

Parcijalne diferencijalne jednačbe

prof.dr.sc. Saša Krešić-Jurić

PMF-Split

- 1 Uvodna razmatranja
- 2 Fourierov red
- 3 Klasifikacija linearnih jednačbi drugog reda
- 4 Metoda separacije varijabli
- 5 Valna jednačba
- 6 Jednačba provođenja topline
- 7 Laplaceova jednačba

Literatura

- 1 Pinchover Y., Rubenstein J. *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2007.
- 2 Borthwick D. *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, 2018.
- 3 Guenther R.B., Lee J.W. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*, Dover Publications, 1996.

- 1 Uvodna razmatranja
- 2 Fourierov red
- 3 Klasifikacija linearnih jednadžbi drugog reda
- 4 Metoda separacije varijabli
- 5 Valna jednadžba
- 6 Jednadžba provođenja topline
- 7 Laplaceova jednadžba

Literatura

- 1 Pinchover Y., Rubenstein J. *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2007.
- 2 Borthwick D. *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, 2018.
- 3 Guenther R.B., Lee J.W. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*, Dover Publications, 1996.

Uvodni pojmovi i definicije

- Pojave koje ovise o neprekidnim varijablama, kao što su širenje valova ili topline, se modeliraju parcijalnim diferencijalnim jednačbama (PDJ).
- Ove jednačbe imaju važnu ulogu u fizici, tehnici, biologiji, finansijskoj matematici i sl.
- PDJ je jednačba koja opisuje vezu između nepoznate funkcije $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i njezinih parcijalnih derivacija. Opći oblik PDJ je dan sa

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}\right) = 0. \quad (1)$$

Parcijalne derivacije označavamo sa

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \text{itd.} \quad (2)$$

- Red parcijalne diferencijalne jednačbe je najviši red parcijalne derivacije koji se pojavljuje u jednačbi.
- Parcijalne diferencijalne jednačbe obično promatramo na otvorenom povezanom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Uvodni pojmovi i definicije

- Pojave koje ovise o neprekidnim varijablama, kao što su širenje valova ili topline, se modeliraju parcijalnim diferencijalnim jednačbama (PDJ).
- Ove jednačbe imaju važnu ulogu u fizici, tehnici, biologiji, finansijskoj matematici i sl.
- PDJ je jednačba koja opisuje vezu između nepoznate funkcije $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i njezinih parcijalnih derivacija. Opći oblik PDJ je dan sa

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}\right) = 0. \quad (1)$$

Parcijalne derivacije označavamo sa

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \text{itd.} \quad (2)$$

- Red parcijalne diferencijalne jednačbe je najviši red parcijalne derivacije koji se pojavljuje u jednačbi.
- Parcijalne diferencijalne jednačbe obično promatramo na otvorenom povezanom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Uvodni pojmovi i definicije

- Pojave koje ovise o neprekidnim varijablama, kao što su širenje valova ili topline, se modeliraju parcijalnim diferencijalnim jednačbama (PDJ).
- Ove jednačbe imaju važnu ulogu u fizici, tehnici, biologiji, finansijskoj matematici i sl.
- PDJ je jednačba koja opisuje vezu između nepoznate funkcije $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i njezinih parcijalnih derivacija. Opći oblik PDJ je dan sa

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}\right) = 0. \quad (1)$$

Parcijalne derivacije označavamo sa

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \text{itd.} \quad (2)$$

- Red parcijalne diferencijalne jednačbe je najviši red parcijalne derivacije koji se pojavljuje u jednačbi.
- Parcijalne diferencijalne jednačbe obično promatramo na otvorenom povezanom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Rješenja parcijalnih diferencijalnih jednačbi dijelimo na:

- 1 klasična,
- 2 slaba i
- 3 distribucijska rješenja.

Definicija

Klasično rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe reda $k > 0$ na skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je funkcija $u \in C^k(\Omega)$ koja zadovoljava jednačbu u svakoj točki skupa Ω .

Klasično rješenje nazivamo i *jako* rješenje PDJ.

Primjeri

- 1 Provjerite da su $u = (x + y)^3$ i $u = \sin(x - y)$ klasična rješenja jednačbe

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad \text{na skupu} \quad \Omega = \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

- 2 Provjerite da je $u = \ln(x^2 + y^2)$ klasično rješenje jednačbe

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{na skupu} \quad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \quad (4)$$

Rješenja parcijalnih diferencijalnih jednačbi dijelimo na:

- 1 klasična,
- 2 slaba i
- 3 distribucijska rješenja.

Definicija

Klasično rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe reda $k > 0$ na skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je funkcija $u \in C^k(\Omega)$ koja zadovoljava jednačbu u svakoj točki skupa Ω .

Klasično rješenje nazivamo i *jako* rješenje PDJ.

Primjeri

- 1 Provjerite da su $u = (x + y)^3$ i $u = \sin(x - y)$ klasična rješenja jednačbe

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad \text{na skupu} \quad \Omega = \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

- 2 Provjerite da je $u = \ln(x^2 + y^2)$ klasično rješenje jednačbe

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{na skupu} \quad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \quad (4)$$

Rješenja parcijalnih diferencijalnih jednačbi dijelimo na:

- 1 klasična,
- 2 slaba i
- 3 distribucijska rješenja.

Definicija

Klasično rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe reda $k > 0$ na skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je funkcija $u \in C^k(\Omega)$ koja zadovoljava jednačbu u svakoj točki skupa Ω .

Klasično rješenje nazivamo i *jako* rješenje PDJ.

Primjeri

- 1 Provjerite da su $u = (x + y)^3$ i $u = \sin(x - y)$ klasična rješenja jednačbe

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad \text{na skupu} \quad \Omega = \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

- 2 Provjerite da je $u = \ln(x^2 + y^2)$ klasično rješenje jednačbe

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{na skupu} \quad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \quad (4)$$

Osnovna podjela parcijalnih diferencijalnih jednačbi

Parcijalne diferencijalne jednačbe dijelimo prema

- 1 redu jednačbe,
- 2 linearne vs. nelinearne jednačbe.

■ Kažemo da je jednačba

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{j_k}}\right) = 0. \quad (5)$$

linearna ako je F linearna funkcija u varijablama u i svim njezinim parcijalnim derivacijama. U tom slučaju koeficijenti koji množe u i njezine derivacije ovise samo o nezavisnim varijablama $x_1, \dots, x_n$.

