

Parcijalne diferencijalne jednačbe

prof.dr.sc. Saša Krešić-Jurić

PMF-Split

Jednadžbe drugog reda

Opća linearna PDJ drugog reda u dvije nezavisne varijable:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G. \quad (1)$$

Fukcije u, A, B, C, D, E, F, G ovise o variablama $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Operatorski oblik jednadžbe:

$$L[u] = G, \quad L = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F. \quad (2)$$

Glavni dio operatora L :

$$L_0 = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3)$$

Svako jednadžbi (1) pridružujemo diskriminantu $\Delta(x, y)$:

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y). \quad (4)$$

Kvalitativna svojstva rješenja jednadžbe (1) ovise o predznaku $\Delta(x, y)$.

Jednadžbe drugog reda

Opća linearna PDJ drugog reda u dvije nezavisne varijable:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G. \quad (1)$$

Fukcije u, A, B, C, D, E, F, G ovise o variablama $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Operatorski oblik jednadžbe:

$$L[u] = G, \quad L = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F. \quad (2)$$

Glavni dio operatora L :

$$L_0 = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3)$$

Svako jednadžbi (1) pridružujemo diskriminantu $\Delta(x, y)$:

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y). \quad (4)$$

Kvalitativna svojstva rješenja jednadžbe (1) ovise o predznaku $\Delta(x, y)$.

Jednadžbe drugog reda

Opća linearna PDJ drugog reda u dvije nezavisne varijable:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G. \quad (1)$$

Fukcije u, A, B, C, D, E, F, G ovise o variablama $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Operatorski oblik jednadžbe:

$$L[u] = G, \quad L = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F. \quad (2)$$

Glavni dio operatora L :

$$L_0 = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3)$$

Svako jednadžbi (1) pridružujemo diskriminantu $\Delta(x, y)$:

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y). \quad (4)$$

Kvalitativna svojstva rješenja jednadžbe (1) ovise o predznaku $\Delta(x, y)$.

Jednadžbe drugog reda

Opća linearna PDJ drugog reda u dvije nezavisne varijable:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G. \quad (1)$$

Fukcije u, A, B, C, D, E, F, G ovise o variablama $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Operatorski oblik jednadžbe:

$$L[u] = G, \quad L = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F. \quad (2)$$

Glavni dio operatora L :

$$L_0 = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3)$$

Svako jednadžbi (1) pridružujemo diskriminantu $\Delta(x, y)$:

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y). \quad (4)$$

Kvalitativna svojstva rješenja jednadžbe (1) ovise o predznaku $\Delta(x, y)$.

Jednadžbe drugog reda

Opća linearna PDJ drugog reda u dvije nezavisne varijable:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G. \quad (1)$$

Fukcije u, A, B, C, D, E, F, G ovise o variablama $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Operatorski oblik jednadžbe:

$$L[u] = G, \quad L = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F. \quad (2)$$

Glavni dio operatora L :

$$L_0 = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3)$$

Svako jednadžbi (1) pridružujemo diskriminantu $\Delta(x, y)$:

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y). \quad (4)$$

Kvalitativna svojstva rješenja jednadžbe (1) ovise o predznaku $\Delta(x, y)$.

Definicija

Jednadžba drugog reda $L[u] = G$ naziva se

- 1 hiperbolička u točki (x, y) ako je $\Delta(x, y) > 0$,
- 2 parabolička u točki (x, y) ako je $\Delta(x, y) = 0$,
- 3 eliptička u točki (x, y) ako je $\Delta(x, y) < 0$.

Ako je jednadžba $L[u] = G$ hiperbolička (parabolička, eliptička) u svakoj točki područja Ω , onda kažemo da je jednadžba hiperbolička (parabolička, eliptička) u Ω .

Primjer

Klasificirajte sljedeće jednadžbe:

- 1 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$,
- 2 $u_t - k u_{xx} = 0$,
- 3 $u_{xx} + u_{yy} = 0$,
- 4 $y u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Definicija

Jednadžba drugog reda $L[u] = G$ naziva se

- 1 hiperbolička u točki (x, y) ako je $\Delta(x, y) > 0$,
- 2 parabolička u točki (x, y) ako je $\Delta(x, y) = 0$,
- 3 eliptička u točki (x, y) ako je $\Delta(x, y) < 0$.

Ako je jednadžba $L[u] = G$ hiperbolička (parabolička, eliptička) u svakoj točki područja Ω , onda kažemo da je jednadžba hiperbolička (parabolička, eliptička) u Ω .

Primjer

Klasificirajte sljedeće jednadžbe:

- 1 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$,
- 2 $u_t - k u_{xx} = 0$,
- 3 $u_{xx} + u_{yy} = 0$,
- 4 $y u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Tip jednađbe je invarijantan obzirom na regularnu transformaciju varijabli u jednađbi.

Lema

Neka je

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (5)$$

linearna jednađba drugog reda. Ako je $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ regularna transformacija varijabli, onda je predznak diskriminante $\Delta = B^2 - AC$ invarijantan s obzirom na transformaciju $(x, y) \mapsto (\alpha, \beta)$.

Uvođenjem novih varijabli svaka jednađba se može transformirati u *kanonski oblik*.

Transformirani koeficijenti u novim varijablama:

$$\bar{A} = A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2, \quad (6)$$

$$\bar{B} = A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y, \quad (7)$$

$$\bar{C} = A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2. \quad (8)$$

Tip jednađbe je invarijantan obzirom na regularnu transformaciju varijabli u jednađbi.

Lema

Neka je

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (5)$$

linearna jednađba drugog reda. Ako je $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ regularna transformacija varijabli, onda je predznak diskriminante $\Delta = B^2 - AC$ invarijantan s obzirom na transformaciju $(x, y) \mapsto (\alpha, \beta)$.

