija se

(2) $$xyx+yx^2+y^2x+x^2y+xy^2+yxy = 0,$$

a slično iz $(x-y)^3 = (x-y)$ sledi

(3) $$xy^2-x^2y-xyx-yx^2+yxy+y^2x = 0.$$

Sabirajući (2) i (3) dobija se

(4) $$2xy^2 + 2yxy + 2y^2x = 0.$$

Ako jednakost (4) pomnožimo sa y najpre sleva pa onda zdesna, dobićemo

(5) $$2yxy^2 + 2y^2xy + 2yx = 0,$$

(6) $$2xy + 2yxy^2 + 2y^2xy = 0.$$

Oduzimajući (6) od (5) sledi

(7) $$2yx = 2xy,$$

pa ako od (1) oduzmemo (7) biće $xy = yx$, za svako $x,y \in R$.

PRIMEDBA. Ovo tvrdjenje je specijalan slučaj teoreme Džejkobsona koja je navedena u primedbi iza zadatka 435.

361. Neka je R domen integriteta takav da postoji element $a \in R$, $a \neq 0$ i prirodan broj n, tako da je $na = 0$. Dokazati da je karakteristika domena R prirodan broj d koji je delitelj broja n.

Rešenje. Iz

$$na = n(1_R a) = (n1_R)a = 0$$

i $a \neq 0$ sledi $n1_R = 0$ pošto je R domen. Otuda je za svako $r \in R$

$$nr = n(1_R r) = (n1_R)r = 0 \cdot r = 0,$$

pa je CharR = d, gde je d prirodan broj manji ili jednak n. Iz pretpostavke da d nije delitelj broja n, tj. da postoje $k,\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \neq 0$, $\ell < d$, tako da je $n = kd + \ell$, sledi da je $\ell r = 0$, za svako $r \in R$, što je protivrečnost. Dakle, d je delitelj n.

362. Neka je R prsten takav da postoji prirodan broj n tako da je $x^n = x$ za svako x iz R. Dokazati da je za $n = 2k + 1$ karakteristika prstena R proizvod različitih prostih brojeva, a ako je $n = 2k$ onda je CharR=2.
(D.M.Rosenblum, Problem 1019, Math.Mag., 52(1979),50).

Rešenje. Za svako $x \in R$ i svako $k \in \mathbb{N}$ važi $(kx)^n = kx$, tj. $(k^n-k)x = 0$, pa CharR deli k^n-k za svaki prirodan broj k. Ako je kvadrat nekog prirodnog broja činilac broja CharR, tada je činilac CharR i kvadrat nekog prostog broja, recimo p^2. To znači da p^2 deli k^n-k za svako $k \in \mathbb{N}$, pa i da p^2 deli p^n-p, što je nemoguće.

Ako je n paran broj, onda je $-x = (-x)^n = x^n = x$, pa je $2x = 0$ i CharR = 2.

363. Neka je R prsten u kome je $xy = \pm yx$ za svako x,y iz R. Dokazati da je R ili komutativan prsten ili je za svako x,y iz R $xy = -yx$.

Rešenje. Za svako $a \in R$ označimo sa $C_a = \{x \in R \mid ax = xa\}$, a sa $A_a = \{x \in R \mid ax = -xa\}$. Po pretpostavci je za svako $a \in R$ $C_a \cup A_a = R$.

Ako je $R \neq C_a$ i $R \neq A_a$, postoje elementi $b \in C_a \setminus A_a$ i $d \in A_a \setminus C_a$. Tada iz $a(b+d) = (b+d)a$ sledi da je $ad = da$, a iz $a(b+d) = -(b+d)a$ sledi da je $ab = -ba$, što su kontradikcije, pa je ili $R = C_a$ ili $R = A_a$.

Označimo sa $U = \{a \in R \mid C_a = R\}$ i $V = \{a \in R \mid A_a = R\}$. Tada je $R = U \cup V$. Ako je $R \neq U$ i $R \neq V$, tada postoje elementi $u \in U \setminus V$ i $v \in V \setminus U$. Posmatrajmo $u+v$. Iz $u+v \in U$ analogno kao i ranije sledi da $v \in U$, a iz $u+v \in V$ sledi da $u \in V$. Prema tome, ili je $R = U$ ili $R = V$, tj. ili je R komutativan prsten ili je $xy = -yx$ za svako x i y iz R.

Literatura:

M.Reich, A commutativity theorem for algebras, Amer.Math. Monthly, 82(1975), 377-379.

364. Neka je R prsten sa jedinicom i neka njegovi elementi a,b i a+b imaju multiplikativne inverzne elemente. Dokazati da je $(a+b)^{-1} = a^{-1}+b^{-1}$ ako i samo ako postoji element $p \in R$ takav da je $b = ap$ i $p^2 + p + 1 = 0$.

Rešenje. Pretpostavimo da je $(a+b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$. Ako tu jednakost pomnožimo sleva sa a+b i zdesna sa b dobijamo

$$b = 2b + a + ba^{-1}b$$

pa je

$$ba^{-1}b + b = -a ,$$

što daje, kad se pomnoži sleva sa a^{-1}

$$a^{-1}ba^{-1}b + a^{-1}b + 1 = 0.$$

Ako $a^{-1}b$ označimo sa p, vidimo da je

$$b = ap \quad i \quad p^2 + p + 1 = 0.$$

Obrnuto, neka je $p \in R$ takvo da je $b = ap$ i $p^2 + p + 1 = 0$. Tada je

$$p^{-1} = -1 - p = p^2 \quad i \quad (1+p)^{-1} = -p = 1 + p^2 ,$$

pa je

$$(a+b)^{-1} = (a+ap)^{-1} = (a(1+p))^{-1} = (1+p)^{-1}a^{-1} = (1+p^2)a^{-1} =$$

$$= a^{-1}+p^2a^{-1} = a^{-1}+p^{-1}a^{-1} = a^{-1}+(ap)^{-1} = a^{-1} + b^{-1} .$$

Literatura:

T.E.Elsner, The inverse of a sum can be the sum of the inverses, Math.Mag., 52(1979), 173-174.

365. Ako u komutativnom prstenu sa jedinicom element a ima multiplikativan inverzni elemenat, a b je nilpotentan element, onda a+b ima multiplikativan inverzan element. Dokazati.

Rešenje. Neka je

$$b^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ako za a+b postoji multiplikativan inverzni elemenat x, onda je

$$(a+b)x = 1,$$

odakle je

$$x = a^{-1} - a^{-1}bx.$$

Ako sada x na desnoj strani ove jednačine zamenimo sa $a^{-1}-a^{-1}bx$, biće

$$x = a^{-1} - a^{-1}b(a^{-1} - a^{-1}bx) = a^{-1} - a^{-2}b + a^{-2}b^2x .$$

Produžujući ovaj postupak, posle n koraka dobićemo

$$x = a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 - \ldots + (-1)^{n-1}a^{-n}b^{n-1} + (-1)^n a^{-n}b^n x.$$

Kako je $b^n = 0$, poslednji sabirak na desnoj strani ove jednačine jednak je 0, pa je

$$x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a^{-k} b^{k-1} .$$

Množenjem sa a+b se lako proverava da je x zaista multiplikativni inverzni element za a+b.

366. Ako su a i b nilpotentni elementi komutativnog prstena R, dokazati da je a+b takodje nilpotentan elemenat.

Rešenje. a i b su nilpotentni elementi, tj. postoje $n, m \in \mathbb{N}$, tako da je

$$a^n = b^m = 0.$$

S obzirom da je prsten komutativan, biće

$$(a+b)^{n+m} = \sum_{k=o}^{n+m} \binom{n+m}{k} a^{n+m-k} b^k .$$

Medjutim, za $k < m$ je $n+m-k > n$, pa je $a^{n+m-k} = 0$, a za $k \geq m$ je $b^k = 0$. Prema tome,

$$a^{n+m-k}\,b^{k} = 0,\quad k=0,1,2,\ldots,m+n,$$

tj.

$$(a+b)^{n+m} = 0.$$

PRIMEDBA. Primerom pokazati da gornje tvrdjenje ne važi ako prsten nije komutativan.

367. Neka je R komutativan prsten bez nilpotentnih elemenata i neka za elemente $x,y \in R$ važi $x^2 = y^2$ i $x^3 = y^3$. Dokazati da je $x = y$.

Rešenje.

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - 3y^3 + 3x^3 - y^3 = 0,$$

pa pošto R nema nilpotentnih elemenata sledi da je $x - y = 0$, tj. $x = y$.

368. Dokazati da prsten R nema nilpotentnih elemenata ako i samo ako iz $x^2 = 0$ sledi $x = 0$ za svako x iz R.

Dokaz. Pretpostavimo da za svako $x \in R$ iz $x^2 = 0$ sledi $x = 0$ i neka je $a \in R$ nilpotentan element, tj. $a^k = 0$ i $a^{k-1} = b \neq 0$ $(k > 2)$. Tada je

$$b^2 = a^{2k-2} = a^k a^{k-2} = 0,$$

tj. $b = 0$, što je protivrečnost.

Obrnuto tvrdjenje je direktna posledica definicije nilpotentnog elementa.

369. Neka je R prsten u kome za svako $b,c \in R$ za koje je $b^3 = c^2$ sledi da postoji element a takav da je $a^2 = b$ i $a^3 = c$. Dokazati da prsten R nema nilpotentnih elemenata.

Rešenje. Dovoljno je pokazati da iz $b^2 = 0$ sledi $b = 0$ (zadatak 368). Neka je $b^2 = 0$. Tada je i $b^3 = 0$, pa je $b^3 = b^2$. Prema tome, postoji element $a \in R$ takav da je $a^2 = b$ i $a^3 = b$. Tada je

$$b = a^3 = ab = aa^3 = a^2a^2 = b^2 = 0.$$

370. Neka je R prsten takav da svaki nenula polinom sa koeficijentima iz R ima samo konačno mnogo rešenja u R. Dokazati da je R ili konačan prsten ili prsten bez delitelja nule. (J.O.Kiltinen, T.J.Grilliot, Problem 2098, Amer.Math.Monthly, 76(1969), 561-562).

Rešenje. Neka je R beskonačan prsten i neka je za neko $a,b \in R$ $ab = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Preslikavanje $f : r \mapsto br$ je endomorfizam aditivne grupe R. Skupovi Imf i Kerf ne mogu biti oba konačni zbog prve teoreme o izomorfizmu grupa (1.64).

Neka je Imf beskonačan skup, tada polinom $ax = 0$ ima beskonačno mnogo rešenja, jer je svaki elemenat $c \in$ Imf oblika $c = bd$ za neko $d \in R$, pa je rešenje jednačine $ax = 0$.

Ako je Kerf beskonačan skup, onda jednačina $bx = 0$ ima beskonačno mnogo rešenja.

371. Dokazati da je prsten F[[x]] formalnih stepenih redova nad poljem F (zadatak 313), domen integriteta.

372. Neka je R prsten s jedinicom. Element $f = \sum_{k=o}^{\infty} a_k x^k \in$ $\in R[[x]]$ (zadatak 313) ima multiplikativni inverzni element u R[[x]] ako i samo ako a_o ima multiplikativni inverzni element u R. Dokazati.

Rešenje. Neka je $f = \sum_{k=o}^{\infty} a_k x^k$, $g = \sum_{k=o}^{\infty} b_k x^k$. Ako pretpostavimo da je $fg = gf = 1$, onda je po definiciji množenja stepenih redova $a_o b_o = b_o a_o = 1$, pa je b_o inverzni element za a_o. Obrnuto, pretpostavimo da a_o ima multiplikativni inverzni element. $fg = 1$ ako i samo ako važe sledeće jednakosti

$$\begin{aligned}
&a_o b_o = 1,\\
&a_o b_1 + a_1 b_o = 0,\\
&a_o b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_o = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&a_o b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_o = 0,\\
&a_o b_{n+1} + a_1 b_n + \ldots + a_n b_1 + a_{n+1} b_o = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dokažimo indukcijom po n da ovaj sistem ima rešenje po $b_o, b_1, \ldots$. Da je tvrdjenje tačno za n=0 neposredno sledi iz pretpostavke. Ako su izračunati $b_o, b_1, \ldots, b_n$, tada je

$$b_{n+1} = -a_o^{-1}(a_1 b_n + \ldots + a_n b_1 + a_{n+1} b_o)$$

pa za f postoji desni inverzni element g. Analogno se pokazuje da postoji i levi inverzni element, ako postoje i levi i desni inverzni element tada su oni medjusobno jednaki i to je inverzni element za f $(h = h \cdot 1 = h(fg) = (hf)g = 1g = g)$.

373. Neka je R komutativan prsten bez delitelja nule u kome postoji idempotent a različit od nule. Dokazati da je R domen integriteta čija je jedinica a.

Rešenje. Neka je x proizvoljan element iz R. Kako je $a^2 = a$, biće

$$xa^2 = xa,$$

pa je

$$(xa - x)a = 0,$$

odakle je, zbog $a \neq 0$,

$$xa - x = 0,$$

odnosno

$$xa = ax = x.$$

374. Neka je R domen integriteta koji nije polje. Označimo sa $D = \{x \in R \mid x$ je invertibilan ili $x = 0\}$. Nazovimo element $u \in R \setminus D$ univerzalnim deliteljem ako za svako $x \in R$ postoje $x^* \in D$ i $y \in R$ takvi da je $x - x^* = uy$.

Dokazati: ako je R Euklidov prsten, onda u R postoji univerzalni delitelj.

Rešenje. Posmatrajmo neprazan podskup skupa nenegativnih celih brojeva $S = \{\phi(x) \in \mathbb{N} \mid x \in R \setminus D\}$.

Neka je $u \in R \setminus D$ takav da je $\phi(u)$ najmanji prirodan broj u S. Za svaki element $x \in R$ postoje $q, r \in R$ takvi da je $x = qu + r$ i pri tome je $r = 0$ ili $\phi(u) > \phi(r)$.

Ako je $r = 0$ tada možemo uzeti da je $x^* = 0$, a ako je $r \neq 0$

tada $r \notin R \setminus D$, jer je $\phi(u)$ najmanji u S, pa $r \in D$ i možemo uzeti $x^* = r$. Dakle, dobijamo da je u univerzalni delitelj.

Literatura:

K.S.Williams, Note on non-Euclidean principal ideal domains, Math. Mag., 48(1975), 176-177.

375. Ako je prsten R bez nilpotentnih elemenata onda:

a) Za svaki idempotent e i svaki element x prstena R važi $xe = ex$.

b) Ako su $a, b \in R$, onda je $ab = 0$ ako i samo ako je $ba = 0$.

Dokazati.

Rešenje. a) Važi

$$(xe - exe)^2 = xexe - xexe - exexe + exexe = 0,$$

pa je

$$(*) \quad xe - exe = 0.$$

Analogno je

$$(ex - exe)^2 = exex - exexe - exex + exexe = 0,$$

pa je i

$$(**) \quad ex - exe = 0.$$

Ako od (*) oduzmemo (**), dobijamo

$$xe = ex.$$

b) Neka je $ab = 0$. Tada je $(ba)^2 = b(ab)a = 0$, pa je $ba = 0$. Analogno se dokazuje obrnuto.

376. Neka je R komutativan prsten s jedinicom i neka je e idempotent različit od 0 i 1. Dokazati:

a) $1 - e$ je idempotent,

b) Re i $R(1-e)$ su potprsteni sa jedinicom,

c) $R \cong Re \times R(1-e)$ (zadatak 317).

Rešenje. a) $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - e$.

b) Za svako $xe, ye \in Re$ je

$$xe - ye = (x-y)e \quad \text{i} \quad xe \cdot ye = xye^2 = xye,$$

pa je Re potprsten (zadatak 341) a njegova jedinica je e.

Analogno se proverava za $R(1-e)$.

c) Definišimo preslikavanje $f : R \to Re \times R(1-e)$ sa $f : x \mapsto (xe, x(1-e))$.

f je injektivno preslikavanje, jer ako je

$$(xe, x(1-e)) = (ye, y(1-e))$$

tada je

$$xe = ye \quad i \quad x(1-e) = y(1-e),$$

pa kad saberemo dve poslednje jednakosti dobijamo

$$xe + x(1-e) = ye + y(1-e), \quad tj.\ x = y .$$

f je surjektivno preslikavanje, jer ako je

$$(xe, y(1-e)) \in Re \times R(1-e)$$

tada je

$$f(xe + y(1-e)) = (xe, y(1-e)),$$

pošto je

$$(xe + y(1-e))e = xe^2 + y(e-e^2) = xe$$

i

$$(xe + y(1-e))(1-e) = x(e-e^2) + y(1-e)^2 = y(1-e).$$

f je izomorfizam, jer za svako $x, y \in R$ važi

$$f(x+y) = ((x+y)e, (x+y)(1-e)) = (xe+ye, x(1-e) + y(1-e)) =$$

$$= (xe, x(1-e)) + (ye, y(1-e)) = f(x) + f(y)$$

i

$$f(xy) = (xye, xy(1-e)) = (xeye, x(1-e)y(1-e)) =$$

$$= (xe, x(1-e))(ye, y(1-e)) = f(x)f(y).$$

§2.3. IDEALI I HOMOMORFIZMI

377. Dokazati da je u prstenu svaki ideal potprsten, a da svaki potprsten ne mora da bude ideal.

378. Neka je S neprazan podskup prstena R za koji važi

a) Iz $a, b \in S$ sledi $a + b \in S$,

b) Iz $a \in S$ i $r \in R$ sledi $ar, ra \in S$.

Dokazati da S ne mora da bude potprsten (a to znači ni ideal) prstena R.

(Cunkle C.H., Leser W.H., Problem E1472, Amer.Math.Monthly, 68 (1961), 573).

Rešenje. U skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$ pored uobičajenog sabiranja, definišemo množenje sa

$$a \cdot b = 0, \quad \text{za svako } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Skup $\mathbb{Z}$ je u odnosu na sabiranje i ovako definisano množenje prsten. Tada u skupu $\mathbb{Z}$ podskup nenegativnih celih brojeva zadovoljava date uslove ali nije potprsten.

379. Neka je $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Dokazati da je R prsten u odnosu na sabiranje i množenje matrica.

b) Dokazati da je $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ ideal u prstenu R.

c) Naći faktor prsten R/I.

Rešenje. c) Iz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} + I ,$$

sledi da je suskup odredjen matricom $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ jednak suskupu odredjenom sa $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, pa je na osnovu definicije operacija u faktor prstenu i definicije matričnih operacija

$$R/I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} + I \mid c \in \mathbb{Z} \right\} \simeq \mathbb{Z} .$$

380. Ako je $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, dokazati da je preslikavanje

$$f : \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mapsto a,$$

homomorfizam prstena S na prsten $\mathbb{R}$ realnih brojeva. Odrediti jezgro Kerf tog homomorfizma i faktor prsten $S/Kerf$.

381. Neka je R komutativan prsten.

a) Dokazati da je skup N(R) svih nilpotentnih elemenata prstena R ideal u R.

b) Dokazati da faktor prsten R/N(R) nema nilpotentnih elemenata.

Rešenje. a) Koristiti postupak primenjen u zadatku 366.

b) Ako je $a+N(R)$ nilpotentan elemenat faktor prstena $R/N(R)$, tj. $(a+N(R))^n = N(R)$, onda je $a^n+N(R)=N(R)$, pa je $a^n \in N(R)$. Dakle, $(a^n)^s = 0$, odnosno $a \in N(R)$, i $a+N(R) = N(R)$, tj. $a+N(R)$ je nula prstena $R/N(R)$.

382. Dokazati da je prsten celih brojeva $\mathbb{Z}$ prsten glavnih ideala.

Rešenje. Neka je I ideal u prstenu celih brojeva $\mathbb{Z}$. Ako je $I=(0)$, onda je I glavni ideal. Ako je $I \neq (0)$, onda u I mora postojati bar jedan pozitivan ceo broj, pa postoji i najmanji pozitivan ceo broj m. Neka je a bilo koji elemenat ideala I. Tada je

$$a = km + r, \quad 0 \leq r < m.$$

Ako je $r>0$ anda $r = a - km \in I$, a to je protivrečno sa pretpostavkom da je m najmanji ceo pozitivan broj u I. Dakle, r=0, tj. $a = km$, što znači da su svi elementi ideala I umnošci broja m. I je, prema tome, glavni ideal (m).

383. Naći sve neizomorfne homomorfne slike prstena celih brojeva $\mathbb{Z}$.

Uputstvo. Koristeći prethodni zadatak i 2.50. dokazati da skup svih neizomorfnih homomorfnih slika čine svi prsteni $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$, $m \in \mathbb{N}$ i sam prsten $\mathbb{Z}$.

384. Dokazati da je u prstenu celih brojeva $\mathbb{Z}$ za svako $a,b \in \mathbb{Z}$ ideal generisan sa a i b generisan najvećim zajedničkim deliteljem d brojeva a i b, tj. $(a,b)=(d)$. Generalisati.

Uputstvo. Koristiti zadatak 382.

385. Neka je R Euklidov prsten (2.25). Dokazati da je R prsten glavnih ideala.

Rešenje. Neka je I ideal u R različit od (0). Neka je a element iz I takav da je $\phi(a)$ najmanji prirodan broj skupa nenegativnih celih brojeva $\{\phi(x) \mid x \in I \wedge x \neq 0\}$. Neka je $b \in I$. Tada je $b = qa + r$, gde je $r=0$ ili je $\phi(r) < \phi(a)$. Pošto $b \in I$ i $qa \in I$ onda i $r = b - qa \in I$, pa ne može biti $\phi(r) < \phi(a)$. Stoga je $r=0$ i $b=qa$, tj. $I=(a)$.

386. Neka su $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$, S i T definisani u zadatku 344. Dokazati:

a) $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$ je ideal u svakom od prstena $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$, S i T.

b) T je ideal u S, a nije ideal u $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$.

387. Neka je R prsten a I ideal u R. Ako je $a \in R$ dokazati da je $A = \{r \in R \mid ra - ar \in I\}$ potprsten.

Rešenje. Neka je $r_1, r_2 \in A$. Na osnovu zadatka 341. je dovoljno da pokažemo da $r_1 - r_2 \in A$ i $r_1 r_2 \in A$.

Ako $r_1, r_2 \in A$ tada $r_1 a - a r_1, r_2 a - a r_2 \in I$, pa

$$r_1 a - a r_1 - (r_2 a - a r_2) = (r_1 - r_2)a - a(r_1 - r_2) \in I$$

jer je I ideal, tj. $r_1 - r_2 \in A$. Takodje je

$$r_1 r_2 a - a r_1 r_2 = r_1(r_2 a - a r_2) + (r_1 a - a r_1) r_2 \in I,$$

pa $r_1 r_2 \in A$.

388. Neka je C(R) centar prstena R. Dokazati:

a) Ako R nije komutativan i nema jedinicu, onda C(R) ne mora biti ideal.

b) Ako R ima jedinicu ali nije komutativan, onda centar nikad ne može biti ideal.

389. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom u kome je svaki element ili nilpotentan ili ima multiplikativni inverzni element. Dokazati da je R/N(R) polje, gde je sa N(R) označen ideal nilpotentnih elemenata.

Rešenje. Neka je $\bar{x} \in R/N(R)$, $\bar{x} \neq 0$. Tada je $\bar{x} = x + N(R)$ i $x \notin N(R)$, pa x po pretpostavci ima inverzni element x'. Tada je $\bar{x}'$ inverzni element za $\bar{x}$.

390. Neka je $f : R_1 \to R_2$ homomorfizam prstena R_1 u R_2. Neka je I ideal u R_1 takav da je $\mathrm{Ker} f \subseteq I$. Dokazati da je $I = f^{-1}(f(I))$, gde je $f^{-1}(A) = \{x \in R_1 \mid f(x) \in A \subseteq R_2\}$.

391. Neka je $f : R_1 \to R_2$ homomorfizam prstena R_1 u prsten R_2 i neka je $\mathrm{Char} R_1 > 0$. Dokazati da je $\mathrm{Char}(f(R_1)) \leq \mathrm{Char} R_1$.

392. Neka je R prsten sa jedinicom i n prirodan broj. Označimo sa $I_n = \{nx \mid x \in R\}$. Dokazati:

a) I_n je ideal u R.

b) $\mathrm{Char}(R/I_n)$ je delitelj broja n.

Rešenje. b) Ako je 1 jedinica prstena R, onda je $1 + I_n$ jedinica prstena R/I_n. Iz

$$n(1 + I_n) = n1 + I_n = I_n,$$

sledi da je $\mathrm{Char}(R/I_n) \mid n$.

393. Neka su R_1 i R_2 prsteni i neka R_1 sadrži potprsten F_1 koji je polje. Ako je $f : R_1 \to R_2$ homomorfizam, dokazati da je tada ili $F_1 \leq \mathrm{Ker} f$ ili R_2 sadrži potprsten $F_2 \simeq F_1$.

394. Neka su $(R,+,\cdot)$ i $(R',+,\cdot)$ Bulovi prsteni takvi da su polugrupe $(R,\cdot)$ i $(R',\cdot)$ izomorfne. Dokazati da su R i R' izomorfni prsteni.
(F.D.Hammer, Problem 1052, Math. Magazine, 53 (1980), 50-51).

Rešenje. Neka je $f : R \to R'$ izomorfizam polugrupa $(R,\cdot)$ i $(R',\cdot)$. Ako su 0 i 0' nule prstena R i R' respektivno, tada je $f(0) = 0'$. Zaista, ako je $f(a) = 0'$, onda je

$$f(0) = f(a\cdot 0) = f(a)f(0) = 0'f(0) = 0',$$

jer je u svakom prstenu $0a = 0$.

Neka su a i b proizvoljni elementi iz R. Tada postoji element $x \in R$ takav da je

$$(*) \qquad f(a+b) = f(a) + f(b) + f(x)$$

$$(x = f^{-1}(f(a+b)+f(a)+f(b)).$$

Pomnožimo (*) sa f(ab), biće (pri tom koristimo da je svaki Bulov prsten komutativan i karakteristike 2)

$$f(ab)f(a+b) = f(ab)(f(a)+f(b)+f(x)),$$

tj. dobijamo

$$f(ab+ab) = f(ab)+f(ab)+f(abx),$$

odnosno $f(abx) = 0'$, pa je i $abx = 0$ (f je bijekcija).

Ako sad pomnožimo (*) sa f(ax), dobijamo

$$f(ax)f(a+b) = f(ax)(f(a)+f(b)+f(x)),$$

odnosno

$$f(ax+abx) = f(ax)+f(abx)+f(ax),$$

otuda je $f(ax) = 0'$, pa je i $ax = 0$.

Konačno, množeći (*) sa f(x) imamo

$$f(x)f(a+b) = f(x)(f(a)+f(b)+f(x)),$$

$$f(ax+bx) = f(ax)+f(bx)+f(x),$$

$$f(bx) = f(bx) + f(x),$$

pa je

$$f(x) = 0' .$$

Pošto je $f(x) = 0$, identitet (*) postaje

$$f(a+b) = f(a)+f(b),$$

što je i trebalo dokazati.

395. Neka je R prsten i $a \in R$. Odrediti minimalan ideal I prstena R koji sadrži elemenat a:

a) Ako je R komutativan prsten s jedinicom.
b) Ako je R komutativan prsten bez jedinice.
c) Ako je R nekomutativan prsten s jedinicom.
d) Ako je R nekomutativan prsten bez jedinice.

Rezultat.

a) $I = Ra = \{ra \mid r \in R\}$.

b) $I = Ra + \mathbb{Z}a = \{ra + na \mid r \in R,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

c) $I = \{\sum_{i=1}^{k} r_i a s_i \mid r_i, s_i \in R,\ k \in \mathbb{N}\} = RaR$.

d) $I = \{ra + as + na + \sum_{i=1}^{k} r_i a s_i \mid r, s, r_i, s_i \in R,\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\} =$

$= \mathbb{Z}a + Ra + aR + RaR$.

396. Neka je R prsten sa jedinicom i neka je I levi ideal koji sadrži jedinicu. Dokazati da je $I = R$.

Rešenje. Iz $1 \in I$ sledi da za svako $r \in R$, $r = r \cdot 1 \in I$, pa je $R \subseteq I$. Kako je $I \subseteq R$, to je $I = R$.

PRIMEDBA. Analogno se dokazuje odgovarajuće tvrdjenje za desni ideal.

397. Neka je R prsten sa jedinicom i I levi ideal u R. Ako neki element $a \in I$ ima levi multiplikativni inverzni element, dokazati da je tada $I = R$.

Uputstvo. Iz $a \in I$ sledi $1 = a^{-1}a \in I$ i primeniti prethodni zadatak.

PRIMEDBA. Analogno se dokazuje odgovarajuće tvrdjenje za desne ideale.

398. U komutativnom prstenu sa jedinicom R, element a ima multiplikativan inverzni element ako i samo ako a nije sadržano ni u jednom pravom idealu prstena R.

Rešenje. Neka $a \in R$ ima multiplikativan inverzni element, tada na osnovu zadatka 397. iz $a \in I$ sledi da je $I = R$.

Obrnuto, aR je ideal koji po pretpostavci mora biti ceo prsten R, pa postoji $y \in R$ tako da je $ay = 1$.

399. Dokazati da telo (a to znači i polje) ima samo trivijalne ideale.

Rešenje. Neka je I ideal tela T. Ako I sadrži element $a \neq 0$, onda je $a^{-1} \in T$, pa je $aa^{-1} = 1 \in I$. Na osnovu zadatka 396. je tada $I = T$.

400. Navesti primer komutativnog prstena koji ima samo trivijalne ideale, a nije polje.

Rešenje. $(R,+,\cdot)$, gde je $(R,+)$ izomorfno grupi $(\mathbb{Z}_p,+)$ za prost broj p, a $a \cdot b = 0$ za svako $a,b \in R$.

401. Neka je R komutativan prsten s jedinicom koji ima samo trivijalne ideale. Dokazati da je R polje.

Rešenje. Neka je $a \in R$, $a \neq 0$. Tada je glavni ideal $(a) = R$, pa postoji x tako da je $xa = ax = 1$.

402. Dokazati da prsten $F^{n,n}$ matrica formata $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$) nad poljem F, ima samo trivijalne ideale.

Rešenje. Koristićemo činjenicu da se svaka matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n,n}$ može izraziti kao zbir matrica $a_{ij}B_{ij}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, gde je B_{ij} matrica koja na (i,j)-om mestu ima 1 a ostali elementi su nule.

Sa E_{ij} označićemo matricu koja nastaje od jedinične matrice kad se u jediničnoj matrici zamene i-ta i j-ta vrsta.