■ Jednačba je *nelinearna* ako nije linearna.

Osnovna podjela parcijalnih diferencijalnih jednačbi

Parcijalne diferencijalne jednačbe dijelimo prema

- 1 redu jednačbe,
- 2 linearne vs. nelinearne jednačbe.

- Kažemo da je jednačba

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{j_k}}\right) = 0. \quad (5)$$

linearna ako je F linearna funkcija u varijablama u i svim njezinim parcijalnim derivacijama. U tom slučaju koeficijenti koji množe u i njezine derivacije ovise samo o nezavisnim varijablama $x_1, \dots, x_n$.

- Jednačba je *nelinearna* ako nije linearna.

Primjeri

1

$$xu_x + yu_y = u, \quad \text{linearna PDJ prvog reda} \quad (6)$$

2

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0, \quad \text{nelinearna PDJ trećeg reda} \quad (7)$$

3

$$u_x^2 + u_y^2 = u, \quad \text{nelinearna PDJ prvog reda} \quad (8)$$

U matematičkoj fizici važnu ulogu imaju linearne jednadžbe drugog reda.

Primjeri

1

$$xu_x + yu_y = u, \quad \text{linearna PDJ prvog reda} \quad (6)$$

2

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0, \quad \text{nelinearna PDJ trećeg reda} \quad (7)$$

3

$$u_x^2 + u_y^2 = u, \quad \text{nelinearna PDJ prvog reda} \quad (8)$$

U matematičkoj fizici važnu ulogu imaju linearne jednadžbe drugog reda.

Većina fizikalnih pojava se modelirana linearnim jednačbama drugog reda.

1 Valna jednačba

$$u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = 0, \quad u = u(x, y, z, t) \quad (9)$$

opisuje širenje zvučnih i elektromagnetiskih valova u prostoru.

2 Jednačba provođenja topline ili difuzijska jednačba

$$u_t - k \nabla^2 u = 0, \quad u = u(x, y, z, t) \quad (10)$$

opisuje promjenu temperature u toplinski vodljivom tijelu i difuzijske procese u tvarima.

3 Laplaceova jednačba

$$\nabla^2 u = 0, \quad u = u(x, y, z) \quad (11)$$

opisuje električni potencijal i stacionarnu distribuciju temperature u toplinski vodljivom tijelu.

4 Schroedingerova jednačba

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x, y, z) \psi = i \hbar \psi_t, \quad \psi = \psi(x, y, z, t) \quad (12)$$

opisuje evoluciju valne funkcije ψ u kvantnoj mehanici.

Većina fizikalnih pojava se modelirana linearnim jednačbama drugog reda.

1 Valna jednačba

$$u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = 0, \quad u = u(x, y, z, t) \quad (9)$$

opisuje širenje zvučnih i elektromagnetiskih valova u prostoru.

2 Jednačba provođenja topline ili difuzijska jednačba

$$u_t - k \nabla^2 u = 0, \quad u = u(x, y, z, t) \quad (10)$$

opisuje promjenu temperature u toplinski vodljivom tijelu i difuzijske procese u tvarima.

3 Laplaceova jednačba

$$\nabla^2 u = 0, \quad u = u(x, y, z) \quad (11)$$

opisuje električni potencijal i stacionarnu distribuciju temperature u toplinski vodljivom tijelu.

4 Schroedingerova jednačba

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x, y, z) \psi = i \hbar \psi_t, \quad \psi = \psi(x, y, z, t) \quad (12)$$

opisuje evoluciju valne funkcije ψ u kvantnoj mehanici.

Većina fizikalnih pojava se modelirana linearnim jednačbama drugog reda.

1 Valna jednačba

$$u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = 0, \quad u = u(x, y, z, t) \quad (9)$$

opisuje širenje zvučnih i elektromagnetiskih valova u prostoru.

2 Jednačba provođenja topline ili difuzijska jednačba

$$u_t - k \nabla^2 u = 0, \quad u = u(x, y, z, t) \quad (10)$$

opisuje promjenu temperature u toplinski vodljivom tijelu i difuzijske procese u tvarima.

3 Laplaceova jednačba

$$\nabla^2 u = 0, \quad u = u(x, y, z) \quad (11)$$

opisuje električni potencijal i stacionarnu distribuciju temperature u toplinski vodljivom tijelu.

4 Schrodingerova jednačba

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x, y, z) \psi = i \hbar \psi_t, \quad \psi = \psi(x, y, z, t) \quad (12)$$

opisuje evoluciju valne funkcije ψ u kvantnoj mehanici.

Većina fizikalnih pojava se modelirana linearnim jednačbama drugog reda.

1 Valna jednačba

$$u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = 0, \quad u = u(x, y, z, t) \quad (9)$$

opisuje širenje zvučnih i elektromagnetiskih valova u prostoru.

2 Jednačba provođenja topline ili difuzijska jednačba

$$u_t - k \nabla^2 u = 0, \quad u = u(x, y, z, t) \quad (10)$$

opisuje promjenu temperature u toplinski vodljivom tijelu i difuzijske procese u tvarima.

3 Laplaceova jednačba

$$\nabla^2 u = 0, \quad u = u(x, y, z) \quad (11)$$

opisuje električni potencijal i stacionarnu distribuciju temperature u toplinski vodljivom tijelu.

4 Schroedingerova jednačba

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x, y, z) \psi = i \hbar \psi_t, \quad \psi = \psi(x, y, z, t) \quad (12)$$

opisuje evoluciju valne funkcije ψ u kvantnoj mehanici.

Linearne jednačbe i princip superpozicije

Opći oblik linearne jednačbe drugog reda u varijablama $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x)u_{x_i} + F(x)u = G(x). \quad (13)$$

$$u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i} \quad \Rightarrow \quad \text{možemo pretpostaviti da je } A_{ij} = A_{ji} \quad (14)$$

Jednačbi (13) pridružujemo diferencijalni operator

$$L = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + F. \quad (15)$$

Jednačba (13) u operatorskom obliku:

$$L[u] = G. \quad (16)$$

- Ako je $G = 0$, onda kažemo da je jednačba *homogena*.
- Ako je $G \neq 0$, onda kažemo da je jednačba *nehomogena*.

Linearne jednačbe i princip superpozicije

Opći oblik linearne jednačbe drugog reda u varijablama $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x)u_{x_i} + F(x)u = G(x). \quad (13)$$

$$u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i} \quad \Rightarrow \quad \text{možemo pretpostaviti da je } A_{ij} = A_{ji} \quad (14)$$

Jednačbi (13) pridružujemo diferencijalni operator

$$L = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + F. \quad (15)$$

Jednačba (13) u operatorskom obliku:

$$L[u] = G. \quad (16)$$

- Ako je $G = 0$, onda kažemo da je jednačba *homogena*.
- Ako je $G \neq 0$, onda kažemo da je jednačba *nehomogena*.

Linearne jednačbe i princip superpozicije

Opći oblik linearne jednačbe drugog reda u varijablama $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x)u_{x_i} + F(x)u = G(x). \quad (13)$$

$$u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i} \quad \Rightarrow \quad \text{možemo pretpostaviti da je } A_{ij} = A_{ji} \quad (14)$$

Jednačbi (13) pridružujemo diferencijalni operator

$$L = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + F. \quad (15)$$

Jednačba (13) u operatorskom obliku:

$$L[u] = G. \quad (16)$$

- Ako je $G = 0$, onda kažemo da je jednačba *homogena*.
- Ako je $G \neq 0$, onda kažemo da je jednačba *nehomogena*.

Linearne jednačbe i princip superpozicije

Opći oblik linearne jednačbe drugog reda u varijablama $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x)u_{x_i} + F(x)u = G(x). \quad (13)$$

$$u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i} \quad \Rightarrow \quad \text{možemo pretpostaviti da je } A_{ij} = A_{ji} \quad (14)$$

Jednačbi (13) pridružujemo diferencijalni operator

$$L = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + F. \quad (15)$$

Jednačba (13) u operatorskom obliku:

$$L[u] = G. \quad (16)$$

- Ako je $G = 0$, onda kažemo da je jednačba *homogena*.
- Ako je $G \neq 0$, onda kažemo da je jednačba *nehomogena*.

Diferencijalni operator L je linearan ako vrijedi

$$L[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2] = \alpha_1 L[u_1] + \alpha_2 L[u_2], \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Linearni operatori zadovoljavaju *princip superpozicije*. Ako je

$$L[u_1] = 0, \quad L[u_2] = 0, \quad (18)$$

onda je funkcija $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ rješenje iste jednačbe jer je

$$L[u] = \alpha_1 L[u_1] + \alpha_2 L[u_2] = 0. \quad (19)$$

- 1 Direktna integracija
- 2 Metoda supstitucije (uvođenje novih varijabli)
- 3 Redukcija broja varijabli korištenjem simetrija jednažbe

Primjeri

- 1 Odredite opće rješenje jednadžbe $u_{yy} = 2$ za funkciju $u = u(x, y)$.
- 2 Odredite opće rješenje jednadžbe $u_x - u_y = 0$.
- 3 Odredite opće rješenje jednadžbe $u_{xy} + \frac{1}{x}u_y = \frac{y}{x^2}$.
- 4 Odredite sferno simetrično rješenje Laplaceove jednadžbe

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

- 5
 - a Pokažite da je $u(x, y) = xf(2x + y)$ opće rješenje jednadžbe $xu_x - 2xu_y = u$.
 - b Odredite rješenje koje zadovoljava uvjet $u(1, y) = y^2$.

- 1 Direktna integracija
- 2 Metoda supstitucije (uvođenje novih varijabli)
- 3 Redukcija broja varijabli korištenjem simetrija jednažbe

Primjeri

- 1 Odredite opće rješenje jednadžbe $u_{yy} = 2$ za funkciju $u = u(x, y)$.
- 2 Odredite opće rješenje jednadžbe $u_x - u_y = 0$.
- 3 Odredite opće rješenje jednadžbe $u_{xy} + \frac{1}{x}u_y = \frac{y}{x^2}$.
- 4 Odredite sferno simetrično rješenje Laplaceove jednadžbe

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

- 5
 - a Pokažite da je $u(x, y) = xf(2x + y)$ opće rješenje jednadžbe $xu_x - 2xu_y = u$.
 - b Odredite rješenje koje zadovoljava uvjet $u(1, y) = y^2$.

- 1 Direktna integracija
- 2 Metoda supstitucije (uvođenje novih varijabli)
- 3 Redukcija broja varijabli korištenjem simetrija jednažbe

Primjeri

- 1 Odredite opće rješenje jednačbe $u_{yy} = 2$ za funkciju $u = u(x, y)$.
- 2 Odredite opće rješenje jednačbe $u_x - u_y = 0$.
- 3 Odredite opće rješenje jednačbe $u_{xy} + \frac{1}{x}u_y = \frac{y}{x^2}$.
- 4 Odredite sferno simetrično rješenje Laplaceove jednačbe

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

- 5
 - ▣ Pokažite da je $u(x, y) = xf(2x + y)$ opće rješenje jednačbe $xu_x - 2xu_y = u$.
 - ▣ Odredite rješenje koje zadovoljava uvjet $u(1, y) = y^2$.

- 1 Direktna integracija
- 2 Metoda supstitucije (uvođenje novih varijabli)
- 3 Redukcija broja varijabli korištenjem simetrija jednažbe

Primjeri

- 1 Odredite opće rješenje jednažbe $u_{yy} = 2$ za funkciju $u = u(x, y)$.
- 2 Odredite opće rješenje jednažbe $u_x - u_y = 0$.
- 3 Odredite opće rješenje jednažbe $u_{xy} + \frac{1}{x}u_y = \frac{y}{x^2}$.
- 4 Odredite sferno simetrično rješenje Laplaceove jednažbe

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

- 5
 - a Pokažite da je $u(x, y) = xf(2x + y)$ opće rješenje jednažbe $xu_x - 2xu_y = u$.
 - b Odredite rješenje koje zadovoljava uvjet $u(1, y) = y^2$.

- 1 Direktna integracija
- 2 Metoda supstitucije (uvođenje novih varijabli)
- 3 Redukcija broja varijabli korištenjem simetrija jednažbe

Primjeri

- 1 Odredite opće rješenje jednažbe $u_{yy} = 2$ za funkciju $u = u(x, y)$.
- 2 Odredite opće rješenje jednažbe $u_x - u_y = 0$.
- 3 Odredite opće rješenje jednažbe $u_{xy} + \frac{1}{x}u_y = \frac{y}{x^2}$.
- 4 Odredite sferno simetrično rješenje Laplaceove jednažbe

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

- 5
 - a Pokažite da je $u(x, y) = xf(2x + y)$ opće rješenje jednažbe $xu_x - 2xu_y = u$.
 - b Odredite rješenje koje zadovoljava uvjet $u(1, y) = y^2$.

- 1 Direktna integracija
- 2 Metoda supstitucije (uvođenje novih varijabli)
- 3 Redukcija broja varijabli korištenjem simetrija jednažbe

Primjeri

- 1 Odredite opće rješenje jednadžbe $u_{yy} = 2$ za funkciju $u = u(x, y)$.
- 2 Odredite opće rješenje jednadžbe $u_x - u_y = 0$.
- 3 Odredite opće rješenje jednadžbe $u_{xy} + \frac{1}{x}u_y = \frac{y}{x^2}$.
- 4 Odredite sferno simetrično rješenje Laplaceove jednadžbe

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

- 5
 - a Pokažite da je $u(x, y) = xf(2x + y)$ opće rješenje jednadžbe $xu_x - 2xu_y = u$.
 - b Odredite rješenje koje zadovoljava uvjet $u(1, y) = y^2$.

Početni i rubni uvjeti

Parcijalne diferencijalne jednačbe općenito imaju beskonačno mnogo rješenja. Da bismo odredili jedinstveno rješenje jednačbi moramo dodati **početne** i/ili **rubne uvjete**. Početni i rubni uvjeti proizlaze iz fizikalne prirode problema koji promatramo.

Primjer 1 Valna jednačba

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (20)$$

$u(x, t)$ amplituda titranja žice u točki x u trenutku t .

Početni uvjeti:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \quad (21)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L]. \quad (22)$$

Dirichletov rubni uvjet:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (23)$$

Neumannov rubni uvjet:

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (24)$$

Početni i rubni uvjeti

Parcijalne diferencijalne jednačbe općenito imaju beskonačno mnogo rješenja. Da bismo odredili jedinstveno rješenje jednačbi moramo dodati **početne** i/ili **rubne uvjete**. Početni i rubni uvjeti proizlaze iz fizikalne prirode problema koji promatramo.

Primjer 1 Valna jednačba

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (20)$$

$u(x, t)$ amplituda titranja žice u točki x u trenutku t .

Početni uvjeti:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \quad (21)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L]. \quad (22)$$

Dirichletov rubni uvjet:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (23)$$

Neumannov rubni uvjet:

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (24)$$

Početni i rubni uvjeti

Parcijalne diferencijalne jednačbe općenito imaju beskonačno mnogo rješenja. Da bismo odredili jedinstveno rješenje jednačbi moramo dodati **početne** i/ili **rubne uvjete**. Početni i rubni uvjeti proizlaze iz fizikalne prirode problema koji promatramo.

Primjer 1 Valna jednačba

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (20)$$

$u(x, t)$ amplituda titranja žice u točki x u trenutku t .

Početni uvjeti:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \quad (21)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L]. \quad (22)$$

Dirichletov rubni uvjet:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (23)$$

Neumannov rubni uvjet:

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (24)$$

Početni i rubni uvjeti

Parcijalne diferencijalne jednačbe općenito imaju beskonačno mnogo rješenja. Da bismo odredili jedinstveno rješenje jednačbi moramo dodati **početne** i/ili **rubne uvjete**. Početni i rubni uvjeti proizlaze iz fizikalne prirode problema koji promatramo.

Primjer 1 Valna jednačba

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (20)$$

$u(x, t)$ amplituda titranja žice u točki x u trenutku t .

Početni uvjeti:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \quad (21)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L]. \quad (22)$$

Dirichletov rubni uvjet:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (23)$$

Neumannov rubni uvjet:

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (24)$$

Početni i rubni uvjeti

Parcijalne diferencijalne jednačbe općenito imaju beskonačno mnogo rješenja. Da bismo odredili jedinstveno rješenje jednačbi moramo dodati **početne** i/ili **rubne uvjete**. Početni i rubni uvjeti proizlaze iz fizikalne prirode problema koji promatramo.

Primjer 1 Valna jednačba

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (20)$$

$u(x, t)$ amplituda titranja žice u točki x u trenutku t .

Početni uvjeti:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \quad (21)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L]. \quad (22)$$

Dirichletov rubni uvjet:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (23)$$

Neumannov rubni uvjet:

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (24)$$

Primjer 2 Laplaceova jednačba

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (25)$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ područje omeđeno zatvorenom po dijelovima glatkom krivuljom $\partial\Omega$.

Dirichletov rubni uvjet:

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (26)$$

Neumannov rubni uvjet:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} \quad \text{normalna derivacija na krivulju } \partial\Omega \quad (28)$$

Primjer 2 Laplaceova jednačba

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (25)$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ područje omeđeno zatvorenom po dijelovima glatkom krivuljom $\partial\Omega$.

Dirichletov rubni uvjet:

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (26)$$

Neumannov rubni uvjet:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} \quad \text{normalna derivacija na krivulju } \partial\Omega \quad (28)$$

Primjer 2 Laplaceova jednačba

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (25)$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ područje omeđeno zatvorenom po dijelovima glatkom krivuljom $\partial\Omega$.

Dirichletov rubni uvjet:

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (26)$$

Neumannov rubni uvjet:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} \quad \text{normalna derivacija na krivulju } \partial\Omega \quad (28)$$

Kažemo da je diferencijalna jednačba sa zadanim počenim ili rubnim uvjetima je dobro postavljen problem ako zadovoljava sljedeće uvjete (J. Hadamard, 1902.):

- *egzistencija*: problem ima rješenje,
- *jedinstvenost*: rješenje problema je jedinstveno uz zadane početne ili rubne uvjete,
- *stabilnost*: rješenje jednačbe na neprekidni način ovisi o parametrima jednačbe i rubnim ili početnim uvjetima.

Parcijalna diferencijalna jednačba je stabilna ako male perturbacije početnih i rubnih uvjeta ili parametara u jednačbi uzrokuju male promjene u rješenju.