Uvođenjem novih varijabli svaka jednađba se može transformirati u *kanonski oblik*.

Transformirani koeficijenti u novim varijablama:

$$\bar{A} = A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2, \quad (6)$$

$$\bar{B} = A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y, \quad (7)$$

$$\bar{C} = A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2. \quad (8)$$

Tip jednađbe je invarijantan obzirom na regularnu transformaciju varijabli u jednađbi.

Lema

Neka je

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (5)$$

linearna jednađba drugog reda. Ako je $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ regularna transformacija varijabli, onda je predznak diskriminante $\Delta = B^2 - AC$ invarijantan s obzirom na transformaciju $(x, y) \mapsto (\alpha, \beta)$.

Uvođenjem novih varijabli svaka jednađba se može transformirati u *kanonski oblik*.

Transformirani koeficijenti u novim varijablama:

$$\bar{A} = A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2, \quad (6)$$

$$\bar{B} = A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y, \quad (7)$$

$$\bar{C} = A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2. \quad (8)$$

Tip jednađbe je invarijantan obzirom na regularnu transformaciju varijabli u jednađbi.

Lema

Neka je

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (5)$$

linearna jednađba drugog reda. Ako je $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ regularna transformacija varijabli, onda je predznak diskriminante $\Delta = B^2 - AC$ invarijantan s obzirom na transformaciju $(x, y) \mapsto (\alpha, \beta)$.

Uvođenjem novih varijabli svaka jednađba se može transformirati u *kanonski oblik*.

Transformirani koeficijenti u novim varijablama:

$$\bar{A} = A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2, \quad (6)$$

$$\bar{B} = A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y, \quad (7)$$

$$\bar{C} = A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2. \quad (8)$$

Definicija

- 1 Kanonski oblik **hiperboličke** jednadžbe je

$$u_{xy} + L_1[v] = G \quad (9)$$

gdje je L_1 diferencijalni operator prvog reda. Ovaj kanonski oblik je ekvivalentan sa

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} + L_1[w] = G \quad (10)$$

gdje su variable α, β dane transformacijom $\alpha = x + y, \beta = x - y$.

- 2 Kanonski oblik **paraboličke** jednadžbe je

$$u_{xx} + L_1[u] = G. \quad (11)$$

- 3 Kanonski oblik **eliptičke** jednadžbe je

$$u_{xx} + u_{yy} + L_1[u] = G. \quad (12)$$

Definicija

- 1 Kanonski oblik **hiperboličke** jednadžbe je

$$u_{xy} + L_1[u] = G \quad (9)$$

gdje je L_1 diferencijalni operator prvog reda. Ovaj kanonski oblik je ekvivalentan sa

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} + L_1[w] = G \quad (10)$$

gdje su variable α, β dane transformacijom $\alpha = x + y, \beta = x - y$.

- 2 Kanonski oblik **paraboličke** jednadžbe je

$$u_{xx} + L_1[u] = G. \quad (11)$$

- 3 Kanonski oblik **eliptičke** jednadžbe je

$$u_{xx} + u_{yy} + L_1[u] = G. \quad (12)$$

Definicija

- 1 Kanonski oblik **hiperboličke** jednadžbe je

$$u_{xy} + L_1[u] = G \quad (9)$$

gdje je L_1 diferencijalni operator prvog reda. Ovaj kanonski oblik je ekvivalentan sa

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} + L_1[w] = G \quad (10)$$

gdje su variable α, β dane transformacijom $\alpha = x + y, \beta = x - y$.

- 2 Kanonski oblik **paraboličke** jednadžbe je

$$u_{xx} + L_1[u] = G. \quad (11)$$

- 3 Kanonski oblik **eliptičke** jednadžbe je

$$u_{xx} + u_{yy} + L_1[u] = G. \quad (12)$$

Definicija

- 1 Kanonski oblik **hiperboličke** jednadžbe je

$$u_{xy} + L_1[u] = G \quad (9)$$

gdje je L_1 diferencijalni operator prvog reda. Ovaj kanonski oblik je ekvivalentan sa

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} + L_1[w] = G \quad (10)$$

gdje su variable α, β dane transformacijom $\alpha = x + y, \beta = x - y$.

- 2 Kanonski oblik **paraboličke** jednadžbe je

$$u_{xx} + L_1[u] = G. \quad (11)$$

- 3 Kanonski oblik **eliptičke** jednadžbe je

$$u_{xx} + u_{yy} + L_1[u] = G. \quad (12)$$

Hiperboličke jednačbe

Teorem

Neka je

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (13)$$

jednačba hiperboličkog tipa u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Onda postoje varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ u kojima jednačba (13) ima kanonski oblik

$$w_{\alpha\beta} + L_1[w] = \bar{G} \quad (14)$$

gdje je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ i L_1 je diferencijalni operator prvog reda.

Primjer

Odredite kanonski oblik i opće rješenje jednačbe

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2. \quad (15)$$

Hiperboličke jednačbe

Teorem

Neka je

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (13)$$

jednačba hiperboličkog tipa u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Onda postoje varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ u kojima jednačba (13) ima kanonski oblik

$$w_{\alpha\beta} + L_1[w] = \bar{G} \quad (14)$$

gdje je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ i L_1 je diferencijalni operator prvog reda.

Primjer

Odredite kanonski oblik i opće rješenje jednačbe

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2. \quad (15)$$

Hiperboličke jednačbe

Teorem

Neka je

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (13)$$

jednačba hiperboličkog tipa u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Onda postoje varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ u kojima jednačba (13) ima kanonski oblik

$$w_{\alpha\beta} + L_1[w] = \bar{G} \quad (14)$$

gdje je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ i L_1 je diferencijalni operator prvog reda.

Primjer

Odredite kanonski oblik i opće rješenje jednačbe

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2. \quad (15)$$

Paraboličke jednačbe

Teorem

Neka je

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (16)$$

jednačba paraboličkog tipa u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Onda postoje varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ u kojima jednačba (16) ima kanonski oblik

$$w_{\alpha\alpha} + L_1[w] = \bar{G} \quad (17)$$

gdje je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ i L_1 je diferencijalni operator prvog reda.

Primjer

Odredite kanonski oblik i opće rješenje jednačbe

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0 \quad (18)$$

u poluravnini $x > 0$.

Paraboličke jednačbe

Teorem

Neka je

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (16)$$

jednačba paraboličkog tipa u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Onda postoje varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ u kojima jednačba (16) ima kanonski oblik

$$w_{\alpha\alpha} + L_1[w] = \bar{G} \quad (17)$$

gdje je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ i L_1 je diferencijalni operator prvog reda.

Primjer

Odredite kanonski oblik i opće rješenje jednačbe

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0 \quad (18)$$

u poluravnini $x > 0$.

Paraboličke jednačbe

Teorem

Neka je

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (16)$$

jednačba paraboličkog tipa u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Onda postoje varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ u kojima jednačba (16) ima kanonski oblik

$$w_{\alpha\alpha} + L_1[w] = \bar{G} \quad (17)$$

gdje je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ i L_1 je diferencijalni operator prvog reda.

Primjer

Odredite kanonski oblik i opće rješenje jednačbe

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0 \quad (18)$$

u poluravnini $x > 0$.

Teorem

Neka je

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (19)$$

eliptička jednačba u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Onda postoje varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ u kojima jednačba (19) ima kanonski oblik

$$w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} + L_1[w] = \tilde{G} \quad (20)$$

gdje je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ i L_1 je diferencijalni operator prvog reda.

Primjer

Odredite kanonski oblik jednačbe

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0. \quad (21)$$

Teorem

Neka je

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (19)$$

eliptička jednačba u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Onda postoje varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ u kojima jednačba (19) ima kanonski oblik

$$w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} + L_1[w] = \tilde{G} \quad (20)$$

gdje je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ i L_1 je diferencijalni operator prvog reda.

Primjer

Odredite kanonski oblik jednačbe

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0. \quad (21)$$

Teorem

Neka je

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (19)$$

eliptička jednačba u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Onda postoje varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ u kojima jednačba (19) ima kanonski oblik

$$w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} + L_1[w] = \bar{G} \quad (20)$$

gdje je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ i L_1 je diferencijalni operator prvog reda.

Primjer

Odredite kanonski oblik jednačbe

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0. \quad (21)$$

Jednadžba provođenja topline

Jednadžba provođenja topline

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (22)$$

opisuje temperaturu $u(x, t)$ u tankom toplinski vodljivom štapu. Štap je toplinski izoliran osim eventualno u točkama $x = 0$ i $x = L$.

Dirichletovi rubni uvjeti:

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (23)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (24)$$

$$u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (25)$$

Neumannovi rubni uvjeti:

$$u_x(0, t) = a(t), \quad u_x(L, t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (26)$$

$u_x(x_0, t)$ opisuje protok topline u točki x_0

Jednadžba provođenja topline

Jednadžba provođenja topline

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (22)$$

opisuje temperaturu $u(x, t)$ u tankom toplinski vodljivom štapu. Štap je toplinski izoliran osim eventualno u točkama $x = 0$ i $x = L$.

Dirichletovi rubni uvjeti:

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (23)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (24)$$

$$u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (25)$$

Neumannovi rubni uvjeti:

$$u_x(0, t) = a(t), \quad u_x(L, t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (26)$$

$u_x(x_0, t)$ opisuje protok topline u točki x_0

Jednadžba provođenja topline

Jednadžba provođenja topline

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (22)$$

opisuje temperaturu $u(x, t)$ u tankom toplinski vodljivom štapu. Štap je toplinski izoliran osim eventualno u točkama $x = 0$ i $x = L$.

Dirichletovi rubni uvjeti:

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (23)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (24)$$

$$u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (25)$$

Neumannovi rubni uvjeti:

$$u_x(0, t) = a(t), \quad u_x(L, t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (26)$$

$u_x(x_0, t)$ opisuje protok topline u točki x_0

Jednadžba provođenja topline

Jednadžba provođenja topline

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (22)$$

opisuje temperaturu $u(x, t)$ u tankom toplinski vodljivom štapu. Štap je toplinski izoliran osim eventualno u točkama $x = 0$ i $x = L$.

Dirichletovi rubni uvjeti:

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (23)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (24)$$

$$u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (25)$$

Neumannovi rubni uvjeti:

$$u_x(0, t) = a(t), \quad u_x(L, t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (26)$$

$u_x(x_0, t)$ opisuje protok topline u točki x_0

Teorem (Jedinstvenost rješenja)

Ako su u_1 i u_2 C^2 rješenja problema

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (27)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (28)$$

$$u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), \quad t \geq 0, \quad (29)$$

onda je $u_1 = u_2$.

Definicija

Parabolički rub pravokutnika $D = [0, L] \times [0, T]$ je unija baze i vertikalnih stranica pravokutnika,

$$\partial_p D = \{(0, t) \mid 0 \leq t \leq T\} \cup \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq L\} \cup \{(L, t) \mid 0 \leq t \leq T\}.$$

Teorem (Jedinstvenost rješenja)

Ako su u_1 i u_2 C^2 rješenja problema

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (27)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (28)$$

$$u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), \quad t \geq 0, \quad (29)$$

onda je $u_1 = u_2$.

Definicija

Parabolički rub pravokutnika $D = [0, L] \times [0, T]$ je unija baze i vertikalnih stranica pravokutnika,

$$\partial_p D = \{(0, t) \mid 0 \leq t \leq T\} \cup \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq L\} \cup \{(L, t) \mid 0 \leq t \leq T\}.$$

Princip maksimuma

Neka je funkcija $u \in C^2$ rješenje jednadžbe

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (30)$$

Neka je $T > 0$ i neka je $D = [0, L] \times [0, T]$. Onda je

$$\max_{(x,t) \in D} u(x,t) = u(x_0, t_0) \quad (31)$$

u nekoj točki $(x_0, t_0) \in \partial_p D$.

Princip minimuma

Svako C^2 rješenje jednadžbe provođenja topline ima minimum na paraboličkom rubu pravokutnika $[0, L] \times [0, T]$.

Princip maksimuma

Neka je funkcija $u \in C^2$ rješenje jednadžbe

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (30)$$

Neka je $T > 0$ i neka je $D = [0, L] \times [0, T]$. Onda je

$$\max_{(x,t) \in D} u(x,t) = u(x_0, t_0) \quad (31)$$

u nekoj točki $(x_0, t_0) \in \partial_p D$.

Princip minimuma

Svako C^2 rješenje jednadžbe provođenja topline ima minimum na paraboličkom rubu pravokutnika $[0, L] \times [0, T]$.

Teorem (Stabilnost rješenja)

Neka su u_1 i u_2 C^2 rješenja početno–rubnih problema

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (32)$$

$$u_i(x, 0) = f_i(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (33)$$

$$u_i(0, t) = a_i(t), \quad u_i(L, t) = b_i(t), \quad t \geq 0 \quad (34)$$

za $i = 1, 2$. Neka je $T > 0$. Ako je

$$\max_{0 \leq x \leq L} |f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon, \quad (35)$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| < \varepsilon, \quad \max_{0 \leq t \leq T} |b_1(t) - b_2(t)| < \varepsilon \quad (36)$$

za neki $\varepsilon > 0$, onda je

$$\max_{(x,t) \in D} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon \quad (37)$$

gdje je $D = [0, L] \times [0, T]$.

Metoda separacije varijabli

Promotrimo jednadžbu provođenja s **Dirichletovim** rubnim uvjetima

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (38)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (39)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (40)$$

Kompatibilnost početnih i rubnih uvjeta: $f(0) = f(L) = 0$.

Tražimo rješenje u separiranom obliku $u(x, t) = P(x)Q(t)$.

Rješenje se dobiva u obliku beskonačnog reda funkcija

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)Q_n(t). \quad (41)$$

Metoda separacije varijabli

Promotrimo jednadžbu provođenja s **Dirichletovim** rubnim uvjetima

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (38)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (39)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (40)$$

Kompatibilnost početnih i rubnih uvjeta: $f(0) = f(L) = 0$.

Tražimo rješenje u separiranom obliku $u(x, t) = P(x)Q(t)$.

Rješenje se dobiva u obliku beskonačnog reda funkcija

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)Q_n(t). \quad (41)$$

Metoda separacije varijabli

Promotrimo jednadžbu provođenja s **Dirichletovim** rubnim uvjetima

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (38)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (39)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (40)$$

Kompatibilnost početnih i rubnih uvjeta: $f(0) = f(L) = 0$.

Tražimo rješenje u separiranom obliku $u(x, t) = P(x)Q(t)$.

Rješenje se dobiva u obliku beskonačnog reda funkcija

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)Q_n(t). \quad (41)$$

Metoda separacije varijabli

Promotrimo jednadžbu provođenja s **Dirichletovim** rubnim uvjetima

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (38)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (39)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (40)$$

Kompatibilnost početnih i rubnih uvjeta: $f(0) = f(L) = 0$.

Tražimo rješenje u separiranom obliku $u(x, t) = P(x)Q(t)$.

Rješenje se dobiva u obliku beskonačnog reda funkcija

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)Q_n(t). \quad (41)$$

Teorem (Egzistencija rješenja)

Pretpostavimo da funkcija $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ zadovoljava sljedeće uvjete:

- 1 f je neprekidna i po dijelovima C^1 na $[0, L]$,
- 2 $f(0) = f(L) = 0$.

Tada je funkcija

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (42)$$

klasično rješenje počeno–rubnog problema

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (43)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (44)$$

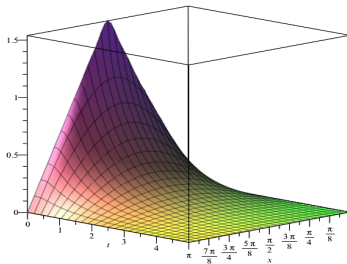
$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (45)$$

Primjer Odredite rješenje jednačbe provođenja

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \quad (46)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (47)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases} \quad (48)$$



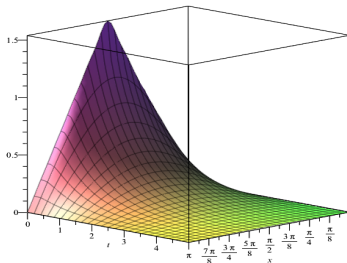
$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2} e^{-(2m-1)^2 t} \sin((2m-1)x) \quad (49)$$

Primjer Odredite rješenje jednačbe provođenja

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \quad (46)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (47)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases} \quad (48)$$



$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2} e^{-(2m-1)^2 t} \sin((2m-1)x) \quad (49)$$

Neumannovi rubni uvjeti

$$u_t - k u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (50)$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (51)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -L \leq x \leq L. \quad (52)$$

Kompatibilnosti početnih i rubnih uvjeta: $f'(0) = 0$, $f'(L) = 0$.

Rješenje:

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad (53)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad n \geq 0. \quad (54)$$

Periodički rubni uvjeti

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad -L < x < L, \quad t > 0, \quad (55)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -L \leq x \leq L, \quad (56)$$

$$u(-L, t) = u(L, t), \quad u_x(-L, t) = u_x(L, t), \quad t \geq 0. \quad (57)$$

Rješenje:

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \quad (58)$$

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n \geq 0, \quad (59)$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (60)$$

Nehomogena jednačba provođenja

$$u_t - ku_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (61)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (62)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (63)$$

$F(x, t)$ modelira unutarnji izvor koji grije ili hladi štap.

U homogenom slučaju rješenje je dano sa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad B_n(t) = B_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}. \quad (64)$$

Rješenje tražimo metodom varijacije parametara:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (65)$$

Nehomogena jednačba provođenja

$$u_t - ku_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (61)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (62)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (63)$$

$F(x, t)$ modelira unutarnji izvor koji grije ili hladi štap.

U homogenom slučaju rješenje je dano sa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad B_n(t) = B_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}. \quad (64)$$

Rješenje tražimo metodom varijacije parametara:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (65)$$

Nehomogena jednačba provođenja

$$u_t - ku_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (61)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (62)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (63)$$

$F(x, t)$ modelira unutarnji izvor koji grije ili hladi štap.

U homogenom slučaju rješenje je dano sa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad B_n(t) = B_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}. \quad (64)$$

Rješenje tražimo metodom varijacije parametara:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (65)$$

$$u_t - ku_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (61)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (62)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (63)$$

$F(x, t)$ modelira unutarnji izvor koji grije ili hladi štap.

U homogenom slučaju rješenje je dano sa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad B_n(t) = B_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}. \quad (64)$$

Rješenje tražimo metodom varijacije parametara:

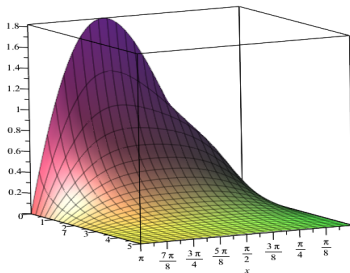
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (65)$$

Primjer Riješite nehomogenu jednadžbu

$$u_t - u_{xx} = e^{-t} \sin(3x), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (66)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (67)$$

$$u(x, 0) = x \sin(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (68)$$



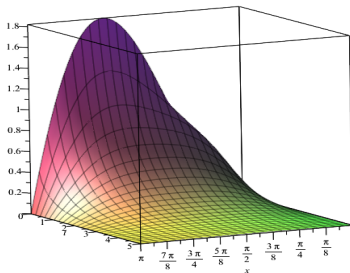
$$u(x, t) = \frac{\pi}{2} e^{-t} \sin(x) + \frac{1}{8} (e^{-t} - e^{-9t}) \sin(3x) - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} e^{-4n^2 t} \sin(2nx)$$

Primjer Riješite nehomogenu jednadžbu

$$u_t - u_{xx} = e^{-t} \sin(3x), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (66)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (67)$$

$$u(x, 0) = x \sin(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (68)$$



$$u(x, t) = \frac{\pi}{2} e^{-t} \sin(x) + \frac{1}{8} (e^{-t} - e^{-9t}) \sin(3x) - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} e^{-4n^2 t} \sin(2nx)$$

(69)

Valna jednađžba

Valna jednađžba opisuje valna gibanja u prirodi kako što su titranje kontinuiranih mehaničkih sredina i širenje elektromagnetiskih i zvučnih valova.

Valna jednađžba u jednoj prostornoj dimenziji

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (70)$$

opisuje titranje elastične žice pod sljedećim pretpostavkama:

- disipativni efekti (unutarnje trenje žice i trenje zraka) su zanemarivi,
- odklon žice $u(x, t)$ od ravnotežnog položaja je okomit na os x ,
- na žicu ne djeluje vanjska sila.

D'Alambertovo rješenje za homogenu jednađžbu beskonačne žice

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (71)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (72)$$

$f(x)$ početna amplituda, $g(x)$ početna brzina točke x .

Valna jednažba

Valna jednažba opisuje valna gibanja u prirodi kako što su titranje kontinuiranih mehaničkih sredina i širenje elektromagnetiskih i zvučnih valova.

Valna jednažba u jednoj prostornoj dimenziji

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (70)$$

opisuje titranje elastične žice pod sljedećim pretpostavkama:

- disipativni efekti (unutarnje trenje žice i trenje zraka) su zanemarivi,
- otklon žice $u(x, t)$ od ravnotežnog položaja je okomit na os x ,
- na žicu ne djeluje vanjska sila.

D'Alembertovo rješenje za homogenu jednažbu beskonačne žice

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (71)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (72)$$

$f(x)$ početna amplituda, $g(x)$ početna brzina točke x .

Valna jednađžba

Valna jednađžba opisuje valna gibanja u prirodi kako što su titranje kontinuiranih mehaničkih sredina i širenje elektromagnetiskih i zvučnih valova.

Valna jednađžba u jednoj prostornoj dimenziji

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (70)$$

opisuje titranje elastične žice pod sljedećim pretpostavkama:

- disipativni efekti (unutarnje trenje žice i trenje zraka) su zanemarivi,
- odklon žice $u(x, t)$ od ravnotežnog položaja je okomit na os x ,
- na žicu ne djeluje vanjska sila.

D'Alambertovo rješenje za homogenu jednađžbu beskonačne žice

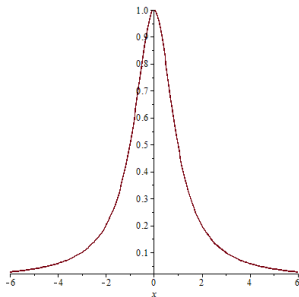
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (71)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (72)$$

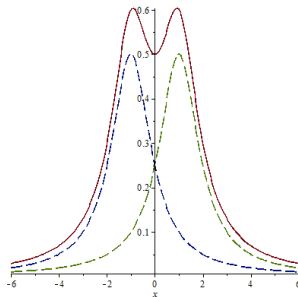
$f(x)$ početna amplituda, $g(x)$ početna brzina točke x .

Opće rješenje valne jednažbe je superpozicija dva putujuća vala

$$u(x, t) = A(x + ct) + B(x - ct). \quad (73)$$



(a) Početni profil $f(x)$



(b) Funkcija $u(x, t)$ kao superpozicija dva putujuća vala.

Slika:

Teorem

Neka su $f \in C^2(\mathbb{R})$ i $g \in C^1(\mathbb{R})$. Tada valna jednažba

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (74)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (75)$$

ima jedinstveno rješenje

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[f(x + ct) + f(x - ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (76)$$

koje je u svakom konačnom intervalu $0 \leq t \leq T$ stabilno obzirom na početne uvjete (75).

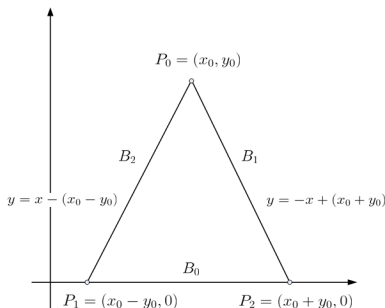
D'Alembertovo rješenje za nehomogenu jednadžbu beskonačne žice

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (77)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (78)$$

$F(x, t)$ modelira vanjsku silu koja djeluje na žicu.

Rješenje se dobiva integracijom transformirane jednadžbe po području prikazanom na slici i primjenom Greenovog teorema. Ova metoda daje vrijednost funkcije $u(x, t)$ u vrhu trokuta.



Postupak rješavanja nehomogene jednadžbe

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (79)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (80)$$

- Uvodjenjem funkcije $w(x, y) = u(x, \frac{y}{c})$ transformirajte jednadžbu u oblik

$$w_{xx} - w_{yy} = F^*(x, y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \quad (81)$$

$$w(x, 0) = f(x), \quad w_y(x, 0) = g^*(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (82)$$

gdje su

$$F^*(x, y) = -\frac{1}{c^2} F(x, t), \quad g^*(x) = \frac{1}{c} g(x). \quad (83)$$

- Odredite funkciju

$$w(x, y) = \frac{1}{2} [f(x+y) + f(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} g^*(x') dx' - \frac{1}{2} \iint_D F^*(x', y') dx' dy'$$

- Odredite rješenje $u(x, t) = w(x, ct)$.

Postupak rješavanja nehomogene jednadžbe

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (79)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (80)$$

- Uvodjenjem funkcije $w(x, y) = u(x, \frac{y}{c})$ transformirajte jednadžbu u oblik

$$w_{xx} - w_{yy} = F^*(x, y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \quad (81)$$

$$w(x, 0) = f(x), \quad w_y(x, 0) = g^*(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (82)$$

gdje su

$$F^*(x, y) = -\frac{1}{c^2} F(x, t), \quad g^*(x) = \frac{1}{c} g(x). \quad (83)$$

- Odredite funkciju

$$w(x, y) = \frac{1}{2} [f(x+y) + f(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} g^*(x') dx' - \frac{1}{2} \iint_D F^*(x', y') dx' dy'$$

- Odredite rješenje $u(x, t) = w(x, ct)$.

Postupak rješavanja nehomogene jednadžbe

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (79)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (80)$$

- Uvodjenjem funkcije $w(x, y) = u(x, \frac{y}{c})$ transformirajte jednadžbu u oblik

$$w_{xx} - w_{yy} = F^*(x, y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \quad (81)$$

$$w(x, 0) = f(x), \quad w_y(x, 0) = g^*(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (82)$$

gdje su

$$F^*(x, y) = -\frac{1}{c^2} F(x, t), \quad g^*(x) = \frac{1}{c} g(x). \quad (83)$$

- Odredite funkciju

$$w(x, y) = \frac{1}{2} [f(x+y) + f(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} g^*(x') dx' - \frac{1}{2} \iint_D F^*(x', y') dx' dy'$$

- Odredite rješenje $u(x, t) = w(x, ct)$.

Postupak rješavanja nehomogene jednadžbe

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (79)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (80)$$

- Uvodenjem funkcije $w(x, y) = u(x, \frac{y}{c})$ transformirajte jednadžbu u oblik

$$w_{xx} - w_{yy} = F^*(x, y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \quad (81)$$

$$w(x, 0) = f(x), \quad w_y(x, 0) = g^*(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (82)$$

gdje su

$$F^*(x, y) = -\frac{1}{c^2} F(x, t), \quad g^*(x) = \frac{1}{c} g(x). \quad (83)$$

- Odredite funkciju

$$w(x, y) = \frac{1}{2} [f(x+y) + f(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} g^*(x') dx' - \frac{1}{2} \iint_D F^*(x', y') dx' dy'$$

- Odredite rješenje $u(x, t) = w(x, ct)$.

Početno–rubni problem za valnu jednadžbu

Titranje elastične žice duljine L opisano je valnom jednadžbom

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (84)$$

s početnim uvjetima

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (85)$$

Ako su krajevi žice učvršćeni, onda $u(x, t)$ zadovoljava Dirichletove rubne uvjete

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (86)$$

Ako krajevi žice slobodno titraju, onda $u(x, t)$ zadovoljava Neumannove rubne uvjete

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (87)$$

Teorem o jedinstvenosti rješenja

Neka su u_1 i u_2 C^2 rješenja valne jednadžbe (85) s početnim uvjetima (86) i Dirichletovim rubnim uvjetima (87). Onda je $u_1 = u_2$.

Titranje elastične žice duljine L opisano je valnom jednadžbom

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (84)$$

s početnim uvjetima

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (85)$$

Ako su krajevi žice učvršćeni, onda $u(x, t)$ zadovoljava Dirichletove rubne uvjete

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (86)$$

Ako krajevi žice slobodno titraju, onda $u(x, t)$ zadovoljava Neumannove rubne uvjete

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (87)$$

Teorem o jedinstvenosti rješenja

Neka su u_1 i u_2 C^2 rješenja valne jednadžbe (85) s početnim uvjetima (86) i Dirichletovim rubnim uvjetima (87). Onda je $u_1 = u_2$.

Početno–rubni problem za valnu jednadžbu

Titranje elastične žice duljine L opisano je valnom jednadžbom

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (84)$$

s početnim uvjetima

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (85)$$

Ako su krajevi žice učvršćeni, onda $u(x, t)$ zadovoljava Dirichletove rubne uvjete

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (86)$$

Ako krajevi žice slobodno titraju, onda $u(x, t)$ zadovoljava Neumannove rubne uvjete

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (87)$$

Teorem o jedinstvenosti rješenja

Neka su u_1 i u_2 C^2 rješenja valne jednadžbe (85) s početnim uvjetima (86) i Dirichletovim rubnim uvjetima (87). Onda je $u_1 = u_2$.

Početno–rubni problem za valnu jednadžbu

Titranje elastične žice duljine L opisano je valnom jednadžbom

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (84)$$

s početnim uvjetima

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (85)$$

Ako su krajevi žice učvršćeni, onda $u(x, t)$ zadovoljava Dirichletove rubne uvjete

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (86)$$

Ako krajevi žice slobodno titraju, onda $u(x, t)$ zadovoljava Neumannove rubne uvjete

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (87)$$

Teorem o jedinstvenosti rješenja

Neka su u_1 i u_2 C^2 rješenja valne jednadžbe (85) s početnim uvjetima (86) i Dirichletovim rubnim uvjetima (87). Onda je $u_1 = u_2$.

Separacija varijabli za homogenu valnu jednačbu

Dirichletovi rubni uvjeti

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (88)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (89)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (90)$$

Kompatibilnost rubnih i početnih uvjeta

$$f(0) = f(L) = 0, \quad g(0) = g(L) = 0. \quad (91)$$

Separacijom varijabli $u(x, t) = P(x)Q(t)$ dobivamo niz funkcija

$$u_n(x, t) = P_n(x)Q_n(t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (92)$$

koje nazivamo harmonici n -tog reda. Harmonik n -tog reda možemo zapisati u obliku

$$u_n(x, t) = R_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t + \theta_n\right) \quad (93)$$

gdje je

$$R_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad a_n = R_n \sin(\theta_n), \quad b_n = R_n \cos(\theta_n). \quad (94)$$

Separacija varijabli za homogenu valnu jednačbu

Dirichletovi rubni uvjeti

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (88)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (89)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (90)$$

Kompatibilnost rubnih i početnih uvjeta

$$f(0) = f(L) = 0, \quad g(0) = g(L) = 0. \quad (91)$$

Separacijom varijabli $u(x, t) = P(x)Q(t)$ dobivamo niz funkcija

$$u_n(x, t) = P_n(x)Q_n(t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (92)$$

koje nazivamo harmonici n -tog reda. Harmonik n -tog reda možemo zapisati u obliku

$$u_n(x, t) = R_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t + \theta_n\right) \quad (93)$$

gdje je

$$R_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad a_n = R_n \sin(\theta_n), \quad b_n = R_n \cos(\theta_n). \quad (94)$$

Separacija varijabli za homogenu valnu jednačbu

Dirichletovi rubni uvjeti

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (88)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (89)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (90)$$

Kompatibilnost rubnih i početnih uvjeta

$$f(0) = f(L) = 0, \quad g(0) = g(L) = 0. \quad (91)$$

Separacijom varijabli $u(x, t) = P(x)Q(t)$ dobivamo niz funkcija

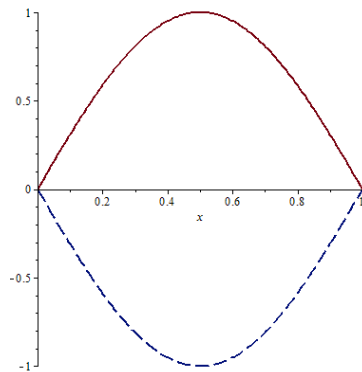
$$u_n(x, t) = P_n(x)Q_n(t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (92)$$

koje nazivamo harmonici n -tog reda. Harmonik n -tog reda možemo zapisati u obliku

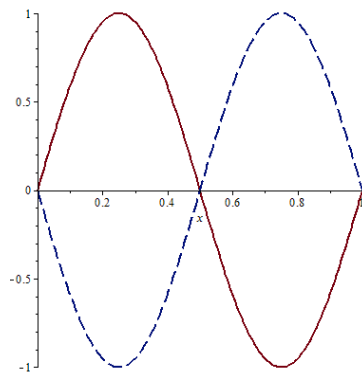
$$u_n(x, t) = R_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t + \theta_n\right) \quad (93)$$

gdje je

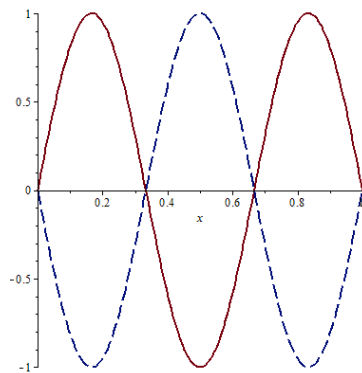
$$R_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad a_n = R_n \sin(\theta_n), \quad b_n = R_n \cos(\theta_n). \quad (94)$$



Prvi harmonik



Drugi harmonik



Treći harmonik

Teorem (Egzistencija rješenja)

Neka su $f \in C^4([0, L])$ i $g \in C^3([0, L])$. Pretpostavimo da funkcije f i g zadovoljavaju uvjete

1 $f(0) = f(L) = 0, f''(0) = f''(L) = 0,$

2 $g(0) = g(L) = 0.$

Tada je

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (95)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad (96)$$

klasično rješenje valne jednačbe s Dirichletovim uvjetima

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (97)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (98)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (99)$$

Primjedba

Ako f i g ne ispunjavaju uvjete iz teorema o egzistenciji, moguće je da formalno rješenje ne zadovoljava valnu jednadžbu.

Primjer

$$f(x) = \begin{cases} \frac{u_0}{x_0} x, & 0 \leq x \leq x_0, \\ u_0 \frac{x-L}{x_0-L}, & x_0 < x \leq L, \end{cases} \quad (100)$$

$$g(x) = 0, \quad (101)$$

$$u(x, t) = \frac{2L^2}{\pi^2} \frac{u_0}{x_0(L-x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (102)$$

Funkcija u je dobro definirana, ali derivacije u_{xx} i u_{tt} ne konvergiraju!

Neumannovi rubni uvjeti

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad (103)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (104)$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (105)$$

Kompatibilnost rubnih i početnih uvjeta

$$f'(0) = f'(L) = 0, \quad g'(0) = g'(L) = 0. \quad (106)$$

Rješenje:

$$u(x, t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad (107)$$

gdje su a_n i b_n određeni početnim uvjetima:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad (108)$$

$$b_0 = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx. \quad (109)$$

Neumannovi rubni uvjeti

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad (103)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (104)$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (105)$$

Kompatibilnost rubnih i početnih uvjeta

$$f'(0) = f'(L) = 0, \quad g'(0) = g'(L) = 0. \quad (106)$$

Rješenje:

$$u(x, t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad (107)$$

gdje su a_n i b_n određeni početnim uvjetima:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad (108)$$

$$b_0 = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx. \quad (109)$$

Neumannovi rubni uvjeti

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (110)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (111)$$

$F(x, t)$ modelira vanjsku silu na titrajuću žicu.

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (112)$$

Pretpostavimo rješenje u obliku

$$u(x, t) = \frac{1}{2} Q_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (113)$$

za nepoznate funkcije $Q_n(t)$, $n \geq 0$. Supstitucijom $u(x, t)$ u valnu jednačžbu dobivamo

$$\frac{1}{2} Q_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[Q_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 Q_n(t) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = F(x, t). \quad (114)$$

Neumannovi rubni uvjeti

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (110)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (111)$$

$F(x, t)$ modelira vanjsku silu na titrajuću žicu.

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (112)$$

Pretpostavimo rješenje u obliku

$$u(x, t) = \frac{1}{2} Q_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (113)$$

za nepoznate funkcije $Q_n(t)$, $n \geq 0$. Supstitucijom $u(x, t)$ u valnu jednačžbu dobivamo

$$\frac{1}{2} Q_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[Q_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 Q_n(t) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = F(x, t). \quad (114)$$

Neumannovi rubni uvjeti

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (110)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (111)$$

$F(x, t)$ modelira vanjsku silu na titrajuću žicu.

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (112)$$

Pretpostavimo rješenje u obliku

$$u(x, t) = \frac{1}{2} Q_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (113)$$

za nepoznate funkcije $Q_n(t)$, $n \geq 0$. Supstitucijom $u(x, t)$ u valnu jednačžbu dobivamo

$$\frac{1}{2} Q_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[Q_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 Q_n(t) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = F(x, t). \quad (114)$$

Ako $F(x, t)$ zadovoljava rubne uvjete

$$F_x(0, t) = F_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (115)$$

onda $F(x, t)$ možemo prikazati u obliku

$$F(x, t) = \frac{1}{2}C_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (116)$$

Iz valne jednadžbe dobivamo

$$Q_0''(t) = C_0(t), \quad (117)$$

$$Q_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 Q_n(t) = C_n(t), \quad n \geq 1. \quad (118)$$

Rješenja:

$$Q_0(t) = a_0 + b_0 t + Q_0^p(t), \quad (119)$$

$$Q_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + Q_n^p(t). \quad (120)$$

Rješenje nehomogene jednačbe:

$$u(x, t) = u_h(x, t) + u_p(x, t) \quad (121)$$

gdje su

$$u_h(x, t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) \right] \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad (122)$$

$$u_p(x, t) = \frac{1}{2} Q_0^p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^p(t) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right). \quad (123)$$

Laplaceova jednađžba

Laplaceova jednađžba u domeni Ω je eliptička jednađžba

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (124)$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je ograničena domena (otvoren, povezan, ograničen skup)

$\partial\Omega$ je unija zatvorenih, jednostavnih, po dijelovima glatkih krivulja

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{Laplaceov operator} \quad (125)$$

Primjene Laplaceove jednađžbe

- Raspodjela električnog potencijala u području bez naboja.
- Stacionarna raspodjela temperature u toplinski vodljivom tijelu.

Definicija

Ako funkcija $u \in C^2(\Omega)$ zadovoljava Laplaceovu jednađžbu u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, onda kađžemo da je u harmonijska funkcija u Ω .

Laplaceova jednađžba

Laplaceova jednađžba u domeni Ω je eliptička jednađžba

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (124)$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je ograničena domena (otvoren, povezan, ograničