Diferencijalni i integralni račun I

Saša Krešić-Jurić
Prirodoslovno–matematički fakultet
Sveučilište u Splitu

Sadržaj

Poglavlje 1

Skupovi i funkcije

U matematičkoj analizi pojmovi skup i funkcija su od fundamentalnog značaja. Pretpostavlja se da je čitalac upoznat sa skupovima prirodnih, racionalnih i realnih brojeva, i elementarnim funkcijama. Posebno, smatramo da je čitalac upoznat sa izgradnjom skupa realnih brojeva. Stoga u ovom poglavlju dajemo kratak pregled samo nekih pojmova vezanih za skupove i funkcije koji su nam potrebni u kasnijim izlaganjima.

Pod pojmom skupa podrazumijevamo dobro definiranu kolekciju objekata koje nazivamo elementi skupa. Kada kažemo da je kolekcija dobro definirana to znaži da na nedvojben način možemo utvrditi koji elementi pripadaju skupu. Skupove obično označavamo velikim slovima A, B, $C \ldots$, dok mala slova predstavljaju elemente skupa. Ako je x element skupa S, tada pišemo $x \in S$; u protivnom pišemo $x \notin S$. Skup možemo zadati tako da izlistamo njegove elemente ili da opišemo svojstvo koje na jedinstven način određuje elemente skupa. Na primjer, skup

$$G = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \tag{1.1}$$

možemo definirati kao

$$G = \{x \mid x \text{ je jedno od prva četiri slova grčke abecede }\}. \tag{1.2}$$

Svaki element skupa potrebno je navesti točno jedan put, a poredak nije važan. Ako svi elementi skupa A pripadaju skupu B, tada kažemo da je A podskup od B i pišemo $A \subseteq B$ (ili $B \supseteq A$). Za skupove A i B kažemo da su jednaki ako imaju iste elemente i pišemo $A = B$. Ako je $A \subseteq B$ i $A \neq B$, tada pišemo $A \subset B$ i kažemo da je A pravi podskup od B. Očigledno je $A = B$ ako i samo ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Prazan skup $\emptyset$ je skup koji ne sadrži ni jedan element. Skup koji sadrži sve elemente u razmatranju nazivamo univerzalni skup i označavamo sa U. Za svaki podskup A univerzalnog skupa imamo

$$\emptyset \subseteq A \subseteq U. \tag{1.3}$$

Na skupovima definiramo sljedeće operacije.

(1) Unija skupova A i B

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{ili} \quad x \in B\} \tag{1.4}$$

U ovom kontekstu veznik "ili" je inkluzivan što znači da x može biti i u A i u B. Dakle, $A \cup B$ se sastoji od onih elemenata koji pripadaju bilo skupu A bilo skupu B, ili su eventualno i u A i u B.

(2) Presjek skupova A i B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{i} \quad x \in B\} \tag{1.5}$$

Presjek $A \cap B$ sadrži one elemente koji pripadaju i skupu A i skupu B.

(3) Komplement skupa A

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\} \tag{1.6}$$

(4) Razlika skupova A i B

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \quad \text{i} \quad x \notin B\} \tag{1.7}$$

(5) Kartezijev umnožak skupova A i B

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, \quad b \in B\} \tag{1.8}$$

Kartezijev umnožak se sastoji od uređenih parova (a, b) takvih da je $a \in A$ i $b \in B$.

Uzimanje unije, presjeka i komplementa su tri osnovne operacije sa skupovima koje nazivamo Booleove operacije. Booleove operacije zadovoljavaju sljedeća svojstva:

(1) komutativnost

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A \tag{1.9}$$

(2) asocijativnost

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \tag{1.10}$$

(3) idempotentnost

$$A \cap A = A, \quad A \cup A = A \tag{1.11}$$

(4) distributivnost

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{1.12}$$

(5) de Morganovi teoremi

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \tag{1.13}$$

(6) involutivnost

$$(A^c)^c = A \tag{1.14}$$

Definicija 1.1 *Neka su X i Y neprazni skupovi. Funkcija $f\colon X \to Y$ je pravilo koje svakom elementu $x \in X$ pridružuje jedinstveni element $y \in Y$.*

Element y nazivamo slika elementa x i pišemo $y = f(x)$. Skup X nazivamo *domena* funkcije, a skup

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \tag{1.15}$$

se nazivamo *slika* funkcije. Ako je $f(X) = Y$, tada kažemo da je f *surjekcija* na Y. Graf funkcije je podskup kartezijevog umnoška $X \times Y$ definiran sa

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}. \tag{1.16}$$

Ako su $X \subseteq \mathbb{R}$ i $Y \subseteq \mathbb{R}$ podskupovi realnih brojeva, tada $G(f)$ često možemo predočiti kao krivulju u ravnini $\mathbb{R}^2$ što je uobičajeno značenje grafa funkcije.

Definicija 1.2 *Neka je $f\colon X \to Y$ funkcija. Ako $f(x_1) = f(x_2)$ implicira $x_1 = x_2$, tada kažemo da je f injekcija. Ako za svaki $y \in Y$ postoji $x \in X$ takav da je $y = f(x)$, tada kažamo da je f surjekcija.*

Drugim riječima, f je injekcija ako različite točke u X preslikava u različite točke u Y. Slično, f je surjekcija ako je slika funkcije $f(X)$ jednaka skupu Y. Ako je $f\colon X \to Y$ injekcija i surjekcija, tada kažemo da je f *bijekcija*.

Neka je $f\colon X \to Y$ injekcija. Tada se u svaki $y \in f(X)$ preslikava jedinstveni $x \in X$, pa možemo definirati inverzno preslikavanje $f^{-1}\colon f(X) \to X$ pravilom

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{ako i samo ako je} \quad f(x) = y. \tag{1.17}$$

Inverzna funkcija $f^{-1}\colon f(X) \to X$ je očigledno bijekcija.

Pretpostavimo sada da su zadane dvije funkcije $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Kompoziciju $g \circ f\colon X \to Z$ definiramo pravilom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in X. \tag{1.18}$$

Kompozicija $g \circ f$ djeluje na točku x tako da prvo f djeluje na x, a zatim g djeluje na $f(x)$. Za dvije funkcije $f\colon X \to Y$ i $g\colon X \to Y$ kažemo da su jednake ako je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in X$. Ponekad je potrebno promatrati restrikciju funkcije $f\colon X \to Y$ na podskup $A \subseteq X$. U tom slučaju restrikciju $f_A\colon A \to Y$ definiramo sa $f_A(x) = f(x)$ za svaki $x \in A$.

Funkciju $id_X\colon X \to X$ definiranu sa $id_X(x) = x$ za svaki $x \in X$ nazivamo identiteta na X. Ova funkcija svaki element $x \in X$ preslikava na samog sebe. Identiteta id_X je očigledno bijekcija i vrijedi $id_X^{-1} = id_X$. Neka je $f\colon X \to Y$ injekcija i neka je $f^{-1}\colon f(X) \to X$ inverzno preslikavanje. Iz definicije inverzne funkcije slijedi

$$f^{-1} \circ f = id_X, \quad f \circ f^{-1} = id_{f(X)}. \tag{1.19}$$

U posebnom slučaju kada je $f\colon X \to X$ bijekcija imamo $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_X$.

1.1 Skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$

Brojevi $1, 2, 3, \ldots$ nazivaju se *prirodni brojevi.* Oni tvore skup prirodnih brojeva

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}. \tag{1.20}$$

Skup $\mathbb{N}$ je beskonačan pa ne možemo navesti sve njegove elemente. Zbog toga se služimo točkicama "..." koje znače "i tako dalje". Skup prirodnih brojeva ima jedno važno svojstvo poznato kao aksiom o matematičkoj indukciji. To svojstvo nam omogućava da iz izvjesnih svojstava podskupa $M \subseteq \mathbb{N}$ zaključimo da je $M = \mathbb{N}$.

Aksiom o matematičkoj indukciji

Neka je $M \subseteq \mathbb{N}$. Pretpostavimo da M ima sljedeća svojstva:

(i) $1 \in M$,

(ii) $n \in M \quad \Rightarrow \quad n + 1 \in M$ za svaki $n \in M$.

Tada je $M = \mathbb{N}$.

Aksiom o matematičkoj indukciji se koristi za dokazivanje različitih tvrdnji u matematičkoj teoriji, a napose za proučavanje beskonačnih skupova.

Primjer 1.1 (Bernoullijeva nejednakost) *Dokažite da je*

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x \geq -1 \tag{1.21}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Nejednakost (1.21) očigledno vrijedi za $n = 1$. Neka je M skup svih prirodnih brojeva za koje vrijedi ova nejednakost. M je neprezan skup jer je $1 \in M$. Neka je sada $n \in M$. Tada je

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x \geq -1. \tag{1.22}$$

Odavde slijedi

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x, \tag{1.23}$$

što implicira $n+1 \in M$. Dakle, pokazali smo da $n \in M$ povlači $n+1 \in M$, pa je prema aksiomu o matematičkoj indukciji $M = \mathbb{N}$. Time je dokazano da Bernoullijeva nejednakost vrijedi za svaki prirodni broj n. ■

Brojeve $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ nazivamo *cijeli brojevi*. Skup cijelih brojeva označavamo sa $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}. \tag{1.24}$$

Broj 0 ima istaknuto mjesto u skupu $\mathbb{Z}$ jer je to jedinstveni cijeli broj sa svojstvom $0 + x = x + 0 = x$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$. *Racionalni brojevi* su brojevi oblika m/n gdje su $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Skup racionalnih brojeva označavamo sa $\mathbb{Q}$, dakle,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.25}$$

Skup $\mathbb{Q}$ je gust u smislu da za svaka dva racionalna broja $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, postoji $c \in \mathbb{Q}$ takav da je $a < c < b$. Doista, ako su $a = m/n$ i $b = p/q$ gdje su $m, p \in \mathbb{Z}$ i $n, q \in \mathbb{N}$, tada je

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{mq+np}{2nq} \tag{1.26}$$

racionalan broj takav da je $a < c < b$. Ovo svojstvo gustoće nemaju skupovi prirodnih i cijelih brojeva.

1.2 Skup realnih brojeva

Poznato je da postoje brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomka m/n, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Primjer takvog broja je $\sqrt{2}$. Činjenicu da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ možemo dokazati metodom kontradikcije. Pretpostavimo da je $\sqrt{2} = m/n$ za neke $m \in Z$ i $n \in \mathbb{N}$, i pokažimo da ova pretpostavka vodi na kontradikciju. Budući da je $\sqrt{2} > 0$, to je $m \in \mathbb{N}$. Razlomak m/n možemo potpuno skratiti pa pretpostavimo da su m i n relativno prosti. Kvadriranjem izraza $\sqrt{2} = m/n$ dobivamo $m^2 = 2n^2$ što implicira da je m^2, pa dakle i m paran broj. Stoga je $m = 2k$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Sada $(2k)^2 = 2n^2$ daje $n^2 = 2k^2$ što implicira da je n također paran broj, $n = 2l$ za neki $l \in \mathbb{N}$. Zaključujemo da m i n imaju zajednički faktor 2 što je u kontradikciji sa pretpostavkom da su m i n relativno prosti. Dakle, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Na sličan način se može pokazati da $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ i $\sqrt{5}$ nisu racionalnih brojevi. Iz tog razloga uvodimo proširenje skupa $\mathbb{Q}$ na skup realnih brojeva koji označavamo sa $\mathbb{R}$. Skup realnih brojeva ima svojstvo da svakoj točki na brojevnom pravcu možemo pridružiti točno jedan realan broj. Skup $\mathbb{Q}$ je pravi podskup skupa $\mathbb{R}$, a realne brojeve koji nisu racionalni nazivamo *iracionalni brojevi.* Primjeri iracionalnih brojeva su $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, e, \pi$.

Aksiomi skupa realnih brojeva

Postoji nekoliko pristupa konstrukciji skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Jedan od njih je aksiomatski pristup u kojem su svojstva realnih brojeva opisana aksiomima koji $\mathbb{R}$ definiraju kao potpuno i uređeno polje. Na skupu $\mathbb{R}$ definirane su dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$ (koje nazivamo zbrajanje i množenje, redom) i binarna relacija $\leq$ sa sljedećim svojstvima:

A1 Zbrajanje je asocijativno,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{za svaki} \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{1.27}$$

A2 Zbrajanje je komutativno,

$$a + b = b + a \quad \text{za svaki} \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.28}$$

A3 Postoji element $0 \in \mathbb{R}$ takav da je $0 + a = a$ za svaki $a \in \mathbb{R}$.

A4 Za svaki $a \in \mathbb{R}$ postoji element $-a \in \mathbb{R}$ takav da je $a + (-a) = 0$.

A5 Množenje je asocijativno,

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{za svaki} \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{1.29}$$

A6 Množenje je komutativno,

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{za svaki} \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.30}$$

A7 Postoji element $1 \in \mathbb{R}$ takav da je $a \cdot 1 = a$ za svaki $a \in \mathbb{R}$.

A8 Za svaki $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, postoji element $a^{-1} = 1/a \in \mathbb{R}$ takav da je $a \cdot a^{-1} = 1$.

A9 Množenje je distributivno u odnosu na zbrajanje

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{1.31}$$

Skup $\mathbb{R}$ zajedno sa aksiomima $A1 - A9$ tvori *polje*. Na ovom polju definirana je relacija uređaja $\leq$ koja ima sljedeća svojstva:

A10 Za svaki $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$a = b \quad \text{ili} \quad a \leq b \quad \text{ili} \quad b \leq a. \tag{1.32}$$

A11 $a \leq b$ i $b \leq a$ ako i samo ako je $a = b$.

A12 Uređajna relacija je tranzitivna,

$$a \leq b \quad \text{i} \quad b \leq c \quad \Rightarrow \quad a \leq c. \tag{1.33}$$

A13 Uređajna relacija je u skladu s zbrajanjem,

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + c \quad \text{za svaki} \quad c \in \mathbb{R}. \tag{1.34}$$

A14 Uređajna relacija je u kompatibilna s množenjem,

$$0 \leq a \quad \text{i} \quad 0 \leq b \quad \Rightarrow \quad 0 \leq ab. \tag{1.35}$$

Ako je $x \leq y$ i $x \neq y$, tada pišemo $x < y$, odnosno $y > x$. Za skup $\mathbb{R}$ koji zadovoljava aksiome $A1 - A14$ kažemo da je *uređeno polje*.

A15 (Arhimedov aksiom) Za svaka dva realna broja $a > 0$ i $b > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $na > b$.

Kada aksiomima $A1 - A14$ pridodamo Arhimedov aksiom, kažemo da je $\mathbb{R}$ *uređeno Arhimedovo polje*.

1.3 Supremum i infimum skupa

Intervali su osnovni podskupovi skupa $\mathbb{R}$ s kojima ćemo se često susretati. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ gdje je $a < b$. Ograničeni interval je skup oblika

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \qquad (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \tag{1.36}$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \qquad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}. \tag{1.37}$$

Interval $[a,b]$ se naziva zatvoreni interval, a (a,b) nazivamo otvoreni interval. Ograničeni intervali $[a,b)$ i $(a,b]$ nisu ni otvoreni ni zatvoreni. Neograničeni interval je skup oblika

$$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \qquad (-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \tag{1.38}$$

$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \qquad (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}. \tag{1.39}$$

U ovoj notaciji pišemo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Definicija 1.3 *Neprazan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je odozgo ograničen ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq M$ za svaki $x \in S$. Svaki broj M sa navedenim svojstvom naziva se majoranta ili gornja međa skupa S. Ako skup S nije odozgo ograničen, kažemo da je S odozgo neograničen.*

Primjer 1.2 *Skup $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ je odozgo ograničen. Gornja međa skupa je b, kao i svaki realni broj $a > b$.*

Primjer 1.3 *Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ nije odozgo ograničen jer za svaki $M \in \mathbb{R}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > M$. Skupovi $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ također nisu odozgo ograničeni.*

Neka je S odozgo ograničen skup. Tada S ima beskonačno mnogo gornjih međa, pa se prirodno postavlja pitanje da li postoji najmanja gornja međa. Na primjer, svaki realni broj $x \geq 0$ je gornja međa skupa $(-\infty, 0]$ s tim da je jasno da je 0 najmanja gornja međa.

Definicija 1.4 *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ odozgo ograničen skup. Realan broj L naziva se supremum skupa S ako vrijedi*

(i) $x \leq L$ za svaki $x \in S$,

(ii) za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $L - \varepsilon < x$.

Supremum skupa S označavamo sa

$$L = \sup S \quad \textit{ili} \quad L = \sup_{x \in S} x. \tag{1.40}$$

Ako je $L \in S$, tada kažemo da je L maksimum ili najveći element skupa S, i pišemo

$$L = \max S \quad \textit{ili} \quad L = \max_{x \in S} x. \tag{1.41}$$

Svojstvo (i) kaže da je L gornja međa od S, a svojstvo (ii) da je L najmanja gornja međa od S. Ako $S \subseteq \mathbb{R}$ nije ograničen odozgo, tada pišemo

$$\sup S = +\infty. \tag{1.42}$$

Primjer 1.4 *Skupovi $A = [0,1)$ i $B = [0,1]$ imaju supremum $L = 1$, ali $L \notin A$ dok je $L \in B$. Stoga pišemo* $\sup A = 1$ *i* $\max B = 1$.

Primjer 1.5 *Odredite supremum skupa*

$$S = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.43}$$

Skup S je ograničen odozgo jer je $n/(n+1) < 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pokažimo da je 1 najmanja gornja međa od S. Neka je $\varepsilon > 0$. Tvrdimo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1}. \tag{1.44}$$

Da je ovo doista istina vidimo rješavanjem nejednadžbe (1.44). Množenjem sa $n + 1 > 0$ dobivamo

$$n > (1 - \varepsilon)(n + 1) = n - \varepsilon n + 1 - \varepsilon \tag{1.45}$$

što implicira

$$n > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}. \tag{1.46}$$

Dakle, za svaki $n \in N$ koj zadovoljava nejednakost (1.46) vrijedi (1.44). Time smo pokazali da je 1 najmanja gornja međa od S, odnosno $\sup S = 1$. ■

Slična razmatranja vrijede za odozdo ograničene skupove.

Definicija 1.5 *Neprazan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je odozdo ograničen ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je $m \leq x$ za svaki $x \in S$. Svaki broj m sa navedenim svojstvom naziva se minoranta ili donja međa skupa S. Ako S nije odozdo ograničen, kažemo da je S odozdo neograničen.*

Analogno pojmu supremuma možemo definirati najveću donju među koju nazivamo infimum skupa.

Definicija 1.6 *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ odozdo ograničen skup. Realan broj K naziva se infimum skupa S ako vrijedi*

(i) $K \leq x$ *za svaki* $x \in S$,

(ii) *za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $x \in S$ *takav da je* $x < K + \varepsilon$.

Infimum skupa S označavamo sa

$$K = \inf S \quad ili \quad K = \inf_{x \in S} x. \tag{1.47}$$

Ako je $K \in S$, tada kažemo da je K minumum ili najmanji element skupa S, i pišemo

$$K = \min S \quad ili \quad K = \min_{x \in S} x. \tag{1.48}$$

Ako $S \subseteq \mathbb{R}$ nije ograničen odozdo, tada pišemo

$$\inf S = -\infty. \tag{1.49}$$

Za neprazan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je ograničen ako je ograničen odozdo i odozgo. U protivnom kažemo da je S neograničen skup. Na primjer, skupovi $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ su neograničeni, dok je $\mathbb{N}$ ograničen odozdo i neograničen odozgo. Ako je S ograničen skup, tada je $\sup S < \infty$ i $\inf S > -\infty$, i očigledno je

$$S \subseteq [\inf S, \sup S]. \tag{1.50}$$

Sva svojstva navedena u aksiomima $A1 - A15$ ima i skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Stoga je $\mathbb{Q}$ uređeno Arhimedovo polje. Međutim, novo važno svojstvo skupa $\mathbb{R}$ koje ne vrijedi u skupu $\mathbb{Q}$ je dano sljedećim aksiomom.

A16 (Dedekindov aksiom) Svaki odozgo ograničen skup $S \subseteq \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.

Sljedeći primjer pokazuje da skup $\mathbb{Q}$ ne zadovoljava Dedekindov aksiom. Neka je

$$K = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}. \tag{1.51}$$

Tada je $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ za svaki $x \in K$. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je skup $\mathbb{Q}$ gust u skupu $\mathbb{R}$, postoji $x \in \mathbb{Q}$ takav da je $\sqrt{2} - \varepsilon < x < \sqrt{2}$ što povlači da je $\sup K = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dedekindov aksiom se naziva još i aksiom o potpunosti skupa realnih brojeva. Iz Dedekindovog aksioma se može pokazati da svaki odozdo ograničen skup $S \subseteq \mathbb{R}$ ima infimum u $\mathbb{R}$. Za skup $\mathbb{R}$ zajedno s aksiomima $A1 - A16$ kažemo da je *potpuno uređeno polje*.

Poglavlje 2

Nizovi realnih brojeva

2.1 Limes niza

Niz je svaka funkcija čija domena je skup prirodnih brojeva. U ovom poglavalju ćemo proučavati nizove realnih brojeva što će nas dovesti do pojma limesa. Ovaj pojam ćemo proširiti na funkcije realne varijable u sljedećem poglavlju.

Definicija 2.1 *Niz realnih brojeva je svaka funkcija* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Uobičajeno je da se vrijednost funkcije $f(n)$ označava s a_n. Niz označavano s $\{a_n\}$ ili $a_1, a_2, a_3, \ldots$, a realni broj a_n nazivamo n-ti član niza.

Primjer 2.1 *Odredite nekoliko prvih članova niza* $\{a_n\}$ *gdje je*

(a) $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$,

(b) $a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$,

(c) $a_n = c,\ c \in \mathbb{R}$.

U primjeru (a) imamo

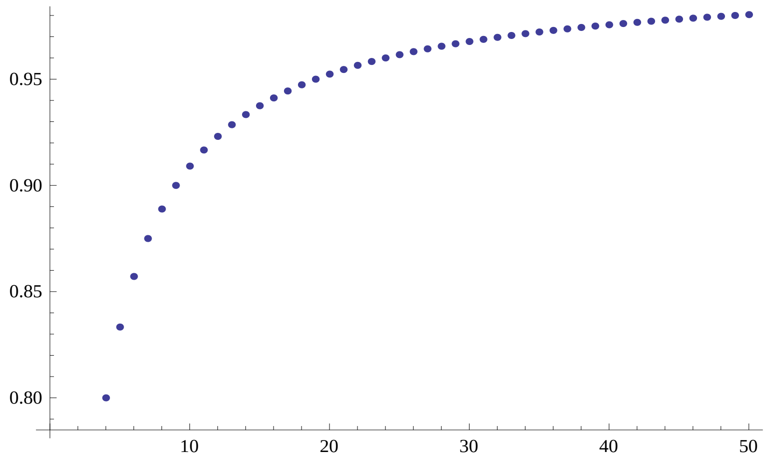
$$a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad a_3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \ldots \tag{2.1}$$

Članovi niza u primjeru (b) su dani sa

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_6 = 8,\ a_7 = 13, \ldots \tag{2.2}$$

Ovaj niz naziva se *Fibonaccijev* niz. To je niz je rekurzivno definiran jer je vrijednost koeficijenta a_n određena koeficijentima a_{n-1} i a_{n-2}. U primjeru (c) svi članovi niza su jednaki,

$$c, c, c, \ldots, \tag{2.3}$$



Slika 2.1: Niz $a_n = \frac{n}{n+1}$.

stoga ovaj niz nazivamo *stacionaran* niz. ■

Jedan od važnih pojmova u teoriji nizova je konvergencija niza. Prirodno je zapitati što se dešava s članovima niza $\{a_n\}$ kada indeks n raste. Na primjer, na slici 2.1 primijećujemo da niz

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \tag{2.4}$$

teži prema 1 kada n postaje velik. U tom slučaju kažemo da niz $\{a_n\}$ konvergira prema 1. Ovu ideju ćemo formalizirati u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.2 *Kažemo da niz realnih brojeva* $\{a_n\}$ *ima limes* $L \in \mathbb{R}$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da*

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Tada pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L. \tag{2.6}$$

Prema ovoj definiciji realan broj L je limes niza $\{a_n\}$ ako razliku $|a_n - L|$ možemo napraviti po volji malom ako je indeks n dovoljno velik. Nadalje, L ima svojstvo da se izvan svake ε-okoline broja L nalazi samo konačno mnogo članova niza $\{a_n\}$, dok se unutar ε-okoline niza nalazi beskonačno mnogo članova niza za svaki $\varepsilon > 0$.

Ako niz $\{a_n\}$ ima limes, tada kažemo da niz *konvergira*, u protivnom kažemo da *divergira*.

Definicija 2.3 *Kažemo da niz $\{a_n\}$ divergira prema ∞, i pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, ako za svaki $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$a_n > M \quad \textit{za svaki} \quad n > n_0. \tag{2.7}$$

Slično, kažemo da $\{a_n\}$ divergira prema $-\infty$, i pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ako za svaki $M < 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n < M \quad \textit{za svaki} \quad n > n_0. \tag{2.8}$$

Primjer 2.2 *Pokažimo da je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{2.9}$$

Prema Arhimedovom aksiomu za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $1/n_0 < \varepsilon$ Tada za svaki $n > n_0$ vrijedi

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Time je dokazano da je $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ jer je $\varepsilon > 0$ odabran proizvoljno. ■

Primjer 2.3 *Pokažimo da je*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1. \tag{2.11}$$

Neka je $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, i neka je $\varepsilon > 0$. Koristeći Bernoullijevu nejednakost (1.21) dobivamo

$$\left|a_n - 1\right| = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{(1+1)^n} \le \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}. \tag{2.12}$$

Za odabrani $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $1/n_0 < \varepsilon$. Stoga za svaki $n > n_0$ vrijedi

$$\left|a_n - 1\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon, \tag{2.13}$$

čime je tvrdnja dokazana. ■

Primijetimo da za stacionarni niz $\{a_n = c\}$ trivijalno vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ jer za svaki $\varepsilon > 0$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\left|a_n - c\right| = \left|c - c\right| = 0 < \varepsilon. \tag{2.14}$$

Primjer 2.4 *Pokažite da niz $\{(-1)^{n+1}\}$ divergira.*

Prvih nekoliko članova niza je dano sa

$$1, -1, 1, -1, \ldots \tag{2.15}$$

Intuitivno je jasno da ovaj niz divergira jer članovi niza stalno izmjenjuju vrijednosti 1 i -1 kada $n \to \infty$. Pretpostavimo da je $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ za neki $L \in \mathbb{R}$ gdje je $a_n = (-1)^{n+1}$. Tada je $|a_n - L| = |1 - L|$ za neparan n ili $|a_n - L| = |-1 - L| = |1 + L|$ za paran n. Neka je $R = \max\{|1 - L|, |1 + L|\} > 0$. Prema pretpostavci, za $0 < \varepsilon < R$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{za svaki} \quad n > n_0. \tag{2.16}$$

Međutim, $|a_n - L| = R$ ili za paran n ili za neparan n što vodi na kontradikciju da je $R < \varepsilon$. Dakle, niz $\{a_n\}$ divergira . ■

Teorem 2.1 *Ako postoji, limes niza je jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo da niz $\{a_n\}$ ima dva limesa,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L_2. \tag{2.17}$$

Odaberimo $\varepsilon > 0$. Tada za $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ postoje $n_1 \in \mathbb{N}$ and $n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da

$$n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.18}$$

$$n > n_2 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.19}$$

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada za $n > n_0$ imamo

$$|a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad |a_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.20}$$

Ako je $n > n_0$, tada iz (2.20) slijedi

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq |a_n - L_1| + |a_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{2.21}$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno odabran, jednadžba (2.21) implicira da je $|L_1 - L_2|$ manje od bilo kojeg pozitivnog realnog broja. To je moguće samo ako je $L_1 = L_2$, stoga je limes jedinstven. ■

Sada ćemo promotriti neka osnovna svojstva konvergentnih nizova, uključujući i pravila za računanje limesa niza.

Definicija 2.4 *Kažemo da je niz $\{a_n\}$ ograničen ako postoji $M > 0$ takav da je*

$$|a_n| \leq M \quad \textit{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Slično se definira niz *ograničen odozgo* ili *ograničen odozdo.*

Lema 2.1 *Ako* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *postoji, tada je niz* $\{a_n\}$ *ograničen.*

Dokaz. Za $\varepsilon = 1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_n - L| < 1$ za svaki $n > n_0$. Odavde slijedi da je

$$|a_n| - |L| \le |a_n - L| < 1 \quad \text{za svaki} \quad n > n_0, \tag{2.23}$$

odnosno

$$|a_n| < 1 + |L| \quad \text{za svaki} \quad n > n_0. \tag{2.24}$$

Neka je $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |L|\}$. Tada je očigledno

$$|a_n| \le M \quad \text{za svaki} \quad n > n_0, \tag{2.25}$$

što dokazuje da je niz $\{a_n\}$ ograničen. ■

Ograničen niz ne mora biti konvergentan. Na primjer, niz $a_n = (-1)^{n+1}$ je ograničen jer je $|a_n| \le 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, ali $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ ne postoji. Lema 2.1 je korisna u dokazivanju da određeni niz ne konvergira, jer ako $\{a_n\}$ nije ograničen, tada lema 2.1 implicira da $\lim_{n\to\infty} a_n$ ne postoji. Na primjer, niz $\{\sqrt{n}\}$ nije ograničen stoga on divergira, i vrijedi $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$,

Teorem 2.2 *(Teorem o ukliještenom nizu) Pretpostavimo da je* $a_n \le b_n \le c_n$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, *tada je* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Dokaz. Iz nejednakosti $a_n \le b_n \le c_n$ dobivamo

$$a_n - L \le b_n - L \le c_n - L, \tag{2.26}$$

odakle slijedi

$$b_n - L \le |c_n - L| \tag{2.27}$$

i

$$-(b_n - L) \le -(a_n - L) \le |a_n - L|. \tag{2.28}$$

Za odabrani $\varepsilon > 0$ postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je $|c_n - L| < \varepsilon$ za svaki $n > n_1$, i $|a_n - L| < \varepsilon$ za svaki $n > n_2$. Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada za svaki $n > n_0$ vrijedi

$$b_n - L \le |c_n - L| < \varepsilon \quad \text{i} \quad -(b_n - L) \le |a_n - L| < \varepsilon, \tag{2.29}$$

što implicira $|b_n - L| < \varepsilon$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. ■

Jasno je da ovaj teorem vrijedi i ako je $a_n \leq b_n \leq c_n$ za svaki $n > N$ gdje je N neki prirodni broj. Ovaj teorem nam dozvoljava da odredimo limes niza $\{b_n\}$ ako je poznat limes nizova $\{a_n\}$ i $\{c_n\}$ između kojih je ukliješten niz $\{b_n\}$.

Određivanje limesa primjenom definicije 2.2 nije praktično jer najprije trebamo imati kandidata za limes, a zatim provjeriti da taj broj zaista zadovoljava definiciju 2.2. Međutim, određivanje limesa olakšavaju nam pravila za računanje limesa dana sljedećim teoremom.

Teorem 2.3 *Neka su* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *konvergentni nizovi, i neka su* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. *Tada vrijedi*

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} ka_n = kA$ *za svaki* $k \in \mathbb{R}$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$,

(iv) $\lim_{n\to\infty}(1/b_n) = 1/B$ *ako je* $b_n \neq 0$ *i* $B \neq 0$,

(v) $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B$ *ako je* $b_n \neq 0$ *i* $B \neq 0$.

Dokaz. (i) Odaberimo $\varepsilon > 0$. Tada za $\varepsilon/2 > 0$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.30}$$

Slično, postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_2 \quad \Rightarrow \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.31}$$

Ako je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tada za $n > n_0$ imamo

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - B) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{2.32}$$

Dakle, pokazali samo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon \quad \text{za svaki} \quad n > n_0. \tag{2.33}$$

Ovo pokazuje da je $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.

(ii) Ako je $k = 0$, tada je rezultat očigledan jer je $|ka_n - kA| = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $k \neq 0$ i odaberimo $\varepsilon > 0$. Tada za $\varepsilon/|k| > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|k|}. \tag{2.34}$$

Dakle, za $n > n_0$ vrijedi

$$|ka_n - kA| = |k|\,|a_n - A| < |k|\,\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon, \tag{2.35}$$

čime je dokazano da je $\lim_{n\to\infty} ka_n = kA$.

(iii) Prema lemi 2.1, niz $\{a_n\}$ je ograničen jer je konvergentan. Neka je $M > 0$ takav da je $|a_n| < M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Odaberimo $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n > n_1$ vrijedi

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}, \tag{2.36}$$

i postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n > n_2$ imamo

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{2.37}$$

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada za svaki $n > n_0$ dobivamo

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \\ &\le |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| \\ &= |a_n|\,|b_n - B| + |B|\,|a_n - A| \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + |B|\,\frac{\varepsilon}{2(1+|B|)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Primijetimo da smo u nejednakosti (2.36) radije odabrali ocjenu $\varepsilon/(2(1+|B|))$ umjesto $\varepsilon/(2|B|)$ jer B može biti nula. Time je dokazano da je $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$.

(iv) Neka je $B \neq 0$ i $b_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Za $\varepsilon = |B|/2$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |b_n - B| < \frac{|B|}{2}. \tag{2.39}$$

Međutim,

$$|B| - |b_n| \le |B - b_n|, \tag{2.40}$$

što zajedno sa (2.39) implicira $|b_n| > |B|/2$ za svaki $n > n_1$. Također, postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_2 \quad \Rightarrow \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon |B|^2}{2}. \tag{2.41}$$

Ako je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tada za $n > n_0$ imamo

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n|\,|B|} \le \frac{\varepsilon|B|^2}{2}\frac{1}{|b_n|\,|B|} < \frac{\varepsilon|B|}{2}\frac{2}{|B|} = \varepsilon, \tag{2.42}$$

gdje smo uzeli u obzir da je $1/|b_n| < 2/|B|$. Ovo pokazuje $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 1/B$.

(v) Kako je $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 1/B$, primjenom rezultata (iii) dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\, a_n = \frac{1}{B}\, A = \frac{A}{B}. \tag{2.43}$$

■

Ilustrirajmo na sljedećim primjerima kako se gore navedeni teoremi mogu koristiti za određivanje limesa.

Primjer 2.5 *Odredite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3n}. \tag{2.44}$$

Dijeljenjem brojnika i nazivnika sa n^2, te primjenom pravila iz teorema 2.3 dobivamo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}} = \frac{2}{1} = 2. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Provjerimo da je rezultat točan tako što ćemo pokazati da broj 2 zadovoljava definiciju limesa. Neka je $\varepsilon > 0$. Primijetimo da je

$$\begin{aligned} \left|\frac{2n^2+1}{n^2+3n} - 2\right| &= \left|\frac{2n^2+1-2(n^2+3n)}{n^2+3n}\right| \left|\frac{1-6n}{n^2+3n}\right| \\ &= \frac{6n-1}{n^2+3n} < \frac{6n}{n^2} = \frac{6}{n}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ dovoljno velik takav da je $1/n_0 < \varepsilon/6$. Tada za $n > n_0$ imamo

$$\left|\frac{2n^2+1}{n^2+3n} - 2\right| < \frac{6}{n} < \frac{6}{n_0} < \varepsilon. \tag{2.47}$$

■

Primjer 2.6 *Pokažite da je*

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1 \quad \text{za svaki} \quad a > 0. \tag{2.48}$$

(i) Pretpostavimo da je $a \geq 1$. Tada je $a^{1/n} \geq 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Definirajmo niz $b_n = a^{1/n} - 1 \geq 0$. Tada je $a^{1/n} = 1 + b_n$, stoga je

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n \tag{2.49}$$

prema Bernoullijevoj nejednakosti (1.21). Dakle,

$$0 \leq b_n \leq \frac{a-1}{n}. \tag{2.50}$$

Očigledno je $\lim_{n\to\infty}(a-1)/n = 0$, stoga prema teoremu o uklije\v{s}tenom nizu 2.2 imamo $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Odavde slijedi $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(1 + b_n) = 1$.
(ii) Pretpostavimo da je $0 < a < 1$. Tada je $1/a > 1$ pa vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1 \tag{2.51}$$

jer je $\lim_{n\to\infty}(1/a)^{1/n} = 1$ prema rezultatu (i). Dakle, $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ za svaki $a > 0$. ■

2.2 Ograničeni nizovi

U prethodnom odjeljku smo pokazali da je konvergentan niz nužno ograničen, ali ograničen niz ne mora biti konvergentan. Sada ćemo proučiti svojstva ograničenih nizova i pokazati da uz neke dodatne uvjete ograničeni niz konvergira. Također ćemo promatrati podnizove ograničenih nizova.

Definicija 2.5 *Kažemo da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući ako je $a_n \leq a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ (ili strogo rastući ako je $a_n < a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$). Slično, kažemo da je $\{a_n\}$ mononotono padajući niz ako je $a_n \geq a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ (ili strogo padajući ako je $a_n > a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$).*

Na primjer, niz $\{\frac{n}{n+1}\}$ je strogo rastući jer je

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0, \tag{2.52}$$

dok je niz $\{\frac{3}{n+5}\}$ strogo padajući jer je

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{n+6} - \frac{3}{n+5} = -\frac{3}{(n+6)(n+5)} < 0. \tag{2.53}$$

Teorem 2.4 *Neka je $\{a_n\}$ monontono rastući niz koji je ograničen odozgo. Tada $\{a_n\}$ konvergira i $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.*

Dokaz. Skup $\{a_n\}$ je ograničen odozgo, pa prema Dedekindovom aksiomu ima supremum u $\mathbb{R}$, $\sup\{a_n\} = L$. Tada za $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $L - \varepsilon < a_{n_0} < L$. Ako je $n > n_0$, tada zbog monontonosti niza imamo

$$L - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n < L, \tag{2.54}$$

što povlači

$$|a_n - L| < \varepsilon. \tag{2.55}$$

Dakle, $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \sup\{a_n\}$. ■

Sličan rezultat vrijedi za monotono padajuće nizove, $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.

Primjer 2.7 *Svaki decimalni broj oblika* $0.d_1d_2d_3\ldots$ *prestavlja jedinstveni realni broj u intervalu* $[0, 1]$.

Neka su d_n, $n \in \mathbb{N}$, brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Definirajmo niz

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0.d_1 \\
a_2 &= 0.d_1d_2 \\
&\vdots \\
a_n &= 0.d_1d_2\ldots d_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

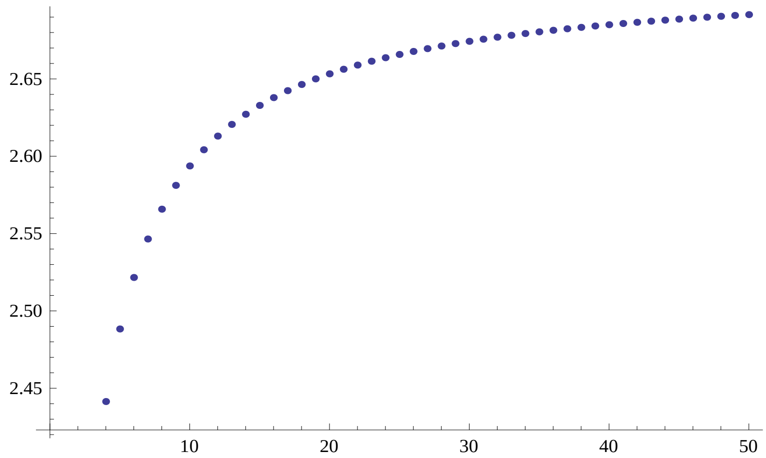
Niz $\{a_n\}$ je monotono rastući jer je $a_{n+1} - a_n = 0.0\,0\ldots d_{n+1} \geq 0$. Također, niz je ograničen odozgo sa 1, pa prema teoremu 2.4 niz ima limes $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Ovaj limes je realni broj u intervalu $[0, 1]$ kojeg prikazujemo u obliku beskonačnog decimalnog broja $A = 0.d_1d_2d_3\ldots$.
■

Ponekad je limes niza teško odrediti, međutim teorem 2.4 nam daje uvjete pod kojima možemo barem dokazati egisitenciju limesa. Promotrimo niz definiran s

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.56}$$

Koristeći Newtonovu binomnu formulu može se pokazati da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući, $a_n \leq a_{n+1}$, i ograničen odozgo jer je

$$a_n < 3 \quad \text{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.57}$$



Slika 2.2: Niz $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ konvergira prema broju e.

Prema teoremu 2.4 niz $\{a_n\}$ ima limes koji ne prelazi 3. Ovaj limes označavamo sa e,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{2.58}$$

i nazivamo Eulerov broj. Približna numerička vrijednost Eulerovog broja je $e \approx 2.718$. Niz (2.56) prikazan je na slici 2.2.

2.3 Podnizovi

Definicija 2.6 *Niz $\{b_n\}$ naziva se podniz niza $\{a_n\}$ ako postoje prirodni brojevi $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ takvi da je*

$$b_k = a_{n_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{2.59}$$

Primijetimo da je $k \leq n_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Primjer 2.8

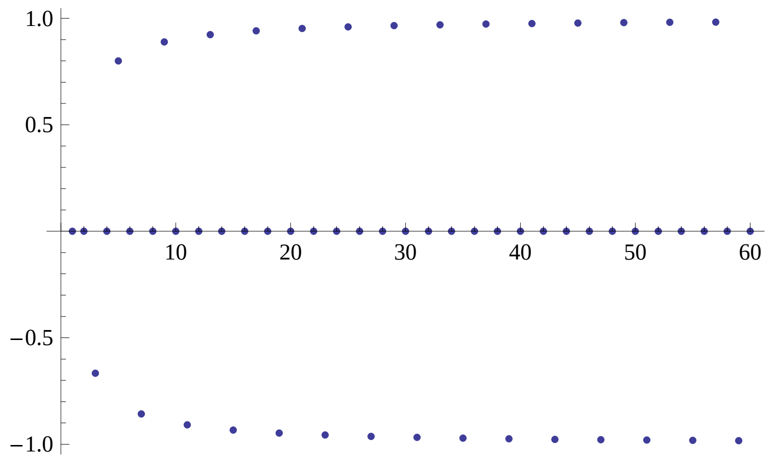
Promotrimo niz

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \tag{2.60}$$

Lako se vidi da niz divergira jer $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ prima diskretne vrijednosti $0, \pm 1$, ovisno o indeksu n, dok $\left(1 - 1/n\right)$ konvergira prema 1. Međutim, sljedeći podnizovi konvergiraju:

(i)

$$a_{2k} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \sin(k\pi) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{2.61}$$



Slika 2.3: Niz $a_n = (1-\frac{1}{n})\sin(\frac{n\pi}{2})$ ima konvergentne podnizove $\{a_{2n}\}$, $\{a_{4n-1}\}$ i $\{a_{4n+1}\}$.

(ii)

$$a_{4k+1} = \left(1 - \frac{1}{4k+1}\right)\sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.62}$$

(iii)

$$a_{4k-1} = \left(1 - \frac{1}{4k-1}\right)\sin\left(\frac{(4k-1)\pi}{2}\right) = -\left(1 - \frac{1}{4k-1}\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.63}$$

Podniz $\{a_{2k}\}$ je stacionaran niz koji konvergira prema 0, podniz $\{a_{4k+1}\}$ konvergira prema 1, dok podniz $\{a_{4k-1}\}$ konvergira prema -1. Podnizove niza (2.60) lako uočavamo na slici 2.3. ■

Dakle, iako niz $\{a_n\}$ ne konvergira, sadrži tri konvergentna podniza. Jasno je da ako niz $\{a_n\}$ sadrži podnizove koji konvergiraju prema različitim limesima, tada $\{a_n\}$ divergira.

Lema 2.2 *Niz $\{a_n\}$ konvergira prema L ako i samo ako svaki podniz niza $\{a_n\}$ konvergira prema L.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Neka je $\{a_{n_k}\}$ podniz niza $\{a_n\}$. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon. \tag{2.64}$$

Neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_{k_0} > n_0$. Tada za svaki $k > k_0$ imamo $n_k > n_{k_0} > n_0$ pa vrijedi $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$. Dakle, podniz $\{a_{n_k}\}$ konvergira prema L. S druge strane, ako svaki podniz konvergira prema L, tada je $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ jer je niz $\{a_n\}$ podniz samoga sebe. ■

Jedan od važnih rezultata o nizovima kazuje da svaki ograničen niz nužno ima konvergentan podniz. Da bismo dokazali ovaj rezultat potrebno nam je sljedeće svojstvo realnih brojeva.

Teorem 2.5 (Cantorov teorem) *Neka su $I_1 = [a_1, b_2]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, $I_3 = [a_3, b_3] \ldots$ intervali realnih brojeva takavi da je $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$ i $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, Tada postoji točno jedan realan broj a takav da je $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$.*

Dokaz. Niz $\{a_n\}$ je monotono rastući i ograničen odozgo sa b_1. Prema teoremu 2.4 niz $\{a_n\}$ je konvergentan, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ za neki $a \in \mathbb{R}$. Primijetimo da je $a_n \leq b_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, stoga je $\sup\{a_n\} \leq b_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Kako je $\sup\{a_n\} = a$, ovo implicira

$$a_k \leq a \leq b_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.65}$$

stoga je $a \in I_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, odnosno $a \in \cap_{k=1}^{\infty} I_k$. Dokažimo jedinstvenost broja a. Pretpostavimo da postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je $b \in I_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Tada je $a_k \leq b \leq b_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, odakle dobivamo

$$0 \leq b - a_k \leq b_k - a_k. \tag{2.66}$$

Kako je $\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0$, prema teoremu o uklije štenom nizu 2.2 imamo

$$\lim_{k\to\infty}(b - a_k) = 0. \tag{2.67}$$

Slijedi da je $b = \lim_{k\to\infty} a_k = a$, stoga je a jedina točka u presjeku svih intervala I_k. ■

Teorem 2.6 (Bolzano-Weierstrass) *Svaki ograničen niz ima konvergentni podniz.*

Dokaz. Ako je $\{a_n\}$ ograničen niz, tada postoji $M > 0$ takav da je $|a_n| < M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga je $a_n \in [-M, M]$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Barem jedan od intervala $[-M, 0]$ ili $[0, M]$ sadrži beskonačno mnogo članova niza $\{a_n\}$. Označimo taj interval sa I_0. Ako I_0 podijelimo na dva jednaka podintervala, tada barem jedan od njih sadrži beskonačno mnogo članova niza. Označimo taj interval sa I_1. Nastavljanjem ovog postupka dolazimo do silaznog niza intervala $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots$. Duljina svakog intervala je $|I_n| < M/2^n$. Ako $I_n = [a_n, b_n]$, tada je

$$b_n - a_n = \frac{M}{2^n}, \tag{2.68}$$

što povlači $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Prema prethodnom teoremu postoji jedinstveni $a \in \mathbb{R}$ takav da je $a \in I_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Odaberimo $a_{n_1} \in I_1$, $a_{n_2} \in I_2$, $a_{n_3} \in I_3, \ldots$ takve da je $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Ovakav izbor je moguć jer svaki interval I_n sadrži beskonačno mnogo članova niza $\{a_n\}$. Tada je $\{a_{n_k}\}$ podniz niza $\{a_n\}$ sa svojstvom da a_{n_k} i a oba pripadaju intervalu I_k. Odavde dobivamo

$$|a_{n_k} - a| \leq |I_k| = \frac{M}{2^k}, \tag{2.69}$$

što implicira $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. ■

Bolzano-Weierstrassov teorem garantira da svaki ograničeni niz ima konvergentan podniz. Neograničeni nizovi mogu ali ne moraju imati konvergentne podnizove.

Definicija 2.7 *Realni broj x_0 nazivamo gomilište niza $\{a_n\}$ ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ koji konvergira prema x_0.*

Neka je C skup svih gomilišta niza $\{a_n\}$. Skup C može biti prazan, konačan ili beskonačan podskup skupa $\mathbb{R}$. Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, tada je $C = \{a\}$ jer je a jedino gomilište niza $\{a_n\}$. Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen, tada je prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu C neprazan ograničen skup.

Definicija 2.8 *Neka je $\{a_n\}$ ograničen niz i neka je C skup svih njegovih gomilišta. Limes superior i limes inferior niza $\{a_n\}$ su definirani sa*

$$\limsup a_n = \sup C \quad i \quad \liminf a_n = \inf C. \tag{2.70}$$

Ako niz $\{a_n\}$ nije ograničen odozgo, tada definiramo

$$\limsup a_n = \infty. \tag{2.71}$$

Slično, ako $\{a_n\}$ nije ograničen odozdo, tada definiramo

$$\liminf a_n = -\infty. \tag{2.72}$$

Lako se vidi da su $\limsup a_n \in C$ i $\liminf a_n \in C$; drugim riječima $\limsup a_n$ je *najveće*, a $\liminf a_n$ *najmanje* gomilište niza $\{a_n\}$. Očigledno je $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

Primjer 2.9

Promotrimo niz $\{a_n\}$ definiran sa

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5.\dots \tag{2.73}$$

Svaki prirodni broj se ponavlja beskonačno mnogo puta jer nakon niza $1, 2, \dots, n$ dolazi niz $1, 2, \dots, n, n + 1$, i taj postupak se ponavlja. Dakle, svaki prirodni broj je gomilište niza

(2.73), stoga je $C = \mathbb{N}$. Niz nije ograničen odozgo pa je $\limsup a_n = \infty$.

U primjeru 2.8 gomilišta niza su $C = \{-1, 0, 1\}$, stoga je

$$\limsup a_n = 1 \quad \text{i} \quad \liminf a_n = -1. \tag{2.74}$$

■

Teorem 2.7 *Neka je* $\{a_n\}$ *ograničen niz i neka su* $L_1 = \liminf a_n$ *i* $L_2 = \limsup a_n$*. Tada za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$L_1 - \varepsilon < a_n < L_2 + \varepsilon \quad \textit{za svaki} \quad n > n_0. \tag{2.75}$$

Drugim riječima, za svaki $\varepsilon > 0$ svi osim eventualno konačno mnogo članova niza se nalaze u intervalu $(L_1 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Prvo ćemo pokazati da je $a_n > L - \varepsilon$ za sve osim eventualno mnogo članova niza. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ takav da je

$$a_{n_k} \leq L_1 - \varepsilon \quad \text{za svaki} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.76}$$

Podniz $\{a_{n_k}\}$ je ograničen jer je niz $\{a_n\}$ ograničen, pa prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu $\{a_{n_k}\}$ ima gomilište $x_0 \in \mathbb{R}$. Relacija (2.76) povlači da je $x_0 \leq L_1 - \varepsilon < L_1$. Međutim, x_0 je također gomilište niza $\{a_n\}$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $L_1 = \liminf a_n$. Dakle, $a_n \leq L_1 - \varepsilon$ vrijedi eventualno samo za konačno mnogo članova niza pa zaključujemo da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n > L_1 - \varepsilon$ za svaki $n > n_1$. Slično se pokazuje da postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n < L_2 + \varepsilon$ za svaki $n > n_2$. Definirajmo $n_0 = \max\{m_1, m_2\}$. Tada je

$$L_1 - \varepsilon < a_n < L_2 + \varepsilon \quad \text{za svaki} \quad n > n_0. \tag{2.77}$$

■

Neposredna posljedica ovog teorema je

Korolar 2.1 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *ako i samo ako je* $L = \liminf a_n = \limsup a_n$*.*

2.4 Cauchyev niz

Ako niz konvergira, tada su njegovi članovi a_n proizvoljno blizu limesa L kada je n dovoljno velik. Kako se članovi niza gomilaju oko limesa, intuitivno zaključujemo da su a_n i a_m dovoljno blizu jedan drugome kada su n i m dovoljno veliki. Nizovi koji imaju ovo svojstvo nazivaju se Cauchyevi nizovi.

Definicija 2.9 *Niz $\{a_n\}$ naziva se Cauchyev niz ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da*

$$n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{2.78}$$

Lako se vidi da je svaki konvergentan niz Cauchyev. Pretpostavimo da je $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Tada za $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.79}$$

Dakle, ako su $n, m > n_0$, tada imamo

$$|a_n - a_m| = |a_n - L - a_m + L| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{2.80}$$

Istaknimo da su u polju realnih brojeva Cauchyevi nizovi su isto što i konvergentni nizovi. Ekvivalencija ova dva pojma je posljedica Dedekindovog aksioma prema kojem svaki neprazan odozgo ograničen skup realnih brojeva ima supremum u $\mathbb{R}$.

Teorem 2.8 *Svaki Cauchyev niz je ograničen.*

Dokaz. Neka je $\{a_n\}$ Cauchyev niz. Tada za $\varepsilon = 1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_n - a_m| < 1$ za svaki $n, m > n_0$. Odaberimo $p > n_0$ i primijetimo da za svaki $n > n_0$ vrijedi

$$|a_n| = |a_n - a_p + a_p| \leq |a_n - a_p| + |a_p| < 1 + |a_p|. \tag{2.81}$$

Neka je $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a_p|\}$. Tada je

$$|a_n| \leq M \quad \text{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.82}$$

što pokazuje da je niz $\{a_n\}$ ograničen. ■

Dokažimo sada naš glavni rezultat prema kojemu svaki Cauchyev niz realnih brojeva ima limes u $\mathbb{R}$.. Ovo je vrlo važno svojstvo skupa $\mathbb{R}$ koji nazivamo *potpunost skupa realnih brojeva.*

Teorem 2.9 (Potpunost skupa realnih brojeva) *Svaki Cauchyev niz realnih brojeva je konvergentan.*

Dokaz. Neka je $\{a_n\}$ Cauchyev niz realnih brojeva. Prema teoremu 2.8 niz $\{a_n\}$ je ograničen, stoga Bolzano-Weierstrassov teorem implicira da $\{a_n\}$ ima konvergentan podniz $\{a_{n_k}\}$. Neka je $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Želimo pokazati da niz $\{a_n\}$ konvergira prema a. Odaberimo $\varepsilon > 0$. Tada za $\varepsilon/2 > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ za svaki $n, m > n_0$.

Odaberimo član podniza a_{n_k} takav da je $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$ i $n_k > n_0$. Tada za svaki $n > n_0$ vrijedi

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{2.83}$$

Time je dokazano da je $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. ■

Korolar 2.2 *Niz realnih brojeva $\{a_n\}$ konvergira ako i samo ako je $\{a_n\}$ Cauchyev niz.*

Istaknimo da pomoću ovog rezultata možemo ispitati konvergenciju nekog niza bez poznavanja njegovog limesa. Naime, dovoljno je provjeriti da li je neki niz Cauchyev niz.

Važno je napomenuti da ovaj rezultat ne vrijedi za polje racionalnih brojeva, odnosno da skup $\mathbb{Q}$ nije potpun. Navedimo jedan interesantan primjer Cauchyevog niza racionalnih brojeva čiji limes nije u $\mathbb{Q}$. Neka je $\{a_n\}$ niz sukcesivnih aproksimacija broja $\sqrt{2}$ koji se dobije na sljedeći način. Ako je a_1 prva aproksimacija, tada je

$$\sqrt{2} = a_1 + \varepsilon_1 \tag{2.84}$$

gdje je ε_1 pogreška za koju pretpostavljamo da je mala. Kvadriranjem jednadžbe (2.84) dobivamo

$$2 = a_1^2 + 2a_1\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 \approx a_1^2 + 2a_1\varepsilon_1 \tag{2.85}$$

jer se ε_1^2 može zanemariti u odnosu na a_1 i $2a_1\varepsilon_1$. Iz jednadžbe (2.85) slijedi da je pogreška približno dana sa

$$\varepsilon_1 \approx \frac{2 - a_1}{2a_1} = \tilde{\varepsilon}_1. \tag{2.86}$$

Dakle, sljedeća aproksimacija iznosi

$$a_2 = a_1 + \tilde{\varepsilon}_1 = a_1 + \frac{2 - a_1}{2a_1} = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right). \tag{2.87}$$

Definirajmo niz $\{a_n\}$ rekurzivnom relacijom

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right), \quad n \geq 2. \tag{2.88}$$

Tada je prvih nekoliko članova niza dano sa

$$1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \dots \tag{2.89}$$

Njihove numeričke vrijednosti su približno

$$1, 1.5, 1.416, 1.414, \dots \tag{2.90}$$

Niz definiran jednadžbom (2.88) je niz racionalnih brojeva. Može se pokazati da je $\{a_n\}$ Cauchyev niz koji konvergira prema $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, što pokazuje da skup $\mathbb{Q}$ nije potpun.

Poglavlje 3

Redovi realnih brojeva

U ovom poglavalju ćemo proučavati redove ili beskonačne sume realnih brojeva. Redovi realnih brojeva imaju široku primjenu u matematičkoj teoriji i primjenama. Vidjet ćemo da se za redove realnih brojeva može definirati pojam konvergencije i da se takvi redovi mogu sumirati. Takodjer ćemo proučavati različita svojstva redova.

3.1 Konvergencija reda

Promotrimo sljedeći problem. Neka je $\{a_k\}$ niz realnih brojeva. Kako možemo definirati beskonačnu sumu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad ? \tag{3.1}$$

Očigledno ovakav izraz ne možemo evaluirati zbrajanjem osim ako je samo konačno mnogo brojeva a_k različito od nule. Umjesto izraza (3.1) promotrimo niz konačnih suma

$$S_1 = a_1, \tag{3.2}$$
$$S_2 = a_1 + a_2, \tag{3.3}$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \tag{3.4}$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \tag{3.5}$$
$$\vdots$$

Uočimo da kada n raste, tada S_n uključuje sve više članova reda a_k pa sumu reda ima smisla definirati kao $\lim_{n\to\infty} S_n$, ako limes postoji. Sada možemo dati formalnu definiciju reda.

Definicija 3.1 *Neka je $\{a_k\}$ niz realnih brojeva. Red realnih brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je niz $\{S_n\}$ gdje je $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.*

Realni broj a_k naziva se k-ti član reda, a S_n se naziva n-ta parcijalna suma reda.

Definicija 3.2 *Kažemo da red realnih brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira prema S ako niz parcijalnih suma $\{S_n\}$ konvergira prema S. Ako niz $\{S_n\}$ divergira , tada kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.*

Ako red konvergira, tada S nazivamo suma reda i pišemo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S. \tag{3.6}$$

U ovoj notaciji $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ označava i red i njegovu sumu S. Kako se konvergencija reda definira preko konvergencije niza, mnogi rezultati o konvergenciji redova će ovisiti o odgovarajućim rezultatima o konvergenciji nizova. Primijetimo da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira ako i samo ako za svaki $N > 0$ konvergira red $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$. Tada je

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k. \tag{3.7}$$

Primjer 3.1 *(Geometrijski red)*
Neka je $|r| < 1$. Odredimo sumu reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots \tag{3.8}$$

Promotrimo odgovarajući niz parcijalnih suma

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}. \tag{3.9}$$

Da bismo mogli odrediti da li niz $\{S_n\}$ konvergira, potrebno je odrediti zatvoreni oblik izraza S_n, odnosno sumirati potencije u jednadžbi (3.9). Množenjem jednadžbe (3.9) sa r dobivamo

$$rS_n = r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n = S_n + r^n - 1 \tag{3.10}$$

Odavde slijedi

$$S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r}. \tag{3.11}$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ za svaki $|r| < 1$, imamo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}. \tag{3.12}$$

Dakle, niz parcijalnih suma $\{S_n\}$ konvergira pa je red $\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1}$ konvergentan. Suma reda iznosi

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r}, \qquad |r| < 1. \tag{3.13}$$

Red (3.8) nazivamo *geometrijski red* i jedan je važnih redova koji nalazi primjenu u raznim granama matematike. Ako je $|r| \geq 1$, tada se može pokazati da geometrijski red divergira. Neka je $r = 1$. Tada je

$$S_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n, \tag{3.14}$$

pa niz parcijalnih suma divergira jer nije ograničen odozgo. Ako je $r = -1$, tada imamo

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0, \ldots \tag{3.15}$$

Očigledno je da niz parcijanih suma (3.15) divergira jer ima dva gomilišta 0 i 1. Slična razmatranja pokazuju da geometrijski red divergira za $|r| > 1$. ■

Primijetimo da u ovom primjeru n-ti član reda ima svojstvo da je $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Pokažimo da je ovo nužan uvjet za konvergenciju reda.

Teorem 3.1 *Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira, tada je $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Dokaz. Neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira, tada je $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ za neki realni broj S. Primijetimo da je $a_n = S_n - S_{n-1}$ za $n \geq 2$, stoga je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \tag{3.16}$$

■

Pomoću ovog teorema možemo prepoznati redove koji nisu konvergentni jer

$$\text{ako je } \lim_{k\to\infty} a_k \neq 0, \text{ tada red } \sum_{n=1}^{\infty} a_k \text{ divergira.} \tag{3.17}$$

Na primjer, red $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(\pi/k)$ divergira jer je

$$\lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = 1 \neq 0. \tag{3.18}$$

Medjutim, uvjet $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ nije dovoljan da bi garantirao konvergenciju reda, kako pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 3.2 *(Harmonijski red)*
Harmonijski red je definiran sa $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$*. Očigledno je*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0, \tag{3.19}$$

pa je ispunjen nužan uvjet za konvergenciju. Pokažimo da harmonijski red divergira.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) + \cdots \\ &+ \Big(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\Big) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\Big) + \cdots \\ &+ \Big(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\Big) \\ &= 1 + \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\Big) = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Ovdje smo koristili činjenicu da je $2^{n-1} + k \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ za svaki $k = 1, 2, \ldots 2^{n-1}$, stoga je

$$\frac{1}{2^{n-1}+k} \geq \frac{1}{2^n}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}. \tag{3.21}$$

Relacija (3.20) pokazuje da niz parcijalnih suma nije ograničen odozgo jer je

$$S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.22}$$

Zaključujemo da niz $\{S_n\}$ divergira, stoga je harmonijski red divergentan iako je $\lim_{k\to\infty} 1/k = 0$. ■

Sljedeći rezultat slijedi izravno iz teorema 2.3 za nizove.

Teorem 3.2 *Neka su* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *i* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergentni redovi, i neka je* $c \in \mathbb{R}$*. Tada vrijedi*

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$,

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Dokaz. Neka su $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ i $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, i neka je $S_n = A_n + B_n$. Tada je S_n parcijalna suma reda $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$. Nizovi $\{A_n\}$ i $\{B_n\}$ su konvergentni pa je prema teoremu 2.3

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n. \tag{3.23}$$

Odavde slijedi da je niz $\{S_n\}$ konvergentan, stoga red $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ konvergira i vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{3.24}$$

Slično se pokazuje da je $\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. ■

3.2 Kriteriji konvergencije

Vrlo često je teško odrediti sumu nekog reda koji konvergira. Medjutim, ako zanemarimo na trenutak ovo pitanje, postoji nekoliko testova kojima se lako može odrediti da li je neki red konvergentan. Posebno mjesto zauzimaju kriteriji konvergencije (D'Alambertov i Cauchyev kriterij) koji se temelje na usporedjivanju danog reda sa geometrijskim redom.

Teorem 3.3 *Red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon \tag{3.25}$$

za svaki $n > n_0$ i $p \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira, tada je niz parcijalnih suma $\{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\}$ Cauchyev niz. Stoga za $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|S_m - S_n| < \varepsilon$ za svaki $n, m > n_0$. Neka je $m = n + p$ za neki $p \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon. \tag{3.26}$$

Pretpostavimo sada da za $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n > n_0$ i $p \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost (3.25). Tada je $|S_m - S_n| < \varepsilon$ za svaki $n, m > n_0$. Dakle, $\{S_n\}$ je Cauchyev niz, pa prema teoremu 2.9 konvergira. ■

Teorem 3.3 implicira da za konvergenciju nisu važni "prvih nekoliko" članova reda, već ona ovisi isključivo o članova koji tvore "ostatak" reda. Ovaj intuitivni zaključak formaliziran je u sljedećoj lemi koja izravno slijedi iz teorema 3.3.

Lema 3.1 *Red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira ako i samo ako red $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergira za svaki $N \in \mathbb{N}$.*

Teorem 3.4 (Poredbeni kriterij I) *Neka je $0 < a_k \leq b_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.*

(i) Ako $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergira, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

(ii) Ako $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira, tada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergira.

Dokaz. Definirajmo parcijalne sume $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ i $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Nizovi $\{A_n\}$ i $\{B_n\}$ su strogo rastući jer su $a_k, b_k > 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Nadalje, iz nejednakosti $0 < a_k \leq b_k$ slijedi $0 < A_n \leq B_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Preptostavimo da red $\sum_{k=1}^\infty b_k$ konvergira. Tada je $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ za neki $B \in \mathbb{R}$, pa je niz $\{A_n\}$ ograničen odozgo jer je $A_n \leq B$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Obzirom da je $\{A_n\}$ strogo rastući niz, prema teoremu 2.4 niz $\{A_n\}$ konvergira.

Pretpostavimo sada da $\{A_n\}$ divergira. Tada $\{A_n\}$ nije ograničen odozgo što zbog $A_n \leq B_n$ implicira da $\{B_n\}$ nije ograničen odozgo. Dakle, $\{B_n\}$ divergira što povlači da red $\sum_{k=1}^\infty b_k$ divergira. ■

Napomenimo da zbog leme 3.1 isti zaključak vrijedi ako je $0 < a_k \leq b_k$, $k \geq N$, za neki $N \in \mathbb{N}$.

Primjer 3.3 *Pokažite da red $\sum_{k=1}^\infty 1/k!$ konvergira.*

Lako se pokazuje indukcijom da je

$$2^{k-1} \leq k! \quad \text{za svaki} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.27}$$

Doista, tvrdnja je očigledna za $k = 1$. Pretpostavimo sada da nejednakost (3.27) vrijedi za $k = 1, 2, \ldots, n$. Tada za $k = n + 1$ imamo

$$2^n = 2\, 2^{n-1} \leq 2n! < (n+1)n! = (n+1)!, \tag{3.28}$$

što pokazuje da tvrdnja vrijedi za $k = n + 1$. Prema aksiomu matematičke indukcije nejednakost (3.27) vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$. Iz (3.27) slijedi da je $1/k! \leq 1/2^{k-1}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Kako za geometrijski red (za $r = 1/2$) vrijedi

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2, \tag{3.29}$$

prema teoremu 3.4 red $\sum_{k=1}^\infty 1/k!$ konvergira. ■

Navedimo još jednu verziju poredbenog kriterija.

Teorem 3.5 (Poredbeni kriterij II) *Neka su $a_k > 0$ i $b_k > 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Ako je $\lim_{k\to\infty} b_k/a_k > 0$, tada $\sum_{k=1}^\infty a_k$ i $\sum_{k=1}^\infty b_k$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.*

Dokaz. Neka je $\lim_{k\to\infty} b_k/a_k = L > 0$. Prema lemi 2.1 niz $\{b_k/a_k\}$ je ograničen, stoga postoji $M_1 > 0$ takav da je

$$\frac{b_k}{a_k} < M_1 \quad \text{za svaki} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.30}$$

Primijetimo da je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{b_k/a_k} = \frac{1}{L} > 0, \tag{3.31}$$

stoga je niz $\{a_k/b_k\}$ takodjer ograničen. Dakle, postoji $M_2 > 0$ takav da je

$$\frac{a_k}{b_k} < M_2 \quad \text{za svaki} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.32}$$

Kombiniranjem nejednakosti (3.30) i (3.32) dobivamo

$$0 < a_k < M_2\, b_k \quad 0 < b_k < M_1\, a_k \quad \text{za svaki} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.33}$$

Prema poredbenom kriteriju 3.4 iz gornje nejednakosti zaključujemo da redovi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju. ■

Primjer 3.4 *Odredite da li red*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \tag{3.34}$$

konvergira.

Primijetimo da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} < \frac{1}{\sqrt{k^2}} = \frac{1}{k}. \tag{3.35}$$

Neka su

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \quad i \quad b_k = \frac{1}{k}. \tag{3.36}$$

Tada je

$$\frac{b_k}{a_k} = \frac{\sqrt{k(k+1)}}{k} = \sqrt{1 + \frac{1}{k}}, \tag{3.37}$$

stoga je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{k}} = 1. \tag{3.38}$$

Kako harmonijski red

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{3.39}$$

divergira, teorem 3.5 implicira da red

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \tag{3.40}$$

takodjer divergira. ∎

Jedan od važnih redova koji se koriste u poredbenom kriteriju je red oblika

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}, \quad p \in \mathbb{R}, \tag{3.41}$$

kojeg nazivamo p-red. Može se pokazati da ovaj red konvergira ako i samo ako je $p > 1$.

Teorem 3.6 (D'Alambertov kriterij) *Neka je $a_k > 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ i neka su*

$$R = \limsup \frac{a_{k+1}}{a_k} \quad i \quad r = \liminf \frac{a_{k+1}}{a_k}. \tag{3.42}$$

(i) Ako je $R < 1$, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira,

(ii) Ako je $r > 1$, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $R < 1$ i odaberimo $0 < \varepsilon < 1 - R$. Prema teoremu 2.7 postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < R + \varepsilon < 1 \quad \text{za svaki} \quad k \geq N. \tag{3.43}$$

Definirajmo $q = \varepsilon + R$. Tada (3.43) implicira $a_{k+1} < q\, a_k$ za svaki $k \geq N$, pa iteracijom ove nejednakosti dobivamo

$$0 < a_k < q^{k-N} a_N, \quad k > N. \tag{3.44}$$

Sada je

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} q^{k-N} a_N = a_N \sum_{k=1}^{\infty} q^k < \infty \tag{3.45}$$

jer je $0 < q < 1$, što povlači da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

(ii) Neka je $r > 1$ i neka je $0 < \varepsilon < r - 1$. Prema teoremu 2.7 postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > r - \varepsilon > 1 \quad \text{za svaki} \quad k \geq N. \tag{3.46}$$

Neka je $q = r - \varepsilon$. Nejednakost (3.46) implicira

$$a_k > q^{k-N} a_N, \quad k > N, \tag{3.47}$$

što povlači $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ jer je $q > 1$. Prema teoremu 3.1 red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira . ∎

Korolar 3.1 *Neka je $a_k > 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, i neka je $R = \lim_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k$.*

(i) *Ako je* $R < 1$, *tada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergira.*

(ii) *Ako je* $R > 1$, *tada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergira.*

Primijetimo da u slučaju $\lim_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k = 1$ ne možemo zaključiti da li red konvergira ili divergira. Na primjer, za redove $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1, \tag{3.48}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1. \tag{3.49}$$

Medjutim, harmonijski red $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergira ali red $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergira. Sljedeći kriterij se dokazuje na sličan način kao teorem 3.6.

Teorem 3.7 (Cauchyev kriterij) *Neka je* $a_k > 0$ *za svaki* $k \in \mathbb{N}$, *i neka je su*

$$R = \limsup \sqrt[k]{a_k} \quad i \quad r = \liminf \sqrt[k]{a_k}. \tag{3.50}$$

(i) *Ako je* $R < 1$, *tada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergira.*

(ii) *Ako je* $r > 1$, *tada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergira.*

Dokaz. (i) Neka je $R < 1$ i neka je $0 < \varepsilon < 1 - R$. Prema teoremu 2.7 postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sqrt[k]{a_k} < R + \varepsilon < 1 \quad \text{za svaki} \quad k > N. \tag{3.51}$$

Definirajmo $q = R + \varepsilon$. Iz gornje nejednakosti slijedi $a_k < q^k$ za svaki $k > N$ što povlači

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} q^k < \infty \tag{3.52}$$

jer je $0 < q < 1$. Ovo povlači da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

(ii) Pretpostavimo da je $r > 1$ i odaberimo $0 < \varepsilon < r - 1$. Prema teoremu 2.7 postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sqrt[k]{a_k} > r - \varepsilon > 1 \quad \text{za svaki} \quad k > N. \tag{3.53}$$

Ovo implicira $a_k > q^k$ za svaki $k > N$ gdje je $q = r - \varepsilon$. Kako je $\lim_{k\to\infty} q^k = \infty$ jer je $q > 1$, to je $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$ što povlači da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira. ■

Korolar 3.2 *Neka je* $a_k > 0$ *za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *i neka je* $R = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$.

(i) *Ako je* $R < 1$, *tada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergira.*

(ii) Ako je $R > 1$, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

Kako je $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$, ne možemo zaključiti da li red konvergira ili divergira, pa su u tom slučaju potrebna daljnja ispitivanja.

Primjer 3.5 *Ispitajte konvergenciju reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}. \tag{3.54}$$

Definirajmo $a_k = 2^k/k!$. Tada imamo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0. \tag{3.55}$$

Prema D'Alambertovom kriteriju red (3.54) konvergira. ■

Primjer 3.6 *Odredite da li red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira, gdje je*

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{3^{(k+3)/2}}, & k \textit{ je neparan}, \\ \frac{1}{3^{k/2}}, & k \textit{ je paran}. \end{cases} \tag{3.56}$$

Pokušajmo primijenti D'Alambertov kriterij. Kako je

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} 3, & k \text{ je neparan}, \\ \frac{1}{9}, & k \text{ je paran}, \end{cases} \tag{3.57}$$

niz $\{a_{k+1}/a_k\}$ divergira jer ima gomilišta 3 i $1/9$. Imamo $\limsup a_{k+1}/a_k = 3$ i $\liminf a_{k+1}/a_k = 1/9$, pa u ovom slučaju D'Alambertov kriterij nije primjenjiv. S druge strane,

$$\sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} \frac{1}{3^{1/2+3/(2k)}}, & k \text{ je neparan}, \\ \frac{1}{3^{1/2}}, & k \text{ je paran}, \end{cases} \tag{3.58}$$

pa odavde dobivamo $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1/\sqrt{3} < 1$. Stoga prema Cachyevom kriteriju slijedi da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira. ■

Ovaj primjer ilustrira činjenicu da izbor kriterija za ispitivanje konvergencije ovisi o prirodi samoga reda.

Pomoću D'alambertovog i Cauchyevog kriterija ispitujemo konvergenciju redova sa pozitivnim članovima. Medjutim, ponekad susrećemo redove čiji članovi imaju alternirajuće predznake. Takve redove nazivamo *alternirajući* redovi.

Teorem 3.8 (Leibnizov kriterij) *Neka je* $\{a_k\}$ *monotono padajući niz takav da je* $a_k > 0$ *za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *i* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. *Tada alternirajući red*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \tag{3.59}$$

konvergira i $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k < a_1$.

Dokaz. Neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$. Promotrimo parcijalne sume za parne indekse:

$$S_2 = a_1 - a_2 > 0, \tag{3.60}$$

$$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = S_2 + a_3 - a_4 > S_2, \tag{3.61}$$

$$S_6 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 = S_4 + a_5 - a_6 > S_4. \tag{3.62}$$

Općenito vrijedi

$$S_{2n} = S_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} > S_{2n-2}. \tag{3.63}$$

Takodjer,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1 \tag{3.64}$$

jer su članovi u zagradama pozitivni brojevi. Slijedi da je niz parcijalnih suma $\{S_{2n}\}$ monotono rastući i ograničen odozgo sa a_1, pa stoga konvergira. Neka je $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S < a_1$.

Za parcijalne sume sa neparnim indeksom imamo

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}, \tag{3.65}$$

što implicira

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S \tag{3.66}$$

jer je po pretpostavci $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Odavde zaključujemo da niz $\{S_n\}$ konvergira prema S i $\lim_{n\to\infty} S_n = S < a_1$. Dakle, red (3.59) konvergira i vrijedi $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k < a_1$. ■

Prema Leibnizovom kriteriju trivijalno slijedi da *alternirajući harmonijski* red

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{3.67}$$

konvergira jer je $\{1/k\}$ monotono padajući niz i $\lim_{k\to\infty} 1/k = 0$.

Primjer 3.7 *Ispitajte da li red*

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln(k)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(4)} - \cdots \tag{3.68}$$

konvergira.

Logaritamska funkcija je strogo rastuća, pa iz nejednakosti $\ln(k+1) > \ln(k)$ slijedi

$$\frac{1}{\ln(k)} > \frac{1}{\ln(k+1)} \quad \text{za svaki} \quad k \geq 2. \tag{3.69}$$

Dakle, $\{1/\ln(k)\}$ je monotono padajući niz i $\lim_{k\to\infty} 1/\ln(k) = 0$. Prema Leibnizovom kriteriju red (3.68) konvergira i

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln(k)} < \frac{1}{\ln(2)}. \tag{3.70}$$

■

3.3 Apsolutna konvergencija

Do sada smo promatrali konvergenciju redova s pozitivnim članovima ili alternirajuće redove. Ako je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ proizvoljan red, tada u nekim slučajevima njegovu konvergenciju možemo ispitati pomoću reda sa apsolutnim vrijednostima $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Ovakvi redovi imaju važnu primjenu u matematičkoj analizi, naročito kod konvergencije redova funkcija koje ćemo proučavati kasnije.

Definicija 3.3 *Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergira, tada kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergira. Ako $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira ali $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergira, tada kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uvjetno konvergira.*

Prema sljedećem teoremu apsolutno konvergentni redovi su konvergentni.

Teorem 3.9 *Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergira, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.*

Dokaz. Definirajmo parcijalne sume $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ i $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergira, tada je $\{\bar{S}_n\}$ Cauchyev niz. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |\bar{S}_n - \bar{S}_m| < \varepsilon. \tag{3.71}$$

Neka je $n > m$. Tada je

$$|\bar{S}_n - \bar{S}_m| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon. \tag{3.72}$$

Ovo povlači

$$|S_n - S_m| = \Big| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \Big| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon, \tag{3.73}$$

što pokazuje da je $\{S_n\}$ Cauchyev niz. Dakle, niz $\{S_n\}$ je konvergentan, stoga red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira. ∎

Obrat ovog rezultat ne vrijedi: konvergencija nekog reda ne implicira apsolutnu konvergenciju. Na primjer, alternirajući harmonijski red $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$ konvergira, ali harmonijski red $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergira.

Apsolutna konvergencija ima za posljedicu mnoga važna svojstva. Bez dokaza navodimo da ako neki red apsolutno konvergira, tada smijemo permutirati članove reda na proizvoljan način, a novi red konvergira prema istoj vrijednosti kao početni red.

Teorem 3.10 *Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergentan red, i neka je $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ red koji nastaje permutacijom članova a_k. Ako je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$, tada je $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = S$.*

Na primjer, red

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2^k} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} - \cdots \tag{3.74}$$

je apsolutno konvergentan jer je $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$ p-red za $p = 2$. Teorem 3.10 garantira da članove reda (3.74) možemo po volji permutirati, a da se pri tome suma reda ne mijenja. Tako, na primjer, red

$$\frac{1}{2^2} - 1 + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^5} + \cdots \tag{3.75}$$

ima istu sumu kao red (3.74).

Medjutim, ako neki red uvjetno konvergira, tada se permutacijom njegovih članova suma reda može promijeniti. Prisjetimo se da je alternirajući harmonijski red $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\, 1/k$ uvjetno konvergentan. Neka je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = S. \tag{3.76}$$

Manipulacijom reda (3.76) može se pokazati da je

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3S}{2}. \tag{3.77}$$

Uočimo da se red (3.77) dobije iz reda (3.76) tako da se u paru zbrajaju članovi $1/k$ i $1/(k+2)$ gdje je k neparan, a zatim se oduzme prvi slobodan član $1/k$ gdje je k paran. Dakle, redovi (3.76) i (3.77) imaju različite sume jer je $S \neq 0$.

Poglavlje 4

Limes funkcije

Pojam limesa je fundamentalan u matematičkoj analizi. Svrha ovog poglavlja je da na intuitivan način približi studentu pojam limesa funkcije, razvije tehnike računanja limesa i metode koje se koriste u dokazivanju različitih svojstava limesa. U ovom i sljedećim poglavljima promatramo realne funkcije realne varijable, osim ako nije drugačije naznačeno. Takodjer pretpostavljamo da su funkcije definirane na prirodnoj domeni, tj. na najvećoj domeni na kojoj funkcija ima smisla.

Limes funkcije je lokalno svojstvo funkcije koje ovisi o njezinom ponašanju u okolini neke točke. Stoga je potrebno definirati što podrazumijevamo pod okolinom točke.

Definicija 4.1 *δ-okolina točke $a \in \mathbb{R}$ je otvoreni interval*

$$K_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \delta\}. \tag{4.1}$$

δ-okolina točke $a \in \mathbb{R}$ iz koje je izbrisana točka a je skup

$$K_\delta^*(a) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\}. \tag{4.2}$$

Promotrimo sada funkciju

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}. \tag{4.3}$$

Ova funkcija je definirana svugdje osim u točki $x = 2$. Zanima nas ponašanje funkcije na okolini $K_\delta^*(2)$ za neki mali $\delta > 0$. Primijetimo da za $x \neq 2$ vrijedi

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2. \tag{4.4}$$

Intuitivno je jasno da što je x bliže točki 2, to je $x+2$ bliže točki 4. Dakle, iako funkcija $f(x)$ nije definirana u $x = 2$ njezina vrijednost teži prema 4 kada se x približava točki 2.

Drugim riječima, $f(x)$ može biti po volji blizu točke 4 ako je $\delta > 0$ dovoljno malen. Ovaj primjer motivira sljedeću definiciju.

Definicija 4.2 *Kažemo da je realni broj L limes funkcije f u točki $x = a$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da*

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

U tom slučaju pišemo

$$\lim_{x \to a} f(x) = L. \tag{4.6}$$

Za limes takodjer koristimo zapis

$$f(x) \to L \quad \text{kada} \quad x \to a. \tag{4.7}$$

Smisao definicije 4.2 je sljedeći: razliku $f(x) - L$ možemo napraviti po volji malom kada je $x \in K_\delta^*(a)$ za neki dovoljno mali δ, kako je prikazano na slici 4.1. Drugim riječima, slika funkcije f je sadržana u intervalu $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ kada je x sadržan u skupu $K_\delta^*(a)$. Istaknimo da se u definiciji 4.2 podrazumijeva da je funkcija definirana na okolini točke a, ali ne mora biti definirana u $x = a$. Limes funkcije u potpunosti ovisi samo o ponašanju funkcije u okolini točke a, ali ne i o vrijednosti $f(a)$, ukoliko je $f(a)$ definirano.

Primjer 4.1 *Dokažite da je*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4. \tag{4.8}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo odrediti $\delta > 0$ takav da je $|f(x) - 4| < \varepsilon$ kada je $0 < |x - 2| < \delta$. Kako je $x \neq 2$ imamo

$$|f(x) - 4| = \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = |x + 2 - 4| = |x - 2|. \tag{4.9}$$

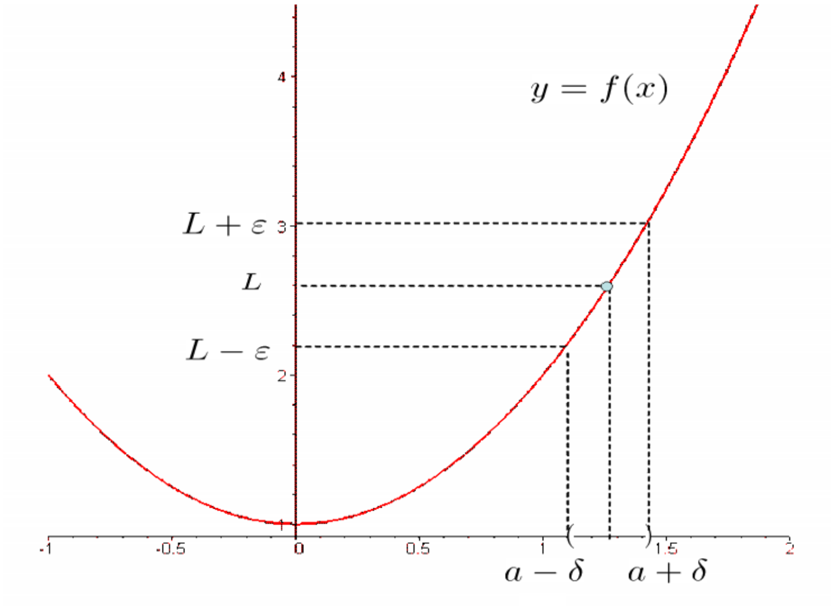
Iz jednadžbe (4.9) slijedi da ako odaberemo $\delta = \varepsilon$, tada $0 < |x - 2| < \delta$ implicira $|f(x) - 4| < \varepsilon$. Time je dokazana tvrdnja (4.8). ■

Primjer 4.2 *Dokažite da je*

$$\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5. \tag{4.10}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Odredimo $\delta > 0$ takav da je $|f(x) - 5| < \varepsilon$ kada je $0 < |x - 3| < \delta$ gdje je $f(x) = 2x - 1$. Primijetimo da je

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3|. \tag{4.11}$$



Slika 4.1: Skup $(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$ se preslikava u interval $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Dakle, ako odaberemo $\delta = \varepsilon/2$, tada je

$$|f(x) - 5| = 2|x - 3| < 2\delta = \varepsilon. \tag{4.12}$$

■

U ovim primjerima je prilično lako odrediti $\delta > 0$ za zadani $\varepsilon > 0$, no ovisno o funkciji $f(x)$ taj postupak može biti složeniji.

Primjer 4.3 *Pokažite da je*

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \quad a > 0. \tag{4.13}$$

Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ je definirana za $x \geq 0$, stoga je $f(x)$ definirana na nekom intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ samo ako je $0 < \delta \leq a$. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $\sqrt{x} + \sqrt{a} > \sqrt{a}$, imamo

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}. \tag{4.14}$$

Razlika $|\sqrt{x} - \sqrt{a}|$ će biti manja od ε ako je $|x-a| < \sqrt{a}\,\varepsilon$ što sugerira da odaberemo $\delta = \sqrt{a}\,\varepsilon$. Medjutim, δ takodjer mora zadovoljavati uvjet $0 < \delta \leq a$, stoga je potrebno uzeti $\delta = \min\{a, \sqrt{a}\,\varepsilon\}$. Tada nejednakost (4.14) implicira da je $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ za svaki

$0 < |x - a| < \delta$. ■

Sljedeći teorem nam kazuje da je limes funkcije jedinstven. Intuitivno je ova tvrdnja jasna jer se vrijednosti funkcije ne mogu približiti proizvoljno blizu dvjema različitim vrijednostima.

Teorem 4.1 *Ako je* $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ *i* $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$*, tada je* $L_1 = L_2$.

Dokaz. Odaberimo $\varepsilon > 0$. Kako je $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, tada za $\varepsilon/2 > 0$ postoji $\delta_1 > 0$ takav da

$$0 < |x - a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.15}$$

Slično, postoji $\delta_2 > 0$ takav da

$$0 < |x - a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.16}$$

Ako je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tada za $x_0 \in K^*_\delta(a)$ vrijede implikacije (4.15) i (4.16), pa imamo

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x_0) + f(x_0) - L_2| \leq |f(x_0) - L_1| + |f(x_0) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{4.17}$$

S obzirom da je $\varepsilon > 0$ odabran proizvoljno, zaključujemo da je $|L_1 - L_2| = 0$, odnosno $L_1 = L_2$. ■

Lema 4.1 *Ako funkcija f ima limes u točki $x = a$, tada postoji $\delta > 0$ takav da je f ograničena na skupu $K^*_\delta(a)$.*

Dokaz. Ako je $\lim_{x\to a} f(x) = L$, tada za $\varepsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ takvo da je $|f(x) - L| < 1$ za svaki $0 < |x - a| < \delta$. Odavde slijedi da za svaki $x \in K^*_\delta(a)$ imamo

$$|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|, \tag{4.18}$$

što pokazuje da je f ograničena na skupu $K^*_\delta(a)$. ■

Obrat ove tvrdnje ne vrijedi jer ograničena funkcija ne mora imati limes. Na primjer, $f(x) = \sin(1/x)$ je ograničena na svakoj okolini $K^*_\delta(0)$ jer je

$$|\sin(1/x)| \leq 1 \quad \text{za svaki} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{4.19}$$

Medjutim, $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ ne postoji što će biti pokazano u primjeru 4.7.

Teorem 4.2 (Fundamentalni teorem o limesima) *Neka su*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \;\; i \;\; \lim_{x\to a} g(x) = K. \tag{4.20}$$

Tada vrijedi

(a) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L+K$,

(b) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LK$,

(c) $\lim_{x\to a} 1/f(x) = 1/L$ *ako je* $L \neq 0$.

Dokaz. (a) Odaberimo $\varepsilon > 0$. Kako je $\lim_{x\to a} f(x) = L$, za $\varepsilon/2 > 0$ postoji $\delta_1 > 0$ takav da za svaki $0 < |x-a| < \delta_1$ vrijedi $|f(x)-L| < \varepsilon/2$. Slično, postoji $\delta_2 > 0$ takav da za svaki $0 < |x-a| < \delta_2$ vrijedi $|g(x)-K| < \varepsilon/2$. Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada $0 < |x-a| < \delta$ implicira

$$|f(x)+g(x)-(L+K)| \leq |f(x)-L| + |g(x)-K| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{4.21}$$

Time je pokazano da je $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L+K$.

(b) Neka je $\varepsilon > 0$. Prema lemi 4.1 postoji $\delta_1 > 0$ takav da je funkcija g ograničena na $K^*_{\delta_1}(a)$. Stoga postoji $M > 0$ takav da je $|g(x)| < M$ za svaki $x \in K^*_{\delta_1}(a)$. Takodjer postoje $\delta_2 > 0$ i $\delta_3 > 0$ takvi da

$$0 < |x-a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2M}, \tag{4.22}$$

$$0 < |x-a| < \delta_3 \quad \Rightarrow \quad |g(x)-K| < \frac{\varepsilon}{2(1+|L|)}. \tag{4.23}$$

Definirajmo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Tada za svaki $0 < |x-a| < \delta$ vrijedi

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x)-LK| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LK| && (4.24)\\
&\leq |f(x)g(x) - Lg(x)| + |Lg(x) - LK| && (4.25)\\
&= |g(x)|\,|f(x)-L| + |L|\,|g(x)-K| && (4.26)\\
&< M\,\frac{\varepsilon}{2M} + |L|\,\frac{\varepsilon}{2(1+|L|)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. && (4.27)
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LK$.

(c) Prema pretpostavci je $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$, stoga za $|L|/2 > 0$ postoji $\delta_1 > 0$ takav da je

$$|f(x)-L| < \frac{|L|}{2} \quad \text{za svaki} \quad 0 < |x-a| < \delta_1. \tag{4.28}$$

Kako je $|L| \leq |f(x)-L| + |f(x)|$ nejednakost (4.28) povlači

$$|f(x)| > |L|/2 \quad \text{za svaki} \quad 0 < |x-a| < \delta_1. \tag{4.29}$$

Odaberimo sada $\varepsilon > 0$. Tada za $\varepsilon|L|^2/2 > 0$ postoji $\delta_2 > 0$ takav da je

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon|L|^2}{2} \quad \text{za svaki} \quad 0 < |x-a| < \delta_2. \tag{4.30}$$

Definirajmo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Relacije (4.29) i (4.30) povlače da za svaki $0 < |x-a| < \delta$ vrijedi

$$\Big|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\Big| = \frac{1}{|L|}\,\frac{1}{|f(x)|}\,|f(x) - L| < \frac{1}{|L|}\,\frac{2}{|L|}\,\frac{\varepsilon|L|^2}{2} = \varepsilon, \tag{4.31}$$

čime je dokazano da je $\lim_{x\to a} 1/f(x) = 1/L$. ■

Primijetimo da su tvrdnje u ovom teoremu potpuno analogne odgovarajućim tvrdnjama koje smo dokazali za nizove u prethodnom poglavlju (vidi teorem 2.3).

Korolar 4.1 *Neka je* $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = K$ *i neka je* $k \in \mathbb{R}$. *Tada vrijedi*

(a) $\lim_{x\to a} kf(x) = kL$,

(b) $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = L - K$,

(c) $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L/K$ *ako je* $K \neq 0$.

Teorem 4.2 i korolar 4.1 daju nam jednostavna pravila za računanje limesa funkcija. Promotrimo polinom

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \quad c_i \in \mathbb{R}. \tag{4.32}$$

Prema teoremu 4.2 je

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} xx = \lim_{x\to a} x \lim_{x\to a} x = a^2, \tag{4.33}$$

pa indukcijom slijedi $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada je opet prema teoremu 4.2 i korolaru 4.1

$$\lim_{x\to a} p(x) = c_n \lim_{x\to a} x^n + c_{n-1} \lim_{x\to a} x^{n-1} + \cdots + c_1 \lim_{x\to a} x + c_0 = p(a). \tag{4.34}$$

Ako je $q(x)$ polinom takav da je $q(a) \neq 0$, tada iz teorema 4.2 slijedi

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x\to a} p(x)}{\lim_{x\to a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}. \tag{4.35}$$

Ako je $q(a) = 0$, tada racionalna funkcija $r(x) = p(x)/q(x)$ nije definirna u $x = a$ ali $\lim_{x\to a} r(x)$ može postojati ukoliko je $p(a) = 0$. Iz ovih razmatranja vidimo da za polinome $p(x)$ i racionalne funkcije $r(x)$ vrijedi jednostavno pravilo

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a), \quad \lim_{x\to a} r(x) = r(a) \tag{4.36}$$

ukoliko je $r(a)$ definirano. Za funkcije koje imaju ovo svojstvo kažemo da su *neprekidne* u točki $x = a$. Neprekidne funkcije su važna klasa funkcija koju ćemo razmatrati u sljedećem poglavlju.

Limese računamo uglavnom tako da funkciju transformiramo u ekvivalentan oblik na kojeg možemo primijenti pravilo $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Ilustrirajmo ovu ideju s nekoliko primjera.

Primjer 4.4 *Odredite limese*

$$(a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}, \qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}, \qquad (c)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x+3}+\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}\right). \tag{4.37}$$

(a) Faktorizacijom brojnika i nazivnika dobivamo

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}. \tag{4.38}$$

(b) Racionalizacijom funkcije dobivamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} \tag{4.39}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4})^2-2^2}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}. \tag{4.40}$$

(c) Ako oba limesa postoje, tada smijemo pisati

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x+3}+\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+3} + \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}. \tag{4.41}$$

Provjerimo da gornji limes smijemo rastaviti kao zbroj dvaju limesa. Prvi limes je očigledno

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+3} = \frac{0}{5} = 0. \tag{4.42}$$

U drugom limesu potrebno je funkciju transformirati na sljedeći način:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{-\frac{x-2}{2x}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}. \tag{4.43}$$

Kako oba limesa postoje vrijedi

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x+3}+\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}\right) = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}. \tag{4.44}$$

■

Teorem 4.3 *Pretpostavimo da u okolini točke a funkcije f i g zadovoljavaju nejednakost*

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{za svaki} \quad x \in K_\delta^*(a) \tag{4.45}$$

za neki $\delta > 0$. Ako je $\lim_{x\to a} f(x) = L$ i $\lim_{x\to a} g(x) = K$, tada je $L \leq K$.

Ovaj rezultat se može interpretirati kao svojstvo limesa koje čuva uredjenje.

Dokaz. Pretpostavimo da je $L > K$ i pokažimo da time dobivamo kontradikciju. Ako je $L > K$, tada je

$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = L - K > 0. \tag{4.46}$$

Za $\varepsilon = \frac{1}{2}(L-K) > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $0 < |x-a| < \delta$ vrijedi

$$|f(x) - g(x) - (L-K)| < \frac{1}{2}(L-K), \tag{4.47}$$

odnosno

$$\frac{1}{2}(L-K) < f(x) - g(x) < \frac{3}{2}(L-K), \quad x \in K_\delta^*(a). \tag{4.48}$$

Kako je $L-K > 0$, nejednakost (4.48) implicira $f(x)-g(x) > 0$ za svaki $x \in K_\delta^*(a)$. Odavde slijedi $f(x) > g(x)$ za svaki $x \in K_\delta^*(a)$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $f(x) \leq g(x)$ za svaki $x \in K_\delta^*(a)$. Dakle, zaključujemo da je $L \leq K$. ■

Korolar 4.2 (Pravilo o uklije̎štenoj funkciji) *Pretpostavimo da funkcije f, g i h zadovoljavaju nejednakost*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad x \in K_\delta^*(a) \tag{4.49}$$

u okolini točke a za neki $\delta > 0$. Ako je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, tada je $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Dokaz. Prema teoremu 4.3 imamo

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} h(x), \tag{4.50}$$

pa pretpostavka $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ implicira $\lim_{x\to a} g(x) = L$. ■

Primjer 4.5 *Pokažite da je*

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0. \tag{4.51}$$

Za svaki $x \neq 0$ vrijedi $|\sin(1/x)| \leq 1$, što povlači

$$0 \leq \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|, \quad x \neq 0. \tag{4.52}$$

Kako je $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, pravilo o ukliještenoj funkciji implicira $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$. ■

Na kraju istaknimo da se limes funkcije $\lim_{x\to a} f(x)$ može promatrati i pomoću niza realnih brojeva koji konvergiraju prema a. Naime, ako je $\lim_{x\to a} f(x) = L$, tada za svaki $\varepsilon_n = 1/n$ postoji $\delta_n > 0$ takav da

$$0 < |x - a| < \delta_n \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \frac{1}{n}. \tag{4.53}$$

Brojeve δ_n možemo odabrati tako da tvore silazni niz $\delta_1 > \delta_2 > \ldots > 0$. Ako u svakoj okolini $K^*_{\delta_n}(a)$ odaberemo $x_n \in K^*_{\delta_n}(a)$, tada $\{x_n\}$ tvor niz koji konvergira prema a, $x_n \neq a$ i $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$. Dakle, ako je $\lim_{x\to a} f(x) = L$, tada postoji niz $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, takav da

$$x_n \to a \;\text{ i }\; f(x_n) \to L \;\text{ kada }\; n \to \infty. \tag{4.54}$$

Na temelju ovog razmatranja može se pokazati sljedeći rezultat.

Teorem 4.4 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *ako i samo ako* $f(x_n) \to L$ *za svaki niz* $\{x_n\}$ *u domeni funkcije* f *takav da* $x_n \to a$, *i* $x_n \neq a$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Limes funkcije je ponekad lakše analizirati primjenom ovog teorema.

Primjer 4.6 *Neka je*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ je racionalan}, \\ 0, & x \text{ je iracionalan}. \end{cases} \tag{4.55}$$

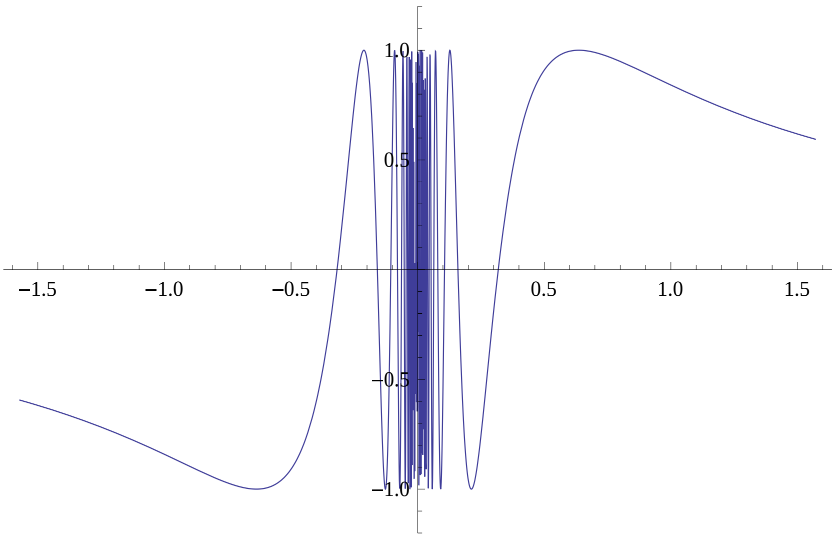
Pokažite da $\lim_{x\to a} f(x)$ *postoji samo ako je* $a = 0$.

Pretpostavimo da je $a \neq 0$. Neka je $\{x_n\}$ niz racionalnih brojeva i neka je $\{x'_n\}$ niz iracionalnih brojeva koji konvergiraju prema a gdje je $x_n, x'_n \neq a$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $f(x_n) = x_n$ i $f(x'_n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ što implicira

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 0. \tag{4.56}$$

Prema teoremu 4.4 $\lim_{x\to a} f(x)$ ne postoji jer limesi u (4.56) moraju biti jednaki za svaki niz koji konvergira prema a. Očigledno, ako je $a = 0$ tada je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ za svaki niz $\{x_n\}$ koji konvergira prema nuli, pa je $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. ■

Primjer 4.7 *Pokažite da funkcija* $f(x) = \sin(1/x)$ *nema limes u točki* $a = 0$.



Slika 4.2: $f(x) = \sin(1/x)$.

Definirajmo nizove

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad \text{i} \quad x'_n = \frac{1}{2n\pi}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.57}$$

Tada je

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \quad \text{i} \quad f(x'_n) = \sin(2n\pi) = 0 \tag{4.58}$$

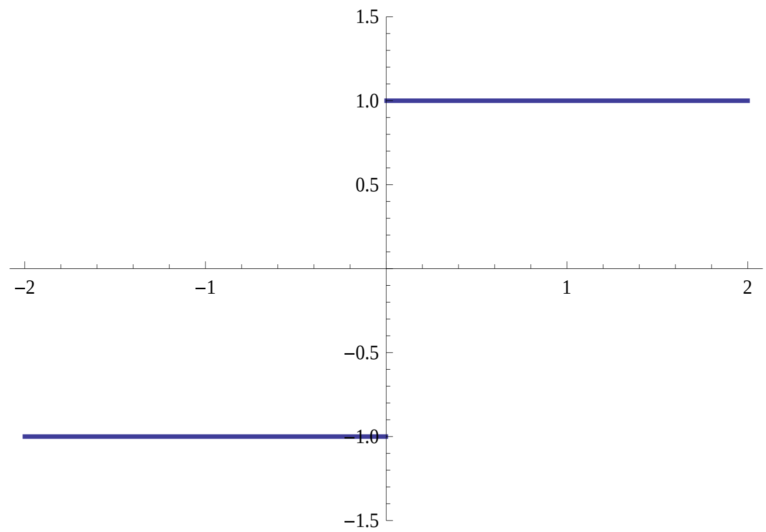
za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako nizovi $\{x_n\}$ i $\{x'_n\}$ konvergiraju prema nuli, iz jednadžbe (4.58) slijedi da svaka okolina točke $a = 0$ sadrži beskonačno mnogo točaka takvih da je $f(x_n) = 1$ i $f(x'_n) = 0$. Prema teoremu 4.1 limes funkcije ne može biti 0 i 1, stoga $\lim_{x\to 0} f(x)$ ne postoji. Graf funkcije $f(x) = \sin(1/x)$ prikazan je na slici 4.2. ■

4.1 Jednostrani limesi

U definiciji limesa implicitno se podrazumijeva da $\lim_{x\to a} f(x)$ na ovisi o načinu na koji x teži prema točki a. Sada ćemo proširiti pojam limesa na slučajeve kada x teži prema a samo s lijeve ili desne strane. Time dobivamo jednostrane limese, odnosno limes slijeva ili limes zdesna. Pri tome se podrazumijeva da je kod limesa slijeva f definirana na skupu $(a - \delta, a)$, a kod limesa zdesna na skupu $(a, a + \delta)$, za neki $\delta > 0$.

Promotrimo funkciju

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0. \tag{4.59}$$



Slika 4.3: $f(x) = x/|x|$.

Kako je $|x| = x$ za $x >$ i $|x| = -x$ za $x < 0$, funkciju f možemo zapisati u obliku

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \tag{4.60}$$

Graf funkcije f prikazan je na slici 4.3. Iz grafa je očito da kada $x \to 0$ kroz pozitivne vrijednosti, tada $f(x) \to 1$. Slično, kada $x \to 0$ kroz negativne vrijedsnoti, tada $f(x) \to -1$. Očigledno je da $\lim_{x\to 0} f(x)$ ne postoji jer ovisi o načinu na koji x teži prema 0, ali jednostrani limesi postoje. Ovo razmatranje motivira sljedeću definiciju.

Definicija 4.3 *Realni broj L je limes zdesna funkcije f u točki $x = a$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da*

$$a < x < a + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{4.61}$$

U tom slučaju pišemo

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L. \tag{4.62}$$

Analogno definiramo limes slijeva.

Definicija 4.4 *Realni broj L je limes slijeva funkcije f u točki $x = a$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da*

$$a - \delta < x < a \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{4.63}$$

Tada pišemo

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L. \tag{4.64}$$

Primjer 4.8 *Ispitajte jednostrane limese funkcije*

$$f(x) = \frac{x^2}{x + |x|} \tag{4.65}$$

u točki $x = 0$.

Promotrimo funkciju f u okolini $(0, \delta)$ za neki $\delta > 0$. Tada je $|x| = x$ jer je $x > 0$, stoga je

$$f(x) = \frac{x^2}{x + x} = \frac{x}{2}, \quad x \in (0, \delta). \tag{4.66}$$

Odaberimo sada $\varepsilon > 0$. Ako je $\delta = 2\varepsilon$, tada za svaki $0 < x < 2\varepsilon$ vrijedi

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{x}{2} - 0 \right| = \frac{x}{2} < \varepsilon. \tag{4.67}$$

Dakle, limes zdesna je $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$. S druge strane, f nije definirana na okolini $(-\delta, 0)$ jer je u tom slučaju $|x| = -x$ pa nazivnik u (4.65) iščezava. Stoga limes slijeva $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ ne postoji. ■

U prethodnom odjeljku pokazali smo da je limes jedinstven. Slično se može pokazati da su jednostrani limesi takodjer jedinstveni. Sljedeći teorem daje vezu izmedju limesa i jednostranih limesa.

Teorem 4.5 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *ako i samo ako je*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L. \tag{4.68}$$

Drugim riječima, funkcija f ima limes L u točki $x = a$ ako i samo ako su jednostrani limesi u $x = a$ jednaki L.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{4.69}$$

Medjutim, $0 < |x - a| < \delta$ ako i samo ako je $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, što povlači da

$$a < x < a + \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{i} \quad a - \delta < x < a \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{4.70}$$

Dakle, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Pretpostavimo sada da je $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$ i odaberimo $\varepsilon > 0$. Tada postoje $\delta_1, \delta_2 > 0$ takvi da

$$a < x < a + \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon, \tag{4.71}$$

$$a - \delta_2 < x < a \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{4.72}$$

Ako je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tada za svaki $0 < |x - a| < \delta$ vrijedi $x \in (a, a + \delta) \subseteq (a, a + \delta_1)$ ili $x \in (a-\delta, a) \subseteq (a-\delta_2, a)$. U oba slučaja zbog (4.71) i (4.72) zaključujemo da $0 < |x-a| < \delta$ implicira $|f(x) - L| < \varepsilon$. Dakle, $\lim_{x\to a} f(x) = L$. ■

Ovaj teorem je koristan kada želimo dokazati da neki limes ne postoji. U tom slučaju je dovoljno pokazati da jedan ili oba jednostrana limesa na postoje, ili da imaju različite vrijednosti.

Primjer 4.9 *Neka je*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 2, \\ 2x - 3, & x > 2. \end{cases} \tag{4.73}$$

Ispitajte da li postoji $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Funkcija f je zadana različitim izrazima za x s lijeve ili desne strane od 2. Stoga ispitajmo jednostrane limese u $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x - 3) = 4 - 3 = 1, \tag{4.74}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x + 1) = 2 + 1 = 3. \tag{4.75}$$

Kako je $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$, zaključujemo da $\lim_{x\to 2} f(x)$ ne postoji. ■

4.2 Limes u beskonačnosti i beskonačni limes

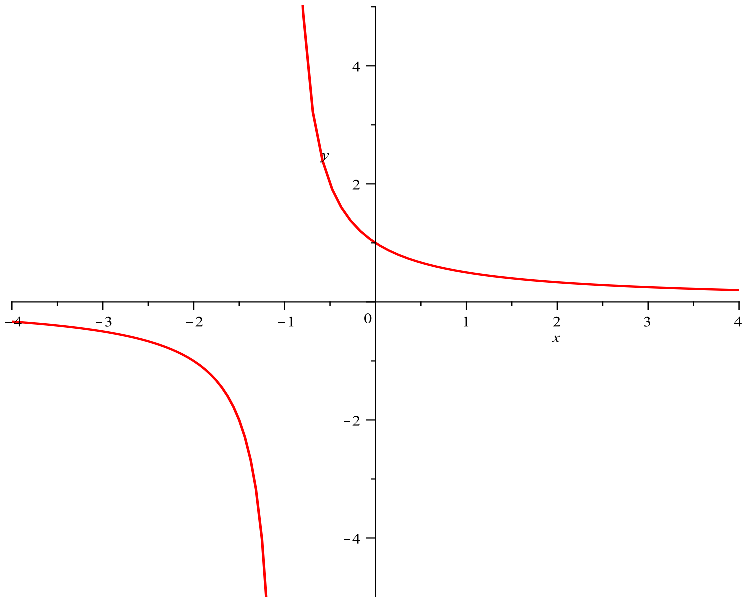
Pojam limesa se može proširiti na slučaj kada varijabla x postaje proizvoljno velika, s pozitivnim ili negativnim predznakom. Ako $f(x) \to L$ kada x neograničeno raste, tada kažemo da f ima limes L "u beskonačnosti".

Definicija 4.5 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $M > 0$ *takav da*

$$x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{4.76}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $M > 0$ *takav da*

$$x < -M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{4.77}$$



Slika 4.4: $f(x) = 1/(x+1)$.

Primjer 4.10 *Pokažite da je*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+1} = 0. \tag{4.78}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Ako odaberemo $M = 1/\varepsilon$, tada za $x > M$ vrijedi

$$\left|\frac{1}{x+1} - 0\right| = \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} < \varepsilon. \tag{4.79}$$

Dakle, $\lim_{x\to\infty} 1/(x+1) = 0$.

Slično, ako je $M = 1 + 1/\varepsilon$, tada za $x < -M$ vrijedi $x + 1 < -1/\varepsilon$ što povlači

$$|x+1| = -(x+1) > 1/\varepsilon. \tag{4.80}$$

Sada je

$$\left|\frac{1}{x+1} - 0\right| = \frac{1}{|x+1|} < \varepsilon, \tag{4.81}$$

iz čega proizlazi $\lim_{x\to-\infty} 1/(x+1) = 0$. Graf funkcije $f(x) = 1/(x+1)$ prikazan je na slici 4.4. Primijetimo da se graf funkcije približava osi x, odnosno $f(x)$ teži prema 0, kada $x \to \pm\infty$. ∎

U nekim slučajevima kada vrijednost funkcije $f(x)$ neograničeno raste ili pada kada x teži prema realnom broju a. Tada kažemo da f ima "beskonačan" limes u točki $x = a$.

Definicija 4.6 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *ako za svaki* $M > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da*

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M. \tag{4.82}$$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ *ako za svaki* $M > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da*

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < -M. \tag{4.83}$$

Primjer 4.11 *Pokažite da je*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty. \tag{4.84}$$

Neka je $M > 0$. Ako je $\delta = 1/M$, tada $0 < |x - 0| < \delta$ implicira $|x| < 1/M$, odnosno

$$\frac{1}{|x|} > M. \tag{4.85}$$

Dakle, $\lim_{x\to 0} 1/|x| = \infty$. ∎

Primjer 4.12 *Pokažite da je*

$$\lim_{x\to 0} \ln|x| = -\infty. \tag{4.86}$$

Odaberimo $M > 0$. Ako je $\delta = e^{-M}$, tada $0 < |x - 0| < \delta$ povlači $|x| < e^{-M}$ iz čega slijedi

$$\ln|x| < -M. \tag{4.87}$$

Dakle, $\lim_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$. ∎

Takodjer možemo promatrati slučajeve u kojima $f(x)$ raste ili pada bez ograničenja kada x teži realnom broju a slijeva ili zdesna. Čitatelju ostavljamo da za svaki od limesa u definiciji 4.6 napiše odgovarajuće definicije za jednostrane limese.

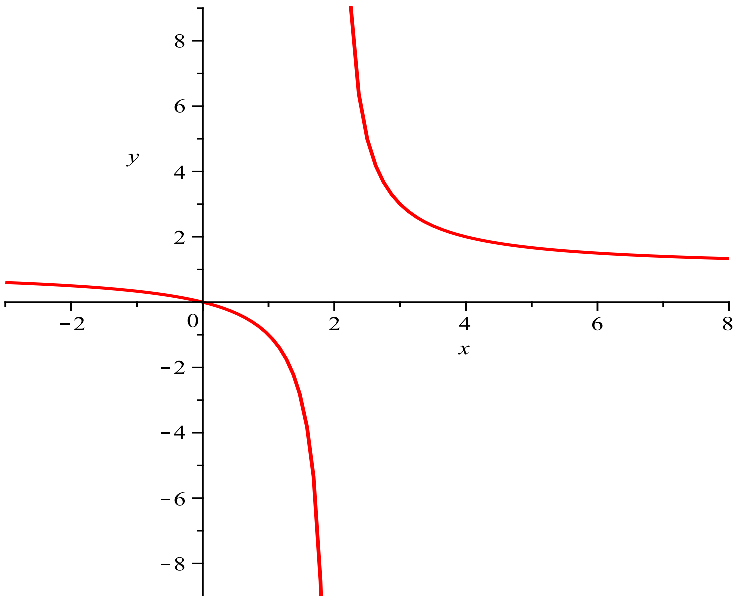
Primjer 4.13 *Neka je* $f(x) = x/(x-2)$. *Pokažite da je* $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$.

Neka je $M > 0$ i odaberimo $\delta = 2/M$. Ako je $2 < x < 2 + \delta$, tada je $x < 2 + 2/M$ što povlači $1/(x-2) > M/2$. Sada za svaki $2 < x < 2 + \delta$ vrijedi

$$f(x) = \frac{x}{x-2} > \frac{2}{x-2} > 2\,\frac{M}{2} = M. \tag{4.88}$$

Zaključujemo da je $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$. Slično se može pokazati $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$. Na slici 4.5 jasno se vidi ponašanje funkcije $f(x)$ u okolini točke $x = 2$. ∎

Na kraju napomenimo da funkcija $f(x)$ može neograničeno rasti ili padati kada $x \to \pm\infty$. Tada kažemo da f ima beskonačan limes u beskonačnosti.



Slika 4.5: $f(x) = x/(x-2)$.

Definicija 4.7 *(a)* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *ako za svaki* $M > 0$ *postoji* $K > 0$ *takav da*

$$x > K \quad \Rightarrow \quad f(x) > M. \tag{4.89}$$

(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ *ako za svaki* $M > 0$ *postoji* $K > 0$ *takav da*

$$x < -K \quad \Rightarrow \quad f(x) > M. \tag{4.90}$$

(c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *ako za svaki* $M > 0$ *postoji* $K > 0$ *takav da*

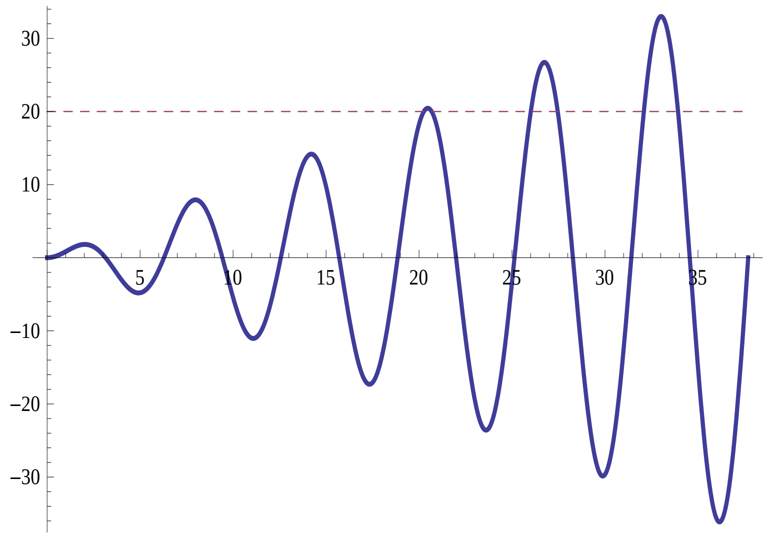
$$x > K \quad \Rightarrow \quad f(x) < -M. \tag{4.91}$$

(d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *ako za svaki* $M > 0$ *postoji* $K > 0$ *takav da*

$$x < -K \quad \Rightarrow \quad f(x) < -M. \tag{4.92}$$

Primjer 4.14 *Pokažite da je* $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$*.*

Za odabrani $M > 0$ neka je $K = M^2$. Tada za $x > K$ imamo $\sqrt{x} > \sqrt{K} = M$, što implicira $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$. ∎



Slika 4.6: $f(x) = x\sin(x)$, $M = 20$.

Primijetimo da u gore navedenim definicijama nisu iscrpljene sve mogućnosti za različite vrste limesa. Na primjer, ako $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ne postoji, to ne znači da je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$. Limes može ne postojati iz drugih razloga, kako je ilustrirano u sljedećem primjeru.

Primjer 4.15 *Neka je $f(x) = x\sin(x)$. Dokažite da $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nije beskonačan i da ne postoji.*

Promotrimo niz $x_n = \pi/2 + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Vrijednost funkcije u ovim točkama je

$$f(x_n) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi. \tag{4.93}$$

Očigledno je da $f(x_n)$ raste bez ograničenja kada $n \to \infty$, stoga ne postoji realan broj L takav da je $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. S druge strane, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ne može biti $\pm\infty$ jer u točkama $x'_n = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, funkcija ima vrijednost

$$f(x'_n) = 2n\pi\sin(2n\pi) = 0. \tag{4.94}$$

Dakle, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nije beskonačan i ne postoji. Graf funkcije f prikazan je na slici 4.6.

Poglavlje 5

Neprekidne funkcije

Neprekidnost funkcije je vrlo važan koncept koji ima središnju ulogu u ostatku ovog teksta. Intuitivno, neprekidna funkcija je ona funkcija kod koje male promjene varijable x rezultiraju malim promjenama vrijednosti funkcije $f(x)$. Drugim riječima, ako se x promijeni za mali iznos Δx, tada se vrijednost funkcije promijeni za mali iznos $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$. U tom slučaju kažemo da varijabla $y = f(x)$ zavisi na neprekidan ili kontinuiran način o varijabli x. Prvo ćemo definirati neprekidnost funkcije u točki, a zatim ćemo taj pojam proširiti na neprekidnost funkcije na intervalu. Sljedeća definicija neprekidnosti je tzv. Weierstrassova ili $\epsilon - \delta$ definicija neprekidnosti funkcije.

Definicija 5.1 *Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x_0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da*

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Prema ovoj definiciji, f je neprekidna u točki x_0 ako je $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Drugim riječima, funkcija f je neprekidna u x_0 ako $f(x)$ može biti po volji blizu $f(x_0)$ kada je x dovoljno blizu x_0. Definicija 5.1 podrazumijeva da je

(i) f definirana na nekoj okolini točke x_0,

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ postoji,

(iii) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ i $f(x_0)$ su jednaki.

Ako bilo koji od ova tri uvjeta nije ispunjen, kažemo da f ima prekid u točki x_0.

Definicija 5.2 *Ako je f neprekidna u svakoj točki otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$, tada kažemo da je f neprekidna na I.*

5.1 Vrste prekida funkcije

Postoji nekoliko načina na koji funkcija može imati prekid u točki.

Uklonjivi prekid
Ako $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postoji ali $f(x_0)$ nije definirano ili $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, tada kažemo da f ima uklonjivi prekid u $x = x_0$. Ovo je blaga vrsta prekida jer se može ukloniti na način da se $f(x_0)$ definira (ili redefinira) tako da $f(x_0)$ bude jednako $L = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Funkcija

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ L, & x = x_0 \end{cases} \tag{5.2}$$

tada ispunjava sva tri uvjeta (i)-(iii), i sukladno tome je neprekidna u $x = x_0$.

Primjer 5.1 *Neka je*

$$f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2). \tag{5.3}$$

Proširite funkciju f tako da bude neprekidna u $x_0 = 2$.

Funkcija f ima prekid u $x_0 = 2$ jer $f(2)$ nije definirano. Medjutim,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4, \tag{5.4}$$

stoga f ima uklonjivi prekid u $x_0 = 2$. Ako definiramo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 0, \\ 4, & x = 2, \end{cases} \tag{5.5}$$

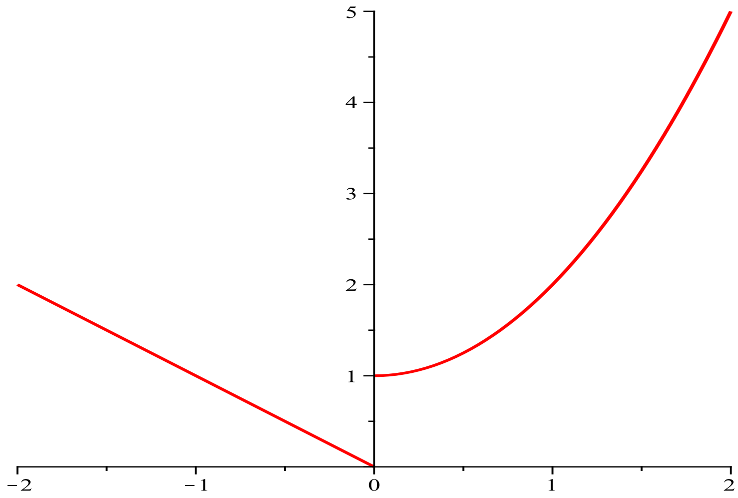
tada je proširena funkcija $\tilde{f}$ neprekidna u $x = 2$ jer je

$$\lim_{x\to 2} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 4 = \tilde{f}(2). \tag{5.6}$$

Primijetimo da je time dobivena neprekidna funkcija $\tilde{f}(x) = x + 2$. ■

Prekid prve vrste
Kažemo da f ima prekid prve vrste u točki x_0 ako jednostrani limesi $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ i $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ postoje ali nisu jednaki. U tom slučaju vrijednost funkcije ima "skok" u točki x_0 čija je apsolutna vrijednost

$$\left| \lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x) \right|. \tag{5.7}$$



Slika 5.1: Graf funkcije (5.8).

Promotrimo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2 + 1, & x > 0, \end{cases} \tag{5.8}$$

prikazanu na slici 5.1. Funkcija ima prekid prve vrste u $x_0 = 0$ jer je

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1, \tag{5.9}$$

pa jednostrani limesi nisu jednaki. Skok funkcije u točki $x_0 = 0$ iznosi

$$\left| \lim_{x \to 0^+} f(x) - \lim_{x \to 0^-} f(x) \right| = |1 - 0| = 1. \tag{5.10}$$

Prekid druge vrste

Neke funkcije imaju prekide koji nisu ni uklonjivi ni prve vrste. Ova vrsta prekida je u izvjesnom smislu teža od prethodnih. Kažemo da funkcija f ima prekid druge vrste u točki x_0 ako barem jedan od limesa $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ili $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ne postoji. Na primjer, funkcija $f(x) = 1/x$ ima prekid druge vrste u $x_0 = 0$ jer je

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty. \tag{5.11}$$

Očigledno, ova funkcija nije ograničena u okolini točke $x_0 = 0$.

S druge strane, funkcija $f(x) = \sin(1/x)$ je ograničena u okolini nule jer je $|f(x)| \leq 1$ za svaki $x \in K_\delta^*(0)$. Ipak, funkcija f ima prekid druge vrste u $x_0 = 0$ jer, kako je pokazano u primjeru 4.7, $\lim_{x\to 0} f(x)$ ne postoji. Zbog oscilatorne prirode sinusa, te zbog činjenice da $1/x$ neograničeno raste kada $x \to 0^+$, funkcija $f(x) = \sin(1/x)$ sve brže oscilira u intervalu $[-1, 1]$ kada $x \to 0^+$ pa ne može konvergirati prema nekom realnom broju $L \in [-1, 1]$.

Neprekidnost funkcije može se definirati pomoću nizova na sličan način kako je napravljeno za limes funkcije u teoremu 4.4.

Teorem 5.1 *Funkcija f je neprekidna u točki $x = x_0$ ako i samo ako $f(x_n) \to f(x_0)$ za svaki niz $\{x_n\}$ u domeni funkcije f takav da $x_n \to a$.*

Primjer 5.2 *Zadana je Dirichletova funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{5.12}$$

Pokažite da f ima prekid druge vrste u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

Odaberimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Neka je $\{x_n\}$ niz racionalnih brojeva i neka je$\{x'_n\}$ niz iracionalnih brojeva koji konvergiraju prema a takvi da je $x_n, x'_n \neq a$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $f(x_n) = 0$ i $f(x'_n) = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ i $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$. Prema teoremu 4.4 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ne postoji, stoga funkcija ima prekid druge vrste u točki x_0. Kako je x_0 odabran prozvoljno, funkcija ima prekid u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$. ■

5.2 Jednostrana neprekidnost i neprekidnost na zatvorenom intervalu

Vidjeli smo da je funkcija f neprekidna u x_0 ako $f(x)$ može biti po volji blizu $f(x_0)$ ako je x dovoljno bizu x_0. Ovdje je nebitno da li je x veći ili manji od x_0. Međutim, ako neprekidnost promatramo samo za $x < x_0$ ili $x > x_0$, tada dolazimo do pojma jednostrane neprekidsnoti.

Definicija 5.3 *Kažemo da je funkcija f neprekidna zdesna u točki x_0 ako je*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0). \tag{5.13}$$

Slično, f je neprekidna slijeva u x_0 ako je $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

U definiciji 5.3 se podrazumijeva da je kod neprekidnosti zdesna funkcija definirana na intervalu $[x_0, x_0 + \delta)$, a kod neprekidnosti slijeva na intervalu $(x_0 - \delta, x_0]$, za neki $\delta > 0$.

Funkcija može imati prekid u točki x_0 iako je neprekidna slijeva ili zdesna. Primijetimo da teorem 4.5 implicira da je funkcija f neprekidna u x_0 ako i samo ako je f neprekidna slijeva i zdesna u x_0. Jednostrana neprekidnost nam omogućava da definiramo neprekidnost funkcije na zatvorenom intervalu.

Definicija 5.4 *Kažemo da je funkcija neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ ako je neprekidna u svakoj točki otvorenog intervala (a, b), neprekidna zdesna u točki a i neprekidna slijeva u točki b.*

Primjer 5.3 *Ispitajte neprekidnost funkcije $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ na intervalu $[-1, 1]$.*

Ako je $x_0 \in (-1, 1)$, tada je f definirana s obje strane točke x_0 i

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \sqrt{1-x_0^2} = f(x_0). \tag{5.14}$$

Dakle, f je neprekidna u svakoj točki $x_0 \in (-1, 1)$. Ako je $x_0 = 1$, tada ne možemo govoriti o neprekidnosti funkcije u $x_0 = 1$ jer f nije definirana za $x > 1$. Medjutim,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(1), \tag{5.15}$$

pa je funkcija neprekidna slijeva u $x_0 = 1$. Slično, f je neprekidna zdesna u $x_0 = -1$. Graf funkcije f prikazan je na slici 5.2. Za ovu funkciju kažemo da je neprekidna na zatvorenom intervalu $[-1, 1]$. ■

5.3 Svojstva neprekidnih funkcija

Pojedine kombinacije neprekidnih funkcija su opet neprekidne. Sljedeći rezultat je izravno slijedi iz Fundamentalnog teorema o limesima 4.2 kazuje da je neprekidnost očuvana kada na funkcijama vršimo algebarske operacije.

Teorem 5.2 *Neka su funkcija f i g neprekidne u točki x_0. Tada su funkcije $f + g$ i $f \cdot g$ neprekidne u x_0. Funkcija f/g je neprekidna u x_0 ako je $g(x_0) \neq 0$.*

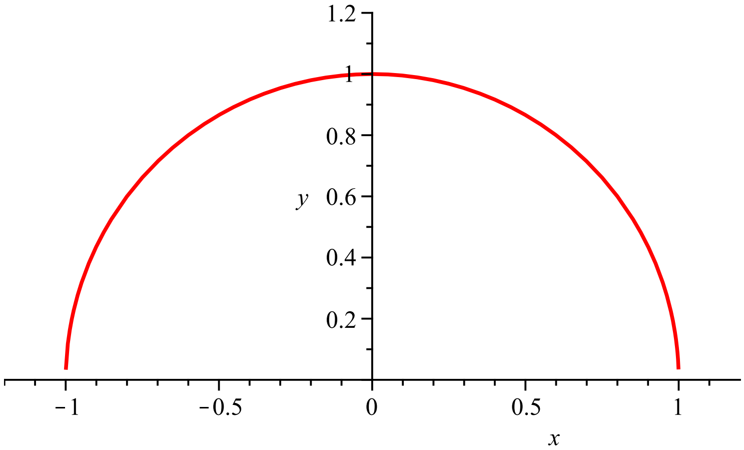
Dokaz trivijalno slijedi iz fundamentalnog teorema o limesima 4.2. Za ilustraciju dokažimo prvu tvrdnju. Funkcije f i g su neprekidne u x_0, stoga je

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0). \tag{5.16}$$

Prema teoremu 4.2 imamo

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0), \tag{5.17}$$

što implicira da je funkcija $f + g$ neprekidna u x_0.



Slika 5.2: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Teorem 5.3 *Neka je* $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ *i neka je* g *neprekidna u točki* y_0. *Tada je*

$$\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = g(y_0). \tag{5.18}$$

Dokaz. Neka je zadan $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti funkcije u g u točki y_0 postoji $\eta > 0$ takav da

$$|y - y_0| < \eta \quad \Rightarrow \quad |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon. \tag{5.19}$$

Za $\eta > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - y_0| < \eta \tag{5.20}$$

jer je $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Iz relacija (5.19) i (5.20) zaključujemo da

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon. \tag{5.21}$$

Dakle, $\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = g(y_0)$. ■

Ovaj rezultat možemo zapisati u obliku

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) \tag{5.22}$$

što znači da se limes i neprekidna funkcija mogu zamijeniti.

Korolar 5.1 (Teorem o neprekidnosti kompozicije funkcija) *Neka je* f *neprekidna u točki* x_0, *i neka je* g *neprekidna u točki* $f(x_0)$. *Tada je kompozicija funkcija* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *neprekidna u točki* x_0.

Dokaz. Zbog neprekidnosti funkcije f imamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, pa je prema prethodnom teoremu

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = g(f(x_0)). \tag{5.23}$$

Dakle, funkcija $g \circ f$ je neprekidna u x_0. ■

Teorem 5.4 *Ako je funkcija* f *neprekidna u točki* x_0, *tada postoji* $\delta > 0$ *takav da je* f *ograničena na intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Drugim riječima, ako je f neprekidna u x_0, tada postoji $\delta > 0$ takav da je

$$|f(x)| \leq M \quad \text{za svaki} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \tag{5.24}$$

za neki $M > 0$.

Dokaz. Ako je f neprekidna u x_0, tada za $\varepsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < 1. \tag{5.25}$$

Iz nejednakosti $\big|\,|f(x)| - |f(x_0)|\,\big| \leq |f(x) - f(x_0)|$ slijedi

$$|f(x)| < 1 + |f(x_0)| \quad \text{za svaki} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \tag{5.26}$$

stoga je f ograničena na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. ■

Sljedećih nekoliko teorema daju važna svojstva neprekidnih funkcija na zatvorenom intervalu.

Teorem 5.5 (Ograničenost neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu) *Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, tada je f ograničena na $[a, b]$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno da f nije ograničena na $[a, b]$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo naći $x_n \in [a, b]$ takav da je $f(x_n) \geq n$. Niz $\{x_n\}$ je ograničen jer je sadržan u $[a, b]$ pa prema Bolzano–Weierstrassovom teoremu ima konvergentni podniz $\{x_{n_k}\}$ i $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ za neki $x_0 \in [a, b]$. Zbog pretpostavljene neprekidnosti funkcije f na intervalu $[a, b]$ slijedi da je $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Dakle, niz $\{f(x_{n_k})\}$ je konverentan pa je stoga ograničen što je u suprotnosti s činjenicom da je $f(x_{n_k}) \geq n_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Zaključujemo da f mora biti ograničena na $[a, b]$. ■

Promotrimo ograničenu funkciju f na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ i definirajmo

$$m = \inf_{x\in I} f(x) \quad \text{i} \quad M = \sup_{x\in I} f(x). \tag{5.27}$$

Prirodno se postavlja pitanje da li postoje točke $x_1, x_2 \in I$ takve da je

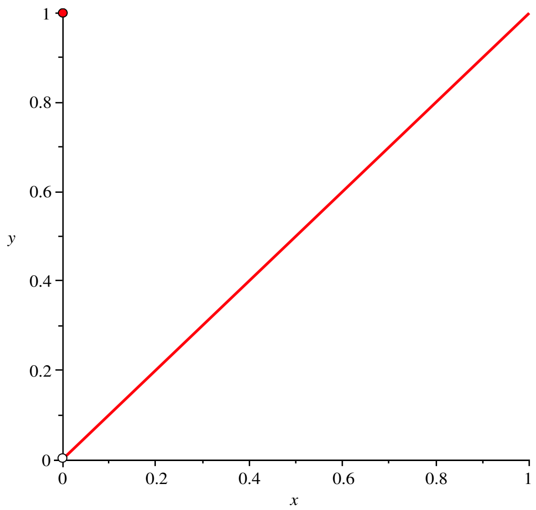
$$f(x_1) = m \quad \text{i} \quad f(x_2) = M. \tag{5.28}$$

Razmotrimo ovaj problem na sljedećim primjerima.

Primjer 5.4 *Promotrimo funkciju $f(x) = x^2$ na intervalu $(0, 2)$. Očigledno je*

$$m = \inf_{x\in(0,2)} x^2 = 0 \quad i \quad M = \sup_{x\in(0,2)} x^2 = 4, \tag{5.29}$$

ali ne postoje točke $x_1, x_2 \in (0, 2)$ takve da je $f(x_1) = 0$ i $f(x_2) = 4$. Medjutim, ako f promatramo na zatvorenom intervalu $[0, 2]$, tada je $f(0) = 0$ i $f(2) = 4$.



Slika 5.3: Graf funcije (5.30).

Primjer 5.5 *Neka je*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ x, & x \in (0,1], \end{cases} \tag{5.30}$$

kao na slici 5.3. Funkcija je ograničena na $[0,1]$ *i*

$$m = \inf_{x\in[0,1]} f(x) = 0, \quad M = \sup_{x\in[0,1]} f(x) = 1. \tag{5.31}$$

U točkama $x = 0, 1$ *funkcija doseže maksimum,* $f(0) = f(1) = 1$*, ali ne postoji točka* $x \in [0,1]$ *takva da je* $f(x) = 0$*. Primijetimo da funkcija ima prekid zdesna u točki* $x = 0$ *koji se može ukloniti ako definiramo* $f(0) = 0$*. U tom slučaju funkcija doseže minimum u* $x = 0$*.*

Ovi primjeri upućuju na zaključak da funkcija f doseže ekstremne vrijednosti ako je f neprekidna na zatvorenom intervalu.

Teorem 5.6 (Teorem o ekstremnim vrijednostima) *Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, tada postoje $x_1, x_2 \in [a, b]$ takvi da je*

$$f(x_1) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad i \quad f(x_2) = \inf_{x\in[a,b]} f(x). \tag{5.32}$$

Dokaz. Definirajmo $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ i $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Pretpostavimo da f ne doseže M, odnosno da je $f(x) < M$ za svaki $x \in [a, b]$. Definirajmo funkciju

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} > 0, \quad x \in [a, b]. \tag{5.33}$$

Funkcija g je neprekidna na $[a, b]$ pa je prema teoremu 5.5 ograničena na $[a, b]$. Stoga postoji $k > 0$ takav da je $g(x) \leq k$ za svaki $x \in [a, b]$. Ovo implicira $M - f(x) \geq 1/k > 0$, odnosno $f(x) \leq M - 1/k$ za svaki $x \in [a, b]$ što je u kontradikciji s činjenicom da je $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Zaključujemo da postoji $x_1 \in [a, b]$ takav da je $f(x_1) = M$. Pretpostavimo sada da je $f(x) > m$ za svaki $x \in [a, b]$. Tada je funkcija

$$h(x) = \frac{1}{f(x) - m}, \quad x \in [a, b], \tag{5.34}$$

ograničena na $[a, b]$ pa postoji $l > 0$ takav da je $h(x) \leq l$ za svaki $x \in [a, b]$. Odavde slijedi da je $f(x) \leq m + 1/l$ za svaki $x \in [a, b]$ što je u suprotnosti s činjenicom da je $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. Ovo povlači da postoji $x_2 \in [a, b]$ takav da je $f(x_2) = m$. ■

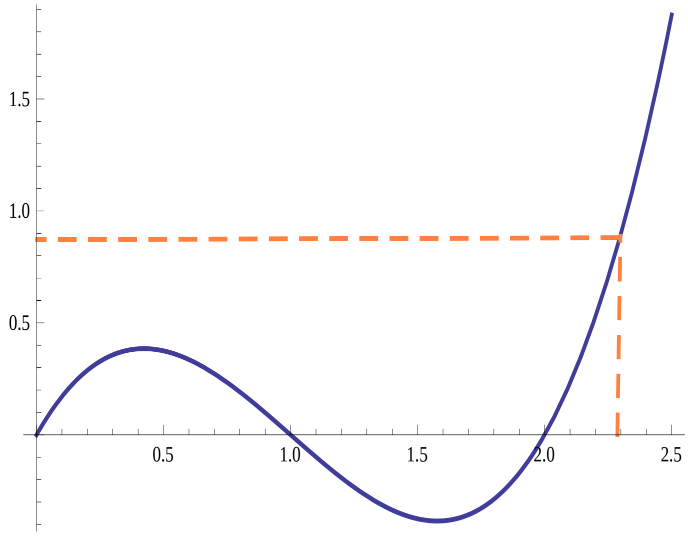
Teorem 5.7 (Teorem o međuvrijednostima) *Neka je f neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i neka su $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ i $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Tada za svaki $k \in [m, M]$ postoji $x_0 \in [a, b]$ takav da je $f(x_0) = k$. (vidi sliku 5.4).*

Primijetimo da teorem o međuvrijednostima povlači da se interval $[a, b]$ preslikava na $[m, M]$, odnosno $f([a, b]) = [m, M]$.

Dokaz. Prema teoremu 5.6 postoje x', $x'' \in [a, b]$ takvi da je $f(x') = m$ i $f(x'') = M$. Neka je $k \in [m, M]$. Ako je $k = m$ uzmemo $x_0 = x'$, a u slučaju da je $k = M$ uzmemo $x_0 = x''$ i dokaz je gotov. Pretpostavimo stoga da je $m < k < M$. Tada je nužno $x' \neq x''$ pa možemo definirati interval $[x_1', x_1'']$ gdje su $x_1' = \min\{x', x''\}$ i $x_1'' = \max\{x', x''\}$. Tada je k strogo između $f(x_1')$ i $f(x_1'')$. Promotrimo polovište $(x_1' + x_1'')/2$. Ako je

$$f\left(\frac{x_1' + x_1''}{2}\right) = k, \tag{5.35}$$

tada stavimo $x_0 = (x_1' + x_1'')/2$ i dokaz je gotov. U suprotnom označimo sa $[x_2', x_2'']$ onaj od dvaju segmenata $[x_1', (x_1' + x_1'')/2]$, $[(x_1' + x_1'')/2, x_1'']$ za kojeg vrijedi da je k strogo između



Slika 5.4: Neprekidna funkcija na $[a,b]$ prima sve vrijednosti izmedju $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ i $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

$f(x_2')$ i $f(x_2'')$. Sada promotrimo polovište $(x_2' + x_2'')/2$ i nastavimo postupak. U n-tom koraku ćemo imati

$$f\left(\frac{x_n' + x_n''}{2}\right) = k \tag{5.36}$$

i dokaz je gotov, ili

$$f\left(\frac{x_n' + x_n''}{2}\right) \neq k \tag{5.37}$$

pa sa $[n_{n+1}', x_{n+1}'']$ označimo onaj od dvaju segmenata $[x_n', (x_n' + x_n'')/2]$, $[(x_n' + x_n'')/2, x_n'']$ za kojeg vrijedi da je k strogo između $f(x_{n+1}')$ i $f(x_{n+1}'')$. U slučaju da se postupak beskonačno ponavlja dolazimo do silaznog niza segmenata $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$ gdje je $I_n = [x_n', x_n'']$, $n \in \mathbb{N}$. Iz konstrukcije slijedi da je

$$x_n'' - x_n' = \frac{x_1'' - x_1'}{2^{n-1}} \tag{5.38}$$

i k je strogo između $f(x_n')$ i $f(x_n'')$. Prema Cantorovom teoremu 2.5 postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$. Očigledno je $I_n \subseteq [a,b]$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa je $x_0 \in [a,b]$. Tvrdimo da je $f(x_0) = k$. Ako je $f(x_0) < k$, tada zbog neprekidnosti funkcije f postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(x) < k \quad \text{za svaki} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{5.39}$$

Međutim, kako je zbog (5.38) $\lim_{n\to\infty}(x_n'' - x_n') = 0$, to je $[x_n', x_n''] \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ za neki $n \in \mathbb{N}$. S druge strane, k je strogo između $f(x_n')$ i $f(x_n'')$ što je u suprotnosti s (5.39). Dakle, ne može biti $f(x_0) < k$. Slično se pokazuje da ne može biti $f(x_0) > k$ pa zaključujemo da je $f(x_0) = k$. ■

Na kraju dokažimo da je inverzna funkcija neprekidne funkcije opet neprekidna funkcija.

Teorem 5.8 (Teorem o neprekidnosti inverzne funkcije) *Ako je f injekcija i neprekidna funkcija na $[a, b]$, tada je f^{-1} neprekidna na $[m, M]$ gdje su*

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad i \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x). \tag{5.40}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je f injekcija i neprekidna funkcija na $[a, b]$. Prema teoremu 5.6 postoje $x_1, x_2 \in [a, b]$ takvi da je $f(x_1) = m$ i $f(x_2) = M$, pa je slika funkcije zatvoren interval $[m, M]$. Ovo implicira da je inverzna funkcija definirana na intervalu $[m, M]$, dakle $f^{-1}\colon [m, M] \to [a, b]$. Neka je $y_0 \in [m, M]$, i neka je $\{y_n\} \subseteq [m, M]$ niz koji konvergira prema y_0, $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Želimo pokazati da je $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)$.

Definirajmo $x_n = f^{-1}(y_n)$ i $x_0 = f^{-1}(y_0)$ i pretpostavimo da $\lim_{n\to 0} x_n \neq x_0$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $|x_n - x_0| \geq \varepsilon$ za beskonačno mnogo članova niza $\{x_n\}$. Odaberimo podniz $\{x'_n\} \subseteq \{x_n\}$ takav da je

$$|x'_n - x_0| \geq \varepsilon \quad \text{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.41}$$

Niz $\{x'_n\}$ je ograničen jer je $x'_n \in [a, b]$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa prema Bolzano-Weierstrasso–vom teoremu $\{x'_n\}$ sadrži konvergentan podniz $\{x^*_n\}$. Neka je $\lim_{n\to\infty} x^*_n = c$ za neki $c \in [a, b]$ gdje je $c \neq x_0$ zbog nejednakosti (5.41). Funkcija f je neprekidna pa je $\lim_{n\to\infty} f(x^*_n) = f(c)$. Medjutim, $\{f(x^*_n)\}$ je podniz niza $\{y_n\} = \{f(x_n)\}$ koji konvergira prema $y_0 = f(x_0)$, stoga je $\lim_{n\to\infty} f(x^*_n) = f(x_0)$. Zbog jedinstvenosti limesa imamo $f(x_0) = f(c)$. Ovo implicira $x_0 = c$ jer je f injekcija, što je u kontradikciji sa $x_0 \neq c$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, odnosno $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)$ pa zaključujemo da je f^{-1} neprekidna u y_0. ■

5.4 Neprekidnost elementarnih funkcija

Osnovnim elementarnim funkcijama smatramo

(1) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$ (cjelobrojna potencija),

(2) $f(x) = a^x$, $a > 0$ (opća ekponencijalna funkcija),

(3) $f(x) = \sin(x)$ (sinus funkcija).

Ostale elementarne funkcije dobivamo pomoću konačnog broja algebarskih operacija s ovim funkcijama, te njihovom kompozicijom ili inverzijom. U ovom odjeljku ćemo dokazati da su gore navedene funkcije neprekidne na svom prirodnom području definicije što će za posljedicu imati neprekidnost ostalih elementarnih funkcija.

Potencija

Znamo da je funkcija $y = x$ neprekidna na $\mathbb{R}$. Iz teorema 5.2 slijedi da je svaka potencija $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, također neprekidna na $\mathbb{R}$ jer je $y = x^n$ umnožak neprekidnih funkcija. Nadalje, prema istom teoremu funkcija $y = x^{-n} = 1/x^n$ je neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ što povlači da je $y = x^n$ neprekidna na prirodnom području definicije za svaki $n \in \mathbb{Z}$.

Svaki polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{5.42}$$

je zbroj neprekidnih funkcija pa je $p(x)$ neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Prema teoremu 5.2 svaka racionalna funkcija $R(x) = p(x)/q(x)$, gdje su $p(x)$ i $q(x)$ polinomi, je neprekidna na $\mathbb{R}$ osim u nultočkama polinoma $q(x)$. Ako $p(x)$ i $q(x)$ imaju zajedničku nultočku x_0 istog reda, tada $\lim_{x \to x_0} R(x)$ postoji pa $R(x)$ ima uklonjivi prekid u x_0.

Opća ekponencijalna funkcija

Neka je $a > 0$. Opća eksponencijalna funkcija baze a je funkcija

$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.43}$$

Podsjetimo se da ova funkcija ima sljedeća svojstva:

(a) $f(x) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$,

(b) f je strogo rastuća za $a > 1$,

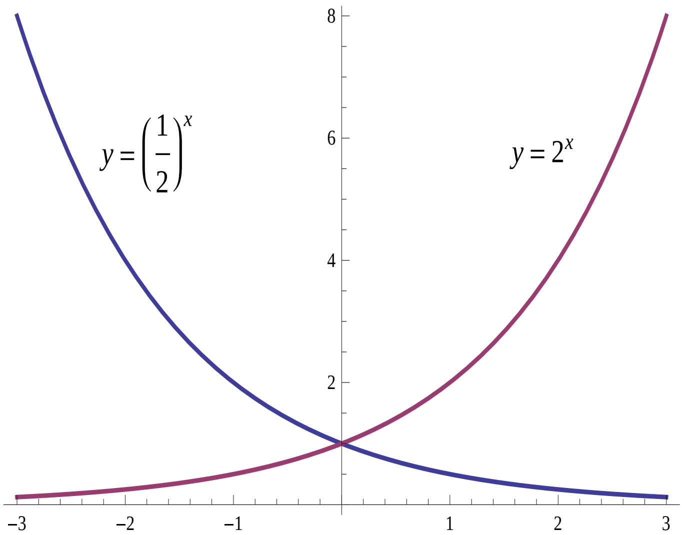
(c) f je strogo padajuća za $0 < a < 1$,

(d) $a^x a^y = a^{x+y}$ i $(a^x)^y = a^{xy}$ za svaki $x, y \in \mathbb{R}$.

Graf eksponencijalne funkcije za $a > 1$ i $0 < a < 1$ prikazan je na slici 6.4.

Teorem 5.9 *Eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$, $a > 0$, je neprekidna na $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Ako je $a =$, tada je $f(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa je tvrdnja u ovom slučaju očigledna. Pretpostavimo da je $a > 1$. U prvom koraku ćemo pokazati da je ekponencijalna funkcija neprekidna u nuli, odnosno $\lim_{x \to 0} a^x = a^0 = 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo naći $\delta > 0$ takav da



Slika 5.5: $y = 2^x$ je rastuća eksponencijalna funkcija, a $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ je padajuća eksponencijalna funkcija.

$|x - 0| < \delta$ povlači $|a^x - 1| < \varepsilon$. U primjeru 2.6 pokazali smo da je niz $\{a^{1/n}\}$ konvergentan i $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = a^0 = 1$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a^{1/n} - 1| < \varepsilon. \tag{5.44}$$

Odaberimo $n > n_0$ i pokažimo da $|x| < 1/n$ povlači $|a^x - 1| < \varepsilon$. Ako je $0 < x < 1/n$, tada zbog monotonosti ekpsponencijalne funkcije imamo $a^0 < a^x < a^{1/n}$ pa je

$$0 < a^x - 1 < a^{1/n} - 1 < \varepsilon. \tag{5.45}$$

Ako je $-1/n < x < 0$, tada je $1/n > -x > 0$ što implicira $a^{1/n} > a^{-x} > 1$ odnosno

$$0 < a^{-x} - 1 < a^{1/n} - 1 < \varepsilon. \tag{5.46}$$

Množenjem relacije (5.46) s $a^x > 0$ dobivamo

$$0 < 1 - a^x < \varepsilon\, a^x < \varepsilon \tag{5.47}$$

jer je $a^x < 1$ (obzirom da je $x < 0$). Sada iz relacija (5.45) i (5.47) slijedi da je $-\varepsilon < a^x - 1 < \varepsilon$ za svaki $|x| < 1/n$. Ako stavimo $\delta = 1/n$, onda smo dokazali da

$$|x - 0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |a^x - 1| < \varepsilon \tag{5.48}$$

odnosno da je $\lim_{x\to 0} a^x = 1$ za $a > 1$. Neka je sada $x_0 \neq 0$. Tada je

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{h\to 0} a^{x_0+h} = \lim_{h\to 0} a^{x_0} a^h = a^{x_0} \lim_{h\to 0} a^h = a^{x_0}. \tag{5.49}$$

Dakle, funkcija $f(x) = a^x$, $a > 1$, je neprekidna u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

Preptpostavimo sada da je $0 < a < 1$ i definirajmo $b = 1/a$. Tada je

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} b^x} = \frac{1}{b^{x_0}} = a^{x_0}, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{5.50}$$

Time smo pokazali da je funkcija $f(x) = a^x$ neprekidna na $\mathbb{R}$ za svaki $a > 0$. ■

Sinus funkcija

Pokažimo da je funkcija $\sin(x)$ neprekidna na $\mathbb{R}$. Za dokaz ove tvrdnje služimo se trigonometrijskim identitetom

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{5.51}$$

i nejednakostima

$$|\sin(x)| \leq |x|, \quad |\cos(x)| \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.52}$$

Odaberimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada relacije (5.51) i (5.52) povlače

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| = 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x - x_0|. \tag{5.53}$$

Odaberimo $\varepsilon > 0$. Tada za $\delta = \varepsilon$ iz nejednakosti (5.53) slijedi

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sin(x) - \sin(x_0)| < \varepsilon. \tag{5.54}$$

Dakle, $\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(x_0)$ za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ostale elementarne funkcije

Prema teoremima 5.1 i 5.2 sve algebarske kombinacije neprekidnih funkcija i njihove kompozicije su neprekidne funkcije na svojim prirodnim domenama. To nam daje široku klasu neprekidnih funkcija. Na primjer, funkcija

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{5.55}$$

jer neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$ jer je kompozicija dvaju neprekidnih funkcija, $f(x) = x + \pi/2$ i $g(x) = \sin(x)$. Nadalje, ovo povlači da su funkcije

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{i} \quad \mathrm{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \tag{5.56}$$

također neprekidne svugdje osim u točkama gdje nazivnici isčezavaju.

Neprekidnost eksponencijalne funkcije implicira da su hiperbolni sinus i kosinus

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{5.57}$$

te hiperbolni tanges i kotanges

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}, \quad \mathrm{cth}(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} \tag{5.58}$$

takodjer neprekidne funkcije na svojim domenama.

Prema teoremu 5.8 inverzne funkcije navedenih elementarnih funkcija su neprekide. Stoga su logaritamska funkcija, arkus funkcije i area funkcije takodjer neprekidne.

Poglavlje 6

Derivacija funkcije

Pojam derivacije i diferencijalnog računa datira iz 17. stoljeća. Difencijalni račun su nezavisno jedan od drugog otkrili veliki engleski matematičar Isaac Newton izmedju 1655. i 1666. godine i njemački matematičar Gottfried W. Leibniz izmedju 1673. i 1676. godine. Iako je Newton prvi otkrio diferencijalni račun, Leibniz je prvi objavio rezultate svojih istraživanja u članku iz 1684. godine.

U ovom poglavlju ćemo proučavati derivaciju funkcije i svojstva diferencijabilnih funkcija. Derivacija je usko vezana uz pojam brzine promjene funkcije, pa diferencijalni račun ima primjenu svugdje gdje se mjeri promjena neke fizikalne veličine.

Definicija 6.1 *Derivacija funkcije f u točki x_0 je*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}, \tag{6.1}$$

ako limes postoji. Kada limes postoji kažemo da je f diferencijabilna (ili derivabilna) u točki x_0.

Za derivaciju koristimo i oznaku $\frac{df}{dx}$. Kada želimo naglasiti da se derivacija uzima u točki x_0 tada pišemo

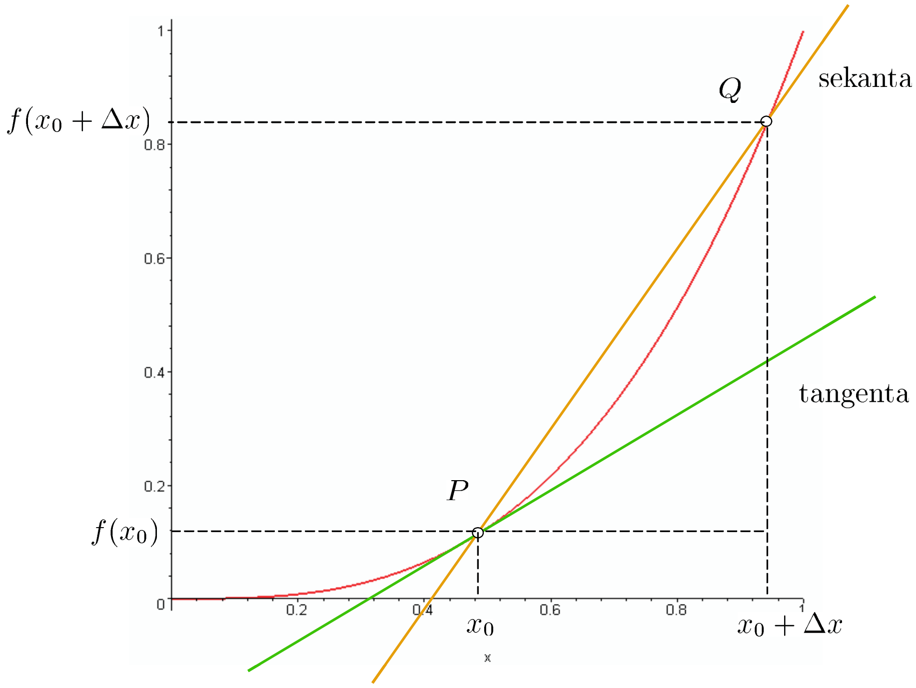
$$\frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{ili} \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}. \tag{6.2}$$

Uvedimo varijablu $x = x_0 + h$. Tada $x \to x_0$ kada $h \to 0$, stoga derivaciju možemo zapisati u obliku

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{6.3}$$

Derivacija funkcije ima sljedeće geometrijsko značenje. Neka je C krivulja zadana jednadžbom $y = f(x)$. Kvocijent

$$k(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{6.4}$$



Slika 6.1: Sekanta i tangenta na krivulju $y = f(x)$.

je koeficijent smjera sekante na krivulju C kroz točke $P = (x_0, f(x_0))$ i $Q = (x, f(x))$. Kada $x \to x_0$ tada se točka Q približava točki P, pa u limesu sekanta prelazi u tangentu na krivulju C u točki P (vidi sliku 6.1). Dakle, u limesu kada $x \to x_0$ koeficijent smjera sekante prelazi u koeficijent smjera tangente. Prema tome, derivacija

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} k(x) \tag{6.5}$$

je koeficijent smjera tangente na krivulju $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$. Jednadžba tangente je dana sa

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{6.6}$$

Pravac koji je okomit na tangentu (6.6) naziva se normala na krivulju $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$. Koeficijent smjera normale jednak je $-1/f'(x_0)$ ako je $f'(x_0) \neq 0$, stoga jednadžba normale glasi

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{6.7}$$

Promotrimo još jednu interpretaciju derivacije funkcije. Pretpostavimo da se točka giba po pravcu prema jednadžbi $s = s(t)$ gdje je $s(t)$ prijedjeni put u trenutku t. U vremenskom intervalu $[t_0, t_0 + \Delta t]$ čestica je prošla put

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) \tag{6.8}$$

sa prosječnom brzinom

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}. \tag{6.9}$$

Ako prosječnu brzinu mjerimo u sve kraćim vremenskim intervalima, odnosno puštamo da $\Delta t \to 0$, tada očekujemo da $\bar{v}$ sve bolje aproksimira ono što nazivamo trenutna brzina čestice u trenutku t_0. Trenutnu brzinu definiramo kao

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}, \tag{6.10}$$

ako limes postoji. Drugim riječima, trenutna brzina je derivacija puta po vremenu,

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{6.11}$$

Općenito, ako je ovisnost fizikalne veličine f o nekoj drugoj veličini x dana u obliku funkcije $f(x)$, tada

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{6.12}$$

predstavlja trenutnu brzinu promjene veličine f u točki x.

Odredimo derivacije nekih elementarnih funkcija.

Primjer 6.1 *Neka je $f(x) = c$ konstantna funkcija. Tada je*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0. \tag{6.13}$$

Konstantna funkcija se ne mijenja pa je brzina njezine promjene jednaka nuli.

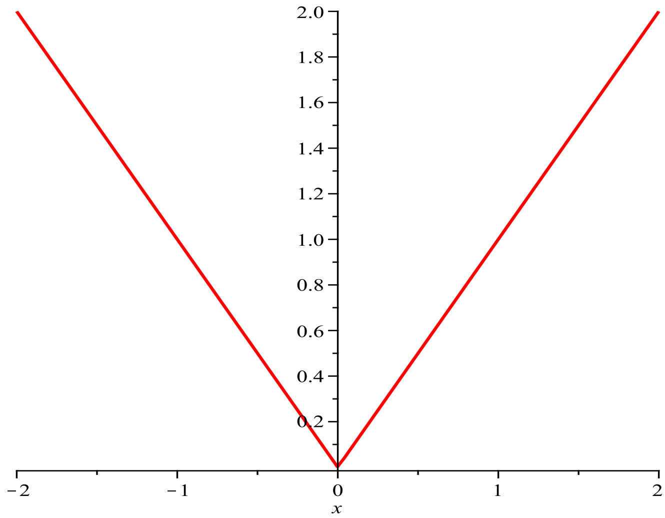
Primjer 6.2 *Neka je $f(x) = x^2$. Tada imamo*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Primjer 6.3 *Neka je $f(x) = \sqrt{x}$. U točki $x > 0$ imamo*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Derivacija funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ nije definirana za $x \leq 0$.



Slika 6.2: $f(x) = |x|$.

Sljedeći teorem pokazuje da je neprekidnost nužan uvjet za derivabilnost funcije.

Teorem 6.1 *Ako je funkcija f derivabilna u x_0, tada je f neprekidna u x_0.*

Dokaz. Ako je f derivabilna u x_0, tada imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Ovo implicira $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, dakle f je neprekidna u x_0. ■

Medjutim, neprekidnost nije dovoljan uvjet za derivabilnost u nekoj točki. Na primjer, $f(x) = |x|$ je neprekidna na $\mathbb{R}$ ali nema derivaciju u $x = 0$ jer

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} \tag{6.17}$$

ne postoji (lijevi i desni limesi nisu jednaki). Ova funkcija ima "šiljak" u točki $(0,0)$ (vidi sliku 6.2), pa u toj točki nije moguće definirati tangentu. Ovo je tipičan primjer koji ilustrira činjenicu da je za egistanciju tangente, pa time i derivacije, u točki $(x_0, f(x_0))$ potrebno da funkcija bude dovoljno "glatka" u okolini točke x_0.

6.1 Pravila deriviranja

Derivacije nekih funkcija mogu se direktno izračunati iz definicije 6.1. Medjutim, kod složenijih funkcija ovakav način računanja derivacije može biti prilično kompliciran. Stoga je prebno razviti pravila deriviranja koja nam omogućuju da računski postupak reduciramo na nekoliko jednostavnijih koraka.

Teorem 6.2 (Pravila deriviranja) *Neka su funkcije f i g derivabilne u točki x. Tada vrijedi*

(1) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$,

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$, *(Leibnizovo pravilo)*

(3)
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \textit{ako je} \quad g(x)\neq 0. \tag{6.18}$$

Dokaz. U ovom dokazu koristimo osnovna svovstva limesa iz teorema 4.2.
(1)

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x).\end{aligned} \tag{6.19}$$

(2)

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\end{aligned} \tag{6.20}$$

Primijetimo da je prema teoremu 6.1 funkcija g neprekidna u točki x pa vrijedi

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x). \tag{6.21}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x)-f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x)-f(x)\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad (6.22)
\end{aligned}$$

uz uvjet $g(x)\neq 0$. ■

Primjer 6.4 *Pokažimo da je derivacija potencije dana sa*

$$(x^n)' = n\,x^{n-1},\quad n\in\mathbb{Z}. \qquad (6.23)$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti indukcijom za $n\geq 0$, a zatim pokazati da isti rezultat vrijedi za $n<0$. Za $n=0$ jednadžba (6.23) očigledno vrijedi jer je

$$(x^0)' = (1)' = 0. \qquad (6.24)$$

Pretpostavimo da (6.23) vrijedi za svaki $k=0,1,\ldots,n$. Tada za $k=n+1$ pravilo za derivaciju umnoška daje

$$\begin{aligned}
(x^{n+1})' &= (x^n\,x)' = (x^n)'\,x + x^n\,(x)' \\
&= n\,x^{n-1}\,x + x^n\cdot 1 = (n+1)\,x^n. \qquad (6.25)
\end{aligned}$$

Prema aksiomu matematičke indukcije zaključujemo da (6.23) vrijedi za svaki $n\geq 0$.

Neka je sada $n<0$. Tada je $n=-m$, $m>0$, pa primjenom pravila za derivaciju kvocijenta dobivamo

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{(1)'\cdot x^m - 1\cdot(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{m\,x^{m-1}}{x^{2m}} = -m\,x^{-m-1} = n\,x^{n-1}. \qquad (6.26)$$

■

Primjer 6.5 *Odredite derivaciju funkcije*

$$f(x) = (x+x^2)(2x^3+1). \qquad (6.27)$$

Pravilo za derivaciju umnoška daje

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[(x+x^2)(2x^3+1)\right] &= (x+x^2)'\,(2x^3+1)+(x+x^2)\,(2x^3+1)' \\ &= (1+2x)(2x^3+1)+(x+x^2)(2\cdot 3x^2+0) \\ &= 10x^4+8x^3+2x+1. \end{aligned} \tag{6.28}$$

■

Primjer 6.6 *Odredite derivaciju funkcije*

$$g(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}. \tag{6.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) &= \frac{(\sqrt{x})'(\sqrt{x}+1)-\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)-\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}. \end{aligned} \tag{6.30}$$

■

6.2 Derivacije trigonometrijskih funkcija

Za deriviranje trigonometrijskih funkcija potreban nam je sljedeći preliminarni rezultat.

Propozicija 6.1

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}=1. \tag{6.31}$$

Dokaz. Promotrimo jediničnu kružnicu na slici 6.3 u koju su upisani kružni isječci $P_1(OAC)$ i $P_3(OBD)$, te trokut $P_2(OAD)$. Ako kut θ izrazimo u radijanima, tada su površine kružnih isječaka

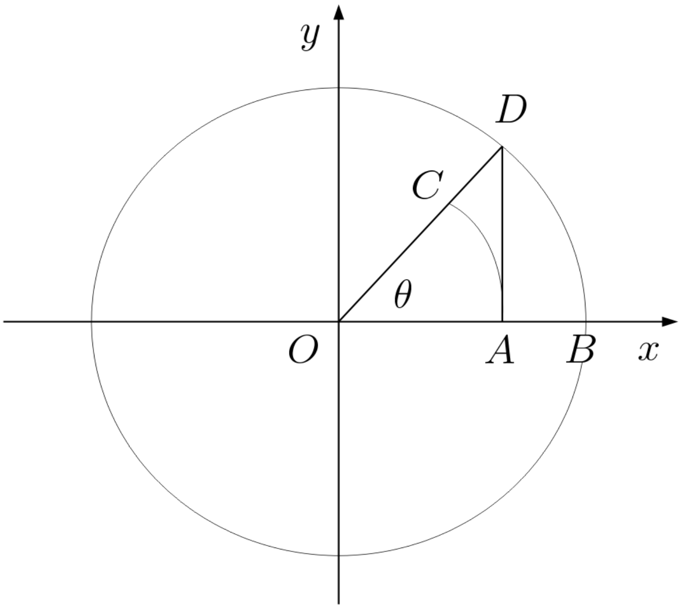
$$P_1=\frac{1}{2}\cos^2(\theta)\,\theta \quad \text{i} \quad P_3=\frac{1}{2}\theta \tag{6.32}$$

(radijus isječka P_1 je $r_1=\cos(\theta)$, a radijus isječka P_3 je $r_3=1$). Površina trokua P_2 je dana sa

$$P_2=\frac{1}{2}\cos(\theta)\sin(\theta). \tag{6.33}$$

Očigledno je $P_1\le P_2\le P_3$, iz čega slijedi

$$\frac{1}{2}\cos^2(\theta)\,\theta\le\frac{1}{2}\cos(\theta)\sin(\theta)\le\frac{1}{2}\theta. \tag{6.34}$$



Slika 6.3: Jedinična kružnica.

Dijeljenjem nejednakosti (6.34) sa $\cos(\theta)\theta > 0$ dobivamo

$$\cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq \frac{1}{\cos(\theta)}, \quad \theta > 0. \tag{6.35}$$

Funkcije u relaciji (6.35) su parne, pa gornje nejednakosti vrijede i za $\theta < 0$. Kako je $\cos(\theta)$ neprekidna funkcija u $\theta = 0$, imamo

$$\lim_{\theta \to 0} \cos(\theta) = 1, \quad \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos(\theta)} = 1. \tag{6.36}$$

Sada iz nejednakosti (6.35) i pravila o ukliještenoj funkciji 4.2 slijedi

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1. \tag{6.37}$$

■

Sljedeći rezultat koji nam je potreban je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \tag{6.38}$$

Racionalizacijom izraza dobivamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{x(\cos(x)+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{x}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1} \\
&= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1} = -1\cdot\frac{0}{0+1} = 0. \qquad (6.39)
\end{aligned}$$

Ovdje smo uzeli u obzir da je $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x = 1$ i $\lim_{x\to 0}\sin(x) = \sin(0) = 0$.

Sada možemo odrediti derivaciju funkcije $\sin(x)$. Primjenom adicionog teorema

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \qquad (6.40)$$

dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right) \\
&= \sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} = \cos(x). \qquad (6.41)
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x). \qquad (6.42)$$

Na sličan način se pomoću adicionog teorema

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad (6.43)$$

pokazuje da je

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x). \qquad (6.44)$$

Iz rezultata (6.42) i (6.44) možmo izračunati derivacije drugih trigonomerijskih funkcija. Na primjer, derivacija funkcije tangens je dana sa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\mathrm{tg}(x) &= \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{(\sin(x))'\cos(x)-\sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}. \qquad (6.45)
\end{aligned}$$

Slično, za derivaciju funkcije kotangens imamo

$$\frac{d}{dx}\mathrm{ctg}(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}. \qquad (6.46)$$

6.3 Derivacija kompozicije funkcija

Teorem 6.3 (Derivacija kompozicije funkcija) *Neka je f derivabilna u točki x_0 i neka je g derivabilna u točki $f(x_0)$. Tada je kompozicija funkcija $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ derivabilna u točki x_0, i vrijedi*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0). \tag{6.47}$$

U jednadžbi (6.47) izraz $g'(f(x_0))$ označava derivaciju funkcije g u točki $f(x_0)$.

Dokaz. Funkcija f je derivabilna u x_0, pa u okolini te točke x_0 možemo definirati funkciju

$$\eta(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), \quad x \neq x_0. \tag{6.48}$$

Primijetimo da je

$$\lim_{x \to x_0} \eta(x) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0. \tag{6.49}$$

Iz jednadžbe (6.48) dobivamo

$$f(x) - f(x_0) = \big(f'(x_0) + \eta(x)\big)(x - x_0), \quad x \neq x_0. \tag{6.50}$$

Slično, funkcija g je derivabilna u $y_0 = f(x_0)$, pa možemo definirati funkciju

$$\varphi(y) = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0), \quad y \neq y_0, \tag{6.51}$$

za koju vrijedi $\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = 0$. Iz jednadžbe (6.51) dobivamo

$$g(y) - g(y_0) = \big(g'(y_0) + \varphi(y)\big)(y - y_0). \tag{6.52}$$

Neka je $h(x) = g(f(x))$. Tada jednadžbe (6.50) i (6.52) povlače

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) \\ &= \big[g'(f(x_0)) + \varphi(f(x))\big](f(x) - f(x_0)) \\ &= \big[g'(f(x_0)) + \varphi(f(x))\big]\big(f'(x_0) + \eta(x)\big)(x - x_0). \end{aligned} \tag{6.53}$$

Stoga je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \big[g'(f(x_0)) + \varphi(f(x))\big]\big(f'(x_0) + \eta(x)\big), \tag{6.54}$$

Uvedimo supstituciju $y = f(x)$. Prema teoremu 6.1 funkcija f je neprekidna u x_0, pa je $\lim_{x \to x_0} y = y_0$. Stoga je

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = 0 \tag{6.55}$$

Sada iz jednadžbe (6.54) dobivamo

$$h'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \big(g'(f(x_0)) + \varphi(y)\big) \lim_{x\to x_0} \big(f'(x_0) + \eta(x)\big) = g'(f(x_0))f'(x_0) \tag{6.56}$$

jer je $\lim_{x\to x_0} \eta(x) = 0$. ■

Primjer 6.7 *Odredite derivacije sljedećih funkcija:*

$$y = \sin(x^2), \quad y = \sin^2(x), \quad y = \sqrt{1 + tg^2(x)}. \tag{6.57}$$

Pravilo za derivaciju kompozicije funkcija daje

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) = \sin'(x^2)\,(x^2)' = \cos(x^2)\,2x, \tag{6.58}$$

$$\frac{d}{dx}\sin^2(x) = 2\sin(x)\sin'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x), \tag{6.59}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(x)} &= \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{tg}^2(x)\right)^{\frac{1}{2}-1}(1+\mathrm{tg}^2(x))' = \frac{1}{2\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(x)}}\,2\,\mathrm{tg}(x)\,\mathrm{tg}'(x)\\ &= \frac{\mathrm{tg}(x)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(x)}\,\cos^2(x)}\end{aligned} \tag{6.60}$$

■

Primijetimo razliku u derivacijama funkcija $\sin(x^2)$ i $\sin^2(x)$. Općenito, ako je f proizvoljna funkcija, tada je

$$\frac{d}{dx}\big[f(x)\big]^n = n\big[f(x)\big]^{n-1} f'(x), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{6.61}$$

Primjer 6.8 *Pokažimo da je*

$$\frac{d}{dx}x^k = k\,x^{k-1} \quad \textit{za svaki} \quad k \in \mathbb{Q}. \tag{6.62}$$

Iz primjera 6.4 znamo da (6.62) vrijedi za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Neka je $k = m/n$ gdje su $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $f(x) = x^{m/n}$. Tada je $(f(x))^n = x^m$, pa deriviranjem ove jednadžbe dobivamo

$$n\big[f(x)\big]^{n-1} f'(x) = m\,x^{m-1}. \tag{6.63}$$

Odavde slijedi da je

$$f'(x) = \frac{m}{n}\,\frac{x^{m-1}}{\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}. \tag{6.64}$$

Dakle, relacija (6.62) vrijedi za svaki racionalni broj $k = m/n$. Može se pokazati da isto pravilo vrijedi za realne potencije,

$$\frac{d}{dx}x^a = a\,x^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{6.65}$$

6.4 Derivacija inverzne funkcije

Neka je $f\colon A \to B$ bijekcija. Tada možemo definirati inverzno preslikavanje $f^{-1}\colon B \to A$ takvo da je

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A, \qquad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in B. \tag{6.66}$$

Sljedeći rezultat povezuje derivaciju inverzne funkcije f^{-1} s derivacijom funkcije f.

Teorem 6.4 (Teorem o derivaciji inverzne funkcije) *Pretpostavimo da je $f\colon (a,b) \to (c,d)$ bijekcija i diferencijabilna na (a,b). Ako je $f'(x_0) \neq 0$ u točki $x_0 \in (a,b)$, tada je f^{-1} diferencijabilna u $y_0 = f(x_0)$ i vrijedi*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{6.67}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $f'(x_0) \neq 0$, $x_0 \in (a,b)$. Tada je

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}. \tag{6.68}$$

Neka je zadan $\varepsilon > 0$. Tada prema definiciji limesa jednadžba (6.68) povlači da postoji $\eta > 0$ takav da

$$0 < |x - x_0| < \eta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon. \tag{6.69}$$

Neka su $y = f(x)$ i $y_0 = f(x_0)$. Funkcija f je neprekidna na (a,b) pa je prema teoremu 5.8 inverzna funkcija neprekidna na (c,d). Stoga, za $\eta > 0$ postojij $\delta > 0$ takav da

$$0 < |y - y_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| = |x - x_0| < \eta. \tag{6.70}$$

Sada relacije (6.69) i (6.70) povlače da za $0 < |y - y_0| < \delta$ vrijedi

$$\left| \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon. \tag{6.71}$$

Ovo implicira da je

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}, \tag{6.72}$$

odnosno

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{6.73}$$

■

Derivaciju inverzne funkcije možemo zapisati i kao

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \tag{6.74}$$

Ovo pravilo ćemo koristiti u nalaženju derivacija nekih elementarnih funkcija kao što su eksponencijalna funkcija i arkus funkcije.

Primjer 6.9 *Odredite derivaciju funkcije* $g(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

Funkcija g je inverzna funkcija funkcije $f(x) = x^2$, $x > 0$. Stoga je prema formuli (6.67)

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{gdje je} \quad y = x^2. \tag{6.75}$$

Dakle,

$$g'(y) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \tag{6.76}$$

što se slaže sa ranije dobivenim rezultatom. ■

6.5 Derivacija eksponencijalne i logaritamske funkcije

Promotrimo derivaciju eksponencijane funkcije

$$\frac{d}{dx}a^x = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x\,\frac{a^h-1}{h} = a^x\,\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}. \tag{6.77}$$

Pretpostavimo na trenutak da $\lim_{h\to 0}(a^h-1)/h$ postoji i definirajmo funkciju

$$C(a) = \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}, \quad a > 0. \tag{6.78}$$

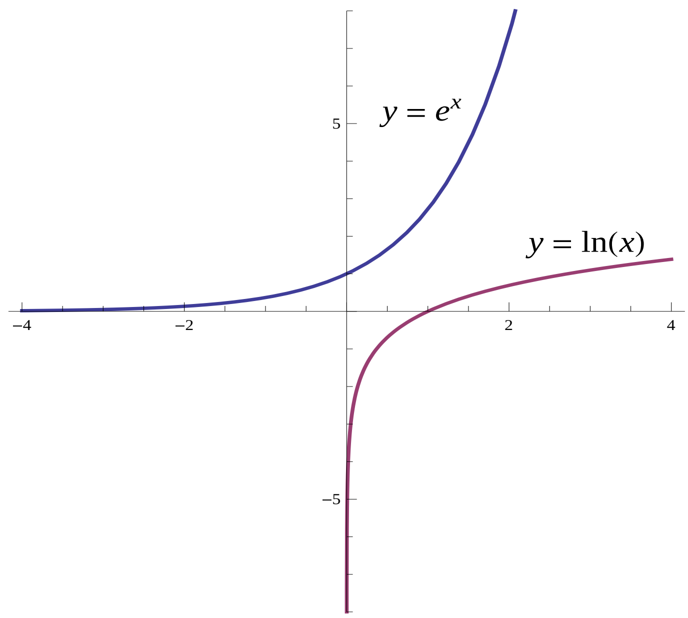
Tada dobivamo

$$\frac{d}{dx}a^x = C(a)\,a^x. \tag{6.79}$$

Derivacija eksponencijalne funkcije je proporcionalna toj funkciji gdje je konstanta proporcionalnosti jednaka $C(a)$. Za različite vrijednosti baze a konstanta $C(a)$ se može približno odrediti aproksimacijom limesa (6.78) uzimajući $h \approx 0$. Na primjer,

$$C(2) = \lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h} \approx 0.693147, \tag{6.80}$$

$$C(3) = \lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h} \approx 1.098612. \tag{6.81}$$



Slika 6.4: $y = e^x$ prirodna eksponencijalna funkcija, $y = \ln(x)$ prirodna logaritamska funkcija.

Može se pokazati da postoji jedinstveni realni broj $2 < e < 3$ takav da je $C(e) = 1$, odnosno da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \tag{6.82}$$

Broj e naziva se *Eulerov* broj, *Napierova* konstanta ili baza prirodnog logaritma. To je iracionalan broj koji približno iznosi $e \approx 2.71828$. U prirodnoj bazi derivacija eksponencijalne funkcije ima jednostavan oblik

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.83}$$

Važnost ekponencijalne funkcije potječe iz činjenice da je ova funkcija je rješenje diferecijalne jednadžbe $y'(x) = y(x)$ koja modelira mnoge pojave u fizici i tehnici. To je ujedno i jedina funkcija (do na multiplikavitnu konstantu) čija derivacija je jednaka njoj samoj što povlači da je trenutni rast funkcije u točki x jednak njezinoj vrijednosti u toj točki.

Za opću eksponencijalnu funkciju u bazi $a > 0$ vrijedi identitet

$$a^x = e^{x \ln(a)} \tag{6.84}$$

pa pravilo za drivaciju kompozicije funkcija daje

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln(a)} = e^{x \ln(a)} \frac{d}{dx}(x \ln(a)) = \ln(a)\, a^x. \tag{6.85}$$

Usporedbom jednadžbi (6.79) i (6.85) zaključujemo da je $C(a) = \ln(a)$, odnosno da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a). \tag{6.86}$$

Ako je $f(x)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija, tada je

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)}\, f'(x). \tag{6.87}$$

Derivaciju logaritamske funkcije možemo dobiti dobiti iz identiteta

$$\log_a(a^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.88}$$

Deriviranjem (6.88) dobivamo

$$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \log_a'(a^x)(a^x)' = 1. \tag{6.89}$$

Kako je $(a^x)' = \ln(a)\, a^x$, slijedi da je

$$\log_a'(a^x) = \frac{1}{\ln(a)\, a^x}. \tag{6.90}$$

Definirajmo $y = a^x > 0$. Tada je

$$\frac{d}{dy} \log_a(y) = \frac{1}{\ln(a)\, y}, \quad y > 0. \tag{6.91}$$

U prirodnoj bazi $a = e$ imamo $\ln(e) = 1$ što povlači

$$\frac{d}{dy} \ln(y) = \frac{1}{y}, \quad y > 0. \tag{6.92}$$

Ako je $f(x) > 0$ proizvoljna diferencijabilna funkcija, tada je

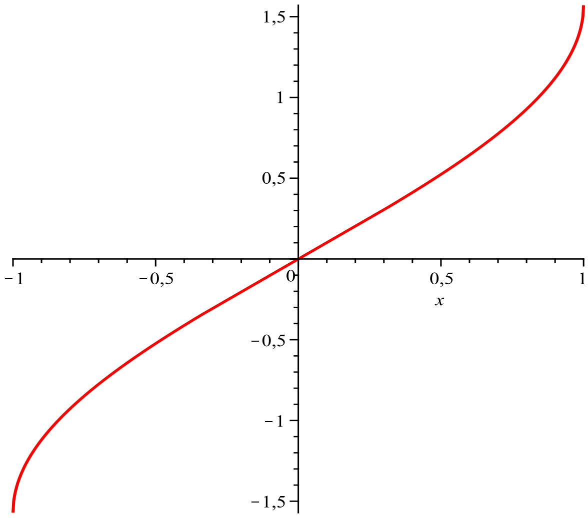
$$\frac{d}{dx} \ln\big(f(x)\big) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{6.93}$$

6.6 Derivacije arkus funkcija

Arkus funkcije su inverzne trigonometrijske funkcije koje dobivamo restrikcijom trigonometrijskih funkcija na odredjene segmente tako da dobivene restrikcije budu bijekcije.

Restrikcija funkcije sinus dana sa

$$\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \tag{6.94}$$



Slika 6.5: $f(x) = \arcsin(x)$.

je bijekcija, pa postoji inverzno preslikavanje

$$\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \tag{6.95}$$

takvo da je

$$\arcsin(\sin(x)) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{6.96}$$

Graf funkcije $\arcsin(x)$ prikazan je na slici 6.5. Deriviranjem jednadžbe (6.96) dobivamo

$$\frac{d}{dx}\arcsin(\sin(x)) = \arcsin'(\sin(x))\,(\sin(x))' = 1, \tag{6.97}$$

što povlači

$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{6.98}$$

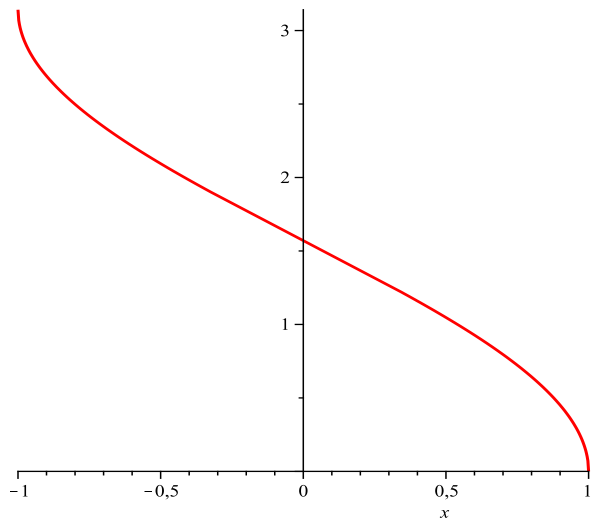
Neka je $y = \sin(x)$, $-1 < y < 1$. Tada je $\cos(x) = \sqrt{1-y^2}$ što implicira

$$\frac{d}{dy}\arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad -1 < y < 1. \tag{6.99}$$

Primijetimo da iako je funkcija $\arcsin(y)$ definirana na zatvorenom intervalu $[-1,1]$, derivacija ne postoji u točkama $y = \pm 1$.

Promotrimo sada bijektivno preslikavanje

$$\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]. \tag{6.100}$$



Slika 6.6: $f(x) = \arccos(x)$.

Inverzna funkcija

$$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi] \tag{6.101}$$

zadovoljava relaciju

$$\arccos(\cos(x)) = x, \quad x \in [0, \pi] \tag{6.102}$$

pa sličnim postupkom kao u prethodnom slučaju deriviranjem (6.102) dobivamo

$$\frac{d}{dy}\arccos(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad -1 < y < 1. \tag{6.103}$$

Graf funkcije $\arccos(x)$ prikazan je na slici 6.6.

Derivacije ostalih arkus funkcija dobiju se na analogan način. Definirajmo restrikciju

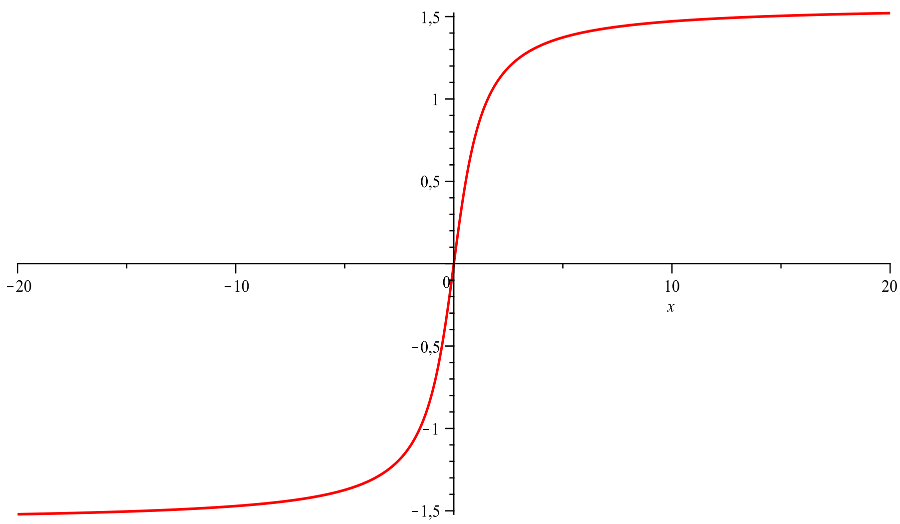
$$\mathrm{tg}\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, \infty) \tag{6.104}$$

i pripadnu inverznu funkciju

$$\mathrm{arctg}\colon (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{6.105}$$

koja zadovoljava relaciju

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(x)) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \tag{6.106}$$



Slika 6.7: $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$.

Deriviranjem dobivamo

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x)) = \operatorname{arctg}'(\operatorname{tg}(x))\,(\operatorname{tg}(x))' = 1, \tag{6.107}$$

odnosno

$$\operatorname{arctg}'(\operatorname{tg}(x)) = \cos^2(x) \tag{6.108}$$

jer je $(\operatorname{tg}(x))' = 1/\cos^2(x)$. Supstitucijom identiteta $\operatorname{tg}^2(x) + 1 = 1/\cos^2(x)$ u gornju jednadžbu imamo

$$\operatorname{arctg}'(\operatorname{tg}(x)) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x)}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{6.109}$$

Ako uvedemo varijablu $y = \operatorname{tg}(x)$, $y \in (-\infty, \infty)$, tada relacija (6.109) povlači

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arctg}(y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad y \in (-\infty, \infty). \tag{6.110}$$

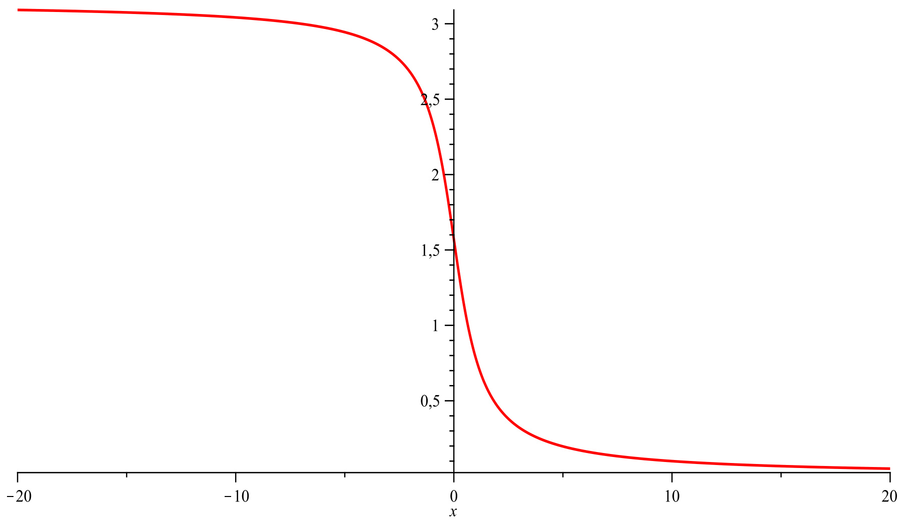
Slično se pokazuje da suženjem domene kotangensa,

$$\operatorname{ctg}\colon (0, \pi) \to (-\infty, \infty), \tag{6.111}$$

dobivamo

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arcctg}(y) = -\frac{1}{1+y^2}, \quad y \in (-\infty, \infty). \tag{6.112}$$

Grafovi funkcija $\operatorname{arctg}(x)$ i $\operatorname{arcctg}(x)$ su prikazani na slikama 6.7 i 6.8.



Slika 6.8: $f(x) = \text{arcctg}(x)$.

6.7 Logaritamska derivacija

Logaritamska derivacija se koristi za deriviranje funkcija oblika $h(x) = f(x)^{g(x)}$. Ovaj tip funkcija ne može se derivirati po pravilu za derivaciju potencije osim ako je $g(x) = a$ konstanta. Funkciju h treba najprije logaritmirati tako da dobijemo

$$\ln h(x) = g(x) \ln f(x). \tag{6.113}$$

Deriviranjem ovog izraza dobivamo

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}, \tag{6.114}$$

što povlači

$$\frac{d}{dx} f(x)^{g(x)} = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]. \tag{6.115}$$

Izraz u jednadžbi (6.115) naziva se logaritamska derivacija funkcije $f(x)^{g(x)}$. U posebnom slučaju kada je $g(x) = a$ konstanta imamo

$$\frac{d}{dx} f(x)^a = a f(x)^{a-1} f'(x). \tag{6.116}$$

Slično, ako je $f(x) = a > 0$, tada jednadžba (6.115) daje

$$\frac{d}{dx} a^{g(x)} = \ln(a)\, a^{g(x)} g'(x). \tag{6.117}$$

Primjer 6.10 *Odredite jednadžbu tangente na krivulju $y = x^{e^x}$ u točki $x_0 = 1$.*

Primijetimo da je funkcija $y = x^{e^x}$ definirana za $x > 0$. Logaritmiranjem dobivamo

$$\ln y = e^x \ln(x), \tag{6.118}$$

stoga je

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\left(e^x \ln(x)\right) = e^x \ln(x) + e^x \frac{1}{x}. \tag{6.119}$$

Dakle,

$$y' = x^{e^x} e^x \left(\ln(x) + \frac{1}{x}\right), \quad x > 0. \tag{6.120}$$

Koeficijent smjera tangente u točki $x_0 = 1$ jednak je $y'(1)$ što daje

$$y'(1) = e \cdot (\ln(1) + 1) = e. \tag{6.121}$$

Točka u kojoj tangenta dira krivulju ima y-koordinatu $y_0 = y(1) = 1$, pa jednadžba tangente glasi

$$y - 1 = e(x - 1). \tag{6.122}$$

■

Poglavlje 7

Teoremi diferencijalnog računa

U ovom poglavlju ćemo proučavati neka svojstva diferencijabilnih funkcija, posebno odnos izmedju funkcije f i njezine derivacije f'. Započet ćemo s istraživanjem minimalnih i maksimalnih vrijednosti funkcije, i vidjeti u kakvoj su vezi s derivacijom funkcije. Rezultati koje ovdje navodimo imaju široku primjenu u matematičkoj analizi i matematici općenito.

Definicija 7.1 *Kažemo da je $f(x_0)$ lokalni minimum funkcije f ako postoji $\delta > 0$ takav da je*

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \textit{za svaki} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{7.1}$$

Slično, $f(x_0)$ je lokalni maksimum ako postoji $\delta > 0$ takav da je

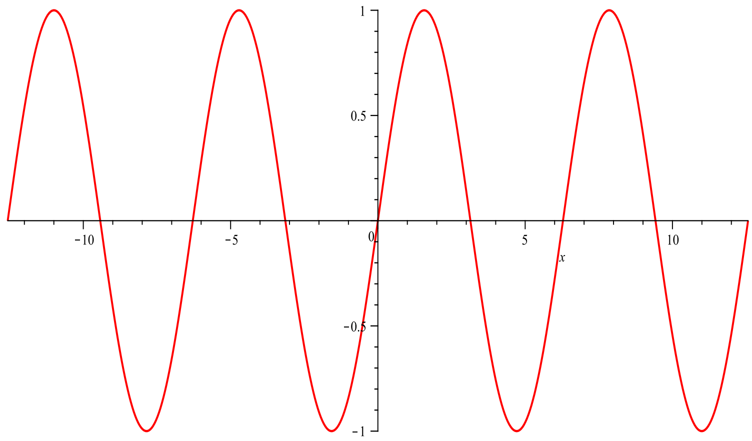
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \textit{za svaki} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{7.2}$$

Definicija 7.2 *Kažemo da je $f(x_0)$ globalni minimum funkcije f na invervalu I, gdje je $x_0 \in I$, ako je $f(x) \geq f(x_0)$ za svaki $x \in I$. Slično, $f(x_0)$ je globalni maksimum funkcije f na intervalu I ako je $f(x) \leq f(x_0)$ za svaki $x \in I$.*

Lokalni (globalni) minimum ili maksimum funkcije f nazivamo kraće lokalni (globalni) ekstrem.

Primjer 7.1 *Funkcija $f(x) = \sin(x)$ ima beskonačno mnogo lokalnih ekstrema. f ima lokalni maksimum u točkama $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ i lokalni minimum u točkama $x_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Primijetimo da su u ovom primjeru lokalni ekstremi takodjer globalni ekstremi na $\mathbb{R}$.*

Teorem 7.1 (Fermatov teorem) *Ako je $f(x_0)$ lokalni ekstrem funkcije f, tada je $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji.*



Slika 7.1: Funkcija $f(x) = \sin(x)$ ima lokalni maksimum u točkama $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ i lokalni minimum u točkama $x_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. Pretpostavimo da $f'(x_0)$ postoji, i da je $f(x_0)$ lokalni maksimum. Tada postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{za svaki} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{7.3}$$

Ovo implicira da je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{za svaki} \quad x_0 - \delta < x < x_0, \tag{7.4}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{za svaki} \quad x_0 < x < x_0 - \delta. \tag{7.5}$$

Ako $f'(x_0)$ postoji, tada je

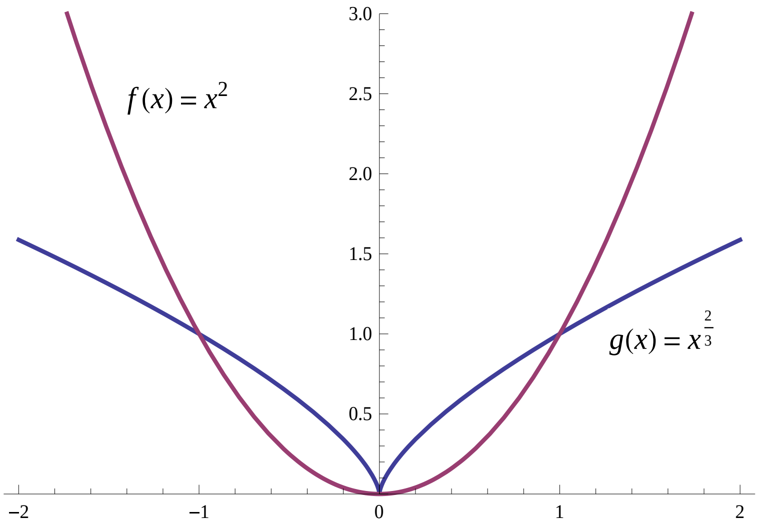
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{7.6}$$

jer jednostrani limesi moraju biti jednaki. Iz jednadžbi (7.4) i (7.5) slijedi

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \tag{7.7}$$

što implicira $f'(x_0) = 0$. Sličan dokaz se provodi kada je $f'(x_0)$ lokalni minimum. ■

Definicija 7.3 *Ako je f neprekidna u točki x_0 i $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji, tada kažemo da je x_0 kritična točka funkcije f.*



Slika 7.2: Funkcije $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ i $g(x) = x^2$.

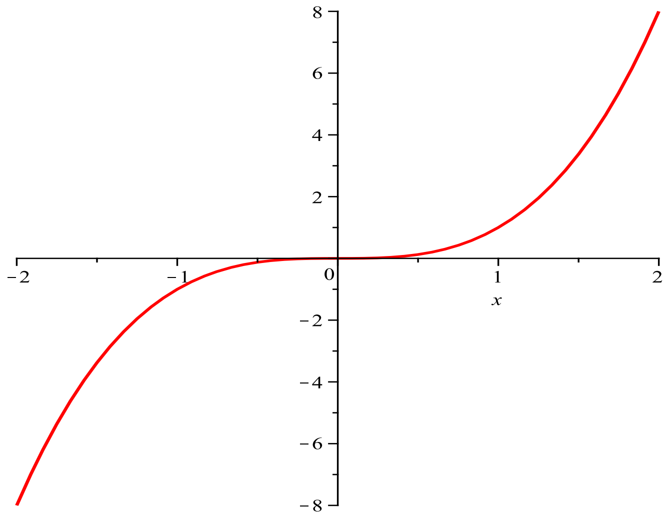
Funkcije $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ i $g(x) = x^2$ imaju lokalni minimum u $x = 0$ (vidi sliku 7.2). Međutim, $f'(0)$ ne postoji jer je $f'(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, dok je u drugom slučaju $g'(0) = 0$. U oba slučaja je $x = 0$ kritična točka funkcija f i g.

Primijetimo da obrat Fermatovog teorema ne vrijedi: ako je x_0 kritična točka funkcije f, tada $f(x_0)$ ne mora biti lokalni ekstrem. Na primjer, funkcija $f(x) = x^3$ ima kritičnu točku u $x = 0$ jer je $f'(0) = 0$, ali $f(0)$ nije lokalni ekstrem (vidi sliku 7.3).

Sljedeći teoerm je fundamentalan jer iz njega slijede drugi važni rezultati diferencijalnog računa.

Teorem 7.2 (Rolleov teorem) *Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i diferencijalbilna na otvorenom intervalu (a, b). Ako je $f(a) = f(b)$, tada postoji $x_0 \in (a, b)$ takav da je $f'(x_0) = 0$.*

Dokaz. Ako je $f(x) = f(a) = f(b)$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je f konstanta pa je $f'(x) = 0$ u svakoj točki $x \in (a, b)$. Pretpostavimo da f nije konstanta. Prema teoremu 5.6 postoje $x_1, x_2 \in [a, b]$ takvi da je $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ za svaki $x \in [a, b]$. Kako f nije konstanta, to je $f(x_1) < f(x_2)$. Tada točke x_1 i x_2 ne mogu obje biti rubne točke intervala $[a, b]$ zbog pretpostavke $f(a) = f(b)$. Dakle, barem jedna od točaka x_1, x_2 nalazi se u otvorenom intervalu (a, b), recimo $x_1 \in (a, b)$. Prema Fermatovom teoremu je $f'(x_1) = 0$ jer je po pretpostavci f diferencijabilna u (a, b). ■



Slika 7.3: Funkcija $f(x) = x^3$ nema ekstrem u $x = 0$ iako je $f'(0) = 0$.

Primjer 7.2 *Ilustrirajte Rolleov teorem funkcijom* $f(x) = -x^3 + 3x^2$ *na intervalu* $[0, 3]$.

U rubnim točkama je $f(0) = f(3) = 0$. Pokažimo da postoji točka $x_0 \in (0, 3)$ takva da je $f'(x_0) = 0$. Nultočke derivacije su dane jednadžbom

$$-3x^2 + 6x = 0 \tag{7.8}$$

koja ima rješenja $x = 0, 2$. Dakle, tražena točka u intervalu $(0, 3)$ je $x_0 = 2$. Graf funkcije f prikazan je na slici 7.4. ■

Sljedeći primjer pokazuje važnost pretpostavke da je f neprekidna na $[a, b]$. Neka je

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1), \\ 0, & x = 1. \end{cases} \tag{7.9}$$

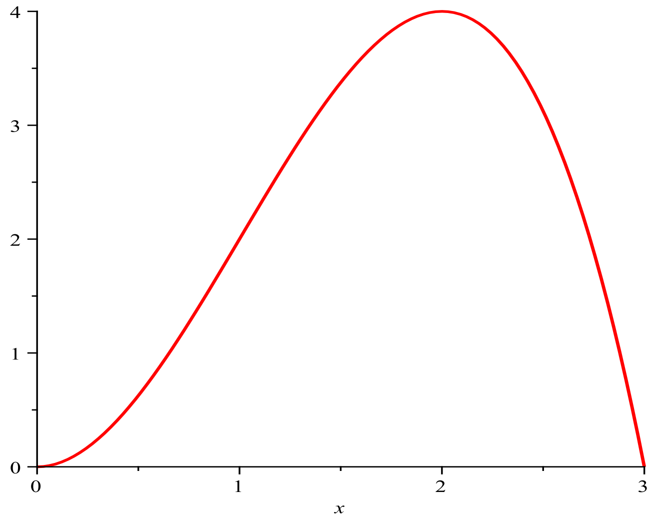
Funkcija g zadovoljava sve pretpostavke Rolleovog teorema osim što u desnoj rubnoj točki $x = 1$ ima prekid slijeva jer je

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = 1 \neq 0 = g(1). \tag{7.10}$$

Kako je $g'(x) = 1$ za svaki $x \in (0, 1)$, jasno je da ne postoji $x_0 \in (0, 1)$ takav da je $g'(x_0) = 0$.

Teorem 7.3 (Cauchyev teorem srednje vrijednosti) *Ako su funkcije f i g neprekidne na $[a, b]$ i diferencijabilne na (a, b), tada postoji $x_0 \in (a, b)$ takav da je*

$$f'(x_0)\,(g(b) - g(a)) = g'(x_0)\,(f(b) - f(a))\,. \tag{7.11}$$



Slika 7.4: $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

Dokaz. Definirajmo

$$F(x) = f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big). \tag{7.12}$$

Funkcija F je neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b). U rubnim točkama vrijedi

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= f(a)\,(g(b) - g(a)) - g(a)\,(f(b) - f(a)) \\ &\quad - f(b)\,(g(b) - g(a)) + g(b)\,(f(b) - f(a)) = 0, \end{aligned} \tag{7.13}$$

što povlači $F(a) = F(b)$. Stoga prema Rolleovom teoremu postoji $x_0 \in (a, b)$ takav da je

$$F'(x_0) = f'(x_0)\,(g(b) - g(a)) - g'(x_0)\,(f(b) - f(a)) = 0, \tag{7.14}$$

odakle slijedi

$$f'(x_0)\,(g(b) - g(a)) = g'(x_0)\,(f(b) - f(a))\,. \tag{7.15}$$

■

Cauchyev teorem ima interesantnu interpretaciju ako se zapiše u obliku

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} \tag{7.16}$$

(uz uvjet da je $f(a) \neq f(b)$ i $g(a) \neq g(b)$). Pretpostavimo da se dvije čestice gibaju u vremenskom intervalu $[a, b]$ gdje f i g opisuju prijedjeni put čestica kao funkciju vremena.

Tada postoji trenutak $t_0 \in (a, b)$ u kojem je omjer njihovih trenutnih brzina jednak omjeru njihovih prosječnih brzina u intervalu $[a, b]$. Interesantno je da ovaj zaključak vrijedi bez obzira kako se gibaju čestice.

Sljedeći teorem je izravna posljedica Cauchyevog teorema srednje vrijednosti za $g(x) = x$, i ima široku primjenu u matematici.

Teorem 7.4 (Lagrangeov teorem srednje vrijednosti) *Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b), tada postoji $x_0 \in (a, b)$ takav da je*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{7.17}$$

Lagrangeov teorem povezuje derivaciju funkcije sa srednjom vrijednosti funkcije na zadanom intervalu. Prema ovom teoremu postoji točka $x_0 \in (a, b)$ u kojoj je koeficijent smjera tangente u $(x_0, f(x_0))$ jednak koeficijentu smjera sekante koja prolazi točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

Primjer 7.3 *Ilustrirajte Lagrangeov teorem fukcijom $f(x) = x^2 + 1$ na intervalu $[0, 1]$.*

Funkcija f očigledno zadovoljava pretpostavke Lagrengeovog teorema. Pronadjimo točku $x_0 \in (0, 1)$ takvu da je

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}. \tag{7.18}$$

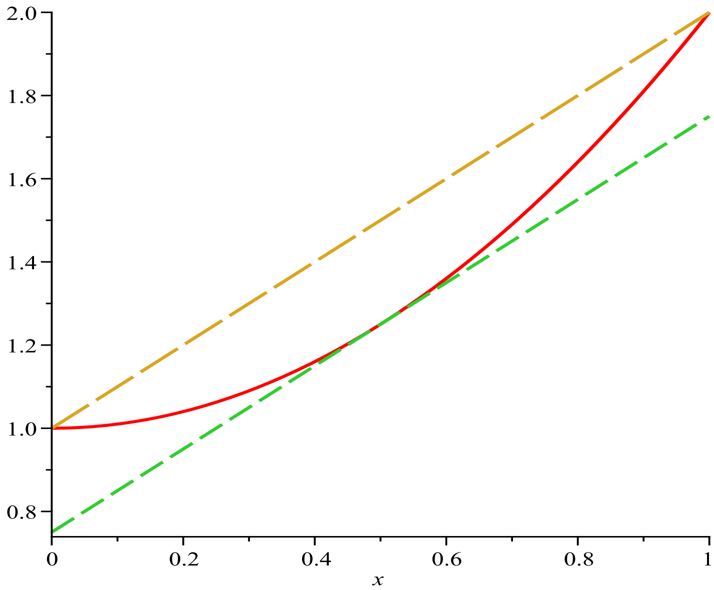
Koeficient smjera sekante kroz točke $(0, 1)$ i $(1, 2)$ jednak je

$$k_s = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1. \tag{7.19}$$

Točka u kojoj koeficijent smjera tangente ima istu vrijednost je dana sa

$$f'(x_0) = 2x_0 = 1, \tag{7.20}$$

što daje $x_0 = 1/2$. Funkcija f je prikazana na slici 7.5. ■



Slika 7.5: Tangenta na krivulju $y = x^2 + 1$ u točki $x_0 = 1/2$ ima isti koeficijent smjera kao sekanta kroz točke $(0, 1)$ i $(1, 2)$.

Poglavlje 8

Primjene diferencijalnog računa

8.1 L'Hospitalovo pravilo

Cauchyev teorem srednje vrijednosti je osnovni rezultat kojim se dokazuje nekoliko teorema poznatih pod nazivom L'Hospitalovo pravilo. Ovi teoremi imaju važnu primjenu u računanju nekih tipova limesa koje nazivamo neodredjeni oblici.

Teorem 8.1 (Neodredjeni oblik $\frac{0}{0}$) *Neka su f i g diferencijabilne funkcije na nekoj okolini $K_\delta^*(a)$ točke a. Neka je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in K_\delta^*(a)$ i neka je*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0. \tag{8.1}$$

Ako $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ postoji, tada je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{8.2}$$

Ovaj tip limesa nazivamo neodredjeni oblik $\frac{0}{0}$ jer $f(x) \to 0$ i $g(x) \to 0$ kada $x \to a$.

Dokaz. Ako funkcije f ili g eventualno imaju prekid u $x = a$, možemo ga ukloniti tako da definiramo $f(a) = 0$ ili $g(a) = 0$ jer je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Stoga možemo pretpostaviti da su f i g neprekidne na skupu $K_\delta(a)$ za neki $\delta > 0$. Neka je $a < x < a + \delta$. Tada su f i g neprekidne na zatvorenom intervalu $[a, x]$ i derivabilne na otvorenom intervalu (a, x). Prema Cauchyevom teoremu srednje vrijednosti postoji $t_x \in (a, x)$ takav da je

$$f'(t_x)(g(x) - g(a)) = g'(t_x)(f(x) - f(a)), \tag{8.3}$$

odnosno

$$f'(t_x)\, g(x) = g'(t_x)\, f(x) \tag{8.4}$$

jer je $f(a) = g(a) = 0$. Pokažimo da je $g(x) \neq 0$. U suprotnom g isčezava na rubovima intervala $[a, x]$ pa prema Rolleovom teoremu postoji $c \in (a, x)$ takav da je $g'(c) = 0$. Ovo je u suprotnosti s pretpostavkom da je $g'(c)$ za svaki $c \in K^*_\delta(a)$. Dakle, mora biti $g(x) \neq 0$ pa jednadžbu (8.4) možemo zapisati u obliku

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)}, \quad x \in (a, a+\delta). \tag{8.5}$$

Slično se pokazuje da za $a - \delta < x < a$ postoji $s_x \in (x, a)$ takav da je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(s_x)}{g'(s_x)}, \quad x \in (a-\delta, a). \tag{8.6}$$

Očigledno $t_x \to a^+$ kada $x \to a^+$ i $s_x \to a^-$ kada $x \to a^-$ pa iz (8.5) i (8.6) dobivamo

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)} = \lim_{t_x\to a^+} \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)} \tag{8.7}$$

i

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f'(s_x)}{g'(s_x)} = \lim_{s_x\to a^-} \frac{f'(s_x)}{g'(s_x)}, \tag{8.8}$$

redom. Prema pretpostavci $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ postoji pa su jednostrani limesi jednaki, odnosno

$$\lim_{t_x\to a^+} \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)} = \lim_{s_x\to a^-} \frac{f'(s_x)}{g(s_x)}. \tag{8.9}$$

Sada iz (8.7) i (8.8) slijedi

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{8.10}$$

što povlači da $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ postoji i da je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{8.11}$$

■

Primjer 8.1 *Odredite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}. \tag{8.12}$$

Neka su $f(x) = 1 - \cos(x)$ i $g(x) = \sin^2(x)$. Tada je $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ i $g'(x) = 2\sin(x)\cos(x) \neq 0$ u okolini točke $x = 0$. Nadalje,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos(x)} = \frac{1}{2}, \tag{8.13}$$

stoga je prema L'Hospitalovom pravilu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{2}. \tag{8.14}$$

■

Primjer 8.2 *Izračunajte*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{\sin^2(x)}. \tag{8.15}$$

Funkcije $f(x) = 1 - \cos(x^2)$ i $g(x) = \sin^2(x)$ zadovoljavaju uvjete L'Hospitalovog pravila i

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin(x^2)}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\cos(x)} = 1 \cdot 0 = 0 \tag{8.16}$$

gdje smo koristili rezultat

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}} = 1. \tag{8.17}$$

Dakle,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{\sin^2(x)} = 0. \tag{8.18}$$

■

Sličan oblik L'Hospitalovog pravila koji navodimo bez dokaza se primjenjuje u slučaju kada $f(x) \to \infty$ i $g(x) \to \infty$ kada $x \to \infty$.

Teorem 8.2 (Neodredjeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$) *Neka su f i g diferencijabilne funkcije na (M, ∞) za neki $M > 0$, i neka je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x > M$. Pretpostavimo da je*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty. \tag{8.19}$$

Ako $\lim_{x\to\infty} f'(x)/g'(x)$ *postoji, tada je*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{8.20}$$

Isti zaključak vrijedi ako $x \to -\infty$.

Primjer 8.3 *Dokažite da je*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \textit{za svaki} \quad x \in \mathbb{N}. \tag{8.21}$$

Dokaza provodimo indukcijom po n. Provjerimo tvrdnju za $n = 1$. Neka su $f(x) = x$ i $g(x) = e^x$. Tada je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ i

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \tag{8.22}$$

pa je prema L'Hospitalovom pravilu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0. \tag{8.23}$$

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za svaki $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Definirajmo $h(x) = x^n$. Tada je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{e^x} = n \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} = 0, \tag{8.24}$$

pa zaključujemo da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0. \tag{8.25}$$

Time je indukcijom dokazano da je $\lim_{x\to\infty} x^n/e^x = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ovaj rezultat pokazuje da eksponencijalna funkcija raste brže od bilo koje potencije, odnosno bilo kojeg polinoma, kada $x \to \infty$. ■

Navedimo još nekoliko verzija L'Hospitalovog pravila.

(1) Ako je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \tag{8.26}$$

i $\lim_{x\to\infty} f'(x)/g'(x) = L$, tada je $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = L$.

(2) Ako je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty \tag{8.27}$$

i $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = L$, tada je $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. Isti zaključak vrijedi ako $x \to -\infty$.

L'Hospitalovo pravilo takodjer vrijedi za jednostrane limese kada $x \to a^{\pm}$.

Osim neodredjenih oblika $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$ često se susrećemo i sa limesima koji imaju neodredjene oblike

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0 \quad \text{i} \quad 1^\infty. \tag{8.28}$$

Algebarskim transformacijama funkcije ovi limesi se mogu svesti na jedan od osnovnih oblika $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Na taj način se neodredjeni oblici (8.28) takodjer mogu izračunati primjenom L'Hospitalovog pravila 8.1 ili 8.2.

Primjer 8.4 *Odredite* $\lim_{x\to 0^+} x \ln(x)$.

Ovaj limes je oblika $0 \cdot \infty$ jer je $\lim_{x \to 0^+} x = 0$ i $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Transformacijom na neodredjeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$ i primjenom L'Hospitalovog pravila dobivamo

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0. \tag{8.29}$$

■

Primjer 8.5 *Odredite*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\cos(x)} - tg(x) \right). \tag{8.30}$$

Primijetimo da $1/\cos(x) \to \infty$ i $\operatorname{tg}(x) \to \infty$ kada $x \to \frac{\pi}{2}^-$, stoga ovdje imamo neodredjeni oblik $\infty - \infty$. Ovaj limes možemo transformirati na oblik $\frac{0}{0}$ čime dobivamo

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \operatorname{tg}(x) \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{0}{1} = 0. \tag{8.31}$$

■

Neodredjeni oblici 0^0, ∞^0 i 1^∞ pojavljuju se u limesima oblika $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$. Ovdje je najprije potrebno logaritmirati funkciju $h(x) = f(x)^{g(x)}$ da bi limes preveli na neki od ranije poznatih oblika. U tom slučaju

$$\ln h(x) = g(x) \ln f(x), \tag{8.32}$$

što povlači

$$\lim_{x \to a} \ln h(x) = \lim_{x \to a} g(x) \ln f(x). \tag{8.33}$$

Neka je $\lim_{x \to a} g(x) \ln f(x) = L$. Zbog neprekidnosti funkcije $ln(x)$ imamo

$$\ln \left(\lim_{x \to a} h(x) \right) = \lim_{x \to a} \ln h(x) = L, \tag{8.34}$$

odnosno

$$\lim_{x \to a} h(x) = e^L. \tag{8.35}$$

Primjer 8.6 *Odredite*

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x. \tag{8.36}$$

Primijetimo da je ovaj limes oblika 1^∞. Definirajmo funkciju $h(x) = (1 + 1/x)^x$. Tada je

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \ln h(x) &= \lim_{x \to \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1. \end{aligned} \tag{8.37}$$

Odavde slijedi

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty} h(x)\right) = 1, \tag{8.38}$$

odnosno

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e. \tag{8.39}$$

U literaturi se limes (8.39) ponekad uzima kao definicija Eulerovog broja e. ■

Primjer 8.7 *Odredite* $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x$.

Ovo je limes oblika 0^0. Neka je $h(x) = (\sin x)^x$. Tada je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\ln h(x) &= \lim_{x\to 0^+} x\ln(\sin x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\,x\cos x = -\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0^+} x\cos x = 1\cdot 0 = 0.\end{aligned} \tag{8.40}$$

Dakle, $\ln\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$ što povlači

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x = e^0 = 1. \tag{8.41}$$

■

8.2 Ispitivanje toka funkcije

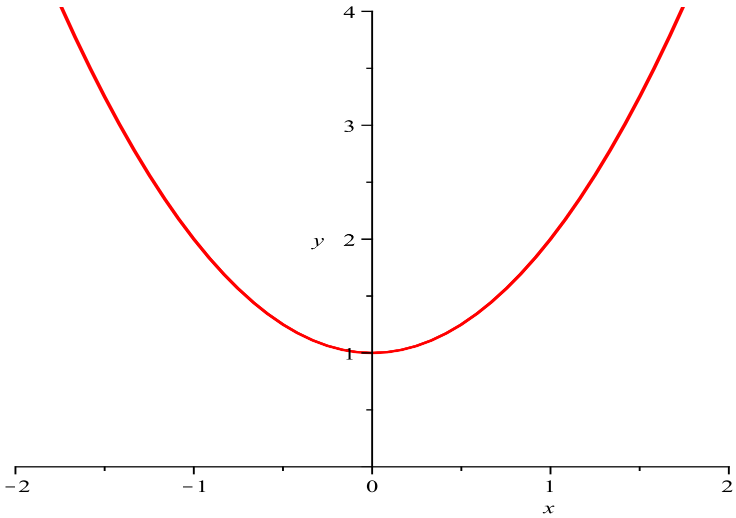
Sada ćemo pobliže razmotriti kako ponašanje funkcije f ovisi o njezinim derivacijama. Preciznije, vidjet ćemo da se poznavanje prve i druge derivacije mogu u priličnoj mjeri rekonstruirati bitne informacije o samoj funkciji f. Na primjer, poznavajući prvu derivaciju možemo zaključiti na kojim intervalima funkcija raste ili pada, dok nam druga derivacija daje informaciju o tome da li se graf funkcije krivi prema gore ili dolje.

8.2.1 Intervali monotonosti

Definicija 8.1

(i) *Kažemo da je funkcija f strogo rastuća na intervalu I ako za svaki par točaka $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, vrijedi $f(x_1) < f(x_2)$.*

(ii) *Kažemo da je f strogo padajuća na intervalu I ako za svaki par točaka $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, vrijedi $f(x_1) > f(x_2)$.*



Slika 8.1: Funkcija $f(x) = x^2 + 1$ je padajuća na $(-\infty, 0)$ i rastuća na $(0, \infty)$.

Promotrimo funkciju na slici 8.1. Funkcija $f(x) = x^2 + 1$ je rastuća na intervalu $(-\infty, 0)$ i padajuća na intervalu $(0, \infty)$. Za svaki $x_0 \in (-\infty, 0)$ tangenta u točki $(x_0, f(x_0))$ ima negativan koeficijent smjera pa je $f'(x_0) < 0$. Slično, za svaki $x_0 \in (0, \infty)$ koeficijent smjera tangete u točki $(x_0, f(x_0))$ je pozitivan pa je $f'(x_0) > 0$. Zaključujemo da predznak prve derivacije pokazuje da li funkcija na nekom intervalu raste ili pada.

Teorem 8.3 (Teorem o monotonosti) *Neka je f diferecijabilna funkcija na intervalu (a, b).*

(i) Ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je f strogo rastuća na (a, b).

(ii) Ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je f strogo padajuća na (a, b).

Dokaz. Pretpostavimo da je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$. Odaberimo $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Želimo pokazati da je $f(x_1) < f(x_2)$. Funkcija f je neprekidna na $[x_1, x_2]$ i derivabilna na (x_1, x_2), pa prema Lagrangeovom teoremu postoji $c \in (x_1, x_2)$ takav da je

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{8.42}$$

Kako je $f'(c) > 0$ ovo implicira $f(x_2) - f(x_1) > 0$, odnosno $f(x_1) < f(x_2)$. Točke x_1 i x_2 su odabrane proizvoljno pa zaključujemo da je f strogo rastuća na (a, b). Slično se pokazuje da je f strogo padajuća na (a, b) ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$. ■

interval	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
predznak f'	$-$	$+$	$-$	$+$

Tablica 8.1: Predznaci derivacije $f'(x) = 12x(x-2)(x+1)$.

Primjer 8.8 *Odredite intervale monotonosti funkcije* $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

Derivacija funkcije je dana sa

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1). \tag{8.43}$$

Predznak derivacije ovisi o predznacima faktora $12x$, $x-2$ i $x+1$. Stoga ćemo realnu os podijeliti na intervale čije rubne točke su nultočke funkcije f', $x = 0$, 2 i -1. U svakom od dobivenih intervala $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,2)$ i $(2,\infty)$ je potrebno odrediti da li je $f'(x) > 0$ ili $f'(x) < 0$. Na primjer, u točki $x = -2 \in (-\infty,-1)$ imamo

$$f'(-2) = -96 < 0, \tag{8.44}$$

stoga f pada na intervalu $(-\infty,-1)$. U tablici 8.1 su prikazani predznaci derivacije na pripadnim intervalima. Zaključujemo da je f padajuća na intervalima $(-\infty,-1)$ i $(0,2)$, a rastuća na intervalima $(-1,0)$ i $(2,\infty)$. Ova zapažanja se jasno vide iz grafa funkcije na slici 8.2.

8.2.2 Ekstremi funkcije

Neposredna posljedica teorema 8.3 je kriterij prema kojem možemo ispitivati da li funkcija u kritičnoj točki ima lokalni minimum ili maksimum.

Teorem 8.4 (Dovoljan uvjet za postojanje ekstrema) *Neka je f neprekidna na intervalu (a,b) i diferencijabilna na (a,b) osim eventualno u točki $c \in (a,b)$. Ako f' mijenja predznak u točki c*

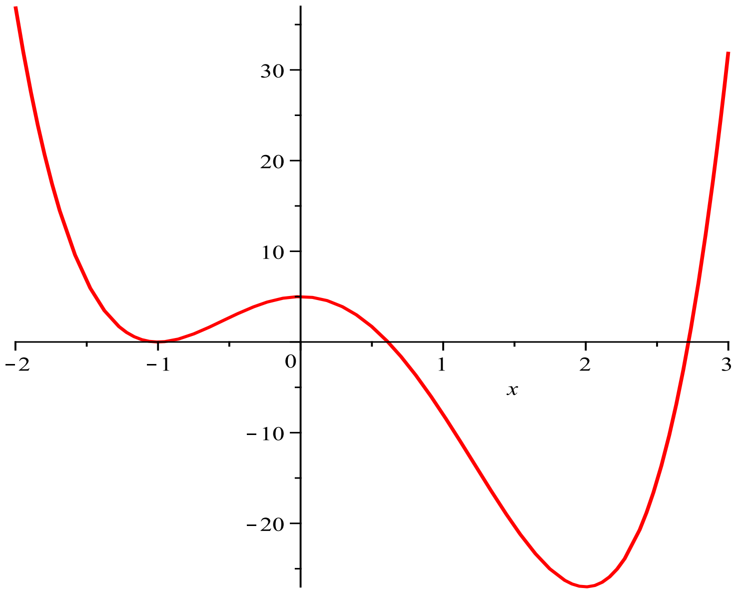
(i) s pozitivnog u negativni, tada je $f(c)$ lokalni maksimum,

(ii) s negativnog u pozitivni, tada je $f(c)$ lokalni minimum.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da f mijenja predznak u točki $c \in (a,b)$ sa pozitivnog na negativni. Tada postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f'(x) > 0 \quad \text{za svaki} \quad x \in (c-\delta, c), \tag{8.45}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{za svaki} \quad x \in (c, c+\delta). \tag{8.46}$$



Slika 8.2: $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

Odaberimo $x \in (c - \delta, c)$. Funkcija f je neprekidna na $[x, c]$ i derivabilna na (x, c). Prema Lagrangeovom teoremu postoji $x_0 \in (x, c)$ takav da je

$$f'(x_0) = \frac{f(c) - f(x)}{c - x} > 0 \tag{8.47}$$

što povlači $f(x) < f(c)$. Slično, ako odaberemo $x \in (c, c + \delta)$ tada postoji $y_0 \in (c, x)$ takav da je

$$f'(y_0) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0 \tag{8.48}$$

što implicira $f(x) < f(c)$. Dakle, za svaki $x \in K^*_\delta(c)$ vrijedi $f(x) < f(c)$ što pokazuje da je $f(c)$ lokalni maksimum. Na sličan način se dokazuje tvrdnja (ii). ■

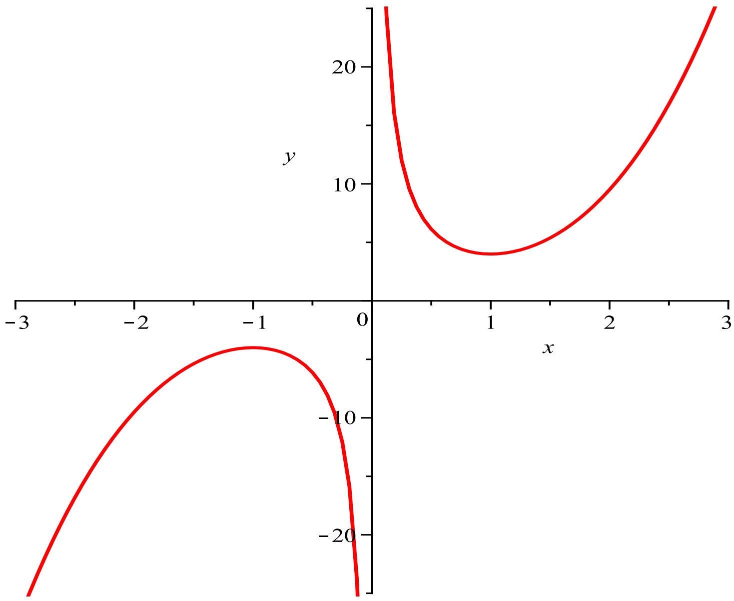
Primjer 8.9 *Odredite lokalne ekstreme funkcije*

$$f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}. \tag{8.49}$$

Derivacija funkcije je dana sa

$$f'(x) = \frac{3(x^4 - 1)}{x^2}, \tag{8.50}$$

stoga f ima kritične točke u $c = -1$ i 1 ($c = 0$ nije kritična točka jer $f(0)$ nije definirano). U točki $c = -1$ predznak f' se mijenja s pozitivnog u negativni, dok se u točki



Slika 8.3: $f(x) = \frac{x^4+3}{x}$.

$c = 1$ mijenja s negativnog u pozitivni. Prema teoremu 8.4 zaključujemo da je $f(-1) = -4$ lokalni maksimum a $f(1) = 4$ je lokalni minimum. Graf funkcije f je prikazan na slici 8.3. ■

Ako je funkcija f dva puta derivabilna u kritičnoj točki $x = c$, tada se lokalni ekstrem može odrediti iz predznaka druge derivacije $f''(c)$.

Teorem 8.5 *Neka je funkcija f dva puta derivabilna u točki $x = c$ i neka je $f'(c) = 0$. Ako je*

(i) $f''(c) > 0$, tada je $f(c)$ lokalni minimum,

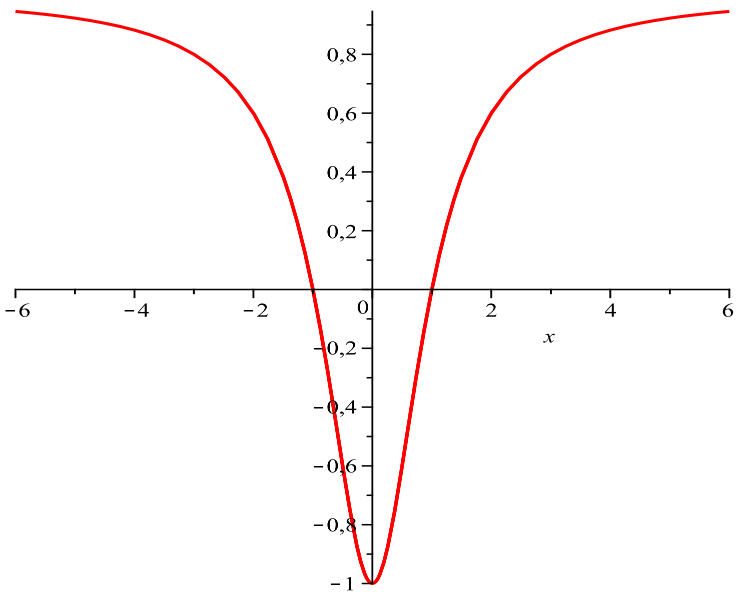
(ii) $f''(c) < 0$, tada je $f(c)$ lokalni maksimum.

Dokaz. Pretpostavimo da je $f''(c) > 0$. Prema definiciji derivacije imamo

$$f''(c) = \lim_{x\to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{x - c} > 0 \tag{8.51}$$

jer je $f'(c) = 0$. Jednostrani limesi u točki $x = c$ su jednaki, stoga je

$$f''(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{x - c} = \lim_{x\to c^-} \frac{f'(x)}{x - c} > 0. \tag{8.52}$$



Slika 8.4: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Nejednakost (8.52) implicira da postoji $\delta > 0$ takav da je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in (c, c+\delta)$ i $f'(x) < 0$ za svaki $x \in (c-\delta, c)$. Dakle, f' mijenja predznak u točki $x = c$ s negativnog na pozitivni, pa je prema teoremu 8.4 $f(c)$ lokalni minimum. Slično se pokazuje da je $f(c)$ lokalni maksimum ako je $f''(c) < 0$. ■

Primjer 8.10 *Odredite lokalne ekstreme funkcije*

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}. \tag{8.53}$$

Derivacija funkcije je dana sa

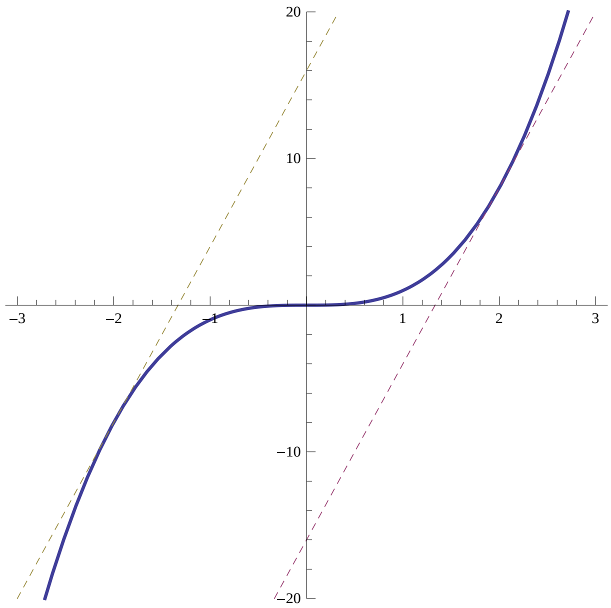
$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}. \tag{8.54}$$

Funkcija f ima kritičnu točku $c = 0$ u kojoj je $f'(c) = 0$. Nadalje,

$$f''(x) = \frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}, \tag{8.55}$$

što povlači $f''(c) = 4 > 0$. Dakle, $f(0) = -1$ je lokalni minimum funkcije što vidimo iz grafa funkcije prikazanog na slici 8.4. ■

Važno je napomenuti da se pomoću predznaka druge derivacije mogu ispitati samo ekstremi za koje je $f'(c) = 0$. Ako $f'(c)$ nije definirano, tada je potrebno ispitati predznak prve



Slika 8.5: Graf funkcije $f(x) = x^3$ je konkavan na $(-\infty, 0)$ i konveksan na $(0, \infty)$.

derivacije u okolini točke $x = c$. Na primjer, funkcija $f(x) = |x|$ nema derivaciju u $x = 0$. Međutim, $f'(x) = -1 < 0$ za $x < 0$ i $f'(x) = 1 > 0$ za $x > 0$ pa prema teoremu 8.4 f ima lokalni minimum u $x = 0$.

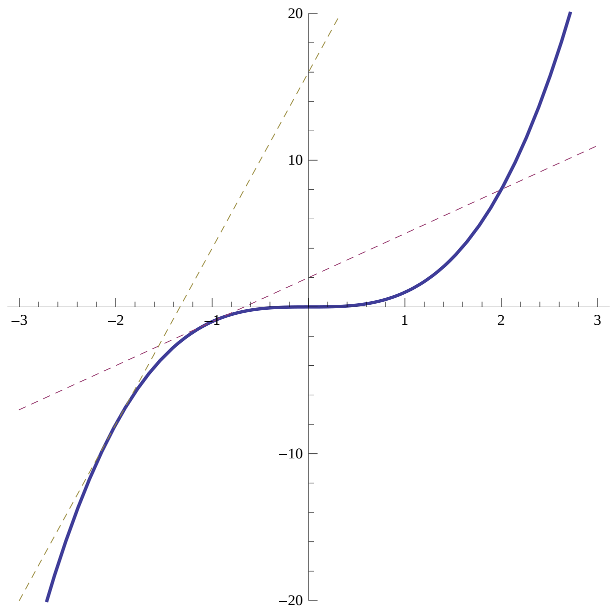
8.2.3 Konveksnost i konkavnost

Promotrimo graf funkcije $f(x) = x^3$ na slici 8.5. Funkcija f je rastuća na čitavoj domeni $(-\infty, \infty)$, ali je zakrivljenost krivulje $y = x^3$ različita na intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$. Uočavamo da graf funkcije leži ispod svake tangente na intervalu $(-\infty, 0)$, dok na intervalu $(0, \infty)$ leži iznad svake tangente. U prvom slučaju graf funkcije se krivi prema dolje, dok se u drugom slučaju krivi prema gore.

Definicija 8.2 *Kažemo da je graf funkcije f konveksan na intervalu (a, b) ako za svaki $x \in (a, b)$ graf funkcije leži iznad tangente u točki $(x, f(x))$. Ako graf funkcije leži ispod tangente, tada kažemo da je graf funkcije konkavan na intervalu (a, b).*

Prema ovoj definicije graf funkcije $f(x) = x^3$ je konkavan na $(-\infty, 0)$ i konveksan na $(0, \infty)$.

Promotrimo sada sliku 8.6. Primijetimo da se nagib tangente smanjuje kada se x pomiče s lijeva na desno u intervalu $(-\infty, 0)$. Zaključujemo da je prva derivacija padajuća, pa je



Slika 8.6: Nagib tangente na funkciju f pada u intervalu $(-\infty, 0)$ i raste u intervalu $(0, \infty)$.

$f''(x) < 0$ za svaki $x \in (-\infty, 0)$. Slično, prva derivacija raste na $(0, \infty)$ pa je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (0, \infty)$. Dakle, zakrivljenost krivulje je povezana s predznakom druge derivacije funkcije.

Teorem 8.6 *Neka je funkcija f dva puta derivabilna na intervalu (a, b).*

(i) Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je graf funkcije f konveksan na (a, b).

(ii) Ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je graf funkcije f konkavan na (a, b).

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$. Odaberimo $x_0 \in (a, b)$. Želimo pokazati da graf funkcije f leži iznad tangente u točki $(x_0, f(x_0))$, odnosno da je

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in (a, b) \setminus \{x_0\}. \tag{8.56}$$

Neka je $x_0 < x < b$. Funkcija f je neprekidna na $[x_0, x]$ i diferencijabilna na (x_0, x), pa prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji $c \in (x_0, x)$ takav da je

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{8.57}$$

Kako je $f'' > 0$ na intervalu (a, b), funkcija f' je rastuća na (a, b) što povlači $f'(x_0) < f'(c)$ jer je $x_0 < c$. Sada iz jednadžbe (8.57) slijedi

$$f'(x_0) < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{8.58}$$

odakle dobivamo

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{8.59}$$

Nejednakost (8.59) vrijedi za svaki $x_0 < x < b$, a slično se pokazuje da vrijedi i za svaki $a < x < x_0$. Stoga zaključujemo da (8.59) vrijedi za svaki $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Time je dokazano da je funkcija f konveksna na intervalu (a, b). Tvrdnja (ii) se dokazuje na sličan način. ■

Funkcija može biti po dijelovima konveksna ili konkavna. Na primjer, $f(x) = x^3$ je konkavna na $(-\infty, 0)$ i konveksna na $(0, \infty)$. Točka u kojoj se ovo svojstvo mijenja naziva se točka infleksije.

Definicija 8.3 *Kažemo da je c točka infleksije funkcije f ako je f neprekidna u c i ako postoji $\delta > 0$ takav da je f konveksna na $(c - \delta, c)$ i konkavna na $(c, c + \delta)$, ili obratno.*

Teorem 8.7 *Neka je f dva puta derivabilna na intervalu $(c - \delta, c + \delta)$. Ako f'' mijenja predznak u točki c, tada f ima infleksiju u c i $f''(c) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in (c - \delta, c)$ i $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (c, c + \delta)$. Prema teoremu 8.6 funkcija f ima infleksiju u točki c. Ako definiramo $g(x) = f'(x)$, tada je funkcija g padajuća na $(c - \delta, c)$ i rastuća na $(c, c + \delta)$. Stoga je $g(c)$ lokalni minimum. S obzirom da derivacija $g'(c) = f''(c)$ postoji, prema Fermatovom teoremu je $g'(c) = f''(c) = 0$. ■

Jednadžba $f''(c) = 0$ daje moguće točke infleksije, ali ovaj uvjet nije dovoljan. Na primjer, druga derivacija funkcije $f(x) = x^4$ iščezava u $x = 0$, ali $x = 0$ nije točka infleksije jer $f''(x)$ ne mijenja predznak u $x = 0$.

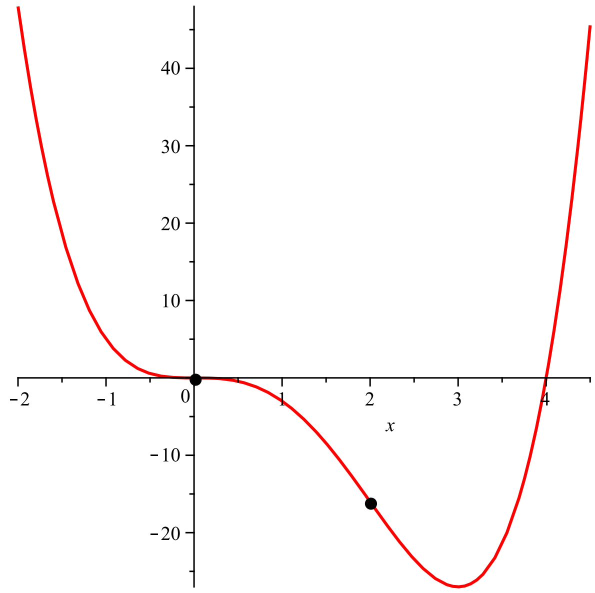
Primjer 8.11 *Odredite intervale zakrivljenosti i točke infleksije funkcije $f(x) = x^4 - 4x^3$.*

Druga derivacija funkcije je dana sa

$$f''(x) = 12x(x - 2). \tag{8.60}$$

Kako je $f''(x) = 0$ za $x = 0, 2$, potrebno je ispitati predznak druge derivacije na intervalima $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ i $(2, \infty)$. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0, \quad x \in (-\infty, 0), \\ f''(x) &< 0, \quad x \in (0, 2), \\ f''(x) &> 0, \quad x \in (2, \infty). \end{aligned} \tag{8.61}$$



Slika 8.7: Funkcija $f(x) = x^4 - 4x^3$ ima točke infleksije u $x = 0$ i $x = 2$.

Stoga je f konveksna na $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ i konkavna na $(0, 2)$. Iz ovoga slijedi da f ima točke infleksije u $x = 0$ i $x = 2$ (vidi sliku 8.7). ■

Primjer 8.12 *Odredite intervale zakrivljenosti i točke infleksije funkcija*

(i) $f(x) = x^{5/3}$,

(ii) $g(x) = 1/x$.

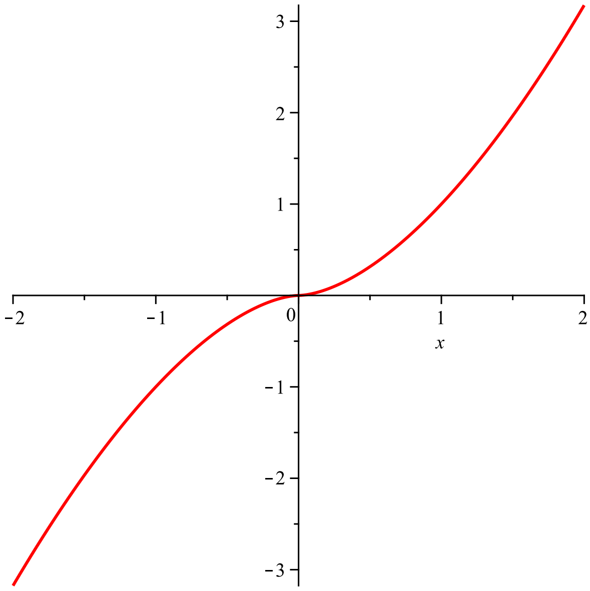
(i) Druga derivacija funkcije f je

$$f''(x) = \frac{10}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}. \tag{8.62}$$

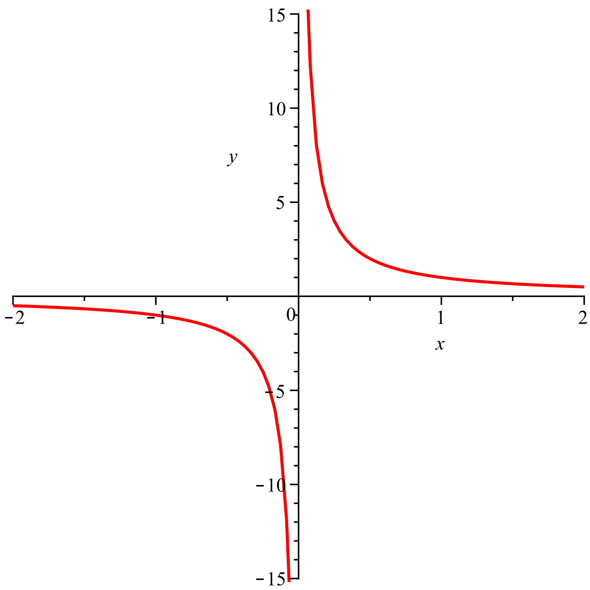
Dakle, $f''(x) < 0$ za svaki $x \in (-\infty, 0)$ i $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (0, \infty)$. Funkcija je konkavna na $(-\infty, 0)$ i konveksna na $(0, \infty)$ s točkom infleksije u $x = 0$ (vidi sliku 8.8).
(ii) Druga derivacija funkcije g je

$$g''(x) = \frac{2}{x^3} \tag{8.63}$$

iz čega slijedi da je $g''(x) < 0$ za svaki $x \in (-\infty, 0)$ i $g''(x) > 0$ za svaki $x \in (0, \infty)$. Odavde proizlazi da je g konkavna na $(-\infty, 0$ i konveksna na $(0, \infty)$. Medjutim, $x = 0$ nije točka infleksije jer $g(0)$ nije definirano pa g ima prekid u $x = 0$ (vidi sliku 8.9). ■



Slika 8.8: Funkcija $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ ima točku infleksije u $x = 0$.



Slika 8.9: Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ nema točku infleksije u $x = 0$ jer u toj točki ima prekid.

8.3 Skiciranje grafa funkcije

Primjenom rezultata koji su izloženi u ovom poglavlju možemo ispitati tok funkcije, i na taj način dobiti prilično dobru predodžbu o tome kako izgleda graf neke funkcije. Kod ispitivanja toka funkcije pomažu nam asimpotote koje pokazuju kako se funkcija ponaša u okolini singulariteta ili u "beskonačnosti" kada $x \to \pm\infty$.

Definicija 8.4 *Pravac $y = c$ je horizontalna asimptota funkcije f u lijevoj strani ako je*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = c. \tag{8.64}$$

Slično, $y = c$ je horizontalna asimptota u desnoj strani ako je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c. \tag{8.65}$$

Horizontalne asimptote u lijevoj i desnoj strani kraće nazivamo lijeva i desna asimptota, redom.

Primjer 8.13 *Odredite horizontalne asimptote funkcije*

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}. \tag{8.66}$$

Kako je

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1, \tag{8.67}$$

pravac $y = 1$ je horizontalna asimptota funkcije f u lijevoj i desnoj strani. Uočimo na slici 8.10 da se graf funkcije f približava pravcu $y = 1$ kada $x \to \pm\infty$, što daje geometrijsku predodžbu asimptote. ■

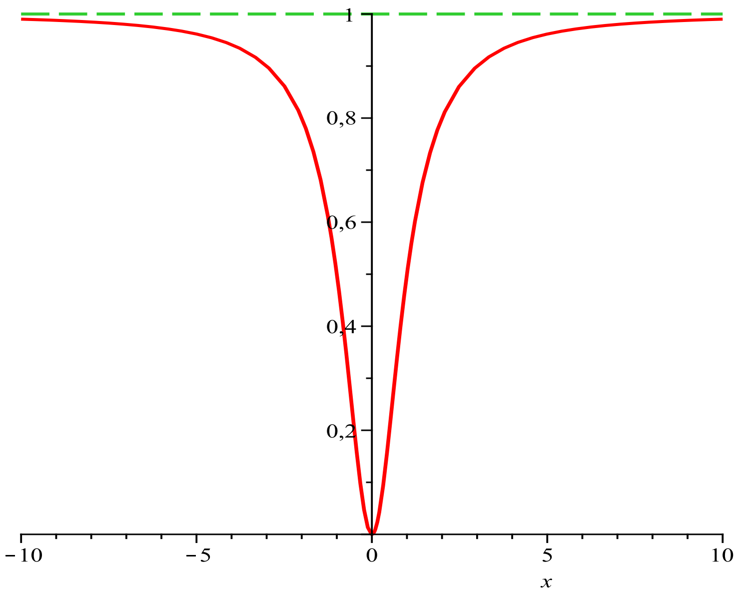
Definicija 8.5 *Pravac $x = c$ je vertikalna asimptota funkcije f u lijevoj strani ako je*

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty. \tag{8.68}$$

Slično, $x = c$ je vertikalna asimptota u desnoj strani ako je

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty. \tag{8.69}$$

Vertikalne asimptote javljaju se općenito u singularnim točkama funkcije gdje je nazivnik jednak nuli. Ako je pravac $y = c$ ($x = c$) horizontalna (vertikalna) asimptota u lijevoj i desnoj strani, takav pravac nazivamo jednostavno horizontalna (vertikalna) asimptota.



Slika 8.10: Funkcija $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ ima horizontalnu asimptotu $y = 1$.

Primjer 8.14 *Odredite vertikalne asimptote funkcije*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6}. \tag{8.70}$$

Funkciju možemo faktorizirati kao

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+3)}. \tag{8.71}$$

Lako se provjeri da je

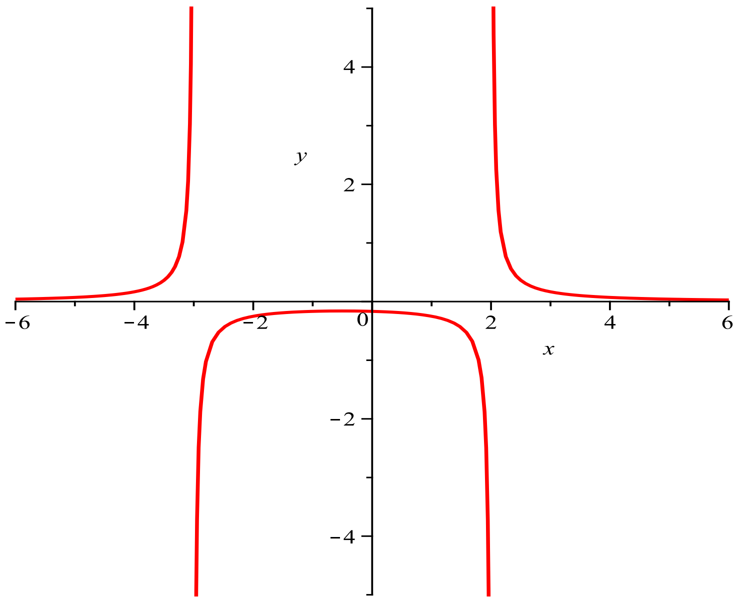
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)(x+3)} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)(x+3)} = \infty, \tag{8.72}$$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{1}{(x-2)(x+3)} = \infty, \qquad \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{(x-2)(x+3)} = -\infty. \tag{8.73}$$

U svakoj drugoj točki funkcija ima konačan limes. Dakle, pravci $x = 2$ i $x = -3$ su horizontalne asimptote funkcije f što se jasno vidi na slici 8.11. Primijetimo da je

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2 + x - 6} = 0, \tag{8.74}$$

pa je pravac $y = 0$ horizontalna asimptota. ■



Slika 8.11: Funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$ ima vertikalne asimptote $x = 2$ i $x = -3$, te horizontalnu asimptotu $y = 0$.

Kod ispitivanja toka funkcije važno je odrediti neka karakteristična svojstva grafa kao što su kritične točke i točke infleksije, te intervale monotonosti i intervale na kojima je funkcija koveksna ili konkavna. Time dobivamo mnogo bolji uvid u svojstva funkcije od samog promatranja tabličnih vrijednosti i ucrtavanja odgovarajućih točaka u koordinatni sustav. Pri tome je dobro držati se sljedećeg redoslijeda:

(1) odredite domenu funkcije,

(2) odredite intervale monotonosti i kritične točke,

(3) odredite intervale na kojima je funkcija konveksna ili konkavna i točke infleksije,

(4) odredite asimpotote funkcije.

Asimpote funkcije se mogu odrediti u bilo kojem koraku ispitivanja toka. Informacije iz točaka (1)–(4) možemo povezati u jednu cjelinu i približno točno skicirati graf funkcije.

Primjer 8.15 *Skicirajte graf funkcije*

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}. \tag{8.75}$$

Domena funkcije je skup $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ jer f nije definirana u $x = \pm 1$. U ovim točkama f ima prekid druge vrste jer je

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} = \infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} = -\infty, \tag{8.76}$$

i

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} = \infty. \tag{8.77}$$

Stoga su pravci $x = -1$ i $x = 1$ vertikalne asimptote. Nadalje,

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2, \tag{8.78}$$

pa je pravac $y = 2$ horizontalna asimptota u lijevoj i desnoj strani.

Odredimo sada intervale monotonosti i lokalne ekstreme. Derivacija funkcije je dana sa

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}. \tag{8.79}$$

Kritična točka funkcije je $x = 0$ jer je $f'(0) = 0$. Primijetimo da $x = \pm 1$ nisu kritične točke jer se ne nalaze u domeni funkcije f. Predznak prve derivacije je potrebno ispitati na intervalima $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ i $(1,\infty)$. Lako se provjeri da je

$$f'(x) > 0, \quad x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0), \tag{8.80}$$

$$f'(x) < 0, \quad x \in (0,1) \cup (1,\infty). \tag{8.81}$$

Dakle, funkcija f je rastuća na $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$ i padajuća na $(0,1) \cup (1,\infty)$. U točki $x = 0$ funkcija ima lokalni maksimum $f(0) = 0$.

Promotrimo intervale zakrivljenosti i točke infleksije. Druga derivacija funkcije je

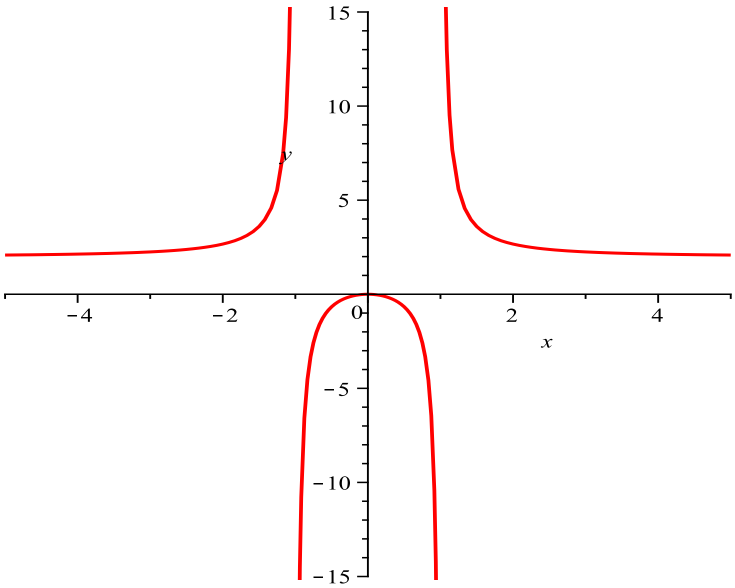
$$f''(x) = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}. \tag{8.82}$$

Predznak druge derivacije ovisi samo o faktoru $(x^2-1)^3$. Ako je $|x| < 1$, tada je $x^2 - 1 < 0$ što povlači $(x^2-1)^3 < 0$. Slično, $|x| > 1$ implicira $(x^2-1)^3 > 0$. Dakle,

$$f''(x) < 0, \quad x \in (-1,1), \tag{8.83}$$

$$f''(x) > 0, \quad x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty). \tag{8.84}$$

Zaključujemo da je f konkavna na $(-1,1)$ i konveksna na $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Iako funkcija mijenja zakrivljenosti u točkama $x = \pm 1$, ovo nisu točke infleksije jer se ne nalaze u domeni funkcije. Ispravnost ovih zaključaka možemo provjeriti na slici 8.12. ■



Slika 8.12: $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$.

Primjer 8.16 *Skicirajte graf funkcije*

$$f(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}. \tag{8.85}$$

Domena funkcije je skup $D(f) = (0, \infty)$ jer je logaritamska funkcija $\ln(x)$ definirana za $x > 0$. Derivacija funkcije je dana sa

$$f'(x) = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}. \tag{8.86}$$

Derivacija iščezava u točki $x = e^{3/2}$, stoga predznak derivacije treba ispitati na intervalima $(0, e^{3/2})$ i $(e^{3/2}, \infty)$. Imamo

$$f'(x) < 0, \quad x \in (0, e^{3/2}), \tag{8.87}$$

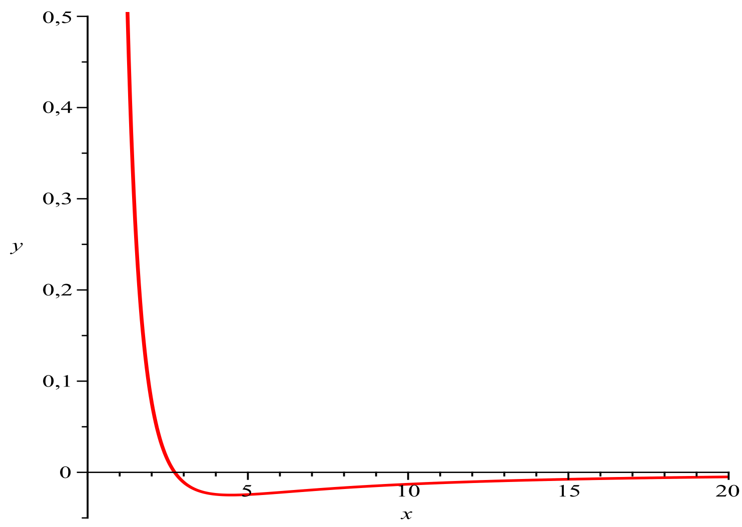
$$f'(x) > 0, \quad x \in (e^{3/2}, \infty), \tag{8.88}$$

stoga je f padajuća na $(0, e^{3/2})$ i rastuća na $(e^{3/2}, \infty)$. Funkcija ima lokalni minimum u točki $x = e^{3/2}$,

$$f(e^{\frac{3}{2}}) = -\frac{1}{2e^3}. \tag{8.89}$$

Deriviranjem (8.86) dobivamo

$$f''(x) = \frac{11-6\ln(x)}{x^4}. \tag{8.90}$$



Slika 8.13: $f(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.

Druga derivacija ima nultočku u $x = e^{11/6}$ pa njezin predznak treba ispitati na intervalima $(0, e^{11/6})$ i $(e^{11/6}, \infty)$. Lako se provjeri da je

$$f''(x) > 0, \quad x \in (0, e^{11/6}), \tag{8.91}$$

$$f''(x) < 0, \quad x \in (e^{11/6}, \infty). \tag{8.92}$$

Dakle, f je konveksna na $(0, e^{11/6})$ i konkavna na $(e^{11/6}, \infty)$. Odavde slijedi da funkcija ima točku infleksije u $x = e^{11/6}$.

Odredimo sada asimptote funkcije. Primijetimo da je

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln(x)}{x^2} = \infty \tag{8.93}$$

jer $\ln(x) \to -\infty$ i $x^2 \to 0$ kada $x \to 0^+$. Stoga je pravac $x = 0$ vertikalna asimptota u desnoj strani. Funkcija nema vertikalnu asimptotu u lijevoj strani jer f nije definirana za $x < 0$. Nadalje, L'Hospitalovo pravilo daje

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\ln(x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = 0 \tag{8.94}$$

što povlači da je pravac $y = 0$ horizontalna asimptota u desnoj strani. Graf funkcije f prikazan je na slici 8.13. ■

Poglavlje 9

Nizovi i redovi funkcija

U ovom poglavlju ćemo pojmove niza i reda realnih brojeva proširiti na realne funkcije. Definirat ćemo konvergenciju po točkama i uniformnu konvergenciju, i pokazati neke važne posljedice uniformne konvergencije. Posebno ćemo razmatrati redove potencija i razvoj funkcije u Taylorov red.

9.1 Nizovi realnih funkcija

Definicija 9.1 *Niz funkcija $\{f_n(x)\}$ konvergira po točkama prema funkciji $f(x)$ na intervalu I ako za svaki $x_0 \in I$ niz realnih brojeva $\{f_n(x_0)\}$ konvergira prema realnom broju $f(x_0)$.*

Dakle, $\{f_n(x)\}$ konvergira po točkama prema $f(x)$ na intervalu I ako za dani $x_0 \in I$ za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{9.1}$$

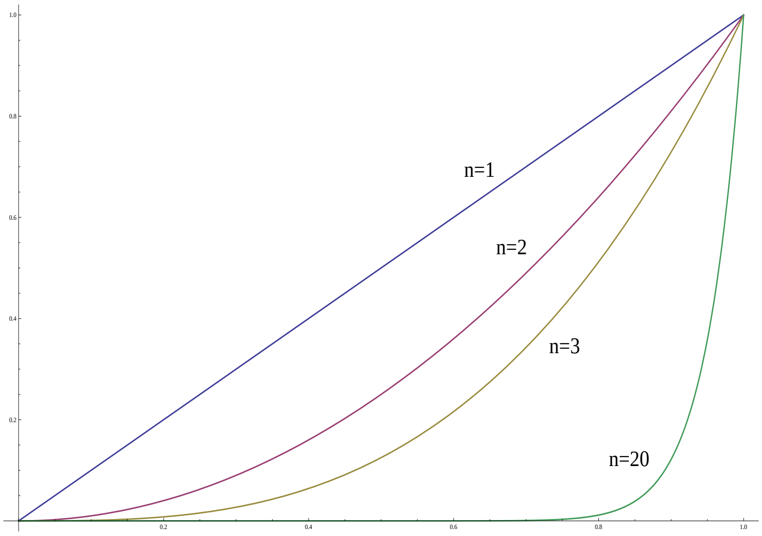
U ovoj definiciji promatramo konvergenciju niza $\{f_n(x)\}$ u svakoj točki $x_0 \in I$ zasebno, a n_0 općenito ovisi o ε i x_0.

Primjer 9.1 *Promotrimo funkcije $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, na intervalu $[0,1]$. Pokažimo da niz $\{f_n(x)\}$ konvergira po točkama prema funkciji*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases} \tag{9.2}$$

Neka je $x \in (0,1)$. Za odabrani $\varepsilon > 0$ definirajmo $\alpha = \ln(\varepsilon)/\ln(x)$. Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > \alpha$. Tada je $x^{n_0} < x^\alpha = \varepsilon$ što povlači da za svaki $n > n_0$ vrijedi

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < x^{n_0} < \varepsilon. \tag{9.3}$$



Slika 9.1: $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, 20$.

Dakle, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ za svaki $x \in (0, 1)$. U rubnim točkama intervala imamo $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0 = f(0)$ i $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1 = f(1)$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ za svaki $x \in [0, 1]$. ■

Slika 9.1 pokazuje nekoliko članova niza $\{f_n(x)\}$. Uočavamo da niz $\{f_n(x)\}$ konvergira prema nuli sporije kada je x blizu 1. Stoga izbor broja n_0 ovisi ne samo o $\varepsilon > 0$ već i o točki $x \in [0, 1]$. Što je x bliže 1, to je za isti $\varepsilon > 0$ potrebno odabrati veći n_0. Prirodno se postavlja pitanje da li postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za svaki $x \in [0, 1]$, odnosno da je

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{9.4}$$

Lako se vidi da je odgovor na ovo pitanje negativan jer za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} x^n = 1. \tag{9.5}$$

Dakle, za $0 < \varepsilon < 1$ ne postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{za svaki} \quad x \in [0, 1]. \tag{9.6}$$

Ovo razmatranje motivira sljedeću definiciju.

Definicija 9.2 *Kažemo da niz funkcija $\{f_n(x)\}$ konvergira uniformno prema funkciji $f(x)$*

na intervalu I ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da da

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{9.7}$$

Drugim riječima, $\{f_n(x)\}$ konvergira uniformno prema $f(x)$ na I ako je

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{9.8}$$

Uniformna konvergencija se može geometrijski predočiti na sljedeći način. Zamislimo prugu širine 2ε oko grafa funkcije $f(x)$:

$$P = \big\{(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \mid x \in I\big\}. \tag{9.9}$$

Ako $\{f_n(x)\}$ konvergira uniformno prema $f(x)$ na I, tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da graf funkcije $f_n(x)$ leži unutar pruge P za svaki $n > n_0$.

Uniformna konvergencija implicira konvergenciju po točkama: ako $\{f_n(x)\}$ konvergira uniformno prema $f(x)$ na I, tada $\{f_n(x)\}$ konvergira po točkama prema $f(x)$ na I, ali obrat općenito ne vrijedi. Da bismo odredili da li niz $\{f_n(x)\}$ konvergira uniformno na I potrebno je prvo odrediti limes po točkama $f(x)$, a zatim ispitati da li $f_n(x) \to f(x)$ uniformno na I.

Primjer 9.2 *Neka su funkcije $f_n(x) = (1 - x^n)/(1 - x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ definirane na intervalu $(-1, 1)$. Odredite da li niz $\{f_n(x)\}$ konvergira uniformno na $(-1, 1)$.*

Za svaki $x \in (-1, 1)$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}. \tag{9.10}$$

Dakle, $\{f_n(x)\}$ konvergira po točkama prema funkciji $f(x) = 1/(1 - x)$ na $(-1, 1)$. Promotrimo

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1 - x^n}{1 - x} - \frac{1}{1 - x}\right| = \frac{|x|^n}{1 - x}. \tag{9.11}$$

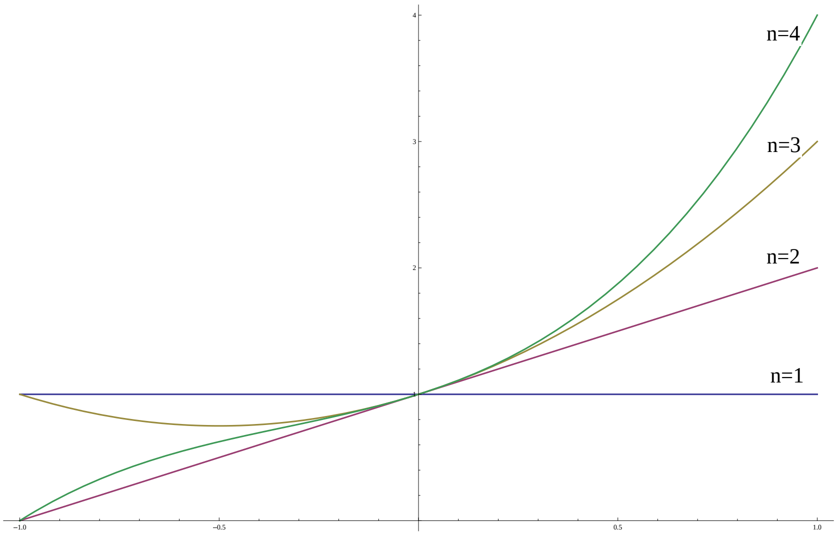
Funkcija $y = |x|^n/(1 - x)$ nije ograničena na intervalu $(-1, 1)$ jer je

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x|^n}{1 - x} = \infty. \tag{9.12}$$

Stoga je

$$\sup_{x \in (-1,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (-1,1)} \frac{|x|^n}{1 - x} = \infty, \tag{9.13}$$

što povlači da $\{f_n(x)\}$ ne konvergira uniformno ka $f(x)$ na $(-1, 1)$. Dakle, niz $\{f_n(x)\}$ konvergira po točkama prema $f(x) = 1/(1-x)$ na $(-1, 1)$, ali konvergencija nije uniformna. Nekoliko članova ovog niza prikazano je na slici 9.2. ■



Slika 9.2: $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$, $n = 1, 2, 3, 4$.

Primjer 9.3 *Odredite da li niz funkcija* $\left\{\frac{x}{nx+1}\right\}$ *konvergira uniformno na* $[0, 1]$.

Neka je $f_n(x) = x/(nx + 1)$. Za svaki $x \in [0, 1]$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{nx+1} = 0, \tag{9.14}$$

stoga niz $\{f_n(x)\}$ konvergira po točkama prema $f(x) = 0$ na $[0, 1]$. Primijetimo da je

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{nx+1} < \frac{x}{nx} = \frac{1}{n} \tag{9.15}$$

za svaki $x \in [0, 1]$ što povlači

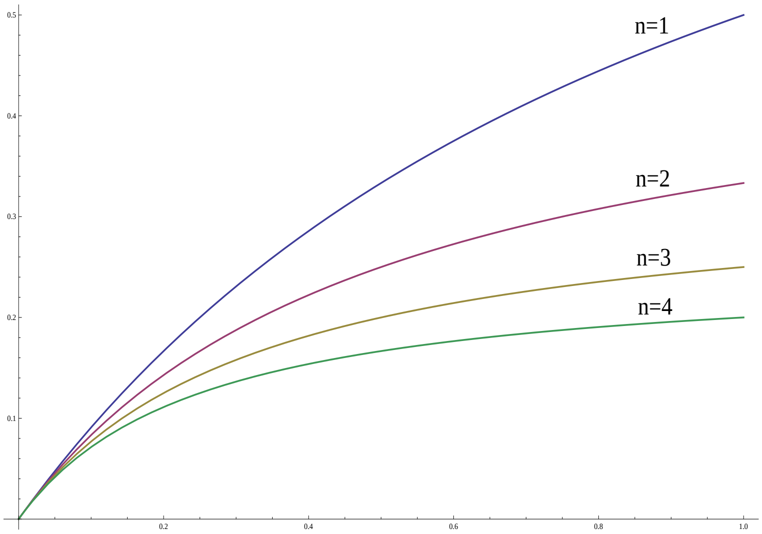
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{9.16}$$

Dakle, niz $\{f_n(x)\}$ konvergira uniformno prema $f(x) = 0$ na $[0, 1]$ (vidi sliku 9.3). ■

U prethodnim primjerima limes niza $\{f_n(x)\}$ smo mogli eksplicitno odrediti. Medjutim, čak i kada limes nije poznat, uniformna konvergencije se može ispitati pomoću Cauchyevog kriterija.

Teorem 9.1 (Cauchyev kriterij) *Niz* $\{f_n(x)\}$ *konvergira uniformno na* I *ka funkciji* $f(x)$ *ako i samo ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da*

$$n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{9.17}$$



Slika 9.3: $f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$, $n = 1, 2, 3, 4$.

Dokaz. Pretpostavimo da $\{f_n(x)\}$ konvergira uniformno ka funkciji $f(x)$ na I. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.18}$$

Odavde slijedi da za svaki $n, m > n_0$ imamo

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| &= \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in I} |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{9.19}$$

Pretpostavimo sada da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi (9.17). Odaberimo $x_0 \in I$. Tada za sve $n, m > n_0$ imamo

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon \tag{9.20}$$

što povlači da je $\{f_n(x_0)\}$ Cauchyev niz. Iz potpunosti skupa realnih brojeva slijedi da postoji realni broj $f(x_0)$ takav da

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0). \tag{9.21}$$

Jednadžba (9.21) definira funkciju $f(x)$ na intervalu I koja je limes po točkama niza $\{f_n(x)\}$. Želimo pokazati da niz $\{f_n(x)\}$ konvergira uniformno prema $f(x)$ na I. Odaberimo $\varepsilon > 0$.

Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n, m > n_0$ imamo

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.22}$$

Nadalje, iz (9.21) slijedi da za svaki $x \in I$ postoji $m_x > n_0$ takav da je

$$|f_{m_x}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.23}$$

Ako je sada $n > n_0$, tada (9.22) i (9.23) impliciraju

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_{m_x}(x) + f_{m_x}(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \tag{9.24}$$

za svaki $x \in I$. S obzirom da izbor n_0 ne ovisi o točki $x \in I$, zaključujemo da niz $\{f_n(x)\}$ konvergira uniformno prema $f(x)$ na I. ■

9.2 Redovi realnih funkcija

Pojmovi konvergencije po točkama i uniformne konvergencije mogu se proširiti na redove funkcija koje su definirane na danom intervalu I.

Definicija 9.3 *Red funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergira po točkama ka funkciji $f(x)$ na intervalu I ako za svaki $x_0 \in I$ niz parcijalnih suma $S_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_0)$ konvergira ka $f(x_0)$.*

Ako $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergira po točkama ka $f(x)$ na I, tada pišemo

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{za svaki} \quad x \in I. \tag{9.25}$$

Definicija 9.4 *Kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergira uniformno ka funkciji $f(x)$ na intervalu I ako niz parcijalnih suma $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ konvegira uniformno ka $f(x)$ na I.*

Radi ilustracije promotrimo gemetrijski red $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$, $|x| < 1$. Parcijalne sume su dane sa

$$S_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x} \tag{9.26}$$

pa iz primjera 9.2 znamo da niz $\{S_n(x)\}$ konvergira po točkama ka funkciji $f(x) = 1/(1-x)$ na intervalu $(-1, 1)$. U svakoj točki $x_0 \in (-1, 1)$ suma reda iznosi

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_0^{k-1} = \frac{1}{1 - x_0}. \tag{9.27}$$

Medjutim, kako je

$$\sup_{x\in(-1,1)} |S_n(x) - f(x)| = \infty, \tag{9.28}$$

konvergencija nije uniformna na $(-1, 1)$.

Uniformna konvergencija može se jednostavno ispitati pomoću sljedećeg kriterija koji nazivamo Weierstrassov kriterij.

Teorem 9.2 (Weierstrassov kriterij) *Neka su $f_k\colon I \to \mathbb{R}$, $k \geq 1$, funkcije za koje postooje $M_k > 0$ takvi da je*

$$\sup_{x\in I} |f_k(x)| < M_k. \tag{9.29}$$

Ako red realnih brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ konvergira, tada red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergira uniformno na I.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema pretpostavci red $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ konvergira pa niz parcijalnih suma $s_n = \sum_{k=1}^{n} M_k$ tvori Cauchyev niz. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $m > n > n_0$ vrijedi

$$|s_m - s_n| = \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon. \tag{9.30}$$

Definirajmo $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Tada za $m > n > n_0$ imamo

$$|S_m(x) - S_n(x)| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| < \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon \quad \text{za svaki} \quad x \in I. \tag{9.31}$$

Ovo implicira

$$\sup_{x\in I} |S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon \tag{9.32}$$

za svaki $n, m > n_0$, pa prema Cauchyevom kriteriju 9.1 niz $\{S_n(x)\}$ konvergira uniformno na I. Dakle, red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergira uniformno na I. ■

Naglasimo da kod Weierstrassovog kriterija ne treba poznavati sumu reda da bismo ispitali uniformnu konvergenciju. Potrebno je samo funkcije $f_k(x)$ omeđiti na I članovima nekog konvergentnog reda realnih brojeva.

Primjer 9.4 *Pokažite da red*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2} \tag{9.33}$$

konvergira uniformno na $(-\infty, \infty)$.

Članovi reda su ograničeni sa

$$\left|\frac{\sin(kx)}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}, \quad x \in (-\infty, \infty). \tag{9.34}$$

Kako red $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergira, prema Weierstrassovom kriteriju red $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/k^2$ konvergira uniformno na $(-\infty, \infty)$. ■

Primjer 9.5 *Ispitajte da li red*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k e^{-kx} \tag{9.35}$$

konvergira uniformno na $[0, 2]$.

Neka je $f_k(x) = x^k e^{-kx}$. Odredimo maksimalnu vrijednost $f_k(x)$ na intervalu $[0, 2]$. Derivacija funkcije

$$f_k'(x) = k\, x^k e^{-kx} \left(\frac{1}{x} - 1\right) \tag{9.36}$$

ima nultočku u $x = 1$, stoga $f_k(x)$ ima maksimalnu vrijednost u jednoj od točaka $x = 0, 1$ ili 2. Vrijednosti funkcije u ovim točkama su $f_k(0) = 0$, $f_k(1) = e^{-k}$ i $f_k(2) = 2^k e^{-2k}$. Lako se vidi da je $f_k(0) < f_k(2) < f_k(1)$ pa je

$$|f_k(x)| \le e^{-k} \quad \text{za svaki} \quad x \in [0, 2]. \tag{9.37}$$

Red $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ konvergira jer je $0 < e^{-1} < 1$ što prema Weierstrassovom kriteriju povlači da red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergira uniformno na $[0, 2]$. ■

9.3 Važnost uniformne konvergencije

Ako niz ili red funkcija ima odredjena svojstva, prirodno je postaviti pitanje da li se ta svojstva prenose na limes niza ili sumu reda. Na primjer, ako su članovi niza neprekidne funkcije, je li limes niza također neprekidna funkcija? U odgovoru na ovo i slična pitanja važnu ulogu ima uniformna konvergencija.

Promotrimo iz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \ge 1$, iz primjera 9.1. Svaki član niza je neprekidna funkcija na intervalu $[0, 1]$, i niz konvergira po točkama prema funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases} \tag{9.38}$$

Funkcija f očigledno ima prekid u točki $x = 1$, pa se neprekidnost ne prenosi na limes niza. Medjutim, sljedeći važan rezultat daje uvjet pod kojim je limes niza neprekidna funkcija.

Teorem 9.3 *Neka je $\{f_n(x)\}$ niz neprekidnih funkcija koji konvergira uniformno ka $f(x)$ na intervalu I. Tada je $f(x)$ neprekidna na I.*

Dokaz. Odaberimo $x_0 \in I$ i pretpostavimo da je x_0 unutarnja točka intervala I. Želimo pokazati da je $f(x)$ neprekidna u x_0. Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog pretpostavke o uniformnoj konvergenciji postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9.39}$$

Funkcija $f_n(x)$ je neprekidna u x_0 pa postoji $\delta > 0$ takav da je

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za svaki} \quad x \in K_\delta(x_0) \tag{9.40}$$

(δ možemo odabrati dovoljno malen tako da je $K_\delta(x_0) \subset I$). Sada zbog (9.39) i (9.40) za svaki $|x - x_0| < \delta$ vrijedi

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{9.41}$$

Time je dokazano da je $f(x)$ neprekidna u x_0. Ako je x_0 rubna točka intervala I, tada dokaz modificiramo tako da neprekidnost u (9.40) i (9.41) zamijenimo neprekidnošću slijeva ili zdesna. Kako je x_0 proizvoljno odabrana točka u I, $f(x)$ je neprekidna na I. ■

Korolar 9.1 *Ako su funkcije $f_k(x)$, $k \geq 1$, neprekidne na intervalu I i red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergira uniformno na I ka $f(x)$, tada je $f(x)$ neprekidna na I.*

Primjer 9.6 *Pokažite da je funkcija definirana s $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ neprekidna na $\mathbb{R}$.*

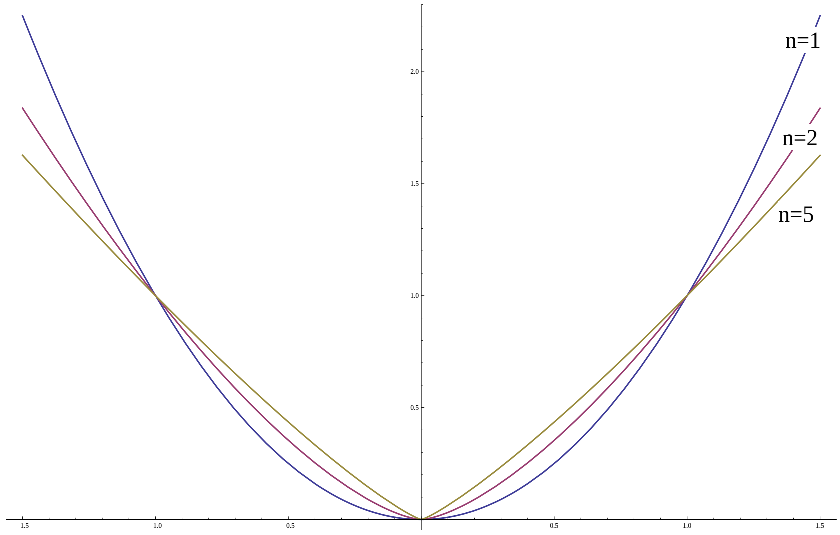
Neka je $M > 0$. Želimo pokazati da red $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ konvergira uniformno na $[-M, M]$. Primijetimo da je

$$\left|\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{M^k}{k!} \quad \text{za svaki} \quad x \in [-M, M]. \tag{9.42}$$

Red realnih brojeva $\sum_{k=0}^{\infty} M^k/k!$ konvergira prema D'Alabertovom kriteriju jer je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{M^{k+1}/(k+1)!}{M^k/k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{M}{k+1} = 0. \tag{9.43}$$

Sada Weierstrassov kriterij povlači da red $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ konvergira uniformno na $[-M, M]$. Kako je $M > 0$ odabran proizvoljno, red konvergira uniformno na $\mathbb{R}$. Interesantno je napomenuti da red $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ definirana eksponencijalnu funkciju e^x na skupu $\mathbb{R}$, i primjer je



Slika 9.4: $f_n(x) = |x|^{(1+1/n)}$, $n = 1, 2, 5$.

tzv. Taylorovog reda o kojem ćemo govoriti u sljedećem poglavlju. ■

Veza izmedju uniformne konvergencije i diferencijabilnosti je nešto složenija od veze izmedju uniformne konvergencije i neprekidnosti. Sljedeći primjer pokazuje da niz diferencijabilnih funkcija koji konvergira uniformno ne mora imati limes koji je diferencijabilna funkcija.

Primjer 9.7 *Neka je $f_n(x) = |x|^{1+1/n}$, $n \geq 1$. Funkcije $f_n(x)$ su diferencijabilne na $[-1, 1]$,*

$$f_n'(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{\frac{1}{n}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\left(1 + \frac{1}{n}\right) (-x)^{\frac{1}{n}}, & x < 0, \end{cases} \tag{9.44}$$

i niz $\{f_n(x)\}$ konvergira uniformno prema $f(x) = |x|$ na $[-1, 1]$ (vidi sliku 9.4). Medjutim, $f(x)$ nije diferencijabilna na $[-1, 1]$ jer $f'(0)$ ne postoji. ■

Sljedeći teorem koji navodimo bez dokaza nam daje uvjete pod kojima niz diferencijabilnih funnkcija ima diferencijabilni limes.

Teorem 9.4 *Neka je $\{f_n(x)\}$ niz funkcija koje imaju neprekidne derivacije na intervalu $[a, b]$. Pretpostavimo da niz $\{f_n(x)\}$ konvergira prema $f(x)$ na $[a, b]$ i da $\{f_n'(x)\}$ konvergira uniformno prema $g(x)$ na $[a, b]$. Tada je $f(x)$ diferencijabilna funkcija na $[a, b]$ i vrijedi $f'(x) = g(x)$, odnosno*

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x). \tag{9.45}$$

Drugim riječima, ako su ispunjeni uvjeti teorema 9.4, tada smijemo zamijeniti limes i derivaciju. U primjeru 9.7 funkcije $f_n'(x)$ su neprekidne na $[-1,1]$ i konvergiraju ka

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \tag{9.46}$$

Međutim, konvergencija nije uniformna pa $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ nije diferencijabilna na $[-1,1]$ (jer $f'(0)$ ne postoji). Kao posljedicu teorema 9.4 sobivamo uvjete pod kojima smijemo zamijeniti sumu reda i derivaciju.

Korolar 9.2 *Neka su $f_k(x)$ funkcije s neprekidnim derivacijama na intervalu $[a,b]$ za svaki $k \geq 1$. Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergira ka $f(x)$ na $[a,b]$ i red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ konvergira uniformno ka $g(x)$ na $[a,b]$, tada je $f'(x) = g(x)$, odnosno*

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x). \tag{9.47}$$

Primjer 9.8 *Odredite derivaciju reda*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}. \tag{9.48}$$

Funkcije $f_n(x) = \sin(nx)/n^3$ su ograničene na $\mathbb{R}$ jer je

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9.49}$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ konvergira pa prema Weierstrassovom kriteriju red (9.48) definira neprekidnu funkciju na $\mathbb{R}$. Prema istom kriteriju red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konvergira uniformno na $\mathbb{R}$ jer vrijedi

$$|f_n'(x)| = \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9.50}$$

Korolar 9.2 povlači da je

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(nx)}{n^3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}. \tag{9.51}$$

■

9.4 Redovi potencija i Taylorov red

Od posebnog značaja u matematičkoj analizi su redovi potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \tag{9.52}$$

gdje je x varijabla, x_0 je odabrana točka i a_n su koeficijenti reda. Pomoću redova potencija možemo prikazati različite funkcije koje imaju važnu ulogu u nekim granama matematike i fizike. Na primjer, red

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \tag{9.53}$$

definira Besselovu funkciju reda nula koja se pojavljuje kod opisa gibanja planeta i titranja kružne membrane.

Za svaku fiksnu vrijednost varijable x red (9.52) predstavlja red realnih brojeva čiju konvergenciju možemo ispitati pomoću nekog od kriterija iz poglavlja 3. Skup svih realnih brojeva x za koje red (9.52) konvergira nazivamo područje konvergencije reda. Primijetimo da svaki red konvergira u točki $x = x_0$.

Primjer 9.9 *Odredite područje kovergencije Besselove funkcije $J_0(x)$.*

Neka je

$$a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{9.54}$$

Tada je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\,\frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right| = \frac{x^{2n}x^2}{2^{2n}4(n+1)^2(n!)^2}\,\frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}} = \frac{x^2}{4(n+1)^2}. \tag{9.55}$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{4(n+1)^2} = 0 \tag{9.56}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, što prema D'Alabertovom kriteriju povlači da je područje konvergencije Besselove funkcije čitav skup $\mathbb{R}$. ■

Primjer 9.10 *Odredite za koje vrijednosti varijable x redovi*

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n, \qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n} \tag{9.57}$$

konvergiraju.

(a) Neka je $a_n = n!\, x^n$. Ako je $x \neq 0$, tada je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty, \tag{9.58}$$

pa red divergira za svaki $x \neq 0$. Zaključujemo da red konvergira samo u točki $x = 0$.

(b) Definirajmo $a_n = (x-3)^n/n$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\frac{n}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x-3| = |x-3|. \tag{9.59}$$

Prema D'Alambertovom kriteriju red (b) konvergira ako je $|x-3| < 1$ i ako je $|x-3| > 1$. Dakle, red konvergira za $2 < x < 4$ i divergira za $x < 2$ ili $x > 4$. D'Alambertov kriterij ne daje informaciju o konvergenciji kada je $|x-3| = 1$, odnosno u točkama $x = 2, 4$. Stoga ovaj slučaj treba posebno ispitati. U točki $x = 2$ dobivamo alternirajući red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ koji prema Leibnizovom kriteriju konvergira. Ako je $x = 4$, tada imamo harmojski red $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ koji divergira. Zaklǰcujemo da je područje konvergencije reda (b) interval $[2, 4)$.
■

Svakom redu potencija možemo pridružiti radijus konvergencije koji odredjuje područje konvergencije reda.

Definicija 9.5 *Radijus konvergencije reda potencija* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *je definiran sa*

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}. \tag{9.60}$$

U posebnim slučajevima kada je $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$ *ili* 0 *definiramo* $R = 0$ *ili* ∞.

Teorem 9.5 *Neka je* R *radijus konvergencije reda potencija* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$.

(i) Red konvergira apsolutno na skupu $|x-x_0| < R$ *i divergira na skupu* $|x-x_0| > R$.

(ii) Red konvergira apsolutno i uniformno na skupu $|x-x_0| \leq \rho$ *za svaki* $0 < \rho < R$.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $|x-x_0| < R$, $R > 0$, i definirajmo $b_k = |a_k|\,|x-x_0|^k$. Tada je

$$\limsup \sqrt[k]{b_k} = |x-x_0| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x-x_0|}{R} < 1, \tag{9.61}$$

pa prema Cauchyevom kriteriju 3.7 red $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x-x_0)^k|$ konvergira. Dakle, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ konvergira apsolutno za svaki $|x-x_0| < R$.

Ako je $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, tada iz relacije (9.61) slijedi $\limsup \sqrt[k]{b_k} = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Prema Cauchyevom kriteriju red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ konvergira apsolutno na $\mathbb{R}$. U tom slučaju je po definiciji $R = \infty$. Ako je $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$, tada nejednakost (9.61) ne vrijedi ni za jedan $x \neq x_0$. U tom slučaju je $R = 0$, i red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ konvergira samo u točki $x = x_0$.

Pretpostavimo sada da je $|x - x_0| > R$. Tada je $\limsup \sqrt[k]{|a_k|}\,|x - x_0| > 1$ što implicira da postoji niz $n_1 < n_2 < \ldots$ takav da je

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\,|x - x_0| > 1 \quad \text{za svaki} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{9.62}$$

Odavde slijedi da je $|a_{n_k}|\,|x - x_0|^{n_k} > 1$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, stoga nije ispunjen nužan uvjet za konvergenciju reda prema kojem je $\lim_{k\to\infty} a_k (x - x_0)^k = 0$. Dakle, red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ divergira .

(ii) Neka je $0 < \rho < R$. Ako je $|x - x_0| \leq \rho$, tada je

$$|a_k(x - x_0)^k| \leq |a_k|\,\rho^k, \quad k \geq 0. \tag{9.63}$$

Red $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\rho^k$ konvergira prema Cauchyevom kriteriju jer je

$$\limsup \sqrt[k]{|a_k|\,\rho^k} = \rho \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{\rho}{R} < 1. \tag{9.64}$$

Sada nejednakost (9.63) implicira da red $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k (x - x_0)^k|$ konvergira uniformno prema Weierstrassovom kriteriju. Dakle, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ konvergira apsolutno i uniformno na $|x - x_0| \leq \rho$. ■

U dokazu teorema 9.5 umjesto Cauchyevog mogli smo koristiti D'Alambertov kriterij koji daje radijus konvergencije

$$\frac{1}{R} = \limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|. \tag{9.65}$$

Ako je $\limsup |a_{k+1}/a_k| = \infty$, tada definiramo $R = 0$ i ako je $\limsup |a_{k+1}/a_k| = 0$, tada definiramo $R = \infty$. Teorem 9.5 ništa ne kazuje o konvergenciji reda $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ kada je $|x-x_0| = R$. Red može ali ne mora konvergirati u točkama $x = x_0-R$ i $x = x_0+R$, pa su u tim slučajevima potrebna daljnja ispitavanja. Ako je moguće utvrditi da li red konvergira u $x = x_0 \pm R$, tada je područje konvergencije reda jedan od intervala $[x_0 - R, x_0 + R]$, $(x_0 - R, x_0 + R]$, $[x_0 - R, x_0 + R)$ ili $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Primjer 9.11 *Odredite područje konvergencije reda* $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k$.

Prema D'Alambertovom kriteriju radijus konvergencije reda je

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1}\,\frac{k}{1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1. \tag{9.66}$$

Stoga red konvergira apsolutno na $(-1,1)$. U točki $x = 1$ dobivamo harmonijski red $\sum_{k=1} 1/k$ koji divergira, dok za $x = -1$ imamo alternirajući red $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k$ koji konvergira. Dakle, područje konvergencije reda je interval $[-1,1)$. ■

Promotrimo sada sljedeći problem. Neka je $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ red potencija s radijusom konvergencije $R > 0$. Kako možemo odrediti derivacije funkcije $f(x)$? Neka je $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k\,(x-x_0)^{k-1}$ red potencija dobijemo deriviranjem početnog reda član po član. Derivirani red ima isti radijus konvergencije jer je

$$\limsup \left|\frac{(k+1)a_{k+1}}{k a_k}\right| = \limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{R}. \tag{9.67}$$

Prema teoremu 9.5 red $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k\,(x-x_0)^{k-1}$ konvergira uniformno na $|x-x_0| \le \rho$ za svaki $0 < \rho < R$. Stoga korolar 9.2 povlači da je $f'(x) = g(x)$, odnosno

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}, \quad |x-x_0| \le \rho. \tag{9.68}$$

S obzirom da je $0 < \rho < R$ proizvoljan, jednadžba (9.68) vrijedi za svaki $|x-x_0| < R$. Prema istom argumentu red $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k\,(x-x_0)^{k-1}$ možemo derivirati član po član na intervalu $|x-x_0| < R$. Time dobivamo

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-1}. \tag{9.69}$$

Nastavaljući ovaj postupak zaključujemo da je n-ta derivacija funkcije $f(x)$ dana sa

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) a_k (x-x_0)^{k-n}. \tag{9.70}$$

Posebno, u točki $x = x_0$ imamo $f^{(n)}(x_0) = n!\,a_n$, što povlači da je n-ti član reda jednak $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$. Ova zapažanja možemo formulirati kao sljedeći rezultat.

Teorem 9.6 *Neka je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ reda potencija s radijusom konvergencije $R > 0$. Tada $f(x)$ ima derivacije svakog reda na skupu $|x-x_0| < R$, i vrijedi*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{9.71}$$

Pretpostavimo sada da je $f(x)$ zadana funkcija koja ima derivacije svakog reda i da $f(x)$ možemo prikazati kao red potencija

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{9.72}$$

koji konvergira prema $f(x)$ na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$. Iz teorema 9.6 slijedi da su koeficijenti a_n na jedinstven način dani sa $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$, stoga je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < R. \tag{9.73}$$

Red potencija (9.73) nazivamo *Taylorov red* funkcije $f(x)$ u okolini točke x_0. U posebnom slučaju kada je $x_0 = 0$ dobivamo *McLaurentov red*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k. \tag{9.74}$$

Za funkciju koja ima Taylorov red u okolini točke x_0 kažemo da je *analitička* u x_0. Važno je napomenuti da područje konvergencije Taylorovog reda ne mora biti istovjetno domeni funkcije. Na primjer, geometrijski red

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0} x^n, \quad |x| < 1, \tag{9.75}$$

predstavlja funkciju $f(x) = 1/(1-x)$ samo na skupu $|x| < 1$ iako je funkcija $f(x)$ definirana na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Takodjer je potrebno istaknuti da je svojstvo analitičnosti mnogo jače od stvojstva da funkcija ima derivacije svakog reda. Na primjer, može se pokazati da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \tag{9.76}$$

ima derivacije svakog reda na $\mathbb{R}$, i da je $f^{(n)}(0) = 0$ za svaki $n \geq 0$. Ovo implicira da $f(x)$ nije analitička u točki $x_0 = 0$ jer je $a_n = f^{(n)}(0)/n! = 0$ za svaki $n \geq 0$, pa bi u tom slučaju imali

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \tag{9.77}$$

Ovo je očigledno u kontradikciji sa činjenicom da je $f(x) > 0$ za $x > 0$. Dakle, u ovom primjeru Taylorov red ne konvergira prema funkciji $f(x)$ u okolini točke $x_0 = 0$ iako funkcija ima derivacije svakog reda. Na žalost, kod realnih funkcija realne variable ne postoji način da se radijus konvergencije Taylorovog reda odredi iz same funkcije $f(x)$. Zadovoljavajuća teorija analitičkih funkcija i njihovih redova postoji tek u kompleksnoj analizi gdje varijabla x i funkcija $f(x)$ imaju vrijednosti u skupu $\mathbb{C}$.

Navedimo Taylorove redove nekih elementarnih funkcija i njihova područja konvergencije:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{9.78}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{9.79}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{9.80}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k, \qquad -1 < x \leq 1. \tag{9.81}$$

Taylorov red neke funkcije rijetko se nalazi primjenom formule $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$. Vrlo često se koristimo suptitucijom odredjenih izraza u već poznate Taylorove redove elementarnih funkcija.

Primjer 9.12 *Odredite Taylorov red funkcije $f(x) = e^{x^2}$.*

Iz Taylorovog reda za eksponencijalnu funkciju dobivamo

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^{2n} \tag{9.82}$$

Lako se provjeri da je radijus konvergencije reda (9.82) jednak $R = \infty$, stoga red konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$. ■

Primjer 9.13 *Odredite Taylorov red funkcije $g(x) = \ln(x)$ i područje na kojem konvergira.*

Uvedimo varijablu $y = x - 1$. Tada Taylorov red za $\ln(1 + y)$ daje

$$\ln(x) = \ln(1+y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, y^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,(x-1)^k. \tag{9.83}$$

Red (9.83) konvergira na skupu $-1 < y \leq 1$, odnosno za svaki $0 < x \leq 2$. ■

Taylorov red često se koristi za aproksimaciju funkcije polinomom u okolini točke x_0,

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \tag{9.84}$$

Točnost ove aproksimacije je veća što je n veći. Navedimo za kraj rezultat koji nam daje procjenu pogreške kada se funkcija $f(x)$ aproksimira Taylorovim polinomom

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \tag{9.85}$$

Teorem 9.7 *Neka $f(x)$ ima neprekidne derivacije do uključivo reda $n+1$ u okolini točke x_0. Tada je*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x), \tag{9.86}$$

gdje je $R_n(x)$ ostatak reda dan sa

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)1} (x - x_0)^{n+1} \tag{9.87}$$

za neku točki ξ izmedju x i x_0.

Primjer 9.14 *Procijenite pogrešku u aproksimaciji funkcije $f(x) = \cos(x)$ Taylorovim polinomom četvrtog reda u okolini točke $x_0 = 0$.*

Prvih nekoliko članova Taylorovog reda su dani sa

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{9.88}$$

Kako je koeficijent koji množi x^5 jednak nuli, možemo pretpostaviti da u aproksimaciji

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \tag{9.89}$$

imamo članove do uključivo petog reda, stoga pišemo

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_5(x). \tag{9.90}$$

Ostatak reda

$$R_5(x) = -\frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots \tag{9.91}$$

je prema teoremu 9.7 dan sa

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} x^6 = \frac{-\cos(\xi)}{6!} x^6 \tag{9.92}$$

gdje je ξ neka točka izmedju 0 i x. Iz jednadžbe (9.92) možemo odrediti gornju medju za $R_5(x)$,

$$|R_5(x)| \leq \frac{1}{6!}|x|^6 = \frac{x^6}{720}. \tag{9.93}$$

Očigledno, što je x bliže nuli to je ostatak reda $R_5(x)$ manji pa je aproksimacija (9.89) bolja. ■

Literatura

1. S. Kurepa, Matematička analiza 1, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

2. S. Kurepa, Matematička analiza 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

3. W.R. Parzynksi, P.W. Zipse, Introduction to Mathematical Analysis, McGrow-Hill, New York, 1982.

4. W. Rudin, The Principles of Mathematical Analysis, treće izdanje, McGrow-Hill, New York, 2006.