Kažemo da je diferencijalna jednačina sa zadanim početnim ili rubnim uvjetima je dobro postavljen problem ako zadovoljava sljedeće uvjete (J. Hadamard, 1902.):

- *egzistencija*: problem ima rješenje,
- *jedinstvenost*: rješenje problema je jedinstveno uz zadane početne ili rubne uvjete,
- *stabilnost*: rješenje jednačine na neprekidni način ovisi o parametrima jednačine i rubnim ili početnim uvjetima.

Parcijalna diferencijalna jednačina je stabilna ako male perturbacije početnih i rubnih uvjeta ili parametara u jednačini uzrokuju male promjene u rješenju.

Kažemo da je diferencijalna jednačina sa zadanim početnim ili rubnim uvjetima je dobro postavljen problem ako zadovoljava sljedeće uvjete (J. Hadamard, 1902.):

- *egzistencija*: problem ima rješenje,
- *jedinstvenost*: rješenje problema je jedinstveno uz zadane početne ili rubne uvjete,
- *stabilnost*: rješenje jednačine na neprekidni način ovisi o parametrima jednačine i rubnim ili početnim uvjetima.

Parcijalna diferencijalna jednačina je stabilna ako male perturbacije početnih i rubnih uvjeta ili parametara u jednačini uzrokuju male promjene u rješenju.

Kažemo da je diferencijalna jednačina sa zadanim početnim ili rubnim uvjetima je dobro postavljen problem ako zadovoljava sljedeće uvjete (J. Hadamard, 1902.):

- *egzistencija*: problem ima rješenje,
- *jedinstvenost*: rješenje problema je jedinstveno uz zadane početne ili rubne uvjete,
- *stabilnost*: rješenje jednačine na neprekidni način ovisi o parametrima jednačine i rubnim ili početnim uvjetima.

Parcijalna diferencijalna jednačina je stabilna ako male perturbacije početnih i rubnih uvjeta ili parametara u jednačini uzrokuju male promjene u rješenju.

Kažemo da je diferencijalna jednačina sa zadanim početnim ili rubnim uvjetima je dobro postavljen problem ako zadovoljava sljedeće uvjete (J. Hadamard, 1902.):

- *egzistencija*: problem ima rješenje,
- *jedinstvenost*: rješenje problema je jedinstveno uz zadane početne ili rubne uvjete,
- *stabilnost*: rješenje jednačine na neprekidni način ovisi o parametrima jednačine i rubnim ili početnim uvjetima.

Parcijalna diferencijalna jednačina je stabilna ako male perturbacije početnih i rubnih uvjeta ili parametara u jednačini uzrokuju male promjene u rješenju.

Kažemo da je diferencijalna jednačina sa zadanim počenim ili rubnim uvjetima je dobro postavljen problem ako zadovoljava sljedeće uvjete (J. Hadamard, 1902.):

- *egzistencija*: problem ima rješenje,
- *jedinstvenost*: rješenje problema je jedinstveno uz zadane početne ili rubne uvjete,
- *stabilnost*: rješenje jednačine na neprekidni način ovisi o parametrima jednačine i rubnim ili početnim uvjetima.

Parcijalna diferencijalna jednačina je stabilna ako male perturbacije početnih i rubnih uvjeta ili parametara u jednačini uzrokuju male promjene u rješenju.

Primjer

- 1 Formulirajte uvjet stabilnosti za Laplaceovu jednadžbu

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (29)$$

obzirom na Dirichletov rubni uvjet.

- 2 Formulirajte uvjet stabilnosti za valnu jednadžbu

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (30)$$

u vremenskom intervalu $[0, T]$ s obzirom na zadane početne uvjete.

Primjer

- 1 Formulirajte uvjet stabilnosti za Laplaceovu jednadžbu

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (29)$$

obzirom na Dirichletov rubni uvjet.

- 2 Formulirajte uvjet stabilnosti za valnu jednadžbu

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (30)$$

u vremenskom intervalu $[0, T]$ s obzirom na zadane početne uvjete.

Sljedeći primjeri ilustriraju probleme koji nisu dobro postavljeni.

Hadamardov primjer

Pokažite da rješenje Laplaceove jednadžbe

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (31)$$

s rubnim uvjetima na pravcu $y = 0$,

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x), \quad (32)$$

nije stabilno.

Obrnuta jednadžba provođenja

Pokažite da rješenje jednadžbe

$$u_t + u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (33)$$

s početnim uvjetom $u(x, 0) = 1$ nije stabilno.

Sljedeći primjeri ilustriraju probleme koji nisu dobro postavljeni.

Hadamardov primjer

Pokažite da rješenje Laplaceove jednadžbe

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (31)$$

s rubnim uvjetima na pravcu $y = 0$,

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x), \quad (32)$$

nije stabilno.

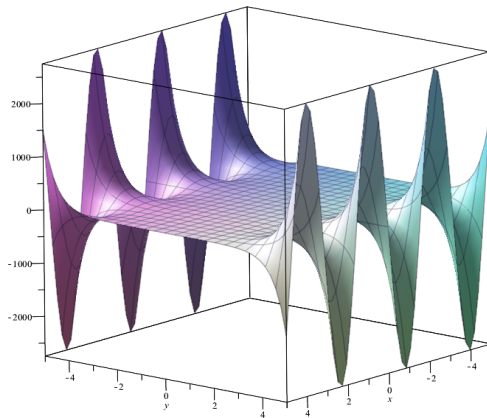
Obrnuta jednadžba provođenja

Pokažite da rješenje jednadžbe

$$u_t + u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (33)$$

s početnim uvjetom $u(x, 0) = 1$ nije stabilno.

Nestabilnost rješenja u Hadamardovom primjeru



Teorija Fourierovih redova se razvila kao pokušaj rješavanja jednadžbe provođenja topline metodom separacije varijabli.

Problem: Možemo li zadanu funkciju $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ prikazati kao linearnu kombinaciju funkcija $\sin(\omega x)$ i $\cos(\omega x)$ različitih perioda?

Takav prikaz je moguć pomoću trigonometrijskog reda

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad -L \leq x \leq L. \quad (34)$$

Fourierov red je linearna kombinacija oscilatornih funkcija frekvencija i perioda

$$T_n = \frac{2L}{n}, \quad f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{n}{2L}. \quad (35)$$

Zastupljenost pojedinih frekvencija određena je koeficijentima a_n i b_n .

Teorija Fourierovih redova se razvila kao pokušaj rješavanja jednadžbe provođenja topline metodom separacije varijabli.

Problem: Možemo li zadanu funkciju $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ prikazati kao linearnu kombinaciju funkcija $\sin(\omega x)$ i $\cos(\omega x)$ različitih perioda?

Takav prikaz je moguć pomoću trigonometrijskog reda

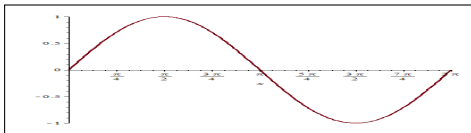
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad -L \leq x \leq L. \quad (34)$$

Fourierov red je linearna kombinacija oscilatornih funkcija frekvencija i perioda

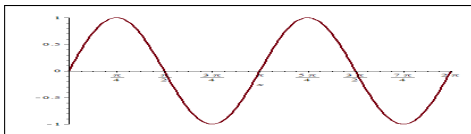
$$T_n = \frac{2L}{n}, \quad f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{n}{2L}. \quad (35)$$

Zastupljenost pojedinih frekvencija određena je koeficijentima a_n i b_n .

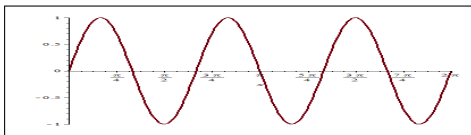
Trigonometrijske funkcije $\sin(xn)$, $n = 1, 2, 3, \dots$



Slika: $f(x) = \sin(x)$



Slika: $f(x) = \sin(2x)$



Slika: $f(x) = \sin(3x)$

Pretpostavimo da je moguće napisati funkciju f kao

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad -L \leq x \leq L. \quad (36)$$

Problem: Kako možemo odrediti koeficijente a_n i b_n ?

Na prostoru neprekidnih funkcija $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ možemo definirati skalarni umnožak

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x)g(x)dx. \quad (37)$$

Skup funkcija

$$\left\{ 1, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad (38)$$

je ortogonalan obzirom na ovaj skalarni umnožak.

Pretpostavimo da je moguće napisati funkciju f kao

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad -L \leq x \leq L. \quad (36)$$

Problem: Kako možemo odrediti koeficijente a_n i b_n ?

Na prostoru neprekidnih funkcija $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ možemo definirati skalarni umnožak

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x)g(x)dx. \quad (37)$$

Skup funkcija

$$\left\{ 1, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad (38)$$

je ortogonalan obzirom na ovaj skalarni umnožak.

Fourierove koeficijente možemo odrediti iz relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-L}^L 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad n \geq 1, \quad (39)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L \delta_{nm}, \quad (40)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L \delta_{nm}, \quad (41)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad n, m \geq 1. \quad (42)$$

Kroneckerov simbol

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (43)$$

Odredite izraze za Fourierove koeficijente koristeći relacije ortogonalnosti.

Fourierove koeficijente možemo odrediti iz relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-L}^L 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad n \geq 1, \quad (39)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L \delta_{nm}, \quad (40)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L \delta_{nm}, \quad (41)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad n, m \geq 1. \quad (42)$$

Kroneckerov simbol

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (43)$$

Odredite izraze za Fourierove koeficijente koristeći relacije ortogonalnosti.

Definicija

Trigonometrijski red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right] \quad (44)$$

gdje su

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (45)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (46)$$

naziva se *Fourierov red* funkcije f na intervalu $[-L, L]$. Koeficijenti a_n i b_n nazivaju se *Fourierovi koeficijenti* funkcije f .

Što možemo reći o konvergenciji Fourierovog reda?

- 1 Fourierovi koeficijenti su potpuno određeni integralom funkcije f pa se Fourierov red ne mijenja ako funkciju promijenimo u prebrojivo mnogo točaka. Stoga Fourierov red ne mora konvergirati ka $f(x)$ u svakoj točki $x \in [-L, L]$.
- 2 Fourierov red može konvergirati po točkama, uniformno ili u L^2 -normi, ovisno o svojstvima funkcije f .

Problem

Želimo odrediti uvjete na funkciju f tako da vrijedi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad -L \leq x \leq L. \quad (47)$$

Što možemo reći o konvergenciji Fourierovog reda?

- 1 Fourierovi koeficijenti su potpuno određeni integralom funkcije f pa se Fourierov red ne mijenja ako funkciju promijenimo u prebrojivo mnogo točaka. Stoga Fourierov red ne mora konvergirati ka $f(x)$ u svakoj točki $x \in [-L, L]$.
- 2 Fourierov red može konvergirati po točkama, uniformno ili u L^2 -normi, ovisno o svojstvima funkcije f .

Problem

Želimo odrediti uvjete na funkciju f tako da vrijedi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad -L \leq x \leq L. \quad (47)$$

Što možemo reći o konvergenciji Fourierovog reda?

- 1 Fourierovi koeficijenti su potpuno određeni integralom funkcije f pa se Fourierov red ne mijenja ako funkciju promijenimo u prebrojivo mnogo točaka. Stoga Fourierov red ne mora konvergirati ka $f(x)$ u svakoj točki $x \in [-L, L]$.
- 2 Fourierov red može konvergirati po točkama, uniformno ili u L^2 -normi, ovisno o svojstvima funkcije f .

Problem

Želimo odrediti uvjete na funkciju f tako da vrijedi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad -L \leq x \leq L. \quad (47)$$

Elementarni primjeri

Pri računanju Fourierovih koeficijenata korisno je zapamtiti sljedeća pravila:

- 1 ako je $h: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ neparna funkcija, onda je

$$\int_{-L}^L h(x) dx = 0, \quad (48)$$

- 2 ako je $h: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ parna funkcija, onda je

$$\int_{-L}^L h(x) dx = 2 \int_0^L h(x) dx. \quad (49)$$

Primjeri

- 1 Odredite Fourierov red funkcije $f(x) = x$ na intervalu $[-L, L]$.
- 2 Razvijte u Fourierov red funkciju $f(x) = x^2 - 1$ na intervalu $[-1, 1]$.

Pri računanju Fourierovih koeficijenata korisno je zapamtiti sljedeća pravila:

- 1 ako je $h: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ neparna funkcija, onda je

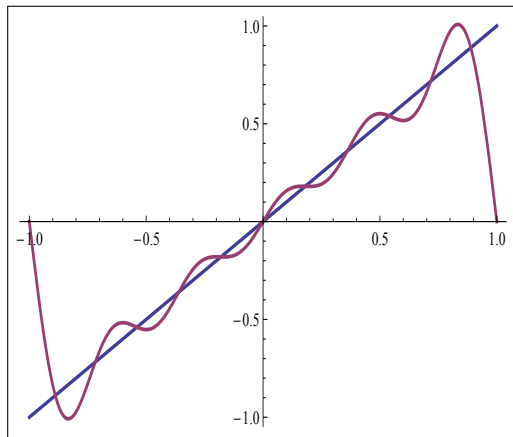
$$\int_{-L}^L h(x) dx = 0, \quad (48)$$

- 2 ako je $h: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ parna funkcija, onda je

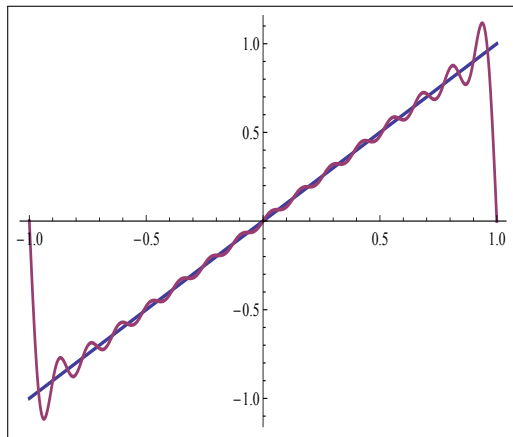
$$\int_{-L}^L h(x) dx = 2 \int_0^L h(x) dx. \quad (49)$$

Primjeri

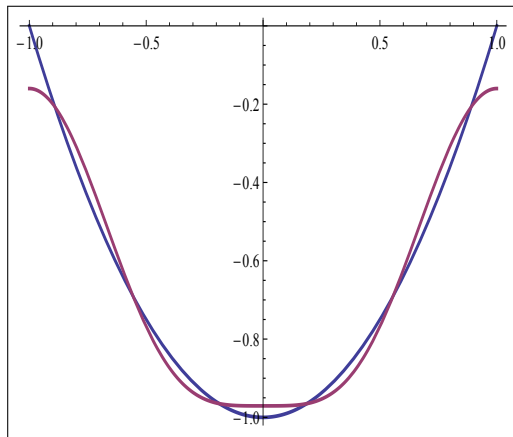
- 1 Odredite Fourierov red funkcije $f(x) = x$ na intervalu $[-L, L]$.
- 2 Razvijte u Fourierov red funkciju $f(x) = x^2 - 1$ na intervalu $[-1, 1]$.



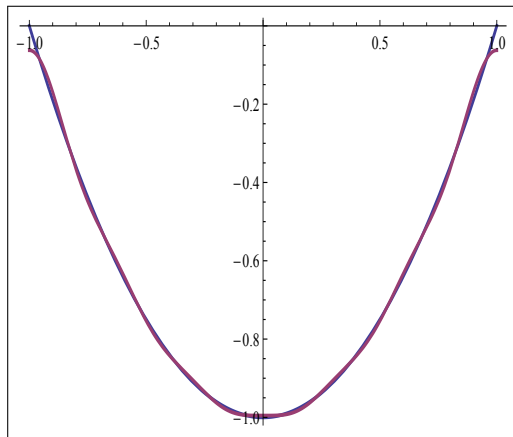
Slika: Fourierov red funkcije $f(x) = x$, $N = 5$.



Slika: Fourierov red funkcije $f(x) = x$, $N = 15$.



Slika: Fourierov red funkcije $f(x) = x^2 - 1$, $N = 2$.



Slika: Fourierov red funkcije $f(x) = x^2 - 1$, $N = 6$.

Definicija

Kažemo da je funkcija f po dijelovima neprekidna na $[a, b]$ ako

- 1 je definirana i neprekidna osim eventualno u konačno mnogo točaka

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b,$$

- 2 u točkama prekida $x_k \neq a, b$ postoje jednostrani limesi

$$f(x_k^-) = \lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x), \quad f(x_k^+) = \lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x), \quad (50)$$

- 3 u rubnim točkama postoje limesi $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

Funkcija ima prekid prve vrste u točki x_k i promjenu vrijednosti

$$\beta_k = f(x_k^+) - f(x_k^-). \quad (51)$$

Definicija

Kažemo da je funkcija f po dijelovima C^1 na intervalu $[a, b]$ ako su f i f' po dijelovima neprekidne na $[a, b]$.

Primjer

Odredite jesu li funkcije f i g zadane sa

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad (52)$$

$$g(x) = |x| \quad (53)$$

po dijelovima C^1 na $[-1, 1]$.

Definicija

Kažemo da je funkcija f po dijelovima C^1 na intervalu $[a, b]$ ako su f i f' po dijelovima neprekidne na $[a, b]$.

Primjer

Odredite jesu li funkcije f i g zadane sa

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad (52)$$

$$g(x) = |x| \quad (53)$$

po dijelovima C^1 na $[-1, 1]$.

Dirichletov teorem

Neka je f po dijelovima C^1 funkcija na $[-L, L]$ i neka je $\tilde{f}$ Fourierov red funkcije f . Tada je

- 1 $\tilde{f}(x_0) = f(x_0)$ ako je f neprekidna u točki $x_0 \in (-L, L)$,
- 2 $\tilde{f}(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)]$ ako f ima prekid u točki $x_0 \in (-L, L)$,
- 3 $\tilde{f}(\pm L) = \frac{1}{2} [f(-L^+) + f(L^-)]$.

Primjedbe:

- 1 Neprekidnost funkcije nije dovoljan uvjet za konvergenciju Fourierovog reda.
- 2 Ako je f neprekidna na $[-L, L]$, onda njezina derivacija mora biti po dijelovima neprekidna da bi Fourierov red konvergirao ka $f(x)$ u svakoj točki $x \in (-L, L)$.

Dirichletov teorem

Neka je f po dijelovima C^1 funkcija na $[-L, L]$ i neka je $\tilde{f}$ Fourierov red funkcije f . Tada je

- 1 $\tilde{f}(x_0) = f(x_0)$ ako je f neprekidna u točki $x_0 \in (-L, L)$,
- 2 $\tilde{f}(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)]$ ako f ima prekid u točki $x_0 \in (-L, L)$,
- 3 $\tilde{f}(\pm L) = \frac{1}{2} [f(-L^+) + f(L^-)]$.

Primjedbe:

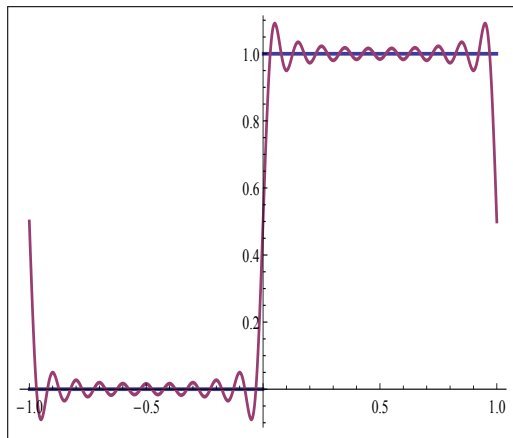
- 1 Neprekidnost funkcije nije dovoljan uvjet za konvergenciju Fourierovog reda.
- 2 Ako je f neprekidna na $[-L, L]$, onda njezina derivacija mora biti po dijelovima neprekidna da bi Fourierov red konvergirao ka $f(x)$ u svakoj točki $x \in (-L, L)$.

Primjer

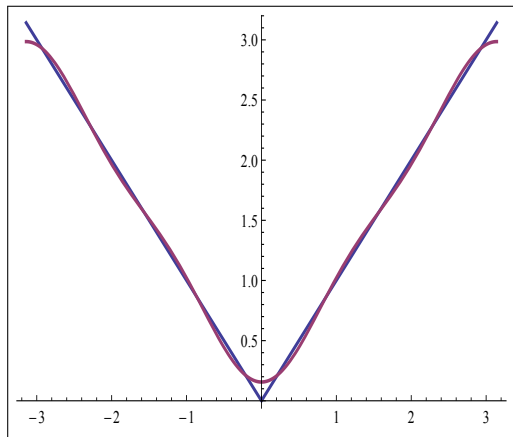
Ilustrirajte Dirichletov teorem na funkcijama

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (54)$$

$$g(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (55)$$



Slika: Razvoj step-funkcije u Fourierov red.



Slika: Razvoj funkcije $f(x) = |x|$ u Fourierov red.

Cauchy–Schwartzova nejednakost

Ako su z_i, w_i kompleksni brojevi, $1 \leq i \leq n$, onda je

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |w_i|^2}. \quad (56)$$

Besselova nejednakost

Neka je $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna funkcija i neka su

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 0, \quad (57)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (58)$$

Tada vrijedi

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x))^2 dx. \quad (59)$$

Cauchy–Schwartzova nejednakost

Ako su z_i, w_i kompleksni brojevi, $1 \leq i \leq n$, onda je

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |w_i|^2}. \quad (56)$$

Besselova nejednakost

Neka je $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna funkcija i neka su

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 0, \quad (57)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (58)$$

Tada vrijedi

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x))^2 dx. \quad (59)$$

Iz Besselove nejednakosti slijedi

Riemann-Lebesgueova lema

Ako je $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna funkcija, onda vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{L} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad (60)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{L} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0. \quad (61)$$

Može se pokazati da vrijedi jači rezultat.

Parsevalova jednakost

Ako je $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna funkcija, onda je

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x))^2 dx. \quad (62)$$

Iz Besselove nejednakosti slijedi

Riemann-Lebesgueova lema

Ako je $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna funkcija, onda vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{L} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad (60)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{L} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0. \quad (61)$$

Može se pokazati da vrijedi jači rezultat.

Parsevalova jednakost

Ako je $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna funkcija, onda je

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x))^2 dx. \quad (62)$$

Teorem o uniformnoj konvergenciji

Neka je f neprekidna i po dijelovima C^1 funkcija na intervalu $[-L, L]$ takva da je $f(-L) = f(L)$. Onda Fourierov red konvergira uniformno ka f na $[-L, L]$.

Ako Fourierovi koeficijenti nisu eksplicitno poznati, može se pokazati da vrijede sljedeće ocjene za $|a_n|$ i $|b_n|$.

Teorem

Neka je $f \in C^2[-L, L]$ takva da je $f(-L) = f(L)$ i $f'(-L) = f'(L)$. Neka je $M = \max_{x \in [-L, L]} |f''(x)|$. Tada Fourierovi koeficijenti imaju gornje međe

$$|a_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{2L^2 M}{\pi^2 n^2}, \quad (63)$$

$$|b_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{2L^2 M}{\pi^2 n^2}, \quad n \geq 1. \quad (64)$$

Teorem o uniformnoj konvergenciji

Neka je f neprekidna i po dijelovima C^1 funkcija na intervalu $[-L, L]$ takva da je $f(-L) = f(L)$. Onda Fourierov red konvergira uniformno ka f na $[-L, L]$.

Ako Fourierovi koeficijenti nisu eksplicitno poznati, može se pokazati da vrijede sljedeće ocjene za $|a_n|$ i $|b_n|$.

Teorem

Neka je $f \in C^2[-L, L]$ takva da je $f(-L) = f(L)$ i $f'(-L) = f'(L)$. Neka je $M = \max_{x \in [-L, L]} |f''(x)|$. Tada Fourierovi koeficijenti imaju gornje međe

$$|a_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{2L^2 M}{\pi^2 n^2}, \quad (63)$$

$$|b_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{2L^2 M}{\pi^2 n^2}, \quad n \geq 1. \quad (64)$$

Koristeći ovaj teorem možemo procijeniti broj Fourierovih koeficijenata potreban za aproksimaciju funkcije unutar zadane točnosti.

Neka je

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \quad (65)$$

N -ta parcijalna suma Fourierovog reda funkcije f . Ako želimo da je

$$\sup_{x \in [-L, L]} |f(x) - S_N(x)| < \varepsilon, \quad (66)$$

onda nam je potrebno barem

$$N > \frac{4L^2 M}{\pi^2 \varepsilon} \quad (67)$$

Fourierovih koeficijenata.