Neka matrica $A = [a_{ij}] \neq 0$ pripada idealu I i neka je $a_{ij} \neq 0$. Tada je $B_{ii}AB_{jj} = a_{ij}B_{ij}$, pa je

$$E_{il}B_{ii}AB_{jj}E_{jl} = E_{il}(a_{ij}B_{ij})E_{jl} = a_{ij}B_{ll} \in I .$$

Ako je $b_{k\ell}$ proizvoljan element iz F, onda je i

$$E_{k1}\left(\frac{b_{k\ell}}{a_{ij}}E\right)(a_{ij}B_{11})E_{\ell 1} = b_{k\ell}B_{k\ell} \in I.$$

Kako se svaka matrica $B = [b_{ij}] \in F^{n,n}$ može prikazati u obliku

$$B = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} (b_{k\ell}B_{k\ell}) ,$$

a svaki sabirak na desnoj strani gornje jednakosti je iz I, dobili smo da iz pretpostavke da u I postoji matrica $A \neq 0$ sledi da je $I = F^{n,n}$.

403. Neka je R prsten sa jedinicom, I ideal u R i $I^{n,n}$ prsten matrica formata n x n sa elementima iz I.

a) Dokazati da je $I^{n,n}$ ideal u $R^{n,n}$.

b) Dokazati da je svaki ideal prstena $R^{n,n}$ oblika $I^{n,n}$ za neki ideal I iz R.

Uputstvo. b) Dokazati, koristeći se postupkom iz prethodnog zadatka, da elementi u preseku prve vrste i prve kolone svih matrica iz ideala J u $R^{n,n}$ obrazuju ideal I u R i da je $J = I^{n,n}$.

404. U prstenu matrica formata n x n nad poljem F, odrediti sve minimalne leve (desne) ideale.

Uputstvo. Lako se vidi da je skup matrica koje mogu da imaju elemente različite od nule samo u i-toj koloni levi ideal I_i. Dokazati da za svaki levi ideal L koji sadrži matricu koja u i-toj i j-toj koloni, $i \neq j$, sadrži bar po jedan elemenat različit od nule, važi $I_i \subseteq L$, $I_i \neq L$.

Pretpostaviti da je levi ideal $J \subseteq I_i$ i elementarnim transformacijama na vrstama, koje mogu da se realizuju množenjem odgovarajućim matricama sleva, pokazati da je $J = I_i$.

405. U prstenu F[[x]] formalnih stepenih redova nad poljem F (zadatak 313) svaki nenula ideal je oblika (x^k) za neki

nenegativan ceo broj k. Dokazati.

Rešenje. Neka je $f = \sum_{i=o}^{\infty} a_i x^i$ element ideala I takav da je $a_k \neq 0$, $a_i = 0$, i=1,2,...,k-1 i pri tom je f izabrano tako da je k najmanji medju indeksima svih koeficijenata različitih od nule svih stepenih redova iz I.

Ako je k=0, tj. $a_o \neq 0$, onda f ima multiplikativan inverzni element (zadatak 372) i I = F[[x]] .

Ako je k > 0, onda je

$$f = x^k(a_k + a_{k+1}x + \ldots + a_n x^{n-k} + \ldots) = x^k h.$$

Element h ima multiplikativan inverzni elemenat, pa $fh^{-1} = x^k \in I$. Lako se pokazuje da je svako $g \in I$ oblika $x^k g_1$ za neko $g_1 \in F[[x]]$, tj. $I = (x^k)$.

406. Neka je R prsten sa jedinicom. Dokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) R je fon Nojmanov regularan prsten.

b) Svaki glavni levi ideal u R je generisan idempotentom.

c) Svaki konačno generisan levi ideal u R je generisan idempotentom.

Rešenje. a) $\Rightarrow$ b)

Neka je I = Ra glavni levi ideal generisan sa $a \in R$ i neka je element $a' \in R$ takav da je $aa'a = a$. Tada je $e = a'a$ idempotent i $e \in Ra$, pa je $Re \subseteq Ra$. Iz $aa'a = a$ sledi $a \in Ra'a = Re$, pa je $Ra \subseteq Re$, dakle, Ra = Re.

b) $\Rightarrow$ c)

Dovoljno je da pokažemo da je svaki konačno generisani levi ideal, glavni levi ideal, a da bismo to pokazali dovoljno je dokazati da je proizvoljan levi ideal generisan sa dva elementa glavni levi ideal. Jednostavno se pokazuje da je levi ideal generisan sa $a,b \in R$ skup Ra + Rb.

Neka je e idempotent takav da je Ra = Re. Kako je

$$b = be + 1 \cdot b(1-e) \in Re + Rb(1-e),$$

biće

$$Re + Rb(1-e) \supseteq Ra \quad i \quad Re + Rb(1-e) \supseteq Rb,$$

pa je

(1) $Ra + Rb \subseteq Re + Rb(1-e)$.

Takodje je

(2) $Re \subseteq Ra + Rb$,

a zbog $Re = Ra$ sledi da je $-be = ca$, za neko $c \in R$, pa je

$$b(1-e) = b - be = ca + 1b \in Ra + Rb$$

i

(3) $Rb(1-e) \subseteq Ra + Rb$.

Iz (2) i (3) sledi

(4) $Ra + Rb \supseteq Re + Rb(1-e)$,

a iz (1) i (4) je

$$Ra + Rb = Re + Rb(1-e).$$

Po pretpostavci postoji idempotent f takav da je $Rb(1-e) = Rf$, pa je $f = rb(1-e)$ za neko $r \in R$. Prema tome,

$$fe = rb(1-e)e = rb(e-e^2) = 0.$$

Neka je $g = (1-e)f$. Za g važi

$$g^2 = (1-e)f(1-e)f = (1-e)(f-fe)f = (1-e)f^2 = (1-e)f = g,$$

tj. g je idempotent, a očigledno je $ge = eg = 0$. Kako je $g \in Rf$ neposredno sledi da je $Rg \subseteq Rf$, a zbog

$$fg = f(1-e)f = f - (fe)f = f$$

je i $Rf \subseteq Rg$, pa je $Rg = Rf$.

Dokažimo da je

$$Re + Rg = R(e+g) = Ra + Rb.$$

$R(e+g) \subseteq Re + Rg$,

a zbog $eg = ge = 0$ je za svako $r,s \in R$

$re + sg = (re + sg)(e + g) \in R(e+g)$ tj.

$Re + Rg \subseteq R(e+g)$, pa je $Re + Rg = R(e+g)$, odnosno ideal

$Ra + Rb = R(e+g)$

je glavni levi ideal generisan idempotentom e+g (da je e+g idempotent neposredno se proverava).

c) $\Rightarrow$ a)

Neka je $a \in R$ i neka je e idempotent takav da je $Ra = Re$. Tada je $e = ra$ za neko $r \in R$, pa je $ae = ara$. Iz $a = se$ za neko $s \in R$, sledi da je

$$ae = se^2 = se = a,$$

pa je konačno

$$ara = ae = a,$$

tj. R je fon Nojmanov regularan prsten.

407. Neka je R prsten bez delitelja nule u kome je svaki potprsten ideal. Dokazati da je R komutativan prsten.

Rešenje. Neka je $a \neq 0$, $a \in R$. Posmatrajmo potprsten S generisan elementom a. On je oblika

$$S = \{x \in R \mid x = \sum_{i=1}^{n} k_i a^i \ , \ k_i \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}\}$$

i S je očigledno komutativan.

Pošto je S ideal, to je $ar \in S$ za svako $r \in R$, pa je $a(ar) = (ar)a$, tj. $a(ar - ra) = 0$. Prema tome, $ar = ra$, jer R nema delitelja nule.

408. Neka je R nula-prsten definisan u zadatku 308. Dokazati da je svaka podgrupa aditivne grupe (R,+) ideal prstena R.

409. Neka su I_1 i I_2 ideali prstena R. Pokazati da su sledeći skupovi takodje ideali prstena R:

a) $I_1 \cap I_2$,

b) $I_1 + I_2 = \{a + b \mid a \in I_1, \ b \in I_2\}$,

c) $I_1 \cdot I_2 = \{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \mid a_i \in I_1, \ b_i \in I_2, \ n \in \mathbb{N}\}$,

(tj. $I_1 \cdot I_2$ je skup svih konačnih suma proizvoda a_ib_i, $a_i \in I_1$, $b_i \in I_2$).

410. Dokazati da u prstenu celih brojeva za svaka tri ideala I_1, I_2 i I_3 važi

a) $I_1(I_2+I_3) = I_1\cdot I_2 + I_1\cdot I_3$,

b) $I_1 \cap (I_2+I_3) = (I_1 \cap I_2)+(I_2 \cap I_3)$,

c) $(I_1 \cap I_2)(I_1+I_2) = I_1\cdot I_2$.

PRIMEDBA. U proizvoljnom prstenu a) važi a b) i c) ne važe.

411. Neka je R komutativan prsten s jedinicom a I,J i K ideali u R. Dokazati:

a) Da je $I\cdot J \subseteq I \cap J$.

b) Ako je $I+J=R$, tada je $I\cdot J = I \cap J$.

c) Ako je M maksimalan ideal i $I \not\subseteq M$ tada je $M\cdot I = M \cap I$.

d) Ako su M_1 i M_2 različiti maksimalni ideali, tada je

$M_1\cdot M_2 = M_1 \cap M_2$.

e) $(I\cdot J)\cdot K = I\cdot(J\cdot K)$.

Rešenje. a) Neposredno sledi iz definicije ideala.

b) S obzirom na a) dovoljno je dokazati da je $I \cap J \subseteq I\cdot J$.

Pošto je $I+J=R$, postoje $x_i \in I$ i $x_j \in J$ takvi da je $1 = x_i + x_j$. Neka je $r \in I \cap J$, tada je $r = r\cdot 1 = rx_i + rx_j$. $rx_j \in I\cdot J$ jer $r \in I$ a $x_j \in J$, analogno važi za $rx_i = x_i r$, pa i $r \in I\cdot J$.

c) Neposredno sledi iz b) i činjenice da je M+I ideal (zadatak 409) i da iz $I \not\subseteq M$ sledi $M+I=R$, jer je M maksimalan ideal.

d) Iskoristiti c) i činjenicu da ako su M_1 i M_2 različiti maksimalni ideali tada $M_1 \not\subseteq M_2$.

412. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom i I, J_1 i J_2 ideali i R takvi da je $I+J_1 = I+J_2 = R$. Dokazati da je:

a) $I+J_1\cdot J_2 = I+J_1 \cap J_2 = R$.

b) $I^n + J_1^m = R$, $n,m \in \mathbb{N}$, ($I^n = I\cdot I\cdot\ldots\cdot I$ n-puta).

Rešenje. a) Iz uslova zadatka sledi da postoje a', $a'' \in I$, $b_1' \in J_1$ i $b_2'' \in J_2$ takvi da je

$$a' + b_1' = 1 \quad \text{i} \quad a'' + b_2'' = 1,$$

pa je

$$1 = (a'+b_1')(a''+b_2'') = a'a'' + a'b_2'' + a''b_1' + b_1'b_2'' =$$

$$= a_3 + b_1'b_2'' \in I + J_1\cdot J_2, \quad a_3 \in I.$$

Pošto je $J_1\cdot J_2 \subseteq J_1 \cap J_2$, sledi da je i

$$I + J_1 \cap J_2 = R.$$

b) Koristiti indukciju po n i m.

413. Neka su u prstenu R, I_1 i I_2 ideali takvi da je

(i) $I_1 + I_2 = R$,

(ii) $I_1 \cap I_2 = \{0\}$.

Dokazati da je prsten R izomorfan sa direktnim proizvodom (zadatak 317) ideala I_1 i I_2,

$$(R,+,\cdot) \cong (I_1 \times I_2, +, \cdot).$$

Rešenje. Definišimo preslikavanje $f : I_1 \times I_2 \to R$ sa $f:(a_1, a_2) \mapsto a_1 + a_2$.

Zbog uslova (i) f je surjekcija.

Ako su $a_1, b_1 \in I_1$, $a_2, b_2 \in I_2$ takvi da je $f((a_1,a_2)) = f((b_1,b_2))$, onda je $a_1+a_2 = b_1+b_2$, $a_1-b_1 = b_2-a_2$, pa je $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 \in I_1 \cap I_2$. Prema tome, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, pa je f injekcija. Dakle, f je bijekcija.

Ostaje da se dokaže da je f homomorfizam.

$$f((a_1,a_2)+(b_1,b_2)) = f((a_1+b_1,a_2+b_2)) = a_1+b_1+a_2+b_2 =$$

$$= a_1+a_2+b_1+b_2 = f((a_1,a_2))+ f((b_1,b_2)).$$

Iz $I_1\cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2 = \{0\}$ (zadatak 412) sledi da je $ab=0$ za svako $a \in I_1$ i $b \in I_2$, pa je

$$f((a_1,a_2)(b_1,b_2)) = f((a_1b_1,a_2b_2,)) = a_1b_1 + a_2b_2 =$$

$$= a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 = a_1(b_1+b_2) +$$

$$+ a_2(b_1+b_2) = (a_1+a_2)(b_1+b_2) = f((a_1,a_2))\cdot f((b_1,b_2)).$$

Dakle, f je izomorfizam prstena R i direktnog proizvoda $I_1 \times I_2$.

414. Neka su R_1 i R_2 prsteni sa jedinicom. Dokazati da je u prstenu $R_1 \times R_2$ (zadatak 317) podskup I ideal ako i samo ako je $I = I_1 \times I_2$, gde je I_1 ideal prstena R_1, a I_2 ideal prstena R_2.

415. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom koji je direktan proizvod konačnog broja polja.

Dokazati da prsten R ima konačno mnogo ideala.

416. Neka je I ideal komutativnog prstena sa jedinicom R. Dokazati da je skup $S = 1 + I$ multiplikativno zatvoren.

417. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom i $S_1 \subseteq S_2$ dva multiplikativno zatvorena skupa u R. Dokazati da je $S_1^{-1}(S_2^{-1}R) = S_2^{-1}(S_1^{-1}R) = S_2^{-1}R$. ($S^{-1}R$ je definisano u 2.58.)

418. Neka je S multiplikativno zatvoren skup komutativnog prstena R, a I i J ideali u R.

Dokazati:

(i) $S^{-1}I = \{x \mid x=a/s,\ a \in I,\ s \in S\}$ je ideal u $S^{-1}R$ (v. definiciju 2.58),

(ii) $S^{-1}(I+J) = S^{-1}I + S^{-1}J$,

(iii) $S^{-1}(I \cdot J) = (S^{-1}I) \cdot (S^{-1}J)$,

(iv) $S^{-1}(I \cap J) = S^{-1}I \cap S^{-1}J$.

Uputstvo. Koristiti

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i/s) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)/s,$$

$$\sum_{i=1}^{m} (a_i b_i/s) = \sum_{i=1}^{m} (a_i/s)(b_i s/s),$$

$$\sum_{i=1}^{k} (c_i/s_i) = \left(\sum_{i=1}^{k} c_i s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_k\right)/s_1 s_2 \cdots s_k .$$

§2.4. MAKSIMALNI I PROSTI IDEALI

419. U prstenu celih brojeva $\mathbb{Z}$ odrediti sve maksimalne ideale.

Rezultat. Ideal I je maksimalan ako i samo ako je $I = (p)$, gde je p prost broj.

420. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom, a M njegov ideal. Dokazati da je M maksimalan ideal ako i samo ako je R/M polje.

Rešenje. Neka je M maksimalan ideal prstena R i neka je $a \in R$, $a \notin M$. Jednostavno se proverava da je skup $M + aR$ svih elemenata oblika $m+ax$, $m \in M$, $x \in R$, ideal u R. Taj ideal sadrži M i $a \notin M$, pa kako je M maksimalan ideal sledi da je konstruisani ideal ceo prsten R. Tom idealu pripada i jedinica, pa je za neko $b \in R$

$$1 = m + ab.$$

To znači da je u količnik prstenu R/M,

$$(a+M)(b+M) = ab+M = 1-m+M = 1+M.$$

Dakle, u R/M za bilo koji suskup $a+M \neq M$ postoji multiplikativni inverzni elemenat b+M, R/M je komutativan prsten sa jedinicom (jer je R komutativan prsten s jedinicom), pa je R/M polje.

Obrnuto, pretpostavimo da je R/M polje. Ako M nije maksimalan ideal postoji ideal I različit od M i R koji sadrži M. Ako je a proizvoljan elemenat iz R, a b proizvoljan elemenat iz $I \setminus M$, onda, s obzirom da je R/M polje, postoji suskup x+M takav da je

$$a + M = (b+M)(x+M).$$

Odavde je

$$a - bx \in M,$$

a kako je $M \subseteq I$, sledi da $a - bx \in I$. Medjutim $b \in I$, pa odatle sledi $a \in I$, tj. $I = R$, što je kontradikcija. Prema tome, M je maksimalan ideal.

421. U komutativnom prstenu s jedinicom R pravi ideal M je maksimalan ako i samo ako za svako $r \notin M$ postoji $x_r \in R$ tako da je $1 + rx_r \in M$. Dokazati.

Dokaz. Neka je M maksimalan ideal. Tada je za $r \notin M$ $M + rR = R$, jer je $M + rR$ ideal koji strogo sadrži M. Tada je za neko $m \in M$ i $x \in M$, $m + rx = 1$, pa je za $x_r = -x$, $1 + rx_r \in M$.

Obrnuto, ako za svako $r \notin M$ postoji $x_r \in R$ takvo da je $1 + rx_r = m \in M$, tada ideal $M + rR$ sadrži 1, pa je $M + rR = R$ na osnovu zadatka 396. Dakle, ako $M \subseteq I$ i $M \neq I$, onda za $r \in I \setminus M$, $rR \subseteq I$ i $M + rR \subseteq I$, tj. $I = R$ pa je M maksimalan ideal.

422. Neka je P pravi ideal komutativnog prstena R. Dokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) Za svako $a,b \in R$ iz $ab \in P$ sledi $a \in P$ ili $b \in P$.

(ii) Za svaka dva ideala A,B prstena R iz $A \cdot B \subseteq P$ sledi $A \subseteq P$ ili $B \subseteq P$, (v. 2.36. i 2.37).

Rešenje. (i) $\Rightarrow$ (ii) Neka $AB \subseteq P$, ali $A \not\subseteq P$ i $B \not\subseteq P$. Tada postoje $a \in A \setminus P$ i $b \in B \setminus P$, pa zbog (i) $ab \notin P$, no $ab \in AB \subseteq P$, što je kontradikcija.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ako $ab \in P$ tada i $(a)(b) \subseteq P$. Zbog (ii) $(a) \subseteq P$ ili $(b) \subseteq P$, pa $a \in P$ ili $b \in P$ jer $a \in (a)$ i $b \in (b)$.

423. U komutativnom prstenu s jedinicom R, pravi ideal I je prost ako i samo ako je skup $R \setminus I$ multiplikativno zatvoren.

Rešenje. Na osnovu zakona kontrapozicije za implikaciju $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, sa $p \equiv ab \in I$, $q \equiv (a \in I \vee b \in I)$, odmah se dobija traženi zaključak.

424. Dokazati da je ideal P komutativnog prstena s jedinicom R prost , ako i samo ako je R/P domen integriteta.

Rešenje. Neka je P prost ideal i neka su $\bar{a}, \bar{b} \in R/P$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$. Ako je $\bar{a} = a + P$, $\bar{b} = b + P$, pošto je $\bar{a} \neq \bar{0}$ i $\bar{b} \neq \bar{0}$, sledi $a \notin P$ i $b \notin P$. Tada $ab \notin P$, jer je P prost ideal, pa je $\bar{a}\bar{b} \neq \bar{0}$ (videti prethodni zadatak).

Obrnuto, ako je $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ a $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$, to znači da $a \notin P$, $b \notin P$, a $ab \in P$, tj. P nije prost ideal.

425. Dokazati da je u komutativnom prstenu s jedinicom svaki maksimalan ideal prost.

426. Dokazati da je u domenu integriteta R u kome su svi ideali glavni, svaki prost nenula ideal maksimalan.

Rešenje. Neka je $(x) \neq 0$ prost ideal i $(y) \supseteq (x)$, $(y) \neq (x)$. $x \in (y)$, tj. $x = yz$, a tada i $yz \in (x)$, pa pošto je (x) prost ideal (v. 2.37) to ili $y \in (x)$ ili $z \in (x)$.

Pošto $y \notin (x)$, jer (y) strogo sadrži (x), to $z \in (x)$ i neka je $z = vx$. Tada je

$$x = yz = yvx,$$

tj.

$$x(1 - yv) = 0.$$

R je domen integriteta pa je $yv = 1$, tj. y ima multiplikativni inverzni element, pa je $(y) = R$.

427. Neka je R domen integriteta u kome svaki skup S ideala sadrži ideal I takav da nijedan drugi ideal $J \in S$ nije sadržan u I (ideal I nazivamo minimalni element skupa S). Dokazati da je R polje.

Rešenje. Neka je $a \in R$, $a \neq 0$. Posmatrajmo skup ideala

$$\{(a), (a^2), \ldots, (a^n), \ldots\}$$

Očigledno važi $(a) \supseteq (a^2) \supseteq \ldots \supseteq (a^n) \supseteq \ldots$. Neka je (a^k) minimalni medju njima. Tada je $(a^k) \supseteq (a^{k+1})$, medjutim, zbog minimalnosti ideala (a^k) mora biti $(a^k) = (a^{k+1})$. Odatle je $a^k = a^{k+1}r$, za neko $r \in R$, pa je $a^k(1 - ra) = 0$. R je domen integriteta, pa je $ra = 1$, tj. a ima multiplikativni inverzni element. Prema tome, R je polje.

428. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom u kome svaki skup ideala ima minimalan element u odnosu na inkluziju (v. prethodni zadatak). Dokazati da je u R svaki prost ideal maksimalan.

Uputstvo. Dokazati da se uslov o maksimalnosti očuvava u faktor prstenu, formirati faktor prsten R/P, gde je P prost ideal. R/P je domen integriteta (2.54), a na osnovu prethodnog zadatka R/P je polje, pa je zbog zadatka 420. P maksimalan ideal.

429. Neka je R domen integriteta sa konačnim brojem ideala. Dokazati da je R polje.

Uputstvo. Ako je broj ideala u R konačan, tada svaki skup ideala ima minimalan element. Primeniti zadatak 427.

430. Neka je R komutativan prsten s jedinicom u kome je svaki ideal prost. Dokazati da je R polje.

Rešenje. $(0) = \{0\}$ je prost ideal po pretpostavci, pa iz $ab=0$ sledi $a=0$ ili $b=0$, tj. R je domen integriteta.

Za $a\neq 0$ (a^2) je prost ideal, pa iz $aa=a^2 \in (a^2)$ sledi $a \in (a^2)$. Znači da postoji $x \in R$ takvo da je $a=a^2x$, tj. $a(1-ax)=0$. R nema delitelje nule pa je $1-ax=0$, tj. $ax=1$ i $x=a^{-1}$.

431. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom čija je svaka homomorfna slika domen integriteta. Dokazati da je R polje.

Uputstvo. Koristiti prethodni zadatak, činjenicu da je svaka homomorfna slika prstena R izomorfna faktor prstenu R/I i zadatak 424.

432. Neka je R komutativan prsten i neka su $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ideali u R a P prost ideal u R. Dokazati da iz

$$P \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i \quad \text{sledi} \quad P \supseteq I_k,$$

za neko $k=1,\ldots,n$.

Rešenje. Neka za svako $k=1,2,\ldots,n$ $I_k \not\subseteq P$, tada postoje $x_k \in I_k$ takvi da $x_k \notin P$ za $k=1,\ldots,n$. Ali tada

$$x_1x_2\ldots x_n \in I_1 \cdot I_2 \cdot \ldots \cdot I_n \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq P ,$$

pa pošto je P prost ideal mora neki $x_k \in P$, što je kontradikcija.

433. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom, I proizvoljan ideal u R, a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ prosti ideali u R. Dokazati da iz

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i \quad \text{sledi} \quad I \subseteq P_j \quad \text{za neko } j \in \{1,2,\ldots,n\} .$$

Rešenje. Dokaz ćemo dati indukcijom po broju n prostih ideala.

Za $n=1$ je tvrdjenje očigledno tačno.

Pterpostavimo da je tvrdjenje tačno za $n-1$ i neka je $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. Pretpostavimo sada da je za svako $j=1,2,\ldots,n$

$$I \not\subseteq P_1 \cup \ldots \cup P_{j-1} \cup P_{j+1} \cup \ldots \cup P_n = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} P_i .$$

Neka je $a_j \in I \setminus \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} P_i$, $j=1,2,\ldots,n$, a kako $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ sledi da $a_j \in P_j$. Posmatrajmo element $x = a_1 + a_2a_3\ldots a_n \in I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. Pošto $x \in \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, postoji $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ tako da je $x \in P_j$.

Ako je $j=1$ tada $a_2a_3\ldots a_n = x-a_1 \in P_1$, a pošto je P_1 prost ideal sledi da za neko $k \in \{2,\ldots,n\}$ $a_k \in P_1$, što protivureči izboru $a_2,\ldots,a_n$.

Ako je $j>1$ tada $a_1 = x-a_2a_3\ldots a_n \in P_j$, što je takodje kontradikcija.

Iz ovih protivrečnosti sledi da pretpostavka za svako $j=1,2,\ldots,n$

$$I \not\subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} P_i$$

nije tačna. Prema tome, za neko $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ je

$$I \subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} P_i ,$$

tj. I je sadržano u uniji (n-1)-og prostog ideala, pa po indukcijskoj pretpostavci I je sadržano u nekom od tih ideala. Dakle, iz pretpostavke da tvrdjenje važi za n-1 dokazali smo da važi za n, pa je time dokaz dovršen.

PRIMEDBA. Za n=2 ne mora da se pretpostavi da su ideali P_1 i P_2 prosti.

434. Neka je u komutativnom prstenu sa jedinicom R P prost ideal takav da je R/P konačan prsten. Dokazati da je P maksimalan ideal.

Uputstvo. Koristiti zadatke 350. i 424.

435. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom takav da za svako $x \in R$ važi $x^n = x$, gde prirodan broj n zavisi od x. Dokazati da je u prstenu R svaki prost ideal maksimalan.

Rešenje. Neka je I prost ideal u R. Tada je R/I domen integriteta (zadatak 424). Označimo sa f prirodni homomorfizam $f : R \to R/I$. Neka je $x \in R$ proizvoljan element takav da je $f(x) \neq 0$ (sa 0 označavamo neutralni element u prstenu R/I, tj. klasu I). U R/I će takodje važiti $(f(x))^n = f(x)$, pa je $f(x)((f(x))^{n-1}-1) = 0$.

Pošto je R/I domen integriteta i $f(x) \neq 0$ sledi da je $(f(x))^{n-1}-1 = 0$, pa je za $n > 2$ $f(x)((f(x))^{n-2} = 1$, tj. $(f(x))^{n-2}$ je multiplikativni inverzni elemenat za f(x) i R/I je polje. Ako je n=2, tada je $f(x) = 1$, pa je i $(f(x))^{-1} = f(x)$ i R/I je opet polje. Na osnovu zadatka 420. sledi da je I maksimalan ideal, što je trebalo dokazati.

(Za prirodni homomorfizam $f : R \to R/I$ je $f(x) = 0 \iff x \in I$, pa ne može biti za svako $x \in R$ $f(x) = 0$, jer bi to značilo da je $I = R$, a u definiciji prostog ideala se zahteva da je $I \neq R$).

PRIMEDBA. Da bi se pojednostavilo rešenje ovog zadatka data je pretpostavka de je R komutativan prsten. Medjutim, ova pretpostavka je suvišna s obzirom na teoremu N.Džejkobsona (N. Jacobson): ako za svaki element x prstena postoji prirodan broj $n(x) > 1$ takav da je $x^{n(x)} = x$, onda je prsten komutativan.

Literatura:

I.Herstein, An elementary proof of a theorem of Jacobson, Duke Math. Journal, 21(1954), 45-48.

436. Neka je $\mathbb{Z}[x]$ prsten polinoma sa celim koeficijentima i p prost broj. Dokazati:

a) Ideal I generisan sa x i p nije glavni.

b) I je maksimalan ideal.

c) Glavni ideal (p) je prost, a nije maksimalan.

437. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom a I maksimalan ideal u R.

Dokazati da prsten R/I^k, $k \in \mathbb{N}$, ima tačno jedan maksimalan ideal i to je ideal I/I^k. ($I^k = I \cdot I \cdot \ldots \cdot I$, k puta).

Rešenje. Iz definicije ideala neposredno sledi $I \supseteq I^k$. S obzirom na 2.53. dovoljno je dokazati da ne postoji drugi maksimalan ideal u R, različit od I, koji sadrži I^k. Neka je J, $J \neq I$, maksimalan ideal u R koji sadrži I^k. Pošto je maksimalan ideal u komutativnom prstenu prost (zadatak 425) iz karakterizacije prostog ideala (zadatak 422) sledi da je $I \subseteq J$, pa je $I = J$.

438. Neka je R prsten sa jedinicom koji ima tačno jedan maksimalan levi ideal M. Dokazati:

a) M je skup svih elemenata iz R koji nemaju levi multiplikativni inverzni element.

b) Nijedan element iz M nema desni multiplikativni inverzni element.

Rešenje. a) Nijedan element iz M nema levi multiplikativni inverzni element, jer $1 \notin M$. Obrnuto, ako x iz R nema levi multiplikativni inverzni element, tada je $Rx \neq R$, pa je $Rx \subseteq M$ jer se svaki levi ideal sadrži u nekom maksimalnom levom

idealu (2.26). No tada je i $1\cdot x = x \in M$, pa je M skup ovih elemenata iz R koji nemaju leve multiplikativne inverzne elemente.

b) Pretpostavimo da je $xy = 1$ za $x \in M$ i $y \in R$. Tada je

$$(1 - yx)y = y - y(xy) = y - y = 0.$$

S druge strane $yx \in M$, pa $1 - yx \notin M$ (jer bi inače $yx + (1-yx) = 1$ pripadalo M), a to znači da $1 - yx$ ima levi multiplikativni inverzni elemenat z. Otuda sledi

$$y = z(1-yx)y = z\cdot 0 = 0,$$

što je protivrečno sa $xy = 1$, pa nijedan element $x \in M$ nema desni multiplikativni inverzni element.

PRIMEDBA. Analogno se dokazuju odgovarajuća tvrdjenja za desne ideale.

439. Dokazati da prsten sa jedinicom R ima jedinstven maksimalan levi ideal M ako i samo ako je $R \setminus M$ skup svih invertibilnih elemenata u R.

Rešenje. Neka R ima jedinstveni maksimalan levi ideal M i neka je $x \notin M$. Tada, na osnovu prethodnog zadatka, postoji $y \in R$ takvo da je $yx = 1$.

Bar jedan od elemenata xy ili 1-xy ima levi inverzni element, jer bi inače oba pripadala idealu M, pa bi i njihov zbir pripadao M, tj. $1 \in M$, što je protivrečnost. (Iz $1 \in M$ sledi $M = R$ (zadatak 396), a kako je M maksimalan levi ideal mora biti $M \neq R$). 1-xy ne može imati levi multiplikativni inverzni element s, jer bismo imali $s(1-xy) = 1$, a tada je $x = s(1-xy)x = sx - sx(yx) = sx - sx\cdot 1 = 0 \in M$, što protivreči pretpostavci $x \notin M$. Dakle, postoji $z \in R$ tako da je $zxy = 1$, pa je $zxyx = x$, tj. $x = zx(yx) = zx\cdot 1 = zx$, što konačno daje $xy = 1$, pa je x invertibilan element. Na osnovu prethodnog zadatka, u M nema invertibilnih elemenata pa je $R \setminus M$ skup svih invertibilnih elemenata.

Obrnuto, neka levi ideal M ima osobinu da je $R \setminus M$ skup svih invertibilnih elemenata. Tada iz $J \not\subseteq M$ za neki levi ideal J, sledi da je $J = R$, jer J sadrži element $x \notin M$ tj. invertibilan element (zadatak 397). Prema tome, sem M drugih prvih levih ideala (koji nisu sadržani u M) nema u R, pa je M jedinstven maksimalan levi ideal.

PRIMEDBA. Analogno se dokazuje odgovarajuće tvrdjenje za desne ideale.

440. Neka je R prsten sa jedinicom koji ima jedinstven maksimalan levi ideal M. Dokazati:

a) M je dvostrani ideal koji sadrži sve prave leve i sve prave desne ideale prstena R.

b) R/M je telo.

Rešenje. a) Za proizvoljno $r \in R$, Mr je levi ideal, pa pošto je M jedinstven maksimalan levi ideal mora biti $Mr \subseteq M$, tj, M je dvostrani ideal. Preostaje još da dokažemo da M sadrži sve prave desne ideale prstena R.

Ako je I pravi desni ideal u R, onda nijedan element iz I ne može imati desni multiplikativni inverzni element (jer bi na osnovu zadatka 397. bilo $I = R$), a to znači ni multiplikativni inverzni element. Na osnovu prethodnog zadatka sledi da je $I \subseteq M$.

b) Neka je $x + M \in R/M$, $x + M \neq 0 + M = M$, pa $x \notin M$. Na osnovu zadatka 439. x ima multiplikativni inverzni element y, pa je

$$(x + M)(y + M) = xy + M = 1 + M,$$

što znači da je R/M telo.

441. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom, P prost ideal u R. Dokazati da $S^{-1}R$ ima jedinstven maksimalan ideal $S^{-1}P$, ako je $S = R \setminus P$.

442. Neka je R prsten sa jedinicom u kome zbir dva elementa koji nemaju multiplikativne inverzne elemente takodje nema multiplikativni inverzni element. Dokazati da R ima jedinstven maksimalan levi ideal.

443. Neka je R prsten sa jedinicom koji ima tačno jedan maksimalan levi ideal M. Dokazati da su u R jedini idempotenti 0 i 1.

Rešenje. Neka je $a \in R$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, idempotent. Tada je i $1-a$ takodje idempotent: $(1-a)^2 = 1-2a+a = 1-a$. Takodje je $a(1-a) = 0$, tj. a i $1-a$ su delitelji nule, pa a i $1-a$ nemaju multiplikativne inverzne elemente. Na osnovu zadatka 439. sledi da $a \in M$ i $1-a \in M$, pa je i $1 = a + (1-a) \in M$, tj. $M = R$, što je protivrečnost.

444. Neka je M maksimalan ideal u komutativnom prstenu sa jedinicom R u kome za svako $x \in M$, $1+x$ ima multiplikativan inverzni element. Dokazati da je M jedinstven maksimalan ideal.

Rešenje. Ako $y \in R \setminus M$, tada je $M + yR = R$ jer je M maksimalan ideal, pa je $x + yt = 1$ za neko $t \in R$, odnosno $yt = 1 - x = 1 + (-x)$. Prema tome, yt ima multiplikativni inverzni element y', pa je ty' multiplikativni inverzni element za y. Dakle, svaki element iz $R \setminus M$ je invertibilan. U M nema invertibilnih elemenata (jer bi u tom slučaju bilo $M = R$), pa je $R \setminus M$ skup svih invertibilnih elemenata. Na osnovu zadatka 439. M je jedinstven maksimalan ideal.

445. Neka je $F[[x]]$ prsten formalnih stepenih redova nad poljem F (zadatak 313). Dokazati da $F[[x]]$ ima jedinstven maksimalan ideal.

Uputstvo. Koristiti zadatak 405.

§2.5. PRSTEN POLINOMA

446. Ispitati svodljivost sledećih polinoma nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$:

a) $x^2 + 4x + 2$, b) $x^3 - x^2 - 4$,
c) $x^4 - 10x^2 + 1$, d) $4x^3 - 2x^2 + x + 1$,
e) $x^3 + 3x^2 + 6x + 3$, f) $x^{50} + 14x - 56$.

Rešenje. a) Ako je polinom drugog stepena svodljiv nad nekim poljem, tada je on proizvod dva linearna polinoma sa koeficijentima iz tog polja, tj. on ima nulu u datom polju. Medjutim,

$x^2 + 4x + 2$ nema racionalne nule, pa je, prema tome, nesvodljiv nad poljem $\mathbb{Q}$.

b) Slično, ako je polinom trećeg stepena svodljiv nad nekim poljem, onda on mora imati bar jedan linearan faktor, tj. bar jednu nulu u tom polju. Jedine moguće racionalne nule polinoma $x^3 - x^2 - 4$ su faktori broja 4, tj. $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Proverom utvrdjujemo da je $x_1 = 2$ nula datog polinoma, koji je, prema tome, svodljiv nad $\mathbb{Q}$

$$x^3 - x^2 - 4 = (x-2)(x^2 + x + 2).$$

c) Ako je polinom četvrtog stepena svodljiv nad nekim poljem, onda postoje dve mogućnosti. Ili dati polinom ima jedan linearan faktor sa koeficijentima iz polja (a to znači da ima nulu u datom polju) ili je jednak proizvodu dva kvadratna polinoma.

± 1 nisu nule datog polinoma, pa on nema racionalne nule. Prema tome, ako je dati polinom svodljiv, on je proizvod dva polinoma drugog stepena:

$$x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

gde su $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ (poznato je da ako se polinom čiji su koeficijenti celi brojevi može rastaviti u proizvod polinoma sa racionalnim koeficijentima, onda se on može rastaviti i u proizvod polinoma sa celim koeficijentima). Odatle je

$$a + c = 0,\ b + ac + d = -10,\ bc + ad = 0,\ bd = 1.$$

Iz ovog sistema jednačina lako se dobija da mora biti ili $a^2 = 10 \pm 2$, medjutim takav ceo broj a ne postoji, ili je $a = 0$ i $b^2 + 10b + 1 = 0$, što takodje nema rešenja u $\mathbb{Z}$, pa, prema tome, dati polinom je nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$.

d) Polinom je nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$.

e) Prost broj 3 je delitelj svih koeficijenata polinoma sem vodećeg, 3^2 nije delitelj slobodnog člana, pa je dati polinom nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$ na osnovu Ajzenštajnovog (Eisenstein) kriterijuma 2.71.

f) Nesvodljiv na osnovu Ajzenštajnovog kriterijuma.

447. Polinome

$f(x) = x^4 - 1$ i $g(x) = 4x^5 + 4x^4 - 13x^3 - 11x^2 + 10x + 6$

rastaviti u proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem

a) $\mathbb{Q}$, b) $\mathbb{R}$, c) $\mathbb{C}$.

Rezultat.

$f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ nad $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$,

$f(x) = (x-1)(x+1)(x+i)(x-i)$ nad $\mathbb{C}$.

$g(x) = (x-1)(2x+1)(2x+3)(x^2-2)$ nad $\mathbb{Q}$,

$g(x) = (x-1)(2x+1)(2x+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

448. Ispitati svodljivost polinoma:

a) $\bar{1}x^3 + \bar{1}x + \bar{1}$,

b) $\bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{3}$

nad poljem $\mathbb{Z}_5$.

Rezultat. a) Nesvodljiv, b) svodljiv.

449. Nad poljem $\mathbb{Z}_5$ polinom $\bar{3}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}$ se može rastaviti u proizvod nesvodljivih polinoma na "dva" načina

$$\bar{3}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3} = (\bar{1}x + \bar{2})^2(\bar{3}x + \bar{2}) = (\bar{1}x + \bar{2})(\bar{1}x + \bar{4})(\bar{3}x + \bar{1}).$$

Objasniti zašto ovo ne protivreči teoremi o jedinstvenoj faktorizaciji.

Rešenje. Poznato je da se polinom $f(x)$ nad poljem F može na jedinstven način prikazati kao proizvod nesvodljivih normalizovanih polinoma nad F (tj. polinoma čiji su vodeći koeficijenti jedinice).

Kako je

$$\bar{3}x + \bar{1} = \bar{3}(\bar{1}x + \bar{2}),$$

a

$$\bar{3}x + \bar{2} = \bar{3}(\bar{1}x + \bar{4}),$$

vidimo da se u oba slučaja radi o istoj faktorizaciji:

$$\bar{3}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3} = \bar{3}(\bar{1}x + \bar{2})^2(\bar{1}x + \bar{4}).$$

450. Ako je polinom $p(x)$ nesvodljiv nad poljem F, onda je i polinom $p(x+a)$, za svako $a \in F$, nesvodljiv nad F.

Dokazati.

Rešenje. Pretpostavimo da je $p(x+a)$ svodljiv nad F,

$$p(x+a) = q(x)s(x),$$

gde su $q(x)$ i $s(x)$ polinomi pozitivnog stepena. Ako u gornju jednakost stavimo $x-a$ umesto x, biće

$$p(x) = q(x-a)s(x-a),$$

a polinomi $q(x-a)$ i $s(x-a)$ su pozitivnog stepena, tj. $p(x)$ je svodljiv. Iz ove protivrečnosti sledi da je $p(x+a)$ nesvodljiv nad F.

451. Odrediti za koji racionalan broj a je polinom $x^4 + a$ nesvodljiv nad poljem $\mathbb{Q}$.

Rezultat. Sličnim postupkom kao u zadatku 446. c) se dobija da je $x^4 + a$ nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$ ako i samo ako je $a \neq -b^2$ i $a \neq \frac{c}{4}^2$, $b, c \in \mathbb{Q}$.

452. Rešiti jednačinu

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ $(a \neq 0)$.

Uputstvo. Koristeći smenu $y = x + \frac{1}{x}$ $(y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2)$ i deleći jednačinu sa x^2 (pokazati da $x = 0$ nije rešenje) dobija se

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0.$$

453. Rastaviti u proizvod nesvodljivih činilaca nad poljem $\mathbb{R}$

a) $x^4 + 1$,

b) $x^4 + x^2 + 1$,

c) $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1$,

d) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Rezultat.

a) $x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$,

b) $x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$,

c) $x^4+4x^3+8x^2+4x+1 = (x^2+(2+\sqrt{2})x+3+2\sqrt{2})(x^2+(2-\sqrt{2})x+3-2\sqrt{2})$,

d) $x^4+x^3+x^2+x+1 = (x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1)(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1)$.

454. Dat je polinom $p(x)=x^5-209x+56$ nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Ako se zna da $p(x)$ ima realne nule x_1 i $\frac{1}{x_1}$ faktorizovati $p(x)$ nad $\mathbb{Q}$.

Rešenje. Podelimo $p(x)$ sa $(x-x_1)\cdot(x-\frac{1}{x_1}) = x^2-\lambda x+1$ gde je $\lambda = x_1+\frac{1}{x_1}$ i izjednačimo ostatak sa nulom. Dobija se

$$(\lambda^4-3\lambda^2-208)x+\lambda^3-2\lambda+56 = 0,$$

a odatle je

(*) $\lambda^4-3\lambda^2-208 = 0$ i $\lambda^3-2\lambda-56 = 0$.

Ako drugi jednačinu pomnožimo sa λ i oduzmemo od prve (očigledno je $\lambda \neq 0$), dobijamo

$$\lambda^2-56\lambda+208 = 0.$$

Rešenja poslednje jednačine su $\lambda_1 = 4$ i $\lambda_2 = 52$, od kojih jedino $\lambda = 4$ zadovoljava obe jednačine (*), pa je

$$p(x) = (x^2-4x+1)(x^3+4x^2+15x+56).$$

455. Dat je polinom

$$p(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$$

sa realnim koeficijentima.

Koji uslov moraju da zadovoljavaju koeficijenti polinoma $p(x,y)$ da se $p(x,y)$ može rastaviti u proizvod dva linearna faktora u $\mathbb{R}[x,y]$?

Rešenje. Da bi se $p(x,y)$ mogao rastaviti u proizvod dva linearna faktora u $\mathbb{R}[x,y]$ potrebno je i dovoljno da kvadratna jednačina po x

$$ax^2+2(by+d)x+cy^2+2ey+f = 0$$

čiji su koeficijenti iz $\mathbb{R}[y]$ ima rešenja u $\mathbb{R}[y]$, tj. da je diskriminanta tačan kvadrat:

$$4((by+d)^2-a(cy^2+2ey+f)) = (k(y))^2, \quad k(y) \in \mathbb{R}[y],$$

tj.

$$(b^2-ac)y^2+2(bd-ae)y+d^2-af = (\frac{k(y)}{2})^2.$$

Ovaj kvadratni trinom po y će biti tačan kvadrat ako i samo ako je njegova diskriminanta jednaka nuli, što nam daje ekvivalentan uslov

$$(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af) = 0.$$

456. Koji uslov moraju da zadovoljavaju koeficijenti polinoma

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d \in \mathbb{R}[x]$$

da se smenom $x = y+h$ dobije polinom oblika

$$y^4+py^2+q.$$

Rezultat. $8c = (4b-a^2)a$.

457. Neka su $f(x)$, $g(x) \in F[x]$, $a \in F$, gde je F polje. Dokazati:

a) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$,

b) $(af(x))' = af'(x)$,

c) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,

d) $((f(x))^n)' = n(f(x))^{n-1}f'(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

458. Neka je a nula polinoma $f(x) \in F[x]$, gde je F polje. a je višestruka nula polinoma $f(x)$ ako i samo ako je $f'(x) = 0$. Dokazati.

Rešenje. Neka je

$$f(a) = f'(a) = 0.$$

To znači da je $f(x)$ deljiv sa $x-a$, pa je

$$f(x) = (x-a)q(x).$$

Odatle je

$$f'(x) = q(x) + (x-a)q'(x),$$

odnosno

$$f'(a) = q(a) = 0.$$

Dakle, a je nula polinoma $q(x)$, a to znači da je a višestruka nula polinoma $f(x)$.

Pretpostavimo sada da je a višestruka nula polinoma $f(x)$. Tada je

$$f(x) = (x-a)q(x), \quad q(a) = 0,$$

pa je

$$f'(x) = q(x) + (x-a)q'(x),$$

odakle odmah sledi da je $f'(a) = 0$.

459. Za koje vrednosti $a \in \mathbb{Q}$ polinom $x^5 - 5x - a$ nad poljem racionalnih brojeva ima višestruku nulu ?

Rešenje. Ako je b višestruka nula datog polinoma $p(x)$, onda je

$$p(b) = b^5 - 5b - a = 0$$

i

$$p'(b) = 5b^4 - 5 = 0.$$

Iz ovih jednačina sledi $b^4 = 1$ i $a = b^5 - 5b = -4b$, odnosno

$$a = \pm 4.$$

460. Za koje vrednosti $a,b \in \mathbb{Q}$ je polinom

$$f(x) = ax^{n+1} + bx^n - 1$$

deljiv sa $(x-1)^2$?

Rešenje. Ako je dati polinom deljiv sa $(x-1)^2$, onda je 1 bar dvostruka nula tog polinoma, pa stoga mora biti

$$f(1) = a + b + 1 = 0, \quad f'(1) = (n+1)a + nb = 0.$$

Odavde je

$$a = n, \quad b = -(n+1).$$

461. Naći uslov koji moraju da zadovoljavaju a i b da bi polinom $x^5 + ax^3 + b$, nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, imao dvostruki koren različit od nule.

Rezultat. $a \neq 0$ i $3125b^2 + 108a^5 = 0$.

462. Dokazati da je polinom

$$f(x) = 2x^{n+1} - n(n+1)a^{n-1}x^2 + 2(n^2-1)a^n x - n(n-1)a^{n+1}$$

deljiv sa $(x-a)^3$, $(n \in \mathbb{N})$.

463. Odrediti polinom $p(x)$ trećeg stepena nad poljem racionalnih brojeva takav da je $p(x)$ deljiv sa $x-1$, a daje medjusobno jednake ostatke pri deljenju sa $x-2$, $x-3$ i $x-4$.

Rešenje. Lako se vidi da je

$p(x) = (x-2)(x-3)(x-4) + a$ i $p(1) = 0$, pa je $a = 6$.

464. Neka su r_a i r_b ostaci pri deljenju polinoma $p(x)$ sa $x-a$ odnosno $x-b$, $(a \neq b)$. Koliki je ostatak pri deljenju $p(x)$ sa $(x-a)(x-b)$?

Rešenje. Mora biti

(i) $p(x) = q(x)(x-a)(x-b) + mx + n,$

(ii) $p(x) = q_a(x)(x-a) + r_a,$

(iii) $p(x) = q_b(x)(x-b) + r_b.$

Za $p(a)$ iz (i) i (ii) dobijamo da je

$$ma + n = r_a,$$

a za $p(b)$ iz (i) i (iii) dobijamo

$$mb + n = r_b.$$

Rešavajući sistem jednačina po m i n dobija se da je ostatak pri deljenju $p(x)$ sa $(x-a)(x-b)$

$$r_a \frac{x-b}{a-b} + r_b \frac{x-a}{b-a}.$$

465. Ostaci pri deljenju polinoma $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ sa $x-1$, $x-2$ i $x-3$ su 3, 7 i 13 respektivno. Naći ostatak pri deljenju $p(x)$ sa $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Rezultat. $r(x) = x^2 + x + 1$.

466. Izračunati ostatak pri deljenju polinoma $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ sa x^2+1, ako je

a) $p(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n$,

b) $p(x) = (a+bx)^n$.

Rešenje. a) Ako u

$$(\cos\alpha+x\sin\alpha)^n = (x^2+1)q(x) + kx + \ell$$

stavimo $x=i$ dobićemo ostatak

$$r(x) = x\sin n\alpha + \cos n\alpha .$$

b) Koristiti da je

$$a+bx = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + x\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\phi+x\sin\phi),$$

gde je $\phi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

467. Neka je polinom $p(x) \in F[x]$, F polje, napisan u obliku

$$p(x) = p_0(x^k) + xp_1(x^k) + x^2p_2(x^k) + \ldots + x^{k-1}p_{k-1}(x^k),$$
$$p_i(x) \in F[x] , \quad i=0,1,2,\ldots,k-1.$$

Dokazati da je ostatak deljenja $p(x)$ sa x^k-a

$$r(x) = p_0(a) + xp_1(a) + \ldots + x^{k-1}p_{k-1}(a) .$$

Rešenje. Deleći $p_i(x^k)$, $i=0,1,\ldots,k-1$, sa x^k-a dobijamo

$$p_i(x^k) = (x^k-a)q_i(x^k) + p_i(a) .$$

Ako dobijene vrednosti za $p_i(x^k)$ zamenimo u $p(x)$, dobijamo

$$p(x) = (x^k-a)(q_0(x^k) + xq_1(x^k) + \ldots + x^{k-1}q_{k-1}(x^k)) + p_0(a) + xp_1(a) + \ldots + x^{k-1}p_{k-1}(a).$$

Kako je ostatak kod deljenja jedinstven, dobija se da je traženi ostatak

$$r(x) = p_0(a) + xp_1(a) + \ldots + x^{k-1}p_{k-1}(a).$$

468. Neka je $p(x^n)$ polinom nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ koji je deljiv sa $x-1$. Dokazati da je deljiv i sa x^n-1.

469. Neka je $p(x) = x^{n_1} + x^{n_2} + \ldots + x^{n_p}$ gde su $n_1, \ldots, n_p$ prirodni brojevi. Dokazati da je $p(x)$ deljiv sa $q(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}$ ako i samo ako je $n_i \not\equiv n_j \pmod p$ za $i \neq j$.

Uputstvo. Koristiti činjenicu da je $x^p = 1 \pmod{q(x)}$ i da $q(x)$ deli $p(x)$ ako i samo ako je $p(x) \equiv 0 \pmod{q(x)}$.

470. Neka je R komutativan prsten bez nilpotentnih elemenata i neka je polinom $p = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$ delitelj nule u $R[x]$. Dokazati da postoji element $b \neq 0$ u R takav da je $ba_0 = ba_1 = \ldots = ba_k = 0$.

Rešenje. Neka je $q = b_0 + b_1x + \ldots + b_\ell x^\ell \in R[x]$ takav da je $pq = 0$. Tada je

$$\begin{aligned}
a_0b_0 &= 0,\\
a_1b_0 + a_0b_1 &= 0,\\
a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + \ldots + a_0b_k &= 0 .
\end{aligned}$$

Ako je $b_0 \neq 0$, onda pomnožimo drugu jednačinu sa b_0, treću sa b_0^2 itd., poslednju sa b_0^k , dobija se

$$a_0b_0 = 0, \quad a_1b_0^2 = 0, \quad a_2b_0^3 = 0, \ldots, a_kb_0^{k+1} = 0 ,$$

tj. $b_0^{k+1} = b$ je traženi element.

Ako je $b_0 = 0$ tada se ponavlja opisani postupak koristeći, umesto b_0, prvi različit od nule koeficijent b_s u q.

PRIMEDBA. Tvrdjenje navedeno u prethodnom zadatku može se dokazati i bez pretpostavke da prsten nema nilpotentnih elemenata. Videti: W.R.Scott, Divisor of zero in polynomial rings, Amer.Math.Monthly, 61(1954), 336.

471. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom. Dokazati da polinom $f = a_o+a_1x+\ldots+a_kx^k \in R[x]$ ima multiplikativan inverzni element u $R[x]$ ako i samo ako a_o ima multiplikativan inverzni element u R, a $a_1,a_2,\ldots,a_k$ su nilpotentni.

Rešenje. Neka je $fg = 1$, gde je $g = b_o+b_1x+\ldots+b_mx^m$. Neposredno sledi da je $a_ob_o = 1$, tj. a_o je invertibilan element. Pokažimo najpre da je a_k nilpotentan. Iz $fg = 1$, sledi

$$a_kb_m = 0,$$

$$a_kb_{m-1} + a_{k-1}b_m = 0,$$

pa je $$a_k^2b_{m-1} + a_{k-1}a_kb_m = 0,$$

tj. $$a_k^2b_{m-1} = 0.$$

Iz

$$a_kb_{m-2} + a_{k-1}b_{m-1} + a_{k-2}b_m = 0$$

množenjem sa a_k^2 dobijamo

$$a_k^3b_{m-2} + a_{k-1}a_k^2b_{m-1} + a_{k-2}a_k^2b_m = 0,$$

pa je

$$a_k^3b_{m-2} = 0.$$

Nastavljajući ovaj postupak, konačno dobijamo

$$a_k^{m+1}b_o = 0, \quad \text{pa je} \quad a_k^{m+1} = 0$$

jer b_o ima multiplikativni inverzni element a_o.

Neka je $n < k$ prirodan broj takav da je a_i nilpotentan za $i=n+1,\ldots,k$. Posmatrajući koeficijente uz $x^{n+m},\ldots,x^m$ u $fg = 1$ i koristeći činjenicu da je skup $N(R)$ nilpotentnih elemenata iz R ideal u R, dobijamo da

$$a_nb_m \in N(R),$$

jer je

$$a_nb_m + a_{n+1}b_{m-1}+\ldots+ a_kb_{m-k} = 0,$$

pa je

$$a_nb_m = -a_{n+1}b_{m-1}-\ldots-a_kb_{m-k} \in N(R).$$

Iz $a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m \in N(R)$ sledi

$$a_n(a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m) = a_n^2b_{m-1} + a_{n-1}a_nb_m \in N(R),$$

pa je i $a_n^2b_{m-1} \in N(R)$. Nastavljajući ovaj postupak iz $a_nb_o + a_{n-1}b_1+\ldots$ dobijamo da $a_n^{m+1}b_o \in N(R)$ pa i

$$a_o(a_n^{m+1}b_o) = a_n^{m+1}a_ob_o = a_n^{m+1} \in N(R).$$

Neka je $a_n^{m+1} = c$ i $c^s = 0$. Tada je $a_n^{s(m+1)} = 0$, pa $a_n \in N(R)$. Prema tome, svi elementi $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1$ su nilpotentni.

Obrnuto, pretpostavimo da je a_o invertibilan u R a da su $a_1,a_2,\ldots,a_k$ nilpotentni. Polinom

$$h = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k$$

je nilpotentan (zadatak 366), pa $f = a_o + h$ ima multiplikativan inverzni element (zadatak 365).

472. Dokazati da u prstenu polinoma $F[x]$ sa koeficijentima iz polja F važi:

a) Svaki ideal u $F[x]$ je glavni.

b) Ako su $f(x),g(x) \in F[x]$ i $d(x)$ je najveći zajednički delitelj za $f(x)$ i $g(x)$, tada je ideal generisan sa $f(x)$ i $g(x)$ generisan polinomom $d(x)$, tj.

$$(f(x),g(x)) = (d(x)).$$

Generalisati.

Uputstvo. Koristiti postupak sličan postupku koji je primenjen prilikom ispitivanja ideala u prstenu celih brojeva $\mathbb{Z}$ (zadatak 382).

473. Za polinome

$$f(x) = \bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 \quad \text{i} \quad g(x) = \bar{1}x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{1}x$$

iz $\mathbb{Z}_3[x]$ naći najveći zajednički delitelj $d(x)$ i izraziti ga u obliku

$$d(x) = s(x)f(x) + t(x)g(x).$$

Rešenje. Najveći zajednički delitelj (n.z.d.) ćemo odrediti korišćenjem Euklidovog algoritma.

Ako $g(x)$ podelimo sa $f(x)$, dobićemo količnik

$$q_1(x) = \bar{2}x + \bar{2}$$

i ostatak

$$r_1(x) = \bar{2}x^2 + \bar{1}x ,$$

tj.

(1) $$g(x) = f(x)\cdot(\bar{2}x+\bar{2}) + \bar{2}x^2 + \bar{1}x = f(x)q_1(x) + r_1(x) .$$

Sada dobijenim ostatkom $r_1(x)$ delimo $f(x)$, dobija se količnik

$$q_2(x) = \bar{1}x + \bar{2}$$

i ostatak

$$r_2(x) = \bar{1}x ,$$

odnosno

(2) $$f(x) = (\bar{2}x^2 + \bar{1}x)(\bar{1}x + \bar{2}) + \bar{1}x = r_1(x)q_2(x) + r_2(x) .$$

Nastavljajući ovaj postupak delimo $r_1(x)$ sa $r_2(x)$, količnik je

$$q_3(x) = \bar{2}x + \bar{1} ,$$

a ostatak

$$r_3(x) = \bar{0} ,$$

tj.

(3) $$\bar{2}x^2 + \bar{1}x = \bar{1}x\cdot(\bar{2}x+\bar{1}) = r_2(x)q_3(x) .$$

Poslednji ostatak različit od nule je $r_2(x) = \bar{1}x$ i to je traženi n.z.d.: $d(x) = \bar{1}x$.

(Ukoliko je poslednji ostatak različit od nule polinom koji nije normalizovan, da se dobije n.z.d. treba taj polinom normalizovati).

Iz (2) je

(4) $$d(x) = f(x) - r_1(x)q_2(x)$$

a iz (1) se dobija da je

$$r_1(x) = g(x) - f(x)q_1(x) .$$

Zamenjujući ovo u (4) biće

$$d(x) = f(x) - (g(x)-f(x)q_1(x))\cdot q_2(x) ,$$

odakle je konačno

$$d(x) = (\bar{2}x^2+\bar{2})f(x) + (\bar{2}x+\bar{1})g(x),$$

odnosno

$$s(x) = \bar{2}x^2+\bar{2}, \qquad t(x) = \bar{2}x + \bar{1} .$$

474. Za polinome

$$f(x) = \bar{1}x^4 + \bar{1}x^3 + \bar{1}x + \bar{2} \quad \text{i} \quad g(x) = \bar{1}x^4 + \bar{2}$$

iz $\mathbb{Z}_3[x]$, naći najveći zajednički delitelj $d(x)$ i izraziti ga u obliku

$$d(x) = s(x)f(x) + t(x)g(x).$$

Rešenje. Najveći zajednički delitelj ćemo odrediti korišćenjem Euklidovog algoritma opisanog u prethodnom zadatku.

Ako $f(x)$ podelimo sa $g(x)$, dobijamo da je

(*) $$\bar{1}x^4 + \bar{1}x^3 + \bar{1}x + \bar{2} = (\bar{1}x^4 + \bar{2})\cdot\bar{1} + \bar{1}x^3 + \bar{1} .$$

Ako sad $\bar{1}x^4 + \bar{2}$ podelimo ostatkom $\bar{1}x^3 + \bar{1}x$, dobijamo

(**) $$\bar{1}x^4 + \bar{2} = (\bar{1}x^3 + \bar{1}x)\cdot\bar{1}x + \bar{2}x^2 + \bar{2} .$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo

$$\bar{1}x^3 + \bar{1}x = (\bar{2}x^2 + \bar{2})\bar{2}x .$$

Poslednji ostatak različit od nule je $\bar{2}x^2 + \bar{2}$, pa se najveći zajednički delitelj dobija kad se taj ostatak normalizuje. $\bar{2}^{-1}$ u $\mathbb{Z}_3$ je $\bar{2}$, pa je najveći zajednički delitelj $\bar{2}(\bar{2}x^2 + \bar{2}) = \bar{1}x^2 + \bar{1}$.

Iz (**) dobijamo $\bar{2}x^2 + \bar{2} = \bar{1}x^4 + \bar{2} + (\bar{1}x^3 + \bar{1}x)\bar{2}x$, pa kad pomnožimo sa $\bar{2}$

$$\bar{1}x^2 + \bar{1} = \bar{2}(\bar{1}x^4 + \bar{2}) + (\bar{1}x^3 + \bar{1}x)\cdot\bar{1}x .$$

Ako se sad $\bar{1}x^3 + \bar{1}x$ zameni vrednošću iz (*), sledi

$$\bar{1}x^2 + \bar{1} = \bar{2}(\bar{1}x^4 + \bar{2}) + \bar{1}x((\bar{1}x^4 + \bar{1}x^3+\bar{1}x + \bar{2}) + \bar{2}(\bar{1}x^4 + \bar{2})) =$$

$$= (\bar{2} + \bar{2}x)(\bar{1}x^4 + \bar{2}) + \bar{1}x(\bar{1}x^4 + \bar{1}x^3 + \bar{1}x + \bar{2}).$$

475. Odrediti najveći zajednički delitelj za parove polinoma sa koeficijentima iz odgovarajućeg polja.

a) $f_1(x) = x^3-x^2-x+1$,

$g_1(x) = x^4-3x^2-2x+4$, nad $\mathbb{Q}$

b) $f_2(x) = x^4+3x^2+4x$,

$g_2(x) = 2x^2-2x-4$, nad $\mathbb{Q}$

c) $f_3(x) = \bar{1}x^5+\bar{3}x^3+\bar{1}x^2+\bar{2}x+\bar{2}$,

$g_3(x) = \bar{1}x^4+\bar{3}x^3+\bar{3}x^2+\bar{1}x+\bar{2}$, nad $\mathbb{Z}_5$

Za svaki par polinoma $f_i(x)$, $g_i(x)$ najveći zajednički delitelj prikazati u obliku

$$s_i(x)f_i(x) + t_i(x)g_i(x).$$

Rezultat.

a) $x-1 = \frac{1}{8}(-x^2+2x+4)f_1(x) + \frac{1}{8}(x-3)g_1(x)$,

b) $x+1 = \frac{1}{48}(x+2)f_2(x) - \frac{1}{96}(x^3+3x^2+8x+24)g_2(x)$,

c) $\bar{4}x^2 + \bar{3} = (\bar{1}x+\bar{2})f_3(x) + (\bar{4}x^2+\bar{1}x+\bar{2})g_3(x)$.

476. Neka su F i K izomorfna polja. Dokazati da su $F[x]$ i $K[x]$ izomorfni prsteni. Da li važi obrnuto?

477. Neka je $(\mathbb{Q}^+,\cdot)$ multiplikativna grupa pozitivnih racionalnih brojeva. Dokazati da je

$$(\mathbb{Q}^+,\cdot) \simeq (\mathbb{Z}[x],+) .$$

Uputstvo. Dokazati da se svaki elemenat skupa $\mathbb{Q}^+$ može napisati u obliku $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, za različite proste brojeve p_i i jedinstvene cele brojeve α_i.

478. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom i neka je I ideal u R. Dokazati da je $I[x]$ ideal u prstenu polinoma $R[x]$.

479. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom i neka je $f : R[x] \to R[x]$ dato sa $f : p(x) \mapsto p(x-a)$, $p(x) \in R[x]$. Dokazati da je f automorfizam prstena $R[x]$.

480. Naći sve automorfizme prstena $\mathbb{Q}[x]$.

Rezultat. Svaki automorfizam f prstena $\mathbb{Q}[x]$ je dat sa $f(\alpha) = \alpha$, za svako $\alpha \in \mathbb{Q}$, i $f(x) = ax+b$, $a,b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ i svako takvo preslikavanje je automorfizam.

481. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom. Dokazati da prsten polinoma $R[x]$ sadrži beskonačno mnogo potprstena izomorfnih sa $R[x]$.

Uputstvo. $R[x] \simeq R[x^k]$, za $k \in \mathbb{N}$.

482. Dokazati da je

a) $\mathbb{Z}[x]/(3,x) \simeq \mathbb{Z}_3$,

b) $\mathbb{Z}[x]/(6) \simeq \mathbb{Z}_6[x]$.

Rešenje. a) Posmatrajmo homomorfizam $f : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ koji svaki polinom iz $\mathbb{Z}[x]$ preslikava u njegov konstantan član, i homomorfizam $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$ definisan sa $g(z) = \bar{z}$. gf je homomorfizam $\mathbb{Z}[x]$ u $\mathbb{Z}_3$, a njegovo jezgro Ker(gf) je ideal koji sačinjavaju svi polinomi čiji je konstantan član deljiv sa 3, tj. ideal (3,x). Na osnovu 2.50. sledi da je

$$\mathbb{Z}[x]/(3,x) \simeq \mathbb{Z}_3.$$

b) Posmatrati homomorfizam $f : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_6[x]$ definisan sa

$$f(a_o + a_1x + \dots + a_nx^n) = \bar{a}_o + \bar{a}_1x + \dots + \bar{a}_nx^n .$$

483. Dokazati :

a) ideal (x) je prost, ali nije maksimalan u $\mathbb{Z}[x]$,

b) ideal (y) je prost, ali nije maksimalan u $\mathbb{Q}[x,y]$.

Rešenje. a) Ideal (x) se sastoji od svih polinoma čiji je konstantan član nula. Ako je proizvod dva polinoma iz $\mathbb{Z}[x]$ polinom čiji je konstantan član nula, onda bar jedan od tih polinoma ima konstantan član nula, dakle, ideal (x) je prost. Medjutim, taj ideal nije maksimalan jer je sadržan , na primer , u idealu $(2,x) \neq \mathbb{Z}[x]$.

b) Sličnim zaključivanjem dobija se da je (y) prost ideal. Medjutim, taj ideal nije maksimalan jer je sadržan u idealu $(x,y) \neq \mathbb{Q}[x,y]$.

484. Neka je $I = (p(x))$ glavni ideal generisan polinomom $p(x)$ u prstenu $F[x]$, gde je F polje. Dokazati da se polinomi $f(x)$ i $g(x)$ iz $F[x]$ nalaze u istom suskupu faktor prstena $F[x]/I$ ako i samo ako $f(x)$ i $g(x)$ imaju isti ostatak pri deljenju sa $p(x)$.

Rešenje. Pretpostavimo da je

$$f(x) + I = g(x) + I.$$

Tada u I postoji polinom $h(x)p(x)$ tako da je

$$f(x) = g(x) + h(x)p(x).$$

Ako je $r(x)$ ostatak pri deobi $g(x)$ sa $p(x)$, tj. ako je

$$g(x) = q(x)p(x) + r(x),$$

onda je

$$f(x) = q(x)p(x) + r(x) + h(x)p(x) =$$
$$= (h(x)+q(x))p(x) + r(x),$$

a to znači da je $r(x)$ ostatak i pri deobi polinoma $f(x)$ sa $p(x)$.

Obrnuto, ako je

$$f(x) = q_1(x)p(x) + r(x)$$

i

$$g(x) = q_2(x)p(x) + r(x),$$

onda je

$$f(x) + I = q_1(x)p(x) + r(x) + I = r(x) + I =$$
$$= g(x) - q_2(x)p(x) + I = g(x) + I,$$

odnosno $f(x)$ i $g(x)$ pripadaju istom suskupu.

485. Ako je $p(x)$ svodljiv polinom, koji elementi faktor prstena $F[x]/(p(x))$ imaju multiplikativni inverzni element ?

486. Neka je F polje i $p(x) \in F[x]$. Dokazati:

a) ideal $(p(x))$ je maksimalan u $F[x]$ ako i samo ako je $p(x)$ nesvodljiv nad F.

b) $F[x]/(p(x))$ je polje ako i samo ako je $p(x)$ nesvodljiv nad F.

Uputstvo. Koristiti zadatke 426. i 420.

487. Dokazati da je ideal (x^2+1) maksimalan u prstenu $\mathbb{R}[x]$.

Uputstvo. Koristiti prethodni zadatak.

488. U polju $\mathbb{Z}_5[x]/I$, gde je $I = (\bar{1}x^2 + \bar{1}x + \bar{1})$, naći multiplikativan inverzni element za element $\bar{1}x^2 + \bar{2} + I$.

Rešenje. Polinom $\bar{1}x^2 + \bar{1}x + \bar{1}$ je nesvodljiv nad $\mathbb{Z}_5$ (jer ako bi bio svodljiv imao bi jedan linearan faktor pa i nulu u $\mathbb{Z}_5$, a lako se proverava da dati polinom nema nulu u $\mathbb{Z}_5$), pa je relativno prost sa polinomom $\bar{1}x^2 + \bar{2}$. Prema tome, postoje polinomi $s(x)$ i $t(x)$ takvi da je

$$\bar{1} = s(x)(\bar{1}x^2 + \bar{1}x + \bar{1}) + t(x)(\bar{1}x^2 + \bar{2}).$$

Euklidovim algoritmom se dobija da je

$$s(x) = \bar{3}x + \bar{3} \quad \text{i} \quad t(x) = \bar{2}x + \bar{4},$$

pa otuda sledi da je

$$\bar{2}x + \bar{4} + I$$

multiplikativni inverzni element za $\bar{1}x^2 + \bar{2} + I$.

Zaista,

$$(\bar{2}x + \bar{4} + I)(\bar{1}x^2 + \bar{2} + I) =$$
$$= (\bar{2}x + \bar{4})(\bar{1}x^2 + \bar{2}) + I = \bar{1} - (\bar{3}x + \bar{3})(\bar{1}x^2 + \bar{1}x + \bar{1}) +$$
$$+ I = \bar{1} + I.$$

489. U polju $\mathbb{Q}[x]/(x^3+2x+1)$ naći multiplikativni inverzni element za x^2+1. (Sa x^2+1 smo označili suskup kome pripada polinom x^2+1).

Rešenje. Jedan od načina da se nadje traženi inverzni elemenat je primena Euklidovog algoritma kao u prethodnom zadatku. Pored toga, taj inverzni elemenat se može odrediti i metodom neodredjenih koeficijenata.

Svi suskupovi koji čine dato polje su potpuno odredjeni ostacima pri deobi sa p(x) (što sledi iz zadatka 484), tj. u svakom suskupu postoji tačno jedan polinom stepena manjeg od 3, odnosno

$$\mathbb{Q}[x]/(x^3+2x+1) = \{\overline{ax^2+bx+c} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\},$$

pa možemo pisati

$$\overline{(x^2+1)}\cdot\overline{(ax^2+bx+c)} = \bar{1},$$

a odatle je

$$\overline{ax^4+bx^3+(a+c)x^2+bx+c} = \bar{1}.$$

S obzirom da je

$$\overline{x^3} = \overline{x^3+2x+1-2x-1} = \overline{-2x-1},\quad \overline{x^4} = \overline{x\cdot x^3} = \overline{-2x^2-x},$$

biće

$$\overline{a(-2x^2-x)+b(-2x-1)+(a+c)x^2+bx+c} =$$

$$= \overline{(c-a)x^2-(a+b)x-b+c} = \bar{1}.$$

Prema zadatku 484. dva polinoma stepena manjeg od 3 nalaze se u istom suskupu ako i samo ako su jednaki, pa mora biti

$$(c-a)x^2-(a+b)x-b+c = 1,$$

odakle se dobija sistem jednačina

$$c-a=0,\quad -(a+b)=0,\quad -b+c=1,$$

čije je rešenje

$$a=1/2,\quad b=-1/2\quad \text{i}\quad c=1/2\ .$$

Prema tome, za $\overline{x^2+1}$ u polju $\mathbb{Q}[x]/(x^3+2x+1)$ multiplikativni inverzni element je $\overline{\frac{1}{2}(x^2-x+1)}$.

490. Dokazati da je

a) $\mathbb{Q}[x]/(x^2-1) \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^2-4)$,

b) $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^2+2x+2)$,

c) $\mathbb{Q}[x,y]/(x+y) \simeq \mathbb{Q}[x]$.

§2.6. SIMETRIČNI POLINOMI

491. U jednačini $x^3-7x+\lambda = 0$ odrediti realan parametar λ tako da za rešenja x_1 i x_2 važi $x_1 = 2x_2$.

Rezultat. $\lambda = 6$ i $\lambda = -6$.

492. Dat je polinom

$$p(x) = x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108.$$

Rastaviti p(x) na činioce, ako se zna da jednačina $p(x)=0$ ima jedan trostruki i jedan dvostruku koren.

Rešenje. $p(x) = (x-x_1)^3(x-x_2)^2$, pa je

$$3x_1+2x_2 = 13 \quad \text{i} \quad 3x_1^2+x_2^2+6x_1x_2 = 67.$$

Rešavajući ovaj sistem jednačina dobija se

$$x_1 = 3 \quad \text{i} \quad x_2 = 2, \text{ pa je } p(x) = (x-3)^3(x-2)^2.$$

493. U jednačini $x^4-9x^3+mx^2-8x+6 = 0$ odrediti vrednost realnog parametra m tako da zbir dva korena bude jednak zbiru druga dva korena.

Rešenje. Koristeći elementarne simetrične polinome, dobijaju se sledeći uslovi

$$x_1+x_2 = x_3+x_4 = \frac{9}{2},\quad (x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4 = m,$$

$$x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2) = 8 \quad \text{i} \quad x_1x_2x_3x_4 = 6,$$

pa je

$$m = \frac{793}{36}.$$

494. Rešiti jednačinu

$$x^4-2x^3+2x^2-x-2 = 0$$

ako je zbir dva korena jednak jedinici.

495. Ako su sva tri korena polinoma x^3-px+q ($p,q \in \mathbb{R}$, $p>0$, $q>0$) realni, dokazati da za koren r najmanje apsolutne vrednosti važi $\frac{q}{p} < r \leq \frac{3q}{2p}$.
(C.Raju, R.Shantaram, Problem 1074, Math. Magazine, 53 (1980), 248.)

Rešenje. Pošto je zbir korena nula, a proizvod negativan ($q>0$), (v. 2.80), polinom ima dva pozitivna i jedan negativan koren. Neka su r,s i t koreni tako da je $s \geq r > 0$, a $t=-(r+s)$. Iz

$$(x-r)(x-s)(x+r+s) = x^3 - px + q$$

dobijamo

$$p = r^2 + rs + s^2$$

i

$$q = rs(r+s).$$

Kako je $s^2 \geq rs \geq r^2$ imamo

$$s^2 + rs - 2r^2 \geq 0,$$

pa je

$$3(rs+s^2) \geq 2(r^2 + rs + s^2),$$

tj.

$$\frac{3}{2}(rs+s^2) \geq r^2 + rs + s^2.$$

Ako nejednakosti

$$rs + s^2 < r^2 + rs + s^2 \leq \frac{3}{2}(rs + s^2)$$

pomnožimo sa

$$\frac{r}{r^2+rs+s^2} > 0$$

dobijamo

$$\frac{rs(r+s)}{r^2+rs+s^2} < r \leq \frac{3}{2}\,\frac{rs(r+s)}{r^2+rs+s^2},$$

odnosno

$$\frac{q}{p} < r \leq \frac{3q}{2p}.$$

496. Neka je $p(x) = x^3 + ay^2 + bx - 1$, $a,b \in \mathbb{Z}$, nesvodljiv polinom nad poljem racionalnalnih brojeva. Neka je r_1 koren polinoma $p(x)$, a r_1+1 koren polinoma

$q(x) = x^3 + cx^2 + dx + 1$, $c,d \in \mathbb{Z}$. Izraziti korene r_2 i r_3 polinoma $p(x)$ pomoću r_1.

Rešenje. Pošto je $p(x)$ nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$, to je i $p(x-1)$ nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$. Kako je r_1+1 jedan koren polinoma $p(x-1)$, to $p(x-1)$ i $q(x)$ imaju zajednički faktor $(x-r_1)$, a pošto je $p(x-1)$ nesvodljiv, to je $p(x-1) = q(x)$. Otuda dobijamo da su koreni polinoma $q(x)$ r_1+1, r_2+1, r_3+1, pa je

$$r_1r_2r_3 = 1 \quad \text{i} \quad (r_1+1)(r_2+1)(r_3+1) = -1.$$

Iz gornjih jednakosti dobija se da su r_2 i r_3 rešenja kvadratne jednačine

$$x^2 + \frac{r_1^2+3r_1+1}{r_1(r_1+1)}\,x + \frac{1}{r_1} = 0.$$

Rešavanjem gornje kvadratne jednačine dobija se $r_2 = -\frac{1}{r_1+1}$ i $r_3 = -\frac{r_1+1}{r_1}$.

(Rešavanje kvadratne jednačine može se izbeći koristeći

$$\frac{r_1^2+2r_1+1+r_1}{r_1(r_1+1)} = \frac{r_1+1}{r_1} + \frac{1}{r_1+1},$$

pa se odmah vidi da su rešenja te jednačine $-\frac{1}{r_1+1}$ i $-\frac{r_1+1}{r_1}$).

497. Sledeće simetrične polinome prikazati pomoću elementarnih simetričnih polinoma:

a) $(xy+z)(yz+x)(zx+y)$,

b) $(x+y)(y+z)(x+z)$,

c) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$.

Rešenje. a) Ispitaćemo najpre proizvod datog polinoma $p(x,y,z)=(xy+z)(yz+x)(zx+y)$ i polinoma xyz:

$$xyz\cdot p(x,y,z) = (xyz+z^2)(zyx+x^2)(zxy+y^2) =$$
$$= (\sigma_3+x^2)(\sigma_3+y^2)(\sigma_3+z^2) = \sigma_3^3+(x^2+y^2+z^2)\sigma_3^2 + (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\sigma_3 + x^2y^2z^2.$$

Kako je

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \ ;$$

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = (xy+yz+zx)^2 - 2(x+y+z)xyz =$$

$$= \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 \ ,$$

biće

$$\sigma_3 p(x,y,z) = \sigma_3^3 + (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_3^2 + (\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3)\sigma_3 + \sigma_3^2 \ ,$$

odnosno

$$p(x,y,z) = \sigma_3^2 + (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_3 + (\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) + \sigma_3 \ .$$

b) $(x+y)(x+z)(y+z) = (\sigma_1-x)(\sigma_1-y)(\sigma_1-z) =$

$= \sigma_1^3 - \sigma_1(x+y+z) + \sigma_1(xy+yz+xz) - xyz =$

$= \sigma_1^3 - \sigma_1^3 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 \ .$

c) Rezultat:

$$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_3 \ .$$

498. Za jednačinu

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

naći Njutnove sume $s_1,s_2,\ldots,s_6$ korena x_1,x_2,x_3 (v. 2.82).

Rešenje. Ovde je $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -3$, pa će biti

$$s_1 = x_1+x_2+x_3 = \sigma_1 = 0,$$

$$s_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) =$$

$$= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 6.$$

Iz date jednačine dobija se $x_i^3 = 3x_i - 1$, $i=1,2,3$, pa je

$$s_3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3 = 3(x_1+x_2+x_3) - 3 = -3,$$

takodje je $x_i^4 = 3x_i^2 - x_i$, $i=1,2,3$, odakle sledi

$$s_4 = x_1^4+x_2^4+x_3^4 = 3(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - (x_1+x_2+x_3) = 18.$$

Slično se dobija da je

$$s_5 = -15, \quad s_6 = 57.$$

499. Data je jednačina

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 4 = 0.$$

a) Naći Njutnove sume s_1,s_2,s_3,s_4 korena jednačine.

b) Naći sume $s_{-1},s_{-2},s_{-3},s_{-4}$ korena jednačine, gde je

$$s_{-k} = x_1^{-k} + x_2^{-k} + x_3^{-k} \ , \quad k=1,2,3,4 \ .$$

500. Ako su $x_1,x_2,\ldots,x_n$ nule polinoma

$$p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \ ,$$

a s_k Njutnove sume nula $x_1,x_2,\ldots,x_n$, dokazati da tada važi

a) $s_k + a_1s_{k-1} + a_2s_{k-2} + \ldots + a_{k-1}s_1 + ka_k = 0$, $k=1,2,\ldots,n$.

b) $s_k + a_1s_{k-1} + \ldots + a_ns_{k-n} = 0$, $k > n$.

501. Ako su $\sigma_1 = x_1+x_2$, $\sigma_2 = x_1x_2$ i $s_k = x_1^k + x_2^k$, dokazati da je

$$s_k = k \sum_{m=o}^{[k/2]} \frac{(-1)^m(k-m-1)!}{m!(k-2m)!} \sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m, \text{ za svako } k \in \mathbb{N} .$$

([a] je najveći ceo broj koji nije veći od a).

Uputstvo. Za k=1 i k=2 formula je tačna. Pošto je za $k > 2$, $s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}$, može se primeniti indukcija po k.

PRIMEDBA. Ovo je specijalan slučaj Varingove (Waring) formule kojom se s_k izračunava pomoću $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$:

$$s_k = k \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=k} (-1)^{k-\lambda_1-\ldots-\lambda_n} \frac{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!} \sigma_1^{\lambda_1}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$$

gde se sumiranje vrši po svim nenegativnim celobrojnim rešenjima jednačine $\lambda_1 + 2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n = k$.

502. Formirati kvadratnu jednačinu čiji su koreni treći stepeni korena jednačine $x^2+6x+10=0$.

Rešenje. Ovde je $\sigma_1 = x_1+x_2 = 6$, $\sigma_2 = x_1x_2 = 10$. Tražena jednačina $x^2+px+q=0$ ima korene $x_1' = x_1^3$, $x_2' = x_2^3$, pa je

$$-p = x_1'+x_2' = x_1^3+x_2^3 = \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2 = -36,$$

$$q = x_1'x_2' = x_1^3x_2^3 = \sigma_2^3 = 1000.$$

Prema tome, tražena jednačina je

$$x^2+36x+1000=0.$$

503. Formirati kubnu jednačinu čiji su koreni kvadrati korena jednačine $x^3-px+q=0$.

Rezultat. $x^3+2px^2+p^2x-q^2=0$.

504. Naći vrednost izraza

$$\frac{x_1}{x_1+1}+\frac{x_2}{x_2+1}+\frac{x_3}{x_3+1}+\frac{x_4}{x_4+1},$$

ako su x_1,x_2,x_3,x_4 nule polinoma x^4+9x^3+2.

505. Izraziti elementarne simetrične polinome $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ kao polinome po Njutnovim sumama s_1,s_2,s_3 i s_4.

Rezultat.
$$\sigma_1 = s_1,$$
$$2\sigma_2 = s_1^2 - s_2,$$
$$6\sigma_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + s_3,$$
$$24\sigma_4 = s_1^4 - 6s_1^2s_2 + 8s_1s_3 + 3s_2^2 - 6s_4.$$

506. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x+y+z+u &= 1,\\ x^2+y^2+z^2+u^2 &= 9,\\ x^3+y^3+z^3+u^3 &= 1,\\ x^4+y^4+z^4+u^4 &= 33. \end{aligned}$$

Rešenje. Ako leve strane datih jednačina izrazimo pomoću elementarnih simetričnih polinoma biće

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1,\\ \sigma_1^2-2\sigma_2 &= 9,\\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3 &= 1,\\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4 &= 33. \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema se lako odredjuje:

$$\sigma_1 = 1,\quad \sigma_2 = -4,\quad \sigma_3 = -4,\quad \sigma_4 = 0.$$

Prema tome, da bi rešili dati sistem dovoljno je naći korene jednačine

$$t^4-t^3-4t^2+4t=0.$$

Njeni koreni su $t_1=0$, $t_2=1$, $t_3=2$, $t_4=-2$, što znači da dati sistem ima 24 rešenja, koja se dobijaju medjusobno permutovanjem korena iz rešenja

$$x=0,\quad y=1,\quad z=2,\quad u=-2.$$

507. Rešiti sisteme jednačina

a)
$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= a^3,\\ (y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2 &= 2a^2,\\ x+y+z &= a. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x+y+z &= 9,\\ x^2+y^2+z^2 &= 41,\\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y) &= 180. \end{aligned}$$

III POLJA

§3.0. PREGLED DEFINICIJA I TEOREMA

3.1. Neka je $(F,+,\cdot)$ potprsten polja $(K,+,\cdot)$. Potprsten F nazivamo potpolje polja K ako i samo ako je F polje.

3.2. Podskup F polja K je potpolje polja K ako i samo ako F ima bar dva elementa i važi

$$a,b,c \in F,\ c \neq 0 \Rightarrow a-b, ab, c^{-1} \in F.$$

3.3. Polje K se naziva proširenje (ekstenzija) polja F ako i samo ako je F potpolje polja K.

3.4. Presek proizvoljne familije potpolja polja F je potpolje polja F.

3.5. Prosto polje je polje koje ne sadrži ni jedno pravo potpolje.

3.6. Svako polje F sadrži jedno i samo jedno prosto polje, to prosto polje je presek svih potpolja polja F.

3.7. Karakteristika proizvoljnog polja je 0 ili prost broj p.

3.8. Ako je polje F potpolje polja K, onda polja F i K imaju istu karakteristiku.

3.9. Prosto potpolje polja karakteristike 0 je izomorfno polju $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva.

Prosto potpolje polja karakteristike p je izomorfno polju $\mathbb{Z}_p$ ostataka po modulu p.

Prema tome, svako polje sadrži potpolje izomorfno polju $\mathbb{Q}$ ili polju $\mathbb{Z}_p$.

3.10. Ako je F konačno polje onda F ima p^n elemenata, gde je p prost broj, $n \in \mathbb{N}$, a karakteristika polja je p.

3.11. Za svaki prost broj p i svaki prirodan broj n postoji polje sa p^n elemenata.

3.12. Svaka dva konačna polja sa istim brojem elemenata su izomorfna.

3.13. Multiplikativna grupa konačnog polja je ciklička.

3.14. Neka je K polje, a S podskup od K. Presek F svih potpolja polja K koja sadrže S je potpolje polja K koje se naziva potpolje generisano skupom S.

F je minimalno potpolje polja K koje sadrži S.

3.15. Ako je polje K proširenje polja F i $S \subseteq K$, onda se potpolje polja K generisano skupom $F \cup S$ označava sa F(S). Za polje F(S) reći ćemo da je dobijeno adjunkcijom skupa S polju F.

Ako je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tada ćemo F(S) označavati sa $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

3.16. Neka je polje K proširenje polja F i $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$.

(i) Za svaku permutaciju $\sigma \in S_n$

$$K(a_1,a_2,\ldots,a_n) = K(a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},\ldots,a_{\sigma(n)}) .$$

(ii) $K(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})(a_n) = K(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

3.17. Ako je polje K proširenje polja F a element $a \in K$, onda se F(a) naziva jednostruko proširenje polja F. Element a nazivamo primitivan element proširenja. F(a) je polje koje se sastoji od svih elemenata oblika $\frac{f(a)}{g(a)}$, gde su f(x) i g(x) polinomi sa koeficijentima iz F i $g(a) \neq 0$.

3.18. Neka je polje K proširenje polja F. Element $a \in K$ se naziva algebarski nad F ako i samo ako postoji nenula polinom p(x) sa koeficijentima iz polja F takav da je $p(a) = 0$. Ako takav polinom ne postoji, a se naziva transcendentan nad F.

3.19. Neka je polje K proširenje polja F. Polje K se naziva algebarsko proširenje polja F ako i samo ako je svaki element iz K algebarski nad F. Polje K je transcendentno proširenje polja F ako i samo ako je bar jedan element iz K transcendentan nad F.

3.20. Neka je polje K proširenje polja F i neka je element $a \in K$ algebarski nad F. Tada postoji jedinstven normalizovan polinom minimalnog stepena $m(x) \in F[x]$ takav da je $m(a) = 0$. Polinom m(x) se naziva minimalni polinom elementa a nad F.

Minimalni polinom elementa a je nesvodljiv nad F. Svaki polinom $q(x) \in F[x]$ takav da je $q(a) = 0$ je deljiv minimalnim polinomom m(x).

Stepen minimalnog polinoma elementa a nad F nazivamo stepen elementa a nad F.

3.21. Ako je polje K proširenje polja F i ako je element $a \in K$ algebarski nad F, onda je

$$F(a) \cong F[x]/(m(x)) ,$$

gde je m(x) minimalni polinom elementa a nad F.

3.22. Neka je polje K proširenje polja F. Tada se K može posmatrati kao vektorski prostor nad F, pri čemu je sabiranje vektora (elemenata iz K) sabiranje u polju K, a proizvod vektora $a \in K$ i skalara $\alpha \in F$ proizvod αa tih elemenata kao elemenata polja K.

Dimenziju polja K kao vektorskog prostora nad poljem F nazivaćemo stepen K nad F i označavati sa $[K : F]$.

3.23. Polje K se naziva konačno proširenje polja F ako i samo ako je K konačnodimenzionalni vektorski prostor nad F. U suprotnom slučaju, kad je K beskonačnodimenzionalni vektorski prostor nad F, polje K se naziva beskonačno proširenje polja F.

3.24. Neka je F(a) jednostruko proširenje polja F dobijeno adjunkcijom elementa a.

(i) Ako je a algebarski nad F, onda je

$$[F(a) : F] = n,$$

gde je n stepen elementa a nad F (tj. $n = \deg m(x)$, gde je m(x) minimalni polinom elementa a nad F). Skup

$$\{1,a,a^2,\ldots,a^{n-1}\}$$

je baza vektorskog prostora F(a) nad poljem F.

Prema tome, svaki element b polja F(a) može se na jedinstven način prikazati u obliku

$$b = c_o + c_1 a + \ldots + c_{n-1} a^{n-1}, \quad c_o,c_1,\ldots,c_{n-1} \in F .$$

(ii) Ako je a transcendentan nad F, onda je

$$[F(a) : F] = \infty .$$

3.25. Svako konačno proširenje polja F je algebarsko proširenje polja F.

3.26. Ako je F polje, onda je F[x] domen integriteta. Polje razlomaka (v. 2.58. i 2.59) domena F[x] označićemo sa F(x). Polje F(x) naziva se polje racionalnih funkcija po x nad F i ono se sastoji od svih razlomaka f(x)/g(x), $f(x),g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$. Polje F(x) sadrži potpolje izomorfno polju F.

3.27. Ako je a transcendentan element nad poljem F, onda je polje F(a) izomorfno polju F(x) racionalnih funkcija po x nad F i postoji izomorfizam ϕ takav da je $\phi(a) = x$ i $\phi(b) = b$, za svako $b \in F$.

3.28. Ako su F, M i K polja takva da je $F \subseteq M \subseteq K$ (tada se M naziva medjupolje za polja F i K), onda je

$$[K:F] = [K:M][M:F].$$

Prema tome, polje M je konačno proširenje polja F, a K konačno proširenje polja M ako i samo ako je K konačno proširenje polja F.

Ako je $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ baza K nad M, a $\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ baza M nad F, onda mn proizvoda

$$a_i b_j, \quad i=1,2,\ldots,n, \quad j=1,2,\ldots,m,$$

čini bazu K nad F.

3.29. Ako je polje K proširenje polja F i element $a \in K$ algebarski nad F, onda je F(a) algebarsko proširenje od F.

3.30. (Teorema o primitivnom elementu) Ako je K konačno proširenje proizvoljnog polja F, onda je K jednostruko proširenje polja F ako i samo ako postoji samo konačno mnogo medjupolja za polja K i F.

Ako je K proširenje polja F karakteristike 0 a $a_1,a_2,\ldots,a_n \in K$ elementi algebarski nad F, onda postoji element $\theta \in K$ algebarski nad F, takav da je

$$F(a_1,a_2,\ldots,a_n) = F(\theta).$$

3.31. Svaki polinom stepena n nad poljem F može imati najviše n korena u proizvoljnom proširenju polja F.

3.32. Ako je F polje a $f(x) \in F[x]$ polinom pozitivnog stepena n, onda postoji konačno proširenje K polja F stepena najviše n u kome f(x) ima koren.

3.33. Ako je F polje a $f(x) \in F[x]$ polinom pozitivnog stepena n, onda postoji konačno proširenje K polja F takvo da se u $K[x]$ polinom f(x) može rastaviti u proizvod linearnih faktora:

$$(*) \qquad f(x) = a_o(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n), \quad a_i \in K, \ i=0,1,\ldots,n,$$

(tj. u polju K polinom f(x) ima n korena, računajući pri tome višestruke korene onoliko puta kolika je njihova višestrukost).

Minimalno proširenje K polja F u kome važi faktorizacija (*) se naziva faktorizacijsko (ili korensko) polje polinoma f(x).

3.34. Neka je f(x) polinom pozitivnog stepena n nad poljem F a K faktorizacijsko polje polinoma f(x) u kome f(x) ima faktorizaciju (*). Tada je

(i) $K = F(a_1,a_2,\ldots,a_n)$,

(ii) $[K:F] \leq n!$.

3.35. Polje F se naziva algebarski zatvoreno ako i samo ako je F faktorizacijsko polje za svaki polinom pozitivnog stepena sa koeficijentima iz F.

3.36. Ako je F proizvoljno polje onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) F je algebarski zatvoreno polje.

(ii) F nema prava algebarska proširenja (tj. svako algebarsko proširenje polja F se poklapa sa F).

(iii) Svaki nesvodljiv polinom nad F je stepena 1.

(iv) Svaki polinom pozitivnog stepena iz $F[x]$ ima koren u F.

3.37. Za svako polje F postoji algebarsko proširenje $\bar{F}$ koje je algebarski zatvoreno. Polje $\bar{F}$ se naziva algebarsko zatvorenje polja F.

3.38. Neka je F polje i n prirodan broj. Element ε polja F se naziva n-ti koren iz jedinice ako i samo ako je $\varepsilon^n = 1$.

Element ϵ se naziva primitivan n-ti koren iz jedinice ako i samo ako je $\epsilon^n = 1$ i $\epsilon^k \neq 1$ za $1 \leq k \leq n-1$.

3.39. Ako je K proširenje polja F, elementi $a,b \in K$ se nazivaju konjugovani nad F ako i samo ako su a i b koreni istog polinoma $p(x) \in F[x]$ nesvodljivog nad F ili su a i b transcendentni nad F.

3.40. Neka su F(a) i F(b) jednostruka proširenja takva da su a i b konjugovani nad F. Polja F(a) i F(b) su izomorfna i postoji izomorfizam tih polja koji preslikava a u b a elemente polja F ostavlja fiksnim (tj. svaki element polja F preslikava u sebe).

Polja F(a) i F(b) se nazivaju polja konjugovana nad F.

3.41. Svaka dva faktorizacijska polja polinoma p(x) nad poljem F su izomorfna i postoji izomorfizam koji sve elemente polja F ostavlja fiksnim.

3.42. Skup svih automorfizama polja F čini grupu u odnosu na množenje (kompoziciju) preslikavanja.

3.43. Ako je G neka podgrupa grupe svih automorfizama polja F, onda je skup svih elemenata $a \in F$ takvih da je $\phi(a) = a$, za svako $\phi \in G$, potpolje polja F i to potpolje se naziva fiksno polje grupe G.

3.44. Neka je F potpolje polja K. Tada je skup svih automorfizama polja K koji ostavljaju sve elemente polja F fiksnim, grupa koju nazivamo grupa Galoa (Galois) polja K nad F i označavamo sa G(K,F). G(K,F) je podgrupa grupe svih automorfizama polja K.

Automorfizmi grupe G(K,F) se nazivaju F-automorfizmi polja K (tj. automorfizam ϕ polja K se naziva F-automorfizam ako i samo ako je $\phi(a) = a$ za svako $a \in F$).

3.45. Neka je K konačno proširenje polja F. Svaki automorfizam $\phi \in G(K,F)$ preslikava proizvoljan element $a \in K$ u element $\phi(a)$ konjugovan sa a nad F.

3.46. Neka je $f(x) \in F[x]$ a K faktorizacijsko polje polinoma f(x) nad poljem F. Grupa Galoa polinoma f(x) je grupa Galoa G(K,F) polja K nad F.

3.47. Nesvodljiv polinom f(x) stepena n nad poljem F se naziva separabilan ako i samo ako f(x) ima n različitih korena u faktorizacijskom polju (tj. f(x) nema višestrukih korena).

Proizvoljan polinom nad F se naziva separabilan ako i samo ako su svi njegovi nesvodljivi faktori separabilni.

3.48. Svaki polinom nesvodljiv nad poljem F karakteristike 0 je separabilan.

3.49. Neka je f(x) polinom stepena n nad poljem F koji ima tačno k različitih korena $a_1, a_2, \ldots, a_k$ u faktorizacijskom polju $K = F(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Tada svaki automorfizam ϕ grupe Galoa G(K,F) odredjuje jednu permutaciju p_ϕ

$$a_1 \mapsto \phi(a_1), \quad a_2 \mapsto \phi(a_2), \ldots, a_k \mapsto \phi(a_k),$$

skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Automorfizam ϕ je potpuno odredjen permutacijom p_ϕ.

Preslikavanje koje svakom automorfizmu grupe G(K,F) pridružuje odgovarajuću premutaciju korena $a_1, a_2, \ldots, a_k$ je izomorfizam grupe G(K,F) i neke podgrupe grupe permutacija S_k.

3.50. Proširenje K polja F naziva se normalno ako i samo ako je K konačno proširenje F i F je fiksno polje grupe G(K,F) (tj. za svaki elemenat a skupa $K \setminus F$ postoji automorfizam $\phi \in G(K,F)$ takav da je $\phi(a) \neq a$).

3.51. Konačno proširenje K polja F je normalno ako i samo ako je

$$[K:F] = |G(K,F)| .$$

3.52. Neka je K konačno proširenje polja F karakteristike 0. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

(i) K je normalno proširenje polja F.

(ii) K je faktorizacijsko polje nekog polinoma nad F.

(iii) Svaki polinom nesvodljiv nad F koji ima jedan koren u K ima sve korene u K.

3.53. (Osnovna teorema teorije Galoa) Neka je K normalno proširenje polja F i neka je M proizvoljno medjupolje za polja K i F (tj. $K \supseteq M \supseteq F$). Tada je preslikavanje

$$M \mapsto G(K,M)$$

bijekcija skupa svih medjupolja za polja K i F i skupa svih podgrupa grupe Galoa G(K,F). Pri tom važi:

(i) Medjupolje M je fiksno polje grupe G(K,M) i

$$[K : M] = |G(K,M)| .$$

(ii) Ako je H proizvoljna podgrupa grupe G(K,F), onda je

$$H = G(K,K_H) ,$$

gde je K_H fiksno polje grupe H.

(iii) Ako su M_1 i M_2 dva medjupolja kojima odgovaraju redom podgrupe $H_1 = G(K,M_1)$ i $H_2 = G(K,M_2)$ grupe G(K,F), onda je

$$M_1 \subseteq M_2 \iff H_1 \supseteq H_2 .$$

Ako je $M_1 \subseteq M_2$, onda je

$$[M_2 : M_1] = [H_1 : H_2] ,$$

(sa $[H_1:H_2]$ označavamo indekse grupe H_1 po podgrupi H_2).

(iv) M je normalno proširenje polja F ako i samo ako je G(K,M) normalna podgrupa grupe G(K,F).

(v) Ako je M normalno proširenje polja F, onda je

$$G(M,F) \simeq G(K,F) / G(K,M) .$$

3.54. Neka je F polje i $f(x) \in F[x]$. Jednačina $f(x) = 0$ je rešiva radikalima nad F ako i samo ako se svaki koren polinoma f(x) može dobiti konačnim nizom operacija sabiranja, oduzimanja,

množenja, deljenja i uzimanja n_i-tih korena (za proizvoljne vrednosti $n_i \in N$) polazeći od elemenata polja F .

3.55. Neka je F polje karakteristike 0, $f(x) \in F[x]$ a K faktorizacijsko polje polinoma f(x). Jednačina $f(x) = 0$ je rešiva radikalima nad F ako i samo ako je grupa Galoa G(K,F) rešiva grupa.

§3.1. PRIMERI I OSNOVNE OSOBINE

508. Ispitati da li su sledeći prsteni polja:

a) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$,

b) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$,

c) $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$,

d) $(\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\},+,\cdot)$,

e) $(\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\},+,\cdot)$.

Rezultat. a) Ne, b) da, c) da ako je m prost broj, ne ako je m složen broj (zadatak 11), d) da, e) da.

509. Neka je $(F,+,\cdot)$ polje i a i b dva različita elementa iz F. Definišimo * i ∘ na sledeći način:

$$x*y = x+y-a,$$

$$x \circ y = a + \frac{(x-a)(y-a)}{b-a} .$$

Dokazati da je $(F,*,\circ)$ polje.

510. Ako je R telo, tada je i prsten proširenih formalnih stepenih redova R<x> (zadatak 315) takodje telo. Ako je R polje, tada je i R<x> polje. Dokazati.

Rešenje. Neka je R telo. Neka je $f = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_n x^n \in R<x>$ a r najmanji indeks za koji je $a_r \neq 0$. Tada je $f = x^r h$, gde je

$$h = a_r + a_{r+1}x + \ldots + a_n x^{n+r} + \ldots \in R[[x]],$$

a_r ima inverzni element, pa na osnovu zadatka 372. postoji $h^{-1} \in R[[x]]$. Tada je $x^r h^{-1}$ inverzni element za f. Prema tome, $R\langle x\rangle$ je telo.

Ako je R polje na osnovu prethodnog neposredno sledi da je i $R\langle x\rangle$ polje.

511. U polju proširenih formalnih stepenih redova $\mathbb{R}\langle x\rangle$ nad poljem realnih brojeva naći inverzne elemente za:

a) x^{10}, b) $1+x$, c) $\sum_{k=o}^{\infty} 2^k x^k$, d) $\sum_{k=-3}^{\infty} x^k$.

Rezultat. a) x^{-10}, b) $\sum_{k=o}^{\infty} (-1)^k x^k$ c) $1-2x$, d) $x^3 - x^4$.

512. Dati primer polja karakteristike 5 sa beskonačno mnogo elemenata.

Rešenje. $\mathbb{Z}_5\langle x\rangle$ (zadatak 510).

513. U skupu $\mathbb{Q}^n$ uredjenih n-torki racionalnih brojeva definisane su operacije + i · na sledeći način:

$$(a_o,a_1,\ldots,a_{n-1})+(b_o,b_1,\ldots,b_{n-1})=(a_o+b_o,a_1+b_1,\ldots,a_{n-1}+b_{n-1}),$$

$$(a_o,a_1,\ldots,a_{n-1})\cdot(b_o,b_1,\ldots,b_{n-1})=(c_o,c_1,\ldots,c_{n-1}),$$

gde je

$$c_k = \sum_{j=o}^{k} a_j b_{k-j} + 2 \sum_{j=k+1}^{n-1} a_j b_{n+k-j}, \quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

(Pri čemu se podrazumeva da je $\sum_{j=n}^{n-1} a_j b_{n+k-j} = 0$). Dokazati da je $(\mathbb{Q}^n,+,\cdot)$ polje.

Uputstvo. Dokazati da je $(\mathbb{Q}^n,+,\cdot) \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^n - 2)$.

514. Dokazati da je karakteristika polja 0 ili prost broj p.

515. Dokazati da polje racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ nema pravih potpolja.

516. Dokazati:

a) Polje karakteristike 0 sadrži potpolje izomorfno potpolju $\mathbb{Q}$.

b) Polje karakteristike p sadrži potpolje izomorfno polju $\mathbb{Z}_p$.

517. Ako je F polje karakteristike $p \neq 0$, onda za svako $x,y \in F$ važi

$$(x+y)^p = x^p + y^p .$$

Rešenje. Pošto je

$$(x+y)^p = \sum_{k=o}^{p} \binom{p}{k} x^{p-k} y^k ,$$

a prost broj p je delitelj $\binom{p}{k}$ za svako $k \neq 0$, p, s obzirom da je karakteristika polja p, mora biti

$$\binom{p}{k} x^{p-k} y^k = 0$$

za svako $k \neq 0, p$. Dakle, $(x+y)^p = x^p + y^p$.

518. Neka je F konačno polje sa q elemenata. Dokazati da za svako $x \in F$ važi

$$x^q = x.$$

Rešenje. Multiplikativna grupa polja F ima q-1 elemenat, pa na osnovu 1.51. za svako $x \neq 0$ mora biti $x^{q-1} = 1$, tj. $x^q = x$. Poslednja jednakost očevidno važi i za $x = 0$.

519. Neka je F konačno polje sa q elemenata. Dokazati da je

$$x_1 x_2 \cdots x_{q-1} + 1 = 0,$$

gde su $x_1,\ldots,x_{q-1}$ svi elementi polja F osim nule.

Uputstvo. Dokazati da je $x^{-1} \neq x$ za svako $x \in F \setminus \{0\}$ osim za $x = \pm 1$.

PRIMEDBA. U specijalnom slučaju, kada je $F = \mathbb{Z}_p$, gde je p prost broj, dobija se da važi teorema Vilsona (Wilson):

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

520. Neka je F konačno polje sa $q > 2$ elemenata. Dokazati da je

$$\sum_{x \in F} x = 0.$$

Rešenje. Na osnovu zadatka 518. elementi polja F su koreni polinoma $p(x) = x^q - x$. Kako je $q > 2$, to je u $p(x)$ koeficijent uz x^{q-1} nula, pa je na osnovu 2.80. i $\sum_{x \in F} x = 0$.

521. Neka je $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ nesvodljiv polinom nad $\mathbb{Z}_p$, $\deg f(x) = n$, p prost broj. Dokazati da je $\mathbb{Z}_p[x]/(f(x))$ polje sa p^n elemenata.

Uputstvo. Videti zadatak 484.

522. Za polje $\mathbb{Z}_3[x]/(\bar{1}x^2 + \bar{1}x + \bar{2})$ formirati aditivnu i multiplikativnu tablicu.

523. Konstruisati polje sa 4,8 i 9 elemenata.

Uputstvo. Koristiti zadatak 521.

524. Naći generatore multiplikativne grupe polja sa 8,9 i 13 elemenata.

525. Navesti primere konačnih polja F_1 i F_2 takvih da je aditivna grupa polja F_1 izomorfna multiplikativnoj grupi polja F_2.

Uputstvo. Problem odredjivanja parova takvih polja je ekvivalentan sa problemom odredjivanja prostih brojeva oblika $2^p - 1$, p prost broj. Prosti brojevi ovog oblika nazivaju se Mersenovi (Mersenne) prosti brojevi. Da li postoji beskonačno mnogo Mersenovih prostih brojeva je do danas nerešen problem. Detaljnije o ovome može se naći u kursevima teorije brojeva, na primer u: Hardy,G.H., Wright,E.M., An Introduction to

the Theory of Numbers, Oxford, 1960.

526. Neka je $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom takav da je $f(a+b) = f(a) + f(b)$ za svako $a,b \in \mathbb{Z}_p$. Dokazati da je $f(x)$ oblika

$$f(x) = a_o x + a_1 x^p + a_2 x^{p^2} + \ldots + a_k x^{p^k}$$

za neki prirodan broj k.

527. Dokazati da u polju F karakteristike p za svako $a,b \in F$, $a \neq b$, važi

$$(a-b)^{p-1} = \sum_{k=o}^{p-1} a^k b^{p-1-k}.$$

Uputstvo. Koristiti činjenicu da je u polju karakteristike p

$$(a-b)^p = a^p - b^p = (a-b) \sum_{k=o}^{p-1} a^k b^{p-1-k}.$$

528. Neka je R domen integriteta koji sadrži polje F.

a) Dokazati da se R može posmatrati kao vektorski prostor nad F, pri čemu je sabiranje vektora (elemenata iz R) sabiranje u domenu R, a proizvod vektora $a \in R$ i skalara $\alpha \in F$ proizvod αa tih elemenata kao elemenata domena R.

b) Ako je dimenzija vektorskog prostora R nad F konačna, tada je R polje.

Rešenje. b) Neka je $a \in R$ i $a \neq 0$. Definišimo preslikavanje $f_a : R \to R$ sa $f_a : x \mapsto ax$. Lako se proverava da je preslikavanje f_a linearna transformacija vektorskog prostora R. Pošto je R domen integriteta f_a je injektivno (jer bi inače iz $x \neq y$ i $ax = ay$ sledilo $a(x-y) = 0$ i R bi sadržavao delitelje nule). Injektivna linearna transformacija konačndimenzionalnog vektorskog prostora je i surjektivna, pa postoji vektor x takav da je $ax = 1$, tj. a ima inverzni element.

529. Neka su R i S domeni integriteta takvi da je R potprsten prstena S i da je svaki elemenat $s \in S$ koren norma-

lizovanog polinoma sa koeficijentima iz R.

Dokazati da je R polje ako i samo ako je S polje.

Rešenje. Neka je R polje, neka je $s \in S$, $s \neq 0$, i neka je $p = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_i \in R$, $i=1,2,\ldots,n$, normalizovan polinom minimalnog stepena čiji je koren s. Mora biti $a_n \neq 0$, jer bi inače bilo

$$s(s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) = 0,$$

pa kako je S integralni domen,

$$s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0,$$

tj. s bi zadovoljavao polinom nižeg stepena od deg p.

Neposredno se proverava da je

$$s^{-1} = -a_n^{-1}(s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) \in S ,$$

tj. S je polje.

Neka je S polje i neka je $r \in R$, $r \neq 0$. Tada $r^{-1} \in S$, pa postoji normalizovan polinom

$$q = x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m, \quad b_i \in R, \ i=1,2,\ldots,n,$$

takav da je $q(r^{-1}) = 0$. Otuda sledi da je

$$r^{-1} = -(b_1 + b_2 r + \ldots + b_m r^{m-1}) \in R ,$$

tj. R je polje.

530. Neka je F komutativan prsten sa jedinicom. Dokazati da je F polje ako i samo ako za svaki prsten R svaki homomorfizam $f : F \to R$, takav da je $f(1) = 1$, mora biti monomorfizam.

531. Neka su $(F,+,\cdot)$ i $(K,+,\cdot)$ polja takva da je $(F,+) \simeq (K,+)$ sa izomorfizmom f i važi $f(1_F) = 1_K$, $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ za svako $a \in F$, $a \neq 0$. Dokazati da je f izomorfizam polja F i K.

Rešenje. Neka su $a,b \in F \setminus \{0\}$, $a \neq b^{-1}$. Tada se proverava da važi

$$aba = a - (a^{-1} + (b^{-1} - a)^{-1})^{-1}$$

(tehnički najjednostavnije je da se ova provera izvrši tako što se inverzni elementi pišu u obliku razlomaka ($\frac{1}{a}$ umesto a^{-1}), a zatim primene poznata pravila o računanju sa realnim razlomcima koja važe i u proizvoljnom polju), pa je

$$f(aba) = f(a)f(b)f(a)$$

za svako $a,b \in F$, jer poslednja jednakost očigledno važi i za $a = b^{-1}$, a važi i ako je neki od elemenata a,b jednak 0_F (jer je f izomorfizam aditivnih grupa pa je $f(0_F)=0_K$). Otuda dobijamo da je za svako $a \in F$ (stavljajući $b=1_F$)

$$f(a^2) = (f(a))^2 .$$

Pošto je $(F,+) \simeq (K,+)$, sledi da je charF = charK. Neka je charF $\neq 2$. Tada iz

$$ab + ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$$

sledi da je

$$f(ab) + f(ab) = f((a+b)^2 - a^2 - b^2) =$$

$$= (f(a)+f(b))^2 - (f(a))^2 + (f(b))^2 = 2f(a)f(b),$$

pa je $f(ab) = f(a)f(b)$.

Ako je charF = 2, tada je

$$(f(ab))^2 = f((ab)^2) = f(ab^2a) =$$

$$= f(a)f(b^2)f(a) = (f(a))^2(f(b))^2 = (f(a)f(b))^2 .$$

Kako je polje K karakteristike 2 iz poslednje jednakosti sledi da mora biti

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

532. Neka je R prsten sa jedinicom. R je telo ako i samo ako je u R rešiva jednačina $a + x = ax$ za svako $a \in R$, osim za jedno. Dokazati.

Rešenje. Ako je R telo, onda je $a+x=ax$ ekvivalentno sa $(a-1)x = a$, pa za svako $a \neq 1$ postoji rešenje $x = (a-1)^{-1}a$.

Pretpostavimo da jednačina $a + x = ax$ ima rešenje za svako $a \in R$, osim za jedno. Za $a=1$ data jednačina nema rešenje jer je $1 \neq 0$, pa, prema tome, rešenje postoji za svako $a \neq 1$. Iz $(a-1)x=a$ sledi $(a-1)(x-1) = 1$, tj. svako $b = a-1 \in R$, $b \neq 0$, ima desni multiplikativni inverzni element.

533. Neka je K telo čiji je centar F (kao centar prstena, videti zadatak 342). Ako za svako $x \in K$ $x^2 \in F$, tada je K polje i $K = F$. Dokazati.

Rešenje. Jednostavno se proverava da je F polje. Neka je karakteristika polja F različita od 2, tj. $2 = 1 + 1 \neq 0$. Tada postoji 2^{-1}, pa je za svako $x \in K$

$$x = ((x+1)2^{-1})^2 - ((x-1)2^{-1}) \in F,$$

tj. $K = F$.

Neka je karakteristika F dva i neka $a \in K$, $a \notin F$. Tada postoji $b \in K$ takvo da je $ab \neq ba$. Označimo sa $c = ab - ba \neq 0$. Kako mora biti $charK = charF = 2$, onda je za svako $x \in K$, $-x = x$, pa je

$$c = ab + ba = (a+b)^2 - a^2 - b^2 \in F,$$

i

$$ac = a(ab) + (ab)a = (a+ab)^2 - a^2 - (ab)^2 \in F,$$

a kako postoji $c^{-1} \in F$, jer je $c \neq 0$, imamo

$$a = (ac)c^{-1} \in F.$$

Dokazali smo da ne postoji $a \in K \setminus F$, dakle, $K = F$.

§3.2. PROŠIRENJA POLJA

534. Naći potpolja polja kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ generisana sa:

a) $\{0,1\}$
b) $\{0\}$
c) $\{0,1,i\}$
d) $\{i,\sqrt{2}\}$
e) $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$
f) $\mathbb{R}$
g) $\mathbb{R} \cup \{i\}$

Rezultat. a) $\mathbb{Q}$, b) $\mathbb{Q}$, c) $\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$, d) $\{a+bi+c\sqrt{2}+di\sqrt{2} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}$, e) $\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}$, f) $\mathbb{R}$, g) $\mathbb{C}$.

535. Dokazati da se svaki element polja F(u), gde je u algebarski elemenat stepena n nad poljem F, može prikazati na jedinstven način u obliku

$$a_0 + a_1 u + \ldots + a_{n-1} u^{n-1}, \quad a_i \in F, \quad i = 0,1,\ldots,n-1.$$

Rešenje. Neka je $f(u)/g(u)$, $g(u) \neq 0$, bilo koji element polja F(u). Ako je m(x) minimalni polinom elementa u nad poljem F, onda su m(x) i g(x) relativno prosti polinomi (jer minimalni polinom mora biti nesvodljiv), pa postoje polinomi h(x) i k(x), takvi da je

$$h(x)g(x) + k(x)m(x) = 1.$$

Odavde je za x=u, $h(u)g(u) = 1$ (jer je $m(u) = 0$). Prema tome,

$$\frac{f(u)}{g(u)} = \frac{f(u)}{g(u)} \cdot \frac{h(u)}{h(u)} = f(u)h(u) = f_1(u).$$

Ako je polinom $f_1(x)$ stepena većeg ili jednakog n, onda se deobom sa m(x) dobija

$$f_1(x) = q(x)m(x) + r(x),$$

gde je stepen ostatka r(x) manji od n ili je $r(x) = 0$, pa je odatle za x=u:

$$f_1(u) = r(u) = a_0 + a_1 u + \ldots + a_{n-1} u^{n-1}, \quad a_i \in F.$$

Ako pretpostavimo da se $\frac{f(u)}{g(u)}$ može prikazati u navedenom obliku na dva načina:

$$\frac{f(u)}{g(u)} = a_0 + a_1 u + \ldots + a_{n-1} u^{n-1} =$$

$$= b_0 + b_1 u + \ldots + b_{n-1} u^{n-1},$$

biće

$$a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)u + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})u^{n-1} = 0,$$

a to protivreči pretpostavci da je minimalni polinom elementa u stepena n.

536. U polju $\mathbb{Q}(a)$, gde je a koren jednačine

$$3x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0,$$

element $\frac{a-1}{a^2-a+1}$ prikazati u obliku $\alpha a^2 + \beta a + \gamma$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q}$.

Rešenje. Koristićemo postupak opisan u zadatku 535.

Polinom

$$p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$$

je nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$ pa su $p(x)$ i $x^2 - x + 1$ relativno prosti polinomi, tj. postoje polinomi $f(x)$ i $g(x)$ takvi da je

$$f(x)p(x) + g(x)(x^2 - x + 1) = 1.$$

Euklidovim algoritmom odredićemo polinome $f(x)$ i $g(x)$.

Kako je

$$p(x) = (x^2 - x + 1)(3x + 1) - x + 1 ,$$

$$x^2 - x + 1 = (-x + 1)(-x) + 1 ,$$

biće

$$(x^2 - x + 1) - (p(x) - (x^2 - x + 1)(3x + 1))(-x) = 1,$$

odnosno

$$xp(x) + (-3x^2 - x + 1)(x^2 - x + 1) = 1.$$

Iz gornje jednačine za $x = a$ dobijamo da je

$$(-3a^2 - a + 1)(a^2 - a + 1) = 1,$$

pa je, prema tome,

$$\frac{a-1}{a^2-a+1} = \frac{a-1}{a^2-a+1} \cdot \frac{-3a^2-a+1}{-3a^2-a+1} = -3a^3 + 2a^2 + 2a - 1 .$$

Iz

$$3a^3 - 2a^2 + a + 2 = 0,$$

je

$$-3a^3 = -2a^2 + a + 2 ,$$

pa je

$$\frac{a-1}{a^2-a+1} = -2a^2 + a + 2 + 2a^2 + 2a - 1 = 3a + 1 .$$

Do ovog rezultata može se doći i metodom neodredjenih koeficijenata. Naime, iz jednačine

$$\frac{a-1}{a^2-a+1} = \alpha a^2 + \beta a + \gamma$$

odredićemo koeficijente α, β, γ. Ova jednačina je ekvivalentna sa

$$a - 1 = (a^2 - a + 1)(\alpha a^2 + \beta a + \gamma) =$$

$$= \alpha a^4 + (\beta - \alpha)a^3 + (\alpha + \gamma - \beta)a^2 + (\beta - \gamma)a + \gamma,$$

a kako je

$$a^3 = (2a^2 - a - 2)/3,$$

$$a^4 = a \cdot a^3 = (2a^3 - a^2 - 2a)/3 = (a^2 - 8a - 4)/9,$$

biće

$$a - 1 = \left(\frac{4\alpha}{9} - \frac{\beta}{3} + \gamma\right)a^2 + \left(-\frac{5\alpha}{9} + \frac{2\beta}{3} - \gamma\right)a + \left(\frac{2\alpha}{9} - \frac{2\beta}{3} + \gamma\right).$$

Kako je a stepena 3 nad $\mathbb{Q}$, svaki element polja $\mathbb{Q}(a)$ može se na jedinstven način prikazati pomoću $1, a, a^2$, pa mora biti

$$\frac{4\alpha}{9} - \frac{\beta}{3} + \gamma = 0,$$

$$-\frac{5\alpha}{9} + \frac{2\beta}{3} - \gamma = 1,$$

$$\frac{2\alpha}{9} - \frac{2\beta}{3} + \gamma = -1,$$

odakle se dobija $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$. Prema tome, dobili smo i na ovaj način da je

$$\frac{a-1}{a^2-a+1} = 3a + 1 .$$

537.a) U polju $\mathbb{Q}(a)$, gde je a nula polinoma

$$x^4 + x^2 + 1,$$

napisati razlomak $\frac{a}{a-1}$ sa racionalnim imeniteljem.

b) U polju $\mathbb{Q}(a)$, gde je a nula polinoma

$$x^3 - 6x^2 + 9x + 3 ,$$

napisati razlomak $\frac{1}{a^2-6a+8}$ sa racionalnim imeniteljem.

538. U polju $\mathbb{Q}(a)$ razlomak $\frac{1}{a+\sqrt{2}}$ napisati sa racionalnim imeniteljem, ako je a nula polinoma $x^3 + x + 3$.

539. Odrediti $[K:\mathbb{Q}]$ i naći bazu K nad $\mathbb{Q}$ ako je

a) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$,

b) $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{3}, \varepsilon)$, gde je $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ kompleksan kubni koren iz jedinice,

c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{-2})$,

d) $k = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, a)$, gde je $a^4 + 6a + 2 = 0$,

e) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{8}, 3 + \sqrt{50})$.

Rešenje. a) $\sqrt{2}$ je nula polinoma $x^2 - 2$ nesvodljivog nad $\mathbb{Q}$, bazu vektorskog prostora $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nad poljem $\mathbb{Q}$ čine elementi $1, \sqrt{2}$, pa se svaki elemenat iz $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ može prikazati u obliku $a + b\sqrt{2}$, $a,b \in \mathbb{Q}$.

$\sqrt{3}$ je nula polinoma $x^2 - 3$ nesvodljivog nad $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, pa bazu $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ nad $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ čine elementi $1, \sqrt{3}$. Svaki elemenat α polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ može se prikazati u obliku

$$\alpha = a+b\sqrt{2} + (c+d\sqrt{2})\sqrt{3} = a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}, \quad a,b,c \in \mathbb{Q}.$$

Dobili smo da se svaki elemenat polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ može izraziti kao linearna kombinacija elemenata $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$. Ovi elementi su linearno nezavisni (jer iz pretpostavke da je $\alpha = 0$ dobija se $a+b\sqrt{2} = 0$, $c+d\sqrt{2} = 0$, a odatle $a=b=c=d=0$), pa, prema tome, čine bazu polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ nad $\mathbb{Q}$.

Odavde odmah sledi da je

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4.$$

(Kako je

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2,$$

a

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2,$$

stepen proširenja $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ nad $\mathbb{Q}$ mogli smo odmah dobiti iz

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]\,[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4).$$

b) Slično kao gore dobija se da je $1, i$ baza $\mathbb{Q}(i)$ nad $\mathbb{Q}$, a $1, i, \sqrt{3}, i\sqrt{3}$ baza $\mathbb{Q}(i,\sqrt{3})$ nad $\mathbb{Q}$.

Kako je

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},$$

sledi da $\varepsilon \in \mathbb{Q}(i,\sqrt{3})$, pa se adjungovanjem ε polju $\mathbb{Q}(i,\sqrt{3})$ dobija opet to isto polje.

Dakle,

$$[\mathbb{Q}(i,\sqrt{3},\varepsilon) : \mathbb{Q}] = 4.$$

540. Odrediti stepen proširenja $\mathbb{Q}(i,\sqrt{-5+12i})$ nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

Rešenje.

$$[\mathbb{Q}(i,\sqrt{-5+12i}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(i,\sqrt{-5+12i}) : \mathbb{Q}(i)]\,[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}].$$

$[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$ jer je $p(x) = x^2 + 1$ minimalni polinom za i, a $[\mathbb{Q}(i,\sqrt{-5+12i}) : \mathbb{Q}(i)] = 1$, jer je iz formule

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\,\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right) \quad \text{za } b \neq 0,$$

sledi

$$\sqrt{-5+12i} = \pm(2+3i) \in \mathbb{Q}(i).$$ Prema tome,

$$[\mathbb{Q}(i,\sqrt{-5+12i}) : \mathbb{Q}] = 2.$$

541. Naći sva potpolja polja $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-1})$ i odrediti stepen njihovog proširenja u odnosu na $\mathbb{Q}$.

Rešenje. Kako je $\sqrt[4]{-1} = \sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, sledi da je $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-1}) = \mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$. Potpolja polja $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-1})$ su $\mathbb{Q}$, stepena proširenja 1, zatim polja $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ i $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ od kojih je svako stepena proširenja 2 i samo polje $\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$ stepena proširenja 4 nad $\mathbb{Q}$.

542. Dokazati da je $\mathbb{Q}(\varepsilon_{2k+1}) = \mathbb{Q}(\varepsilon_{4k+2})$ za svako $k \in \mathbb{N}$, gde je ε_{2k+1} primitivan $(2k+1)$-vi koren iz jedinice (3.38).

Uputstvo. Dokazati da je $-\varepsilon_{2k+1} \in \mathbb{Q}(\varepsilon_{2k+1})$ primitivan $(4k+2)$-gi koren iz jedinice.

543. Odrediti sva medjupolja izmedju polja racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ i polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$.

Rezultat.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{30})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{15})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{10})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{6})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6},\sqrt{10})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{6},\sqrt{10}) = \mathbb{Q}(\sqrt{6},\sqrt{15}) = \mathbb{Q}(\sqrt{10},\sqrt{15})$ jer su elementi svakog od njih oblika $a+b\sqrt{6}+c\sqrt{10}+d\sqrt{15}$.

544. Ako je polje K algebarsko proširenje polja E, a E algebarsko proširenje polja F, onda je K algebarsko proširenje od F. Dokazati.

Rešenje. Neka je a bilo koji element proširenja K polja E i neka je

$$p(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_o,\ b_k \in E,\quad k=0,1,\ldots,n,$$

polinom čiji je koren a. Tada je

$$F_1 = F(b_o,b_1,\ldots,b_n)$$

konačno proširenje polja F (na osnovu 3.16. (ii), 3.24. i 3.28), pa kako je a algebarski elemenat nad F_1 (jer je koren polinoma p(x) sa koeficijentima iz F_1) mora biti $F_1(a)$ konačno proširenje polja F_1. Kako je, dakle, F_1 konačno proširenje polja F, a $F_1(a)$ konačno proširenje polja F_1, sledi da je $F_1(a)$ konačno proširenje polja F. Na osnovu stava da je svako konačno proširenje algebarsko, zaključujemo da je $F_1(a)$ algebarsko proširenje polja F, pa je a algebarski elemenat nad F.

Dokazali smo da je svaki elemenat polja K algebarski nad F, a to znači da je K algebarsko proširenje polja F.

545. Neka su $K = K_o \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_{n-1} = F$ polja. Dokazati da važi

$$[F:K] = [K_{n-1}:K_{n-2}]\ldots[K_2:K_1][K_1:K_o].$$

Uputstvo. Koristiti indukciju.

546. Ako je a algebarski element prostog stepena p nad poljem F, dokazati da ne postoji medjupolje izmedju F i F(a) različito od F i od F(a).

547. Neka je a algebarski element neparnog stepena nad poljem F. Dokazati da je $F(a^2) = F(a)$.

Rešenje. S obzirom da je $a^2 \in F(a)$, važi $F \subseteq F(a^2) \subseteq F(a)$.

Pošto je a koren polinoma $p(x) = x^2 - a^2$ stepena 2 sa koeficijentima iz $F(a^2)$, to je $[F(a):F(a^2)] \leq 2$. Kako je

$$[F(a):F] = [F(a):F(a^2)][F(a^2):F] = 2k+1,$$

to je

$$[F(a):F(a^2)] = 1, \text{ pa je } F(a) = F(a^2) .$$

548. Neka je α algebarski element nad poljem $\mathbb{Q}$. Dokazati da postoji ceo broj c takav da je $c\alpha$ nula normalizovanog polinoma sa celim koeficijentima.

Rešenje. Neka je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_o \in \mathbb{Q}[x]$ polinom čija je nula α, i neka je s najmanji zajednički sadržalac imenilaca koeficijenata a_i, i=0,1,...,n. Ako jednakost

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_o = 0$$

pomnožimo sa s, a sa b_i označimo $a_i s$, i=0,1,...,n, biće

$$(*) \qquad b_n\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + b_o = 0,$$

pri čemu su b_i, i=0,1,...,n, celi brojevi.

Množeći (*) sa b_n^{n-1} dobijamo da je

$$(b_n\alpha)^n + b_{n-1}(b_n\alpha)^{n-1} + b_n b_{n-2}(b_n\alpha)^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + b_n^{n-2}b_1(b_n\alpha) + b_n^{n-1}b_o = 0,$$

pa je $c = b_n$.

549. Ispitati koji od sledećih brojeva su algebarski a koji transcendentni nad poljem racionalnih brojeva:

$$\sqrt[3]{2},\quad \pi^2,\quad \pi+2,\quad \sqrt{2}+i\sqrt{3} .$$

Rešenje. $\sqrt[3]{2}$ je koren jednačine $x^3 - 2 = 0$, pa je, prema tome, algebarski elemenat nad poljem $\mathbb{Q}$.

Ako pretpostavimo da je π^2 algebarski elemenat nad $\mathbb{Q}$, onda postoji polinom $p(x)$ sa racionalnim koeficijentima takav da je $p(\pi^2)=0$. Tada je

$$p(x^2) = q(x),$$

takodje polinom sa racionalnim koeficijentima i

$$p(\pi^2) = q(\pi) = 0,$$

tj. dobijamo da je π algebarski elemenat nad $\mathbb{Q}$ (jer je koren polinoma $q(x)$). Ovo je kontradikcija, jer je poznato da je π transcendentan nad $\mathbb{Q}$, pa odatle zaključujemo da je π^2 transcendentan nad $\mathbb{Q}$.

Na sličan način se može pokazati da je $\pi+2$ tanscendentan, a $\sqrt{2}+i\sqrt{3}$ algebarski elemenat nad poljem racionalnih brojeva.

550. Dokazati da je bar jedan od brojeva $e+\pi$, $e\pi$ transcendentan nad poljem racionalnih brojeva.

Rešenje. Pretpostavimo da su i $\pi+e$ i $e\pi$ algebarski nad $\mathbb{Q}$. Tada je $F=\mathbb{Q}(e+\pi,e\pi)$ konačno proširenje polja $\mathbb{Q}$, pa je na osnovu 3.25. F algebarsko proširenje polja $\mathbb{Q}$. $((e+\pi)^2-4e\pi)\in F$, pa je $(e+\pi)^2-4e\pi$ algebarski element nad $\mathbb{Q}$. Tada je i $\pi-e=\sqrt{(e+\pi)^2-4e\pi}$ algebarski element nad poljem $\mathbb{Q}$ (ako je neki elemenat a nula polinoma $p(x)$, onda je $\sqrt{a}$ nula polinoma $p(x^2)$). Dakle, $K=\mathbb{Q}(e+\pi, e\pi, \sqrt{(e+\pi)^2-4e\pi})$ je konačno, a to znači i algebarsko proširenje polja $\mathbb{Q}$.

Medjutim, onda je

$$\frac{1}{2}\sqrt{(e+\pi)^2-4e\pi}+\frac{1}{2}(e+\pi)=\frac{1}{2}(\pi-e)+\frac{1}{2}(\pi+e)=\pi\in K,$$

što je protivrečnost, jer je π transcendentan nad $\mathbb{Q}$.

551. Polje $\mathbb{Z}_3$ proširiti do polja K tako da polinom

$$p(x) = \bar{1}x^2+\bar{1}x+\bar{2}\in\mathbb{Z}_3[x]$$

ima koren u K.

Rešenje. Dati polinom je nesvodljiv nad $\mathbb{Z}_3$, pa je faktor prsten $K=\mathbb{Z}_3[x]/I$, gde je I glavni ideal $(\bar{1}x^2+\bar{1}x+\bar{2})$, polje. Polje K ima devet elemenata

$$K=\{a+bx+I \mid a,b\in\mathbb{Z}_3\}=$$
$$=\{I,\bar{1}+I,\bar{2}+I,\bar{1}x+I,\bar{1}+\bar{1}x+I,\bar{2}+\bar{1}x+I,\bar{2}x+I,\bar{1}+\bar{2}x+I,\bar{2}+\bar{2}x+I\}.$$

Preslikavanje $f:\mathbb{Z}_3\to K$ definisano sa $f(a)=a+I$ je izomorfizam polja $\mathbb{Z}_3$ i potpolja $\{I,\bar{1}+I,\bar{2}+I\}$ polja K, pa ako se svaki element $a\in\mathbb{Z}_3$ identifikuje sa svojim suskupom $a+I\in K$ može se smatrati da je K proširenje polja $\mathbb{Z}_3$.

Pokažimo da je $\bar{1}x+I\in K$ koren datog polinoma (s obzirom na navedeni izomorfizam umesto elemenata iz $\mathbb{Z}_3$ za koeficijente polinoma uzimamo njima odgovarajuće elemente iz K). Zaista,

$$p(\bar{1}x+I) = (\bar{1}+I)(\bar{1}x+I)^2+(\bar{1}+I)(\bar{1}x+I)+\bar{2}+I=$$
$$=\bar{1}x^2+I+\bar{1}x+I+\bar{2}+I=(\bar{1}x^2+\bar{1}x+\bar{2})+I=I.$$

552. Neka je polje K konačno proširenje polja F stepena n. Dokazati da je polje K izomorfno potprstenu K' koji je polje, prstena $F^{n,n}$ svih matrica formata $n\times n$ nad poljem F.

Uputstvo. K je n-dimenzionalni vektorski prostor nad F, a preslikavanje $f_a:K\to K$ definisano sa $f_a(x)=ax$, gde je a fiksiran element polja K, je za proizvoljno $a\in K$ linearna transformacija vektorskog prostora K. Ako je uočena neka baza prostora K i sa $[f_a]$ označena matrica linearne transformacije f_a u odnosu na tu bazu, onda je preslikavanje $\phi:K\to F^{n,n}$ definisano sa $\phi:a\mapsto[f_a]$ monomorfizam polja K u prsten $F^{n,n}$, tj. ako uvedemo oznaku $K'=\mathrm{Im}\phi$, onda je $K'\subseteq F^{n,n}$ polje izomorfno polju K.

PRIMEDBA. Polje K' naziva se matrična reprezentacija polja K nad poljem F.

553. Naći matričnu reprezentaciju (vidi prethodni zadatak) polja $K=\mathbb{Z}_2[x]/(\bar{1}x^2+\bar{1}x+\bar{1})$ nad poljem $\mathbb{Z}_2$.

Rešenje. Elementi polja K su I, $\bar{1}+I, \bar{1}x+I, \bar{1}+\bar{1}x+I$, gde je sa I označen glavni ideal $(\bar{1}x^2+\bar{1}x+\bar{1})$. Potpolje $F = \{I, \bar{1}+I\}$ polja K je izomorfno sa $\mathbb{Z}_2$, pa ako se elementi polja F identifikuju sa odgovarajućim elementima polja $\mathbb{Z}_2$, onda je matrična reprezentacija polja K nad $\mathbb{Z}_2$ ustvari matrična reprezentacija polja K nad F.

Radi jednostavnijeg pisanja u daljem ćemo suskupove koji čine polje K označavati samo pomoću predstavnika tih suskupova (suskup a+I označavaćemo samo sa a), onda je $K = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}x, \bar{1}+\bar{1}x\}$ a operacije u polju K se izvode po modulu $\bar{1}x^2+\bar{1}x+\bar{1}$. Tako, na primer, $\bar{1}x\cdot(\bar{1}+\bar{1}x) = \bar{1}x+\bar{1}x^2 = \bar{1}x+(\bar{1}x+\bar{1}) = \bar{1}$, gde je korišćeno $\bar{1}x^2+\bar{1}x+\bar{1} = \bar{0}$.

Polje K posmatrano kao vektorski prostor nad F je dvodimenzionalni prostor sa bazom $e_1 = \bar{1}$ i $e_2 = \bar{1}x$. S obzirom da su elementi i-te kolone matrice koja odgovara jednoj linearnoj transformaciji koordinate slike i-tog bazisnog vektora, biće

$$f_{\bar{0}}(e_1) = \bar{0}\cdot\bar{1}+\bar{0}\cdot x$$
$$f_{\bar{0}}(e_2) = \bar{0}\cdot\bar{1}+\bar{0}\cdot x \quad \text{pa elementu } \bar{0} \text{ odgovara } \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix},$$

$$f_{\bar{1}}(e_1) = \bar{1}\cdot\bar{1}+\bar{0}\cdot x$$
$$f_{\bar{1}}(e_2) = x = \bar{0}\cdot x+\bar{1}\cdot x \quad \text{pa elementu } \bar{1} \text{ odgovara } \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix},$$

$$f_{\bar{1}x}(e_1) = \bar{0}\cdot\bar{1}+\bar{1}\cdot x$$
$$f_{\bar{1}x}(e_2) = \bar{1}\cdot\bar{1}+\bar{1}\cdot x \quad \text{pa elementu } x \text{ odgovara } \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix},$$

$$f_{\bar{1}+\bar{1}x}(e_1) = \bar{1}\cdot\bar{1}+\bar{1}\cdot x$$
$$f_{\bar{1}+\bar{1}x}(e_2) = (\bar{1}+\bar{1}x)\cdot x = \bar{1}x+\bar{1}x\cdot x = \bar{1}x+\bar{1}+\bar{1}x = \bar{1} = \bar{1}\cdot\bar{1}+\bar{0}\cdot x,$$
pa elementu $\bar{1}+\bar{1}x$ odgovara $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & 0 \end{bmatrix}$.

Dakle, polje

$$K' = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\},$$

gde su operacije polja sabiranje i množenje matrica, je matrična reprezentacija polja K nad $\mathbb{Z}_2$.

554. Naći matričnu reprezentaciju (v. zadatak 552) polja K iz zadatka 551. nad poljem $\mathbb{Z}_3$.

Rezultat.

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix} \right\}.$$

555. a) Dokazati da je $F = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 2a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{Q} \right\}$ potprsten koji je polje, prstena matrica $\mathbb{Q}^{2,2}$ i da je F izomorfno polju $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

b) Neka je d ceo broj koji je proizvod različitih prostih brojeva. Dokazati da je skup matrica reda n

$$F = \left\{ [a_{ij}] \,\middle|\, a_{ij} = \begin{cases} a_{i-j}, & i \geq j \\ da_{n+i-j}, & i < j, \end{cases} \begin{array}{l} i,j=1,\ldots,n, \\ k=0,1,\ldots,n-1 \end{array} a_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

potprsten koji je polje, prstena matrica $\mathbb{Q}^{n,n}$ i da je F izomorfno polju $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{d})$.

556. Dokazati da je polje $\mathbb{Q}(\alpha)$, gde je α nula polinoma $x^3+px+q \in \mathbb{Q}[x]$ nesvodljivog nad $\mathbb{Q}$, izomorfno potpolju

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a_o & -qa_2 & -qa_1 \\ a_1 & a_o-pa_2 & -a_1p-a_2q \\ a_2 & a_1 & a_o-pa_2 \end{bmatrix} \,\middle|\, a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{Q} \right\}$$

prstena $\mathbb{Q}^{3,3}$.

557. Dokazati da polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ nije jednostruko proširenje polja racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

Uputstvo. S obzirom da je $\mathbb{Q}$ prebrojiv skup, treba dokazati da je i svako jednostruko proširenje polja $\mathbb{Q}$ prebrojiv skup. $\mathbb{R}$ je neprebrojiv skup, pa ne može biti jednostruko proširenje polja $\mathbb{Q}$.

558. Neka je $A \subseteq \mathbb{C}$ skup svih algebarskih brojeva nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Dokazati da je A beskonačno proširenje polja $\mathbb{Q}$.

Rešenje. Na osnovu 3.24. i 3.25. kompleksan broj $a \in \mathbb{C}$ pripada A ako i samo ako je stepen proširenja $[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}]$ konačan. Ako su $a,b \in A$, onda je na osnovu 3.28.

$$[\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}(a)]\,[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}] .$$

$[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}] < \infty$ jer $a \in A$, element b je algebarski nad $\mathbb{Q}$, pa je algebarski i nad $\mathbb{Q}(a)$, prema tome, $[\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}(a)] < \infty$, dakle, i $[\mathbb{Q}(a,b):\mathbb{Q}] < \infty$. Pošto $a+b$, $-a$, $ab \in \mathbb{Q}(a,b)$ i za $a \neq 0$, $a^{-1} \in \mathbb{Q}(a,b)$, sledi da je svako od polja $\mathbb{Q}(a+b)$, $\mathbb{Q}(-a)$, $\mathbb{Q}(ab)$, $\mathbb{Q}(a^{-1})$ konačno proširenje polja $\mathbb{Q}$. To znači da $a+b$, $-a$, ab, a^{-1} pripadaju A, tj. A je potpolje polja $\mathbb{C}$.

Na osnovu Ajzenštajnovog kriterijuma (2.71) može se pokazati da postoje polinomi nesvodljivi nad $\mathbb{Q}$ proizvoljno velikog stepena. Prema tome, na osnovu 3.24. sledi da A ne može biti konačno proširenje polja $\mathbb{Q}$.

559. Neka je $F_k = \mathbb{Q}(\sqrt[2^k]{2})$, $i=1,2,\dots$, Dokazati:

a) $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ je polje.

b) A je algebarsko proširenje polja $\mathbb{Q}$.

c) A nije konačno proširenje polja $\mathbb{Q}$.

560. Neka je F polje, a $K = F(\alpha)$ i neka je L medjupolje ($F \subseteq L \subseteq K$) različito od F. Dokazati da je K konačno proširenje polja L.

Rešenje. Ako je α algebarski element nad F tvrdjenje očigledno važi (3.24 , 3.28).

Neka je α transcendentan element nad F. Svaki elemenat polja K je onda oblika $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$, gde je $f(x),g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$, (3.26 , 3.27).

Neka je $\beta = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \in L$. Tada α zadovoljava polinomnu jednačinu $\beta g(x) - f(x) = 0$ čiji su koeficijenti iz L, očigledno je $K = L(\alpha)$, pa je K jednostruko algebarsko proširenje polja L, a to znači i konačno proširenje.

561. Neka je u element transcendentan nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(u)$ i $v = \frac{u^3}{u+1}$. Dokazati da je L jednostruko proširenje polja $K = \mathbb{Q}(v)$ i odrediti $[L:K]$.

562. Neka je K proširenje polja F. Ako je $\alpha \in K$ algebarski element nad $F(\beta)$ za neko $\beta \in K$ i ako je α transcendentan element nad F, onda je β algebarski element nad poljem $F(\alpha)$. Dokazati.

563. Neka je a nula polinoma

$$x^3 + x + 3,$$

nesvodljivog nad poljem $\mathbb{Q}$. Polinom x^2-2 je nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$. Da li je x^2-2 svodljiv nad poljem $\mathbb{Q}(a)$?

Rešenje. Koristićemo stav: Ako je K proširenje stepena n polja F, onda svaki element $\alpha \in K$ ima nad F stepen koji je delitelj broja n (što neposredno sledi iz $n = [K:F] = [K:F(\alpha)]\,[F(\alpha):F]$).

a je nula polinoma x^3+x+3 nesvodljivog nad $\mathbb{Q}$, pa je $[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}] = 3$, a ako je b nula polinoma x^2-2 nesvodljivog nad $\mathbb{Q}$, onda je $[\mathbb{Q}(b):\mathbb{Q}] = 2$. Pretpostavimo da je x^2-2 svodljiv nad $\mathbb{Q}(a)$. Tada je taj polinom jednak proizvodu dva linearna polinoma sa koeficijentima iz $\mathbb{Q}(a)$, što znači da $b \in \mathbb{Q}(a)$. Medjutim, b je stepena 2 nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(a)$ je stepena 3 nad $\mathbb{Q}$, a 2 nije delitelj broja 3, pa na osnovu navedenog stava dolazimo do protivrečnosti.

Prema tome, x^2-2 je nesvodljiv nad $\mathbb{Q}(a)$.

564. Ako je polinom p(x) stepena n nesvodljiv nad poljem F, a K je konačno proširenje od F stepena koji je relativno prost sa n , dokazati da je p(x) nesvodljiv nad K.

565. Dokazati da je $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

Rešenje. Očigledno je $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$. S druge strane, $\frac{1}{4}((\sqrt{3}+\sqrt{5})^3 - 14(\sqrt{3}+\sqrt{5})) = \sqrt{3}$, pa $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$, a tada i $(\sqrt{3}+\sqrt{5}) - \frac{1}{4}((\sqrt{3}+\sqrt{5})^3 - 14(\sqrt{3}+\sqrt{5})) = \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$, pa je $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

566. Odrediti element a algebarski nad $\mathbb{Q}$ tako da bude

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{5}) = \mathbb{Q}(a).$$

567. Neka je $p(x)$ polinom sa racionalnim koeficijentima čija je jedna nula a. Naći polinom $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ čija je nula $f(a)$ ako je:

a) $p(x) = x^3 - 2x - 2$, $f(a) = a^2 - 1$.

b) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 3$, $f(a) = a^2 + a$.

Rešenje. a) Polinom $p(x)$ je nesvodljiv po Ajzenštajnovom kriterijumu (2.71), pa je $\mathbb{Q}(a) = K$ konačno proširenje stepena 3 nad $\mathbb{Q}$. K je trodimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{Q}$ čija je jedna baza $\{1,a,a^2\}$. Elementi 1, $f(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a) \in \mathbb{Q}(a)$ moraju biti zavisni (kao vektori), tj. $\alpha + \beta f(a) + \gamma f^2(a) + \delta f^3(a) = 0$, gde je bar jedan od elemenata $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{Q}$ različit od nule, pa je $q(x) = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$.

Za $f(a) = a^2 - 1$, koristeći $a^3 - 2a - 2 = 0$, dobijamo

$$f^2(a) = 2a + 1 \quad \text{i} \quad f^3(a) = a^2 + 2a + 3,$$

pa je

$$\alpha + \beta(a^2-1) + \gamma(2a+1) + \delta(a^2+2a+3) = 0,$$

tj.

$$(\alpha-\beta+\gamma+3\delta)\cdot 1 + (2\gamma+2\delta)a + (\beta+\delta)a^2 = 0.$$

$\{1,a,a^2\}$ je baza od K, pa je

$$\alpha-\beta+\gamma+3\delta = 0, \quad 2\gamma+2\delta = 0, \quad \beta+\delta = 0.$$

Jedno netrivijalno rešenje ovog sistema je

$$\alpha = -3, \quad \beta = \gamma = -1, \quad \delta = 1,$$

pa je

$$q(x) = x^3 - x^2 - x - 3 .$$

568. Ako je a nula polinoma $x^3 - x + 1$ odrediti minimalni polinom elementa $b = 2a^2 - 3a + 2$ nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

Rezultat. $x^3 - 10x^2 + 5x - 1$.

569. Formirati polinome sa racionalnim koeficijentima čije su nule:

a) $\sqrt{3}$, 2.
b) i, 3
c) $-2+i$, $3-2i$,
d) $\sqrt[4]{5} + \sqrt{5}$,
e) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$,
f) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$,
g) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$.

Rešenje. a) Polinom sa racionalnim koeficijentima čija je nula $\sqrt{3}$ mora imati i nulu njemu konjugovan broj nad $\mathbb{Q}$ $-\sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$ su koreni polinoma x^2-3 nesvodljivog nad $\mathbb{Q}$ (v. 3.39)). Prema tome, traženi polinom je

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-2) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$$

d) Uvedimo oznaku $a = \sqrt[4]{5}$. Potrebno je naći polinom sa racionalnim koeficijentima čija je nula $a+a^2$. Brojevi konjugovani sa a nad poljem $\mathbb{Q}$ su ia, -a, -ia (to su nule polinoma x^4-5 nesvodljivog nad $\mathbb{Q}$), pa su, prema tome, sa $a+a^2$ konjugovani brojevi $ia-a^2$, $-a+a^2$, $-ia-a^2$. Traženi polinom će onda biti

$$(x-a-a^2)(x-ia+a^2)(x+a-a^2)(x+ia+a^2) =$$
$$= ((x-a^2)^2-a^2)((x+a^2)^2+a^2) = x^4-10x^2-20x+20 .$$

Ovaj polinom je nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$ po Ajzenštajnovom kriterijumu, pa je to minimalni polinom nad $\mathbb{Q}$ elementa

$$\sqrt[4]{5} + \sqrt{5}.$$

(Do istog rezultata moglo se doći i postupkom opisanim u zadatku 567.)

f) Brojevi konjugovani nad $\mathbb{Q}$ sa $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ su

$$\sqrt{2} - \sqrt{3}, \quad -\sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad -\sqrt{2} - \sqrt{3},$$

pa je traženi polinom

$$(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3}) =$$
$$= (x^2-5-2\sqrt{6})(x^2-5+2\sqrt{6}) = x^4-10x^2+1 .$$

Do istog rezultata može se doći i na sledeći način:

Označimo sa $u = \sqrt{2}$, $v = \sqrt{3}$. Tada je $u^2 = 2$, $v^2 = 3$, pa iz $x = u + v$ sledi

$$x^2 = u^2 + 2uv + v^2 = 5 + 2uv .$$

Dalje, iz $x^2 - 5 = 2uv$ sledi

$$x^4 - 10x^2 + 25 = 24,$$

pa je $x^4 - 10x^2 + 1$ polinom čija je nula $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

570. a) Naći polinom sa racionalnim koeficijentima čija je nula

$$\alpha = \sqrt[3]{25} + 4\sqrt[3]{5} - 1.$$

b) Na osnovu rezultata pod a) razlomak

$$\frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25} + 4\sqrt[3]{5} - 1},$$

napisati sa racionalnim imeniteljem.

Rešenje. a) Na jedan od ranije navedenih načina odredićemo polinom čija je nula α :

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 57x - 404, \quad p(\alpha) = 0.$$

b) Kako je

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 - 57\alpha = 404,$$

odnosno

$$\alpha(\alpha^2 + 3\alpha - 57) = 404,$$

biće

$$\frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25}+4\sqrt[3]{5}-1} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2+3\alpha-57}{\alpha^2+3\alpha-57} = \frac{2\sqrt[3]{5}(\alpha^2+3\alpha-57)}{404} =$$

$$= \frac{9\sqrt[3]{25} - 19\sqrt[3]{5} + 85}{202}.$$

571. Naći polinom $p(x)$ iz $\mathbb{Q}[x]$ takav da je $p(\sqrt{2}+\sqrt{5}) = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{5}$.

Rešenje. Označimo sa $u = \sqrt{2}$, $v = \sqrt{5}$. Tada iz

$$x = u + v$$

sledi

$$x^3 = 17u + 11v .$$

Rešavajući ovaj sistem po u i v dobijamo

$$u = \frac{x^3 - 11x}{6}, \qquad v = \frac{17x - x^3}{6}.$$

Odavde je

$$2u + 5v = 2\,\frac{x^3-11x}{6} + 5\,\frac{17x-x^3}{6} = \frac{21}{2}\,x - \frac{1}{2}\,x^3,$$

pa je

$$p(x) = -\frac{1}{2}\,x^3 + \frac{21}{2}\,x.$$

572. Odrediti faktorizacijska polja sledećih polinoma nad $\mathbb{Q}$:

a) $x^3 - 2$, c) $x^4 - 5$,

b) $x^3 - x^2 - x - 2$, d) $(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 - 5)$.

Rešenje. Faktorizacijsko polje polinoma x^3-2 mora sadržati nulu $\sqrt[3]{2}$. U polju $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ je

$$x^3 - 2 = (x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}) = (x-\sqrt[3]{2})p(x).$$

Polinom $p(x)$ nema realne korene, pa je, prema tome, nesvodljiv nad $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Koreni polinoma $p(x)$ su $\varepsilon\sqrt[3]{2}$ i $\varepsilon^2\sqrt[3]{2}$, gde je $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, pa je faktorizacijsko polje datog polinoma $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$, a stepen proširenja je $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}):\mathbb{Q}] = 6$.

b) $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2+x+1)$,

pa je faktorizacijsko polje tog polinoma $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, gde je $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, kompleksan kubni koren iz jedinice. Ovde je $[\mathbb{Q}(\varepsilon):\mathbb{Q}] = 2$.

c) Koreni jednačine $x^4-5=0$ su

$$x_1 = \sqrt[4]{5}, \quad x_2 = -\sqrt[4]{5}, \quad x_3 = i\sqrt[4]{5}, \quad x_4 = -i\sqrt[4]{5},$$

pa je faktorizacijsko polje

$$\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, -\sqrt[4]{5}, i\sqrt[4]{5}, -i\sqrt[4]{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i).$$

Stepen proširenja je $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i):\mathbb{Q}] = 8$.

d) Faktorizacijsko polje je $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$, a stepen proširenja je $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}):\mathbb{Q}] = 8$.

573. Jedna nula polinoma $x^4+3x^3+6x^2+12x+8$ je $-2i$. Naći sve nule tog polinoma.

574. Odrediti a i b polinomu $p(x)=x^3-6x^2+ax+b$ tako da polinom ima nulu $1-i\sqrt{5}$, a zatim rešiti jednačinu $p(x)=0$.

575. Dokazati da konačno polje ne može biti algebarski zatvoreno.

Rešenje. Neka su $a_1,a_2,\ldots,a_n$, $(a_1\neq 0)$, svi elementi konačnog polja F. Tada polinom

$$p(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+a_1\ ,$$

nema nijednu nulu u F jer je $p(a_i)=a_1$, $i=1,2,\ldots,n$, pa na osnovu 3.35. F nije algebarski zatvoreno.

576. U polju $\mathbb{C}$, potpolja $\mathbb{Q}(i)$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ su izomorfni vektorski prostori nad poljem $\mathbb{Q}$, ali nisu izomorfna polja. Dokazati.

577. Navesti polje kompleksnih brojeva koje nije realno, izomorfno polju
a) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, b) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$.

Rešenje. Koristićemo stav: Ako su a i b nule polinoma nesvodljivog nad poljem F, onda su polja F(a) i F(b) izomorfna.

a) Nule polinoma x^3-2 nesvodljivog nad $\mathbb{Q}$ su

$$\sqrt[3]{2},\quad \varepsilon\sqrt[3]{2},\quad \varepsilon^2\sqrt[3]{2},\quad \text{gde je}\quad \varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

kompleksan kubni koren iz jedinice.

Prema tome, polje $\mathbb{Q}(\varepsilon\sqrt[3]{2})$ je jedno polje kompleksnih brojeva izomorfno polju $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

578. Neka je α koren polinoma $x^2-2\in\mathbb{Q}[x]$, a β koren polinoma $x^2-4x+2\in\mathbb{Q}[x]$. Dokazati da su proširenja $\mathbb{Q}(\alpha)$ i $\mathbb{Q}(\beta)$ izomorfna.

Rešenje. Polinom x^2-2 i x^2-4x+2 su normalizovani nesvodljivi polinomi nad $\mathbb{Q}$, pa je x^2-2 minimalni polinom za α nad $\mathbb{Q}$, a x^2-4x+2 je minimalni polinom za β nad $\mathbb{Q}$. Prema tome, svaki element polja $\mathbb{Q}(\alpha)$ se na jedinstven način može prikazati u obliku

$$a_o+a_1\alpha\ ,\quad a_o,a_1\in\mathbb{Q},$$

a svaki element polja $\mathbb{Q}(\beta)$ se na jedinstven način može prikazati u obliku

$$b_o+b_1\beta\ ,\quad b_o,b_1\in\mathbb{Q}.$$

Dokazaćemo da je preslikavanje $\phi:\mathbb{Q}(\alpha)\to\mathbb{Q}(\beta)$ definisano sa

$$\phi(a_o+a_1\alpha)=a_o+a_1(\beta-2)$$

izomorfizam polja $\mathbb{Q}(\alpha)$ i $\mathbb{Q}(\beta)$.

ϕ je očigledno bijekcija. Ako su $a_o+a_1\alpha$, $b_o+b_1\alpha\in\mathbb{Q}(\alpha)$, neposredno sledi da je $\phi(a_o+a_1\alpha+b_o+b_1\alpha)=\phi(a_o+a_1\alpha)+\phi(b_o+b_1\alpha)$.

$$\phi((a_o+a_1\alpha)(b_o+b_1\alpha))=\phi(a_ob_o+(a_ob_1+a_1b_o)\alpha+a_1b_1\alpha^2)=$$

$$=\phi(a_ob_o+2a_1b_1+(a_ob_1+a_1b_o)\alpha)=a_ob_o+2a_1b_1+(a_ob_1+a_1b_o)(\beta-2)=$$

$$=a_ob_o+(a_ob_1+a_1b_o)(\beta-2)+a_1b_1(\beta^2-4\beta+4)=(a_o+a_1(\beta-2))((b_o+$$

$$+b_1(\beta-2))=\phi(a_o+a_1\alpha)\phi(b_o+b_1\alpha)\ ,$$ pri čemu je korišćeno $\alpha^2=2$ i $\beta^2-4\beta+4=2$.

579. Dokazati da je jedini automorfizam polja racionalnih brojeva identičko preslikavanje.

Rešenje. Neka je f automorfizam polja $\mathbb{Q}$. Svaki automorfizam polja ostavlja neizmenjene 0 i 1, pa je

$$f(0)=0\quad\text{i}\quad f(1)=1.$$

Dalje, za svaki prirodan broj n je $f(n)=n$ (što se jednostavno dokazuje indukcijom: tvrdjenje važi za n=1, ako pretpostavimo da važi za k, biće $f(k+1)=f(k)+f(1)=k+1$).

Takodje je $f(c)=c$ za svaki ceo broj c. Zaista, iz $0=f(c-c)=f(c)+f(-c)$, sledi

$$-f(c)=f(-c)\ ,$$

pa je za svaki prirodan broj n $f(-n)=-f(n)=-n$. Slično, iz

$$1=f(1)=f(c\cdot\frac{1}{c})=f(c)\cdot f(\frac{1}{c}),\quad c\neq 0,$$

sledi

$$f\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{f(c)} = \frac{1}{c},$$

za svaki ceo broj c različit od nule.

Prema tome, za svaki racionalan broj $\frac{p}{q}$ je

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = f(p) \cdot f\left(\frac{1}{q}\right) = p \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{q},$$

što znači da je f identičko preslikavanje.

580. Dokazati da polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ nisu izomorfna.

Rešenje. Pretpostavimo da su data polja izomorfna i neka je f izomorfizam polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ na polje $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Tada se, slično kao u prethodnom zadatku, može pokazati da je za svako $x \in \mathbb{Q}$

$$f(x) = x.$$

Neka je $f(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{3}$, $a,b \in \mathbb{Q}$. Tada će biti

$$2 = f(2) = f(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}) = f(\sqrt{2})\cdot f(\sqrt{2}) = (a+b\sqrt{3})^2 = a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3},$$

odakle dobijamo sistem jednačina

$$2ab = 0,$$
$$a^2 + 3b^2 = 2,$$

koji nema racionalna rešenja.

Iz ove protivrečnosti zaključujemo da data polja ne mogu biti izomorfna.

581. Neka je $a = k^2 b$, $a,b,k \in \mathbb{Q}$, $k > 0$. Dokazati da je tada

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \mathbb{Q}(\sqrt{b}).$$

582. Neka je u transcendentan element nad poljem F. Odrediti sve F-automorfizme polja $F(u)$.

Rešenje. Neka je f F-automorfizam polja $F(u)$. Tada je f potpuno odredjeno ako je poznato $f(u) = v \in F(u)$, pri čemu $v \notin F$. Na osnovu zadatka 560. $F(u)$ je jednostruko algebarsko proširenje polja $F(v)$, pri čemu je $v = \frac{p(u)}{q(u)}$,

$p(x), q(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$, a u je koren polinoma

$$r(x) = p(x) - vq(x) \in F(v)[x].$$

f je F-automorfizam polja $F(u)$ ako i samo ako je $F(u) = F(v)$, a to važi ako i samo ako je $[F(u):F(v)] = 1$, tj. ako i samo ako je $r(x)$ linearan polinom, tj.

$$v = \frac{au+b}{cu+d}, \quad a,b,c,d \in F, \quad ad - bc \neq 0.$$

(Ukoliko bi bilo $ad - bc = 0$, onda bi za neko $k \in F$ bilo $ak + b = k(cu + d)$, tj. element v bi bio u F).

583. Neka je polje K proširenje polja F. Polje K je algebarsko proširenje polja F ako i samo ako za svako medjupolje E $(F \subseteq E \subseteq K)$ svaki F-monomorfizam $f : E \to E$ je F-automorfizam polja E. Dokazati.

Rešenje. Neka je K algebarsko proširenje polja F, E medjupolje i $f : E \to E$ F-monomorfizam polja E. Treba da pokažemo da je f epimorfizam, a za to je dovoljno da pokažemo da je f bijekcija, tj. da ima i levo i desno inverzno preslikavanje. f je monomorfizam pa ima levo inverzno preslikavanje, dakle, preostaje da se dokaže da f ima desno inverzno preslikavanje.

Ako $\alpha \in E$ onda $\alpha \in K$, a kako je K algebarsko proširenje polja F, postoji polinom $p(x) \in F[x]$ takav da je $p(\alpha) = 0$. Pošto je f F-monomorfizam, onda primenom monomorfizma f n puta $(n \in \mathbb{N})$ dobijamo da je

$$f^n(p(\alpha)) = p(f^n(\alpha)) = 0.$$

Polinom $p(x)$ ima najviše $\deg p(x)$ korena (3.31), a f^n za svako $n \in \mathbb{N}$ preslikava koren polinoma $p(x)$ na koren tog polinoma, pa je za neko $k,m \in \mathbb{N}$, $k \neq m$,

$$f^m(\alpha) = f^k(\alpha).$$

Neka je $m > k$. f ima levo inverzno preslikavanje, pa je

$$f^{m-k}(\alpha) = \alpha.$$

Ako je $m-k=1$ f je identičko preslikavanje na $F(\alpha)$, a ako je $m-k > 1$, tada je f^{m-k-1} desno inverzno preslikavanje za f, pa je f automorfizam polja $F(\alpha)$. α je proizvoljan element iz E,

pa je f F-automorfizam polja E.

Za drugi deo dokaza nećemo navoditi kompletno rešenje već samo uputstvo.

Neka je za svako medjupolje E ($F \subseteq E \subseteq K$) svaki F-monomorfizam $f : E \to E$ F-automorfizam polja E. Pretpostavimo da je K transcendentno proširenje polja F i neka je u element polja K transcendentan nad poljem F.

Dokazati da je preslikavanje $f : F(u) \to F(u)$, medjupolja F(u) definisano sa $f : p(u) \mapsto p(u^2)$ F-monomorfizam koji nije F-epimorfizam ($u \in F(u)$ nije slika nijednog elementa iz F(u)).

584. Označimo sa K polje svih racionalnih funkcija po x nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ (3.26). Neka je L_1 polje koje se dobija kad se polju K adjunguje rešenje jednačine $t^2 - x = 0$, a L_2 polje koje se dobija kad se polju K adjunguje rešenje jednačinom $t^3 + x = 0$. Dokazati:

a) L_1 i L_2 nisu izomorfna proširenja polja K.

b) L_1 i L_2 jesu izomorfna proširenja polja $\mathbb{Q}$.

(Ako su F, L_1 i L_2 polja takva da je $F \subseteq L_1$ i $F \subseteq L_2$, onda se L_1 i L_2 nazivaju izomorfna proširenja polja F ako i samo ako postoji izomorfizam ϕ polja L_1 na L_2 takav da je $\phi(a) = a$ za svako $a \in F$).

Rešenje. a) $[L_1 : K] = 2$, a $[L_2 : K] = 3$, pa L_1 i L_2 nisu izomorfna proširenja polja K.

b) $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{x})$, a $L_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{x})$. Pošto je x transcendentno nad $\mathbb{Q}$, to su $\sqrt{x}$ i $\sqrt[3]{x}$ transcendentni nad $\mathbb{Q}$. Lako se proverava da je preslikavanje $\sigma : L_1 \to L_2$ takvo da je σ identično preslikavanje nad $\mathbb{Q}$, a $\sigma(\sqrt{x}) = \sqrt[3]{x}$, izomorfizam L_1 i L_2.

§3.3. TEORIJA GALOA

585. Dokazati da je algebarsko proširenje K polja F takvo da je $[K:F] = 2$, normalno proširenje.

Rešenje. Neka je $a \in K$, $a \notin F$. Ako je m(x) minimalni polinom elementa a nad F, onda iz

$$[K:F] = [K:F(a)]\,[F(a):F] = 2$$

sledi $[F(a):F] = 2$, tj. $F(a) = K$, pa je $\deg m(x) = 2$. Pošto polinom m(x) stepena 2 ima jednu nulu u K, on mora imati i drugu nulu u K (2.73).

S obzirom na 3.45. grupa G(K,F) ima samo dva automorfizma, $|G(K,F)| = [K:F] = 2$, pa je K normalno proširenje polja F (3.51).

586. Dokazati da polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ nije normalno proširenje polja racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

Rešenje. Polinom $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ je nesvodljiv nad poljem $\mathbb{Q}$, koren $\sqrt[3]{2}$ tog polinoma je u $\mathbb{R}$ ali ostali koreni su kompleksni brojevi koji ne pripadaju $\mathbb{R}$. Prema tome, na osnovu 3.52. (iii) $\mathbb{R}$ nije normalno proširenje polja $\mathbb{Q}$.

587. Dokazati da je polje $\mathbb{Q}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ normalno proširenje polja $\mathbb{Q}$.

Uputstvo. Dokazati da je $\mathbb{Q}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ faktorizacijsko polje polinoma $x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

588. Odrediti sva polja K, proširenja polja $\mathbb{Q}$, takva da je polje $K(\sqrt[n]{p})$, gde je p prost broj a n prirodan broj, normalno proširenje polja K.

Rešenje. Pošto je $\sqrt[n]{p}$ koren polinoma $f(x) = x^n - p$ faktorizacijsko polje polinoma f(x) je $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p}, \varepsilon)$ gde je ε n-ti primitivan koren iz jedinice. Otuda na osnovu 3.52. sledi da je $K(\sqrt[n]{p})$ normalno proširenje ako i samo ako K sadrži $\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

589. Neka je K normalno proširenje polja F a M međupolje za polja K i F ($F \subseteq M \subseteq K$). Dokazati da je K normalno proširenje polja M. Primerom pokazati da M ne mora biti normalno proširenje polja F.

Uputstvo. Primer za drugi deo zadatka su polja $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$, $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

590. Neka su polja F_1, F_2, F_3 takva da je $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3$, F_2 normalno proširenje F_1 i F_3 normalno proširenje F_2. Da li je F_3 normalno proširenje F_1 ?

Uputstvo. Polje F_3 ne mora da bude normalno proširenje polja F_1. Dokazati da je polje $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ normalno proširenje polja $\mathbb{Q}$, polje $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ normalno proširenje polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ali $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ nije normalno proširenje polja $\mathbb{Q}$.

591. Od sledećih proširenja odrediti koja su normalna:

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ nad $\mathbb{Q}$,

b) $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})$ nad $\mathbb{Q}$,

c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{-3})$ nad $\mathbb{Q}$.

Rezultat. a) Normalno , b) nije normalno , c) normalno.

592. Odrediti sve automorfizme polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Rešenje. Neka je f automorfizam $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Sličnim postupkom kao u zadatku 579. može se pokazati da je restrikcija f nad $\mathbb{Q}$ identičko preslikavanje.

Svaki elemenat polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ se na jedinstven način može prikazati u obliku $a+b\sqrt{2}$, $a,b \in \mathbb{Q}$, pa je slika elementa $a+b\sqrt{2}$ potpuno odredjena slikom elementa $\sqrt{2}$ (jer je $f(a+b\sqrt{2}) = f(a)+f(b)f(\sqrt{2}) = a+bf(\sqrt{2})$). Kako je

$$(\sqrt{2})^2 - 2 = 0,$$

biće

$$(f(\sqrt{2}))^2 - 2 = 0.$$

Dobili smo da je $f(\sqrt{2})$ nula polinoma x^2-2, pa je, prema tome,

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \quad \text{ili} \quad f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} .$$

U prvom slučaju f je identičko preslikavanje.

Dokažimo da je preslikavanje $f:\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ dato sa

$$f(a+b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$$

zaista automorfizam:

$$f((a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})) = a+c-(b+d)\sqrt{2} = f(a+b\sqrt{2}) + f(c+d\sqrt{2}) ,$$

$$f((a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})) = (ac+2bd) - (ad+bc)\sqrt{2} = f(a+b\sqrt{2})f(c+d\sqrt{2}) .$$

f je očevidno bijekcija polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ pa je automorfizam.

Prema tome, jedini automorfizami polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ su identičko preslikavanje i preslikavanje koje $a+b\sqrt{2}$ preslikava u $a-b\sqrt{2}$.

593. Naći grupu svih automorfizama polja $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Rešenje. Ranije je pokazano da svaki automorfizam polja koje je proširenje polja racionalnih brojeva ostavlja sve racionalne brojeve neizmenjene. Svaki elemenat polja $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ može se prikazati u obliku

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} ,$$

pa će slika svakog elementa polja $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ biti potpuno odredjena slikom elementa $\sqrt[3]{2}$. Ako je f automorfizam, iz $(\sqrt[3]{2})^3=2$ sledi $(f(\sqrt[3]{2}))^3 = 2$, što znači da je $f(\sqrt[3]{2})$ takodje treći koren iz dvojke. Kako je $\sqrt[3]{2}$ jedini realan treći koren iz 2 (ostala dva su kompleksni) sledi da je $f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$, odnosno f je identičko preslikavanje. Prema tome, grupa automorfizama sastoji se samo od identičkog preslikavanje.

PRIMEDBA. Polje $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nije normalno proširenje polja $\mathbb{Q}$ jer $\mathbb{Q}$ nije fiksno polje grupe automorfizama polja $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ (3.50) (svaki element polja $\mathbb{Q}$ jeste fiksan, medjutim, fiksno polje je definisano (3.43) kao skup svih fiksnih elemenata).

594. Neka je F polje a S proizvoljan skup automorfizama polja F. Dokazati da je skup svih elemenata polja F koji su fiksni za svaki automorfizam skupa S, potpolje polja F.

Rešenje. Ako je f automorfizam polja F, za svako $a,b \in F$ važi

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \qquad f(-a) = -f(a),$$
$$f(ab) = f(a)f(b), \qquad f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}, \text{ za } a\neq 0,$$
$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 1.$$

Ako su a i b fiksni elementi za automorfizam f (tj. f(a)=a, f(b)=b), onda iz gornjih jednakosti na osnovu 3.2. sledi da je skup svih elemenata iz F koji su fiksni u odnosu na f, potpolje F_f polja F. Presek proizvoljne familije potpolja nekog polja je potpolje, prema tome, presek potpolja F_f za $f \in S$ je potpolje polja F.

595. Naći grupu Galoa polinoma

a) $x^5 - 1$, b) $x^7 - 1$, c) $x^5 - 7$,

u odnosu na polje racionalnih brojeva. Odrediti potpolja faktorizacijskog polja datog polinoma koja odgovaraju podgrupama grupe Galoa.

Rešenje. a) Faktorizacijsko polje polinoma $x^5 - 1$ je $\mathbb{Q}(\alpha)$, gde je $\alpha = e^{2\pi i/5}$ primitivan peti koren iz jedinice. Kako je

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),$$

a α je nula polinoma

$$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

nesvodljivog nad $\mathbb{Q}$, grupa Galoa datog polinoma nad $\mathbb{Q}$ (tj. polja $\mathbb{Q}(\alpha)$ nad poljem $\mathbb{Q}$) ima 4 automorfizma (na osnovu 3.51. i 3.52, jer je $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 4$).

Svaki elemenat polja $\mathbb{Q}(\alpha)$ se može prikazati u obliku

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3, \quad a,b,c,d \in \mathbb{Q},$$

ranije je pokazano da je svaki automorfizam polja $\mathbb{Q}(\alpha)$ potpuno odredjen ako se zna slika elementa α i da te slike mogu biti samo elementi konjugovani sa α. Elementi konjugovani sa α nad $\mathbb{Q}$ su $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ (to su nule polinoma p(x) nesvodljivog nad $\mathbb{Q}$), pa ćemo definisati 4 preslikavanja:

$$f_i(a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3) = a+b(\alpha^i)+c(\alpha^i)^2+d(\alpha^i)^3, \quad i=1,2,3,4.$$

Na osnovu 3.40. sledi da je svako od preslikavanja f_i automorfizam polja $\mathbb{Q}(\alpha)$ sa fiksnim poljem $\mathbb{Q}$. To su svi automorfizmi polja $\mathbb{Q}(\alpha)$, pa oni čine grupu Galoa polinoma x^5-1 nad poljem $\mathbb{Q}$. Kako je $f_2^2 = f_4$, $f_2^3 = f_3$, $f_2^4 = f_1$, grupa Galoa $G(\mathbb{Q}(\alpha),\mathbb{Q}) = \{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ je ciklička.

Odredimo fiksno polje podgrupe $H = \{f_1,f_4\}$ grupe G. To fiksno polje će se sastojati od svih elemenata x za koje je $f_i(x) = x$, $i = 1,4$. Iz

$$\begin{aligned} f_4(a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3) &= a+b\alpha^4+c\alpha^8+d\alpha^{12} = \\ &= a+b(-\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1)+c\alpha^3+d\alpha^2 = \\ &= (a-b)-b\alpha+(d-b)\alpha^2+(c-b)\alpha^3 = \\ &= a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3, \end{aligned}$$

(koristili smo da je $\alpha^5 = 1$, $\alpha^4 = -\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1$), sledi $b = 0$, $d=c$, pa je skup svih elemenata oblika

$$a+b(\alpha^2+\alpha^3), \quad a,b \in \mathbb{Q}$$

fiksno polje podgrupe H.

Za podgrupu $\{f_1\}$ čiji je jedini elemenat identičko preslikavanje, fiksno polje je celo polje $\mathbb{Q}(\alpha)$.

596. Dat je polinom $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$,

$$p(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x - 2.$$

Naći grupu Galoa polinoma p(x) nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

Uputstvo. $p(x) = (x-2)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

597. Dat je polinom

$$p(x) = x^n + 2x^{n-1} + 2x^{n-2} + \ldots + 2x^2 + 2x + 1.$$

Naći grupu Galoa polinoma p(x) nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

Rešenje.

$$p(x) = x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1 =$$
$$= (x+1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1) .$$

Nule polinoma $p(x)$ su -1 i n-ti kompleksni koreni iz jedinice $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{n-1}$, pa je faktorizacijsko polje polinoma $p(x)$ $\mathbb{Q}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{n-1}) = \mathbb{Q}(\varepsilon_1)$, gde je ε_1 primitivan n-ti koren iz jedinice. Svakim $\mathbb{Q}$-automorfizmom se ε_1 preslikava opet u primitivan koren iz jedinice, pa je grupa Galoa polja $\mathbb{Q}(\varepsilon_1)$ nad $\mathbb{Q}$ izomorfna multiplikativnoj grupi ostatka po modulu n koji su uzajamno prosti sa n.

598. Odrediti grupu Galoa polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$ nad $\mathbb{Q}$.

599. Odrediti grupu Galoa polinoma
$$x^3 - 2$$
u odnosu na polja $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$, gde je $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Rešenje. Faktorizacijsko polje polinoma x^3-2 nad poljem $\mathbb{Q}$ je $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$. Bazu polja $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$ nad poljem $\mathbb{Q}$ čine elementi 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$, ε, $\varepsilon\sqrt[3]{2}$, $\varepsilon\sqrt[3]{4}$, pa je, kao što je ranije pokazano, svaki automorfizam polja $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$ potpuno odredjen ako se znaju slike elemenata $\sqrt[3]{2}$ i ε. $\sqrt[3]{2}$ je nula polinoma x^3-2 nesvodljivog nad $\mathbb{Q}$, a ε je nula polinoma x^2+x+1 takodje nesvodljivog nad $\mathbb{Q}$, pa se $\sqrt[3]{2}$ može preslikati samo u $\sqrt[3]{2}$, $\varepsilon\sqrt[3]{2}$ i $\varepsilon^2\sqrt[3]{2}$, a ε u ε i ε^2.

Kako je $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$ proširenje stepena 2 polja $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, postoji automorfizam f takav da je

$$f(\varepsilon) = \varepsilon^2 \quad \text{i} \quad f(x) = x, \text{ za svako } x \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}).$$

Takodje je $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$ proširenje stepena tri polja $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, pa je preslikavanje g za koje je

$$g(\sqrt[3]{2}) = \varepsilon\sqrt[3]{2}, \quad g(x) = x, \quad \text{za svako } x \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$$

automorfizam polja $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$.

Tada je $f^2 = id$ (identičko preslikavanje), a g^2 je automorfizam takav da je

$$g^2(\varepsilon) = g(g(\varepsilon)) = g(\varepsilon) = \varepsilon ,$$
$$g^2(\sqrt[3]{2}) = g(g(\sqrt[3]{2})) = g(\varepsilon\sqrt[3]{2}) = \varepsilon\cdot\varepsilon\sqrt[3]{2} = \varepsilon^2\sqrt[3]{2} .$$

Množenjem automorfizama f i g dobijamo nove automorfizme gf i g^2f, pa se svi dobijeni automorfizmi mogu predstaviti tablicom

	id	f	g	g^2	gf	g^2f
ε	ε	ε^2	ε	ε	ε^2	ε^2
$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\varepsilon\sqrt[3]{2}$	$\varepsilon^2\sqrt[3]{2}$	$\varepsilon\sqrt[3]{2}$	$\varepsilon^2\sqrt[3]{2}$

(ovde se u koloni ispod oznake automorfizma nalazi u prvoj vrsti slika elementa ε a u drugoj vrsti slika elementa $\sqrt[3]{2}$ odgovarajućim automorfizmom).

S obzirom da se ε mora preslikavati u ε ili ε^2 a $\sqrt[3]{2}$ u $\sqrt[3]{2}$, $\varepsilon\sqrt[3]{2}$ ili $\varepsilon^2\sqrt[3]{2}$, a u gornjoj tablici su navedene sve kombinacije takvih preslikavanja, sledi da, sem navedenih, drugih automorfizama nema. Grupa Galoa polinoma x^3-2 nad poljem $\mathbb{Q}$ je $G = \{id,f,g,g^2,gf,g^2f\}$ i kako je $f^2 = g^3 = (gf)^2 = id$, grupa G je nekomutativna grupa reda 6 (izomorfna sa grupom S_3).

Potpolju $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ polja $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$ odgovara podgrupa $H = \{id,g,g^2\}$ grupe G. Automorfizmi iz H ostavljaju sve elemente iz $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ nepromenjene.

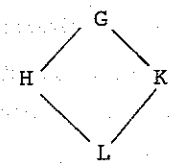
Potpolje $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ je fiksno polje podgrupe $K = \{id,f\}$, a za podgrupu $L = \{id\}$ fiksno polje je celo polje $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$.

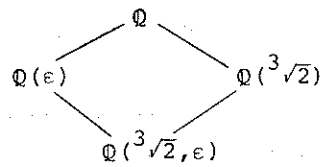
Prema tome, u odnosu na polja $\mathbb{Q}$,$\mathbb{Q}(\varepsilon)$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$ grupe Galoa polinoma x^3-2 su respektivno grupe G, H, K i L.

Polje $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$ je faktorizacijsko polje polinoma x^3-2 nesvodljivog nad $\mathbb{Q}$, pa je $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$ normalno proširenje polja $\mathbb{Q}$.

H je normalna podgrupa grupe G, pa je polje $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ normalno nad $\mathbb{Q}$. Medjutim, K nije normalna podgrupa grupe G pa ni $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nije normalno proširenje polja $\mathbb{Q}$.

Međusobni odnosi podgrupa grupe G i potpolja polja $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\varepsilon)$ mogu se prikazati sledećim dijagramom:





Navešćemo i permutacionu grupu polinoma x^3-2 nad poljem $\mathbb{Q}$ (v. 3.49).

Koreni jednačine $x^3-2=0$ su

$$x_1 = \sqrt[3]{2}, \quad x_2 = \varepsilon\sqrt[3]{2}, \quad x_3 = \varepsilon^2\sqrt[3]{2}\ .$$

Kako je $f(x_1)=x_1$, $f(x_2)=x_3$, $f(x_3)=x_2$, automorfizmu f odgovara permutacija $p_f=(23)$. Iz $g(x_1)=x_2$, $g(x_2)=x_3$, $g(x_3)=x_1$, sledi $p_g=(123)$. Na sličan način dobijamo

$$p_{g^2}=(132), \quad p_{gf}=(12), \quad p_{g^2f}=(13), \quad p_{id}=(1)\ ,$$

pa je $\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$ permutaciona grupa datog polinoma izomorfna grupi G.

600. Naći grupu Galoa G polinoma

$$p(x) = x^4 - 5x^2 + 6$$

u odnosu na polje racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Odrediti potpolja faktorizacijskog polja koja odgovaraju podgrupama grupe G.

Rešenje. Koreni polinoma x^4-5x^2+6 su $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$ i $x_{3,4}=\pm\sqrt{3}$, pa je faktorizacijsko polje tog polinoma $\mathbb{Q}(\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Red tražene grupe Galoa G je na osnovu 3.51. i 3.52.

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}(\sqrt{3})]\,[\mathbb{Q}(\sqrt{3}):\mathbb{Q}] = 2\cdot 2 = 4.$$

Automorfizmi polja $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ su preslikavanja definisana sa

$$\phi : \begin{cases} \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \mapsto \sqrt{3} \end{cases} \qquad \psi : \begin{cases} \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3} \end{cases}$$

Lako se proverava da je $\phi^2=\mathrm{id}$, $\psi^2=\mathrm{id}$ i $\phi\psi=\psi\phi$, pa je skup automorfizama $\{\mathrm{id},\phi,\psi,\phi\psi\}$ podgrupa grupe G, a kako je G reda 4, to je $G=\{\mathrm{id},\phi,\psi,\phi\psi\}$.

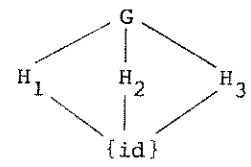
Podgrupe grupe G su

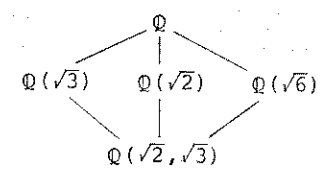
$$H_1=\{\mathrm{id},\phi\}, \quad H_2=\{\mathrm{id},\psi\} \quad \text{i} \quad H_3=\{\mathrm{id},\phi\psi\}.$$

Fiksno polje podgrupe H_1 je $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, fiksno polje podgrupe H_2 je $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a fiksno polje podgrupe H_3 je $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.

Grupa G je komutativna, pa su sve njene podgrupe normalne. Prema tome, i sva navedena polja su normalna proširenja polja $\mathbb{Q}$.

Mreže podgrupa i potpolja su





601. Naći grupu Galoa G polinoma

$$p(x) = x^4 - 2$$

u odnosu na polje racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Odrediti podgrupe grupe G i potpolja faktorizacijskog polja koji im odgovaraju.

Rešenje. Polinom $p(x)$ je nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$ po Ajzenštajnovom kriterijumu. Koreni polinoma su $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{2}$, $x_{3,4}=\pm i\sqrt[4]{2}$, pa je faktorizacijsko polje

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}, -i\sqrt[4]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i).$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i):\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})]\,[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}:\mathbb{Q}] = 2\cdot 4 = 8,$$

pa je red grupe G osam.

Lako se proverava da su preslikavanja odredjena sa

$$\psi : \begin{cases} i \mapsto -i \\ \sqrt[4]{2} \mapsto \sqrt[4]{2} \end{cases} \quad \text{i} \quad \phi : \begin{cases} i \mapsto i \\ \sqrt[4]{2} \mapsto i\sqrt[4]{2} \end{cases}$$

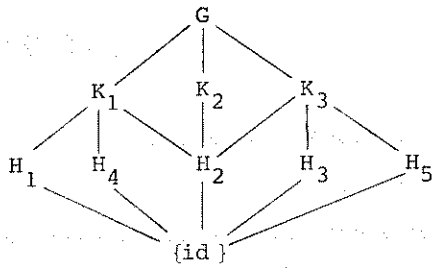
automorfizmi polja $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i)$. Polje $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ je fiksno za automorfizam ψ, a polje $\mathbb{Q}(i)$ je fiksno za automorfizam ϕ. Jednostavno se proverava da je $\psi^2=\mathrm{id}$, $\phi^4=\mathrm{id}$ i $\psi\phi=\phi^3\psi$. Zbog toga je

$\{id,\psi,\phi,\phi^2,\phi^3,\phi\psi,\phi^2\psi,\phi^3\psi\}$ podgrupa grupe G reda 8, tj. cela grupa G. Grupa G ima sledeće podgrupe:

$H_1 = \{id\ \psi\}$,
$H_2 = \{id,\phi^2\}$,
$H_3 = \{id,\phi\psi\}$,
$H_4 = \{id,\phi^2\psi\}$,
$H_5 = \{id,\phi^3\psi\}$,

$K_1 = \{id,\phi,\phi^2,\phi^3\}$,
$K_2 = \{id,\phi^2,\psi,\phi^2\psi\}$,
$K_3 = \{id,\phi,\phi\psi,\phi^3\psi\}$.

Podgrupe H_2,K_1,K_2,K_3 su normalne podgrupe grupe G, a H_2 je centar te grupe. Mreža podgrupa je



Automorfizmi iz K_1 fiksiraju i, pa je $\mathbb{Q}(i)$ fiksno polje za K_1.

K_2 fiksira element $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2} = \sqrt{2}$, pa je $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fiksno polje za K_2.

K_3 fiksira $i\sqrt[4]{2}\ \sqrt[4]{2} = i\sqrt{2}$, pa je $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ fiksno polje za K_3.

H_1 fiksira $\sqrt[4]{2}$, pa je $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ fiksno polje za H_1.

H_2 fiksira i i $\sqrt{2}$, pa je $\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$ fiksno polje za H_2.

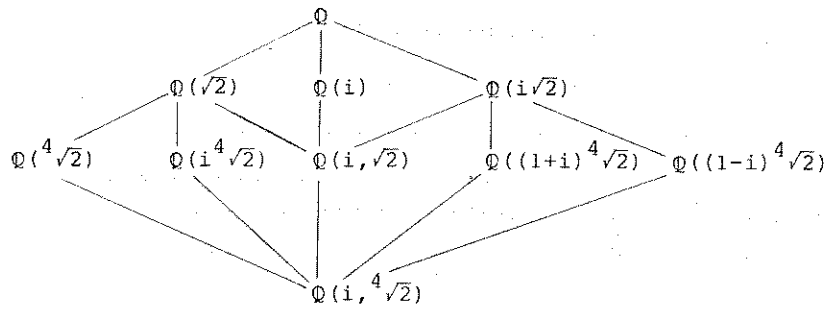
H_3 fiksira $(1+i)\sqrt[4]{2}$, pa je $\mathbb{Q}((1+i)\sqrt[4]{2})$ fiksno polje za H_3 .

H_4 fiksira $i\sqrt[4]{2}$, pa je $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$ fiksno polje za H_4.

H_5 fiksira $(1-i)\sqrt[4]{2}$, pa je $\mathbb{Q}((1-i)\sqrt[4]{2})$ fiksno polje za H_5.

Polja $\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ i $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ su normalna proširenja polja $\mathbb{Q}$.

Mreža potpolja je:



602. Odrediti grupu Galoa G polinoma

$$p(x) = x^4 + 1$$

nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Odrediti podgrupe grupe G i potpolja faktorizacijskog polja koja im odgovaraju.

Rešenje. $x^4 + 1$ je nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$. Medjutim

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1),$$

pa su koreni polinoma $x^4 + 1$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\ ,\quad x_2 = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2},\quad x_3 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\ ,\quad x_4 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2},$$

a faktorizacijsko polje je $\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$. Red grupe G je $[\mathbb{Q}(i,\sqrt{2}):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(i,\sqrt{2}):\mathbb{Q}(i)]\,[\mathbb{Q}(i):\mathbb{Q}] = 2\cdot 2\cdot 4$. (Do istog rezultata se moglo doći prikazujući korene u obliku $x_3 = e^{\pi i/4} = \alpha$, $x_1 = \alpha^3$, $x_2 = \alpha^5$, $x_4 = \alpha^7$, faktorizacijsko polje polinoma $x^4 + 1$ je onda $\mathbb{Q}(\alpha)$ a stepen proširenja je $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 4$).

Preslikavanja definisana sa

$$\phi : \begin{cases} i \mapsto -i \\ \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2} \end{cases} \qquad \psi : \begin{cases} i \mapsto i \\ \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2} \end{cases}$$

su automorfizmi polja $\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$.

Lako se proverava da je $\phi^2 = id$, $\psi^2 = id$ i $\phi\psi = \psi\phi$, pa je $\{id,\phi,\psi,\phi\psi\} = G$. Podgrupe grupe G su

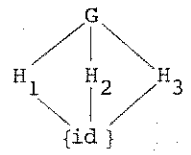
$H_1 = \{id, \phi\}$ i njoj odgovara potpolje $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$,

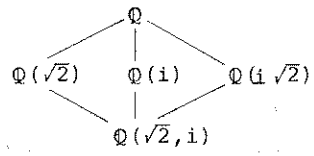
$H_2 = \{id, \psi\}$ i njoj odgovara potpolje $\mathbb{Q}(i)$ i

$H_3 = \{id, \phi\psi\}$ i njoj odgovara potpolje $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.

G je komutativna grupa pa su sve podgrupe normalne, a odgovarajuća potpolja su normalna proširenja polja $\mathbb{Q}$.

Mreža podgrupa i potpolja je:





603. Odrediti grupu Galoa G polinoma

a) $x^4 + 7x^2 + 4$

b) $x^4 + 4x^2 + 2$

c) $x^4 + 6x^2 + 6$

nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Odrediti podgrupe grupe G i potpolja faktorizacijskog polja koja im odgovaraju.

Rešenje. a) $x^4 + 7x^2 + 4 = (x^2+2)^2 + 3x^2 = (x^2+\sqrt{-3}x + 2)(x^2 - \sqrt{-3}x + 2)$, pa su koreni datog polinoma

$$x_1 = \frac{\sqrt{-3}+\sqrt{-11}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{-3}-\sqrt{-11}}{2}, \quad x_3 = \frac{-\sqrt{-3}+\sqrt{-11}}{2}, \quad x_4 = \frac{-\sqrt{-3}-\sqrt{-11}}{2}.$$

Faktorizacijsko polje je $\mathbb{Q}(\sqrt{-3},\sqrt{-11})$, a stepen ekstenzije je $[\mathbb{Q}(\sqrt{-3},\sqrt{-11}):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{-3},\sqrt{-11}):\mathbb{Q}(\sqrt{-3})]\,[\mathbb{Q}(\sqrt{-3}):\mathbb{Q}] = 2\cdot 2 = 4$, pa je red grupe G četiri.

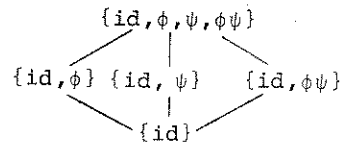
Preslikavanja definisana sa

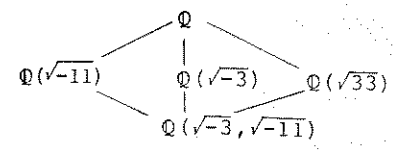
$$\phi : \begin{cases} \sqrt{-3} \mapsto -\sqrt{-3} \\ \sqrt{-11} \mapsto \sqrt{-11} \end{cases} \quad \text{i} \quad \psi : \begin{cases} \sqrt{-3} \mapsto \sqrt{-3} \\ \sqrt{-11} \mapsto -\sqrt{-11} \end{cases}$$

su automorfizmi faktorizacijskog polja.

Lako se proverava da je $\phi^2 = id$, $\psi^2 = id$ i $\phi\psi = \psi\phi$, pa je $G = \{id, \phi, \psi, \phi\psi\}$.

Mreža podgrupa i odgovarajućih potpolja je





b) $p(x) = x^4+4x^2+2 = (x^2+2)^2 - 2 = 0$, pa su koreni polinoma $p(x)$

$x_1 = \sqrt{-2+\sqrt{2}}$, $x_2 = -\sqrt{-2+\sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{-2-\sqrt{2}}$ i $x_4 = -\sqrt{-2-\sqrt{2}}$.

Posmatrajmo proširenje $\mathbb{Q}(\sqrt{-2+\sqrt{2}})$. Polinom x^4+4x^2+2 je nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$ po Ajzenštajnovom kriterijumu, pa proizvoljan element $y \in \mathbb{Q}(\sqrt{-2+\sqrt{2}})$ ima oblik $y = a+b\sqrt{-2+\sqrt{2}} + c(\sqrt{-2+\sqrt{2}})^2 + d(\sqrt{-2+\sqrt{2}})^3 =$

$= (a-2c)+c\sqrt{2}+((b-2d)+d\sqrt{2})\sqrt{-2+\sqrt{2}}$, $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$.

Iz $x_1x_3 = \sqrt{-2+\sqrt{2}}\sqrt{-2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, sledi da je

$$\sqrt{-2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-2+\sqrt{2}}} = (2+(\sqrt{-2+\sqrt{2}})^2)(-2\sqrt{-2+\sqrt{2}} - \frac{1}{2}(\sqrt{-2+\sqrt{2}})^3) =$$

$$= -3\sqrt{-2+\sqrt{2}} - (\sqrt{-2+\sqrt{2}})^3 .$$

Pri tom je korišćeno da je $\frac{1}{\sqrt{-2+\sqrt{2}}} = -2\sqrt{-2+\sqrt{2}} - \frac{1}{2}(\sqrt{-2+\sqrt{2}})^3$ (što se dobija metodom neodredjenih koeficijenata). Iz svega sledi da je faktorizacijsko polje polinoma $p(x)$ $\mathbb{Q}(\sqrt{-2+\sqrt{2}}, -\sqrt{-2+\sqrt{2}}, \sqrt{-2-\sqrt{2}}, -\sqrt{-2-\sqrt{2}}) = \mathbb{Q}(\sqrt{-2+\sqrt{2}})$, jer se pomoću nule x_1 racionalno izražavaju sve ostale.

$[\mathbb{Q}(\sqrt{-2+\sqrt{2}}):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{-2+\sqrt{2}}:\mathbb{Q}(\sqrt{2})]\,[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}] = 2\cdot 2 = 4$, pa je red grupe G četiri.

Pošto automorfizmi polja $\mathbb{Q}(\sqrt{-2+\sqrt{2}})$ permutuju korene polinoma odredimo automorfizam ϕ koji prevodi x_1 u x_3. Direktno se proverava

$\phi: \sqrt{-2+\sqrt{2}} \mapsto -3\sqrt{-2+\sqrt{2}} - (\sqrt{-2+\sqrt{2}})^3$,

$\phi^2 : \sqrt{-2+\sqrt{2}} \mapsto -\sqrt{-2+\sqrt{2}}$,

$\phi^3 : \sqrt{-2+\sqrt{2}} \mapsto 3\sqrt{-2+\sqrt{2}} + (\sqrt{-2+\sqrt{2}})^3$,

$\phi^4 = id$.

Sledi da je grupa G ciklička grupa reda 4. Jedina netrivijalna podgrupa je $H=\{id,\phi^2\}$ i njoj odgovara potpolje $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ jer je $\sqrt{2}=2+(\sqrt{-2+\sqrt{2}})^2$ fiksan element za automorfizam ϕ^2.

Mreža podgrupa i potpolja je:

c) Koreni datog polinoma su

$$x_1=\sqrt{-3+\sqrt{3}},\quad x_2=-\sqrt{-3+\sqrt{3}},\quad x_3=\sqrt{-3-\sqrt{3}}\quad\text{i}\quad x_4=-\sqrt{-3-\sqrt{3}},$$

a njegovo faktorizacijsko polje je $\mathbb{Q}(\sqrt{-3+\sqrt{3}},-\sqrt{-3+\sqrt{3}},\sqrt{-3-\sqrt{3}},-\sqrt{-3-\sqrt{3}})=\mathbb{Q}(\sqrt{-3+\sqrt{3}},\sqrt{2})$, jer je $x_1x_3=\sqrt{6}=\sqrt{3}\sqrt{2}=(x_1^2+3)\sqrt{2}$, pa je $x_3=(x_1+\frac{3}{x_1})\sqrt{2}$ ili, kad se odredi inverzni element za x_1, dobija se $x_3=(-2x_1-\frac{1}{2}x_1^3)\sqrt{2}$.

Red grupe G je $[\mathbb{Q}(\sqrt{-3+\sqrt{3}},\sqrt{2}):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt{-3+\sqrt{3}},\sqrt{2}):\mathbb{Q}(\sqrt{-3+\sqrt{3}})]\cdot[\mathbb{Q}(\sqrt{-3+\sqrt{3}}):\mathbb{Q}]=2\cdot4=8$. Automorfizmi polja $\mathbb{Q}(\sqrt{-3+\sqrt{3}},\sqrt{2})$ su:

$$\phi:\begin{cases}\sqrt{2}\mapsto\sqrt{2}\\ x_1\mapsto(2x_1-\frac{1}{2}x_1^3)\sqrt{2}\end{cases}\quad\text{i}\quad\psi:\begin{cases}\sqrt{2}\mapsto-\sqrt{2}\\ x_1\mapsto x_1\end{cases}$$

Direktno se proverava da je

$$\phi^2:\begin{cases}\sqrt{2}\mapsto\sqrt{2}\\ x_1\mapsto -x_1\end{cases},\quad \phi^3:\begin{cases}\sqrt{2}\mapsto\sqrt{2}\\ x_1\mapsto(2x_1+\frac{1}{2}x_1^3)\sqrt{2},\end{cases}\quad \phi^4=\mathrm{id}$$

i $\psi\phi=\phi^3\psi$, pa je $G=\{id,\phi,\phi^2,\phi^3,\psi,\phi\psi,\phi^2\psi,\phi^3\psi\}$.

Slično kao u prethodnim primerima mogu se odrediti podgrupe grupe Galoa G i odgovarajuća potpolja.

604. Neka je x^4+ax^2+b nesvodljiv polinom nad polem $\mathbb{Q}$ čija je grupa Galoa G. Dokazati:

a) Ako je b kvadrat u $\mathbb{Q}$ tada je G Klajnova grupa $(C_2\times C_2)$.

b) Ako b nije kvadrat u $\mathbb{Q}$, ali je $b(a^2-4b)$ kvadrat, tada je G ciklička grupa reda 4.

c) Ako ni b ni $b(a^2-4b)$ nisu kvadrati u $\mathbb{Q}$, onda je G diedarska grupa reda 8.

Uputstvo. Generalisati rešenje prethodnog zadatka.

605. Neka je $x^4+bx^3+cx^2+bx+1$ nesvodljiv polinom nad $\mathbb{Q}$ čija je grupa Galoa G. Dokazati:

a) Ako je $c^2+4c+4-4b^2$ kvadrat u $\mathbb{Q}$, tada je G Klajnova grupa $(C_2\times C_2)$.

b) Ako $c^2+4c+4-4b^2$ nije kvadrat u $\mathbb{Q}$, ali je $(c^2+4c+4-4b^2)(b^2-4c+8)$ kvadrat u $\mathbb{Q}$, tada je G ciklička grupa reda 4.

c) Ako ni $c^2+4c+4-4b^2$ ni $(c^2+4c+4-4b^2)(b^2-4c+8)$ nisu kvadrati u $\mathbb{Q}$, tada je G diedarska grupa reda 8.

606. Naći grupu Galoa polinoma

a) x^4-10x^2+1

b) $x^3+2x^2-10x-15$

c) $x^5-3x^3-2x^2+6$

d) $x^5+x^3-2x^2-2$

nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

Uputstvo. a) Nule ovog polinoma su

$$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3},\quad x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3},\quad x_3=-\sqrt{2}+\sqrt{3},\quad x_4=-\sqrt{2}-\sqrt{3},$$

a grupa Galoa je $C_2\times C_2$,

b) $x^3+2x^2-10x-15=(x-3)(x^2+5x+5)$,

c) $x^5-3x^3-2x^2+6=(x^2-3)(x^3-2)$,

d) $x^5+x^3-2x^2-2=(x^2+1)(x^3-2)$.

607. Neka je p prost broj a f(x) polinom stepena p nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$. Ako f(x) ima u polju kompleksnih brojeva tačno dva korena koji nisu realni, onda je grupa Galoa polinoma f(x) nad $\mathbb{Q}$ izomorfna simetričnoj grupi S_p. Dokazati.

Rešenje. Neka je G grupa Galoa polinoma f(x) posmatrana kao podgrupa grupe S_p. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_p$ koreni polinoma f(x), onda je $F = \mathbb{Q}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ faktorizacijsko polje polinoma f(x). Polje $\mathbb{Q}(a_1)$ je potpolje faktorizacijskog polja F, a pošto je f(x) nesvodljiv polinom nad $\mathbb{Q}$, onda je (3.24) $[\mathbb{Q}(a_1):\mathbb{Q}] = p$. Na osnovu osnovne teoreme Galoa (3.53) potpolju $\mathbb{Q}(a_1)$ polja F odgovara podgrupa H grupe G čiji je indeks u G p. Prema tome, red grupe G je deljiv sa p. Na osnovu Košijeve teoreme (1.97) grupa G sadrži element σ reda p. Permutacija σ mora onda biti ciklus dužine p (zadatak 124).

Preslikavanje definisano sa $\alpha+\beta i \mapsto \alpha-\beta i$ je $\mathbb{R}$-automorfizam polja $\mathbb{C}$. Ako je $\alpha_1 + \beta_1 i$ kompleksan koren koji nije realan polinoma f(x), onda je $\alpha_1 - \beta_1 i$ drugi kompleksan koren koji nije realan tog polinoma, prema tome, navedeni automorfizam korene koji nisu realni polinoma f(x) preslikava jedan na drugi, a ostale korene ostavlja neizmenjene. Restrikcija tog automorfizma na F je automorfizam polja F, dakle, grupa G sadrži transpoziciju $\tau = (ij)$. S obzirom da se σ može pisati u obliku $\sigma = (ik_2 \ldots k_p)$, neki stepen od σ je oblika $\sigma^q = (ij\ell_3 \ldots \ell_p) \in G$. Permutacije τ i σ^q generišu celu grupu S_p, dakle, $G = S_p$.

PREGLED OZNAKA

U zagradi je navedena stranica na kojoj se nalazi definicija odgovarajuće oznake i broj te definicije.

$\mathbb{N}$	skup prirodnih brojeva
$\mathbb{Z}$	skup celih brojeva
$\mathbb{Q}$	skup racionalnih brojeva
$\mathbb{Q}^+$	skup pozitivnih racionalnih brojeva
$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\mathbb{R}^+$	skup pozitivnih realnih brojeva
$\mathbb{C}$	skup kompleksnih brojeva
$\|G\|$	red grupe G , kardinalni broj skupa G (s.4(1.31))
$\|a\|$	red elementa grupe (s.4(1.14))
C_n	ciklička grupa reda n (s.6(1.24))
$G_1 \simeq G_2$	grupe (prsteni,polja) G_1 i G_2 su izomorfne (s.5(1.19), s.120(2.44))
Ker f	jezgro homomorfizma f (s.5(1.18), s(120(2.43))
Im f	slika homomorfizma f (s.120(2.43))
$\langle a \rangle$	grupa generisana elementom a (s.5(1.22))
$\langle S \rangle$	grupa generisana skupom S (s.6(1.26))
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$	permutacija $1\mapsto 4,\ 2\mapsto 3,\ 3\mapsto 2,4\mapsto 1$ (s.7(1.33))
$[4\ 3\ 2\ 1]$	permutacija $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$ (s. 7(1.33))
$(1\ 2\ 3\ 4)$	ciklus $1\mapsto 2,\ 2\mapsto 3,\ 3\mapsto 4,\ 4\mapsto 1$ (s.7(1.35))
S_n	simetrična grupa stepena n (s.7(1.33))
A_n	alternativna grupa stepena n (s.8(1.40))
P_n	grupa permutacionih matrica formata n x n (s.8(1.42))
$[G:H]$	indeks podgrupe H u grupi G (s.9(1.53))
$H \lhd G$	H je normalna podgrupa grupe G (s.10(1.56))
$G_1 \times G_2$	direktan proizvod grupa (prstena) (s.12(1.70)), s.132 (zad. 317, 318))
Z(G)	centar grupe G (s.12(1.74))
C(A)	centralizator skupa A (s.13(1.75))
N(A)	normalizator skupa A (s.13(1.76))
$[x,y]$	komutator elemenata x,y (s.13(1.81))
G'	izvod grupe G (s.13(1.82))
A(G)	grupa automorfizama grupe G (s.16(1.107))

$U(G)$	grupa unutrašnjih automorfizama grupe G (s.16(1.107))
$\mathbb{Z}_p^\infty$	Priferova grupa (s.20(zad. 8))
$a \equiv b \pmod m$	a je kongruentno sa b po modulu m
$\mathbb{Z}_m$	skup ostataka po modulu m (s.22(zad. 11))
$\mathbb{Q}_p$	(s.29(zad. 29))
$\mathbb{Q}^p$	(s.20(zad. 30))
$F^{m,n}$	skup svih matrica formata m x n nad poljem F
Char R	karakteristika prstena R (s.115(2.12))
C(R)	centar prstena R (s.117(2.28))
(S)	ideal generisan skupom S (s.119(2.38))
(a)	glavni ideal generisan elementom a (s.119(2.39))
$S^{-1}R$	prsten razlomaka prstena R sa imeniocima iz S (s.122(2.58))
$R[x]$	prsten polinoma nad R (s.123(2.61))
$R[x_1,x_2,\ldots,x_n]$	(s.123(2.63))
σ_i	elementarni simetrični polinom (s.124(2.65))
$f'(x)$	izvod polinoma f(x) (s.126(2.77))
s_k	Njutnova suma (s.127(2.82))
End(G)	prsten endomorfizama Abelove grupe G (s.129 (zad.309))
R[[x]]	prsten formalnih stepenih redova sa koeficijentima iz R (s.131(zad. 313))
R<x>	prsten proširenih formalnih stepenih redova sa koeficijentima iz R (s.131(zad. 315))
deg f(x)	stepen polinoma f(x) (s.124(2.66))
N(R)	ideal nilpotentnih elemenata prstena R (s.160(zad. 381))
F(S)	polje generisano sa FUS (s.209(3.15))
[K:F]	stepen proširenja polja K nad poljem F (s.211(3.22))
F(x)	polje racionalnih funkcija po x nad poljem F (s.211(3.26))
G(K,F)	grupa Galoa polja K nad poljem F (s.214(3.44))

L I T E R A T U R A

1. Albert,A.A., *Fundamental Concepts of Higher Algebra*, The University of Chicago Press, Chicago, 1956.
2. Ames,D., *An Introduction to Abstract Algebra*, International Textbook Company, Scranton, 1969.
3. Artin, E., *Galois Theory*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1971.
4. Atiyah, M.F., Macdonald,I.G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, 1969.
5. Barshay, J., *Topics in Ring Theory*, W.A.Benjamin, New York, 1969.
6. Baumslag,B.,Chandler,B., *Group Theory*, McGraw-Hill, New York, 1968.
7. Bhattacharya,P.B., Jain,S.K., *First Course in Rings, Fields and Vector Spaces*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1977.
8. Bigard,A., Crestey,M.,Grappy,J., *Problèmes d'algèbre générale*, Dunod, Paris, 1967.
9. Birkhoff , G.,MacLane,S., *A Survey of Modern Algebra (4th ed.)*, Macmillan, New York, 1977.
10. Болтянский,В.Г.,Виленкин,Н.Я., Симетрия в алгебре,Наука, Москва, 1967.
11. Bourbaki,N., *Algèbre (ch. 1-3)*, Hermann, Paris, 1970.
12. Бурбаки,Н., Алгебра (гл. 4-6), Наука, Москва, 1965.
13. Carmichael,R.D., *Introduction to the Theory of Finite Groups*, Dover, New York, 1956.
14. Cohn,P.M., *Algebra*, Wiley, Chichester, v. 1, 1974., v.2, 1977.
15. Чупона,Ѓ.,Трпеновски,Б., Предавања по алгебра, книга II, Скопје, 1973.
16. Deskins,W.,E., *Abstract Algebra*, Macmillan, New York, 1964.
17. Devidé, V., *Zadaci iz apstraktne algebre*, Naučna knjiga, Beograd, 1971.
18. Дочев,К., Димитров,Д., Чуканов,В., Рьководство за упражнения по висша алгебра, Наука и изкуство, София, 1972.
19. Dubreil,P., Dubreil-Jacotin,M.L., *Lecons d'algèbre moderne*, Dunod, Paris, 1961.
20. Fang,J., *Abstract Algebra*, Schaum, New York, 1963.
21. Fraleigh,J.B., *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley, Reading, 1967.
22. Gaal,L., *Classical Galois Theory with Examples (2nd ed.)*, Chelsea, New York, 1973.
23. Girardi,M., Israel,G., *Teoria dei Campi*, Feltrinelli, Milano, 1976.

24. Godement,R., *Cours d'algèbre*, Hermann, Paris, 1966.
25. Goldhaber,J.K., Ehrlich,G., *Algebra*, Macmillan, London, 1970.
26. Goodearl,K.R., *Von Neumann Regular Rings*, Pitman, London, 1979.
27. Hall,M., *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959.
28. Halmos,P.R., *Lectures on Boolean Algebras*, Van Nostrand Reinhold, London, 1963.
29. Herstein,I.N., *Topics in Algebra (2nd ed.)*, Wiley, New York, 1975.
30. Hungerford,T.W., *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1974.
31. Jacobson,N., *Basic Algebra*, W.H.Freeman, San Francisco, t.I, 1974, t. II, 1980.
32. Kaiser,H.,Lidl,R., Wiesenbauer,J., *Aufgabensammlung zur Algebra*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1975.
33. Kaplansky,I., *Commutative Rings*, The University of Chicago Press, Chicago, 1974.
34. Kaplansky,I., *Fields and Rings (2nd ed.)*, The University of Chicago Press, Chicago, 1972.
35. Каргаполов,М.И., Мерзляков,Ю.И., Основы теории групп, Наука, Москва, 1982.
36. Каш,Ф., Модули и кольца, Мир, Москва, 1981.
37. Kochendörffer,R., *Einführung in die Algebra*, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.
38. Кострикин,А.И., Введение в алгебру, Наука, Москва, 1977.
39. Kurepa,Dj., *Viša algebra I, II*, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1969.
40. Курош.А.Г., Общая алгебра, лекции 1969-1970 учебного года, Наука, Москва, 1974.
41. Курош,А.Г., Теория групп, Наука, Москва, 1967.
42. Lafon,J.P., *Algèbre commutative*, Hermann, Paris, 1977.
43. Lambek,J., *Lectures on Rings and Modules*, Chelsea, New York, 1976.
44. Lang,S., *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, 1965.
45. Ledermann,W., *Introduction to the Theory of Finite Groups*, Oliver and Boyd, 1973.
46. Lefort,G., *Algèbre et analyse-exercices*, Dunod, Paris, 1964.
47. Lentin,A., Rivaud,J., *Éléments d'algèbre moderne*, Vuibert, Paris, 1957.
48. Ляпин,Е.Ц., Аизенштат, А.Я.,Лесохин,М.М., Упражнения по теории групп, Наука, Москва, 1967.
49. MacCoy,N.H., *The Theory of Rings*, Macmillan, New York, 1964.

50. Macdonald,D.I., *The Theory of Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1968.
51. MacDufee,C.C., *An Introduction to Abstract Algebra*, Dover, New York. 1966.
52. MacLane,S., Birkhoff,G., *Algebra (2nd ed.)*, Macmillan, New York, 1979.
53. McCarthy,P.J., *Algebraic Extensions of Fields*, Blaisdell, Boston, 1966.
54. Mitrinović,D.S.,*Zbornik matematičkih problema III*, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1960.
55. Mutafian,C., *Le Défi algèbrique*, Vuibert,Paris, t. 1, 1975., t. 2, 1976.
56. Mutafian,C., *Équations algèbriques et théorie de Galois*, Vuibert, Paris, 1980.
57. Paley,H., Weichsel,P., *A First Course in Abstract Algebra*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.
58. Perić,V., *Algebra I, II*, Svjetlost, Sarajevo, 1980.
59. Постников,М.М., Теория Галуа, Физматгиз, Москва, 1963.
60. Prešić,S., *Zbirka zadataka iz apstraktne algebre*, Beograd, 1962.
61. Querré,J., *Cours d'algèbre*, Masson, Paris, 1976.
62. Radić,M., *Rješivost algebarskih jednadžbi*, Školska knjiga, Zagreb, 1966.
63. Reiffen,H-J., Scheja, G., Vetter,U., *Algebra*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1969.
64. Ribenboim,P., *Algebraic Numbers*, Wiley-Interscience, New York, 1972.
65. Rivaud,J., *Algèbre*, T.I, Vuibert, Paris, 1973.
66. Rose,J.S., *A Course on Group Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
67. Rotman,J.J., *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New York, 1979.
68. Rotman,J.J., *The Theory of Groups (2nd ed.)*, Allyn and Bacon, Boston, 1973.
69. Samardžiski,A., Celakoski,N., *Rešeni zadači po algebra II*, Skopje , 1971.
70. Shapiro,L.W., *Introduction to Abstract Algebra*, McGraw-Hill, New York, 1975.
71. Скорняков,Л.А., Элементы алгебры , Наука, Москва, 1980.
72. Stewart,I., *Galois Theory*, Chapman and Hall, London, 1973.
73. Stojaković,M., *Teorija jednačina*, Naučna knjiga, Beograd, 1973.
74. Stojaković,Z., *Zbirka zadataka iz apstraktne algebre*, Novi Sad, 1973.

75. Ušan,J., Djonin,V., Tošić,R., *Uvod u algebru*, Radivoj Ćirpanov, Novi Sad, 1979.

76. ван дер Варден,Б.Л., Алгебра, Наука, Москва, 1976.

77. Vidav,I., *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1971.

78. Weinstein,M., *Examples of Groups*, Polygonal, Passaic, 1977.

79. Winter,D.J., *The Structure of Fields*, Springer-Verlag, New York, 1974.

80. Zappa,G., Permutti,R., *Gruppi, Corpi, Equazioni*, Feltrinelli, Milano 1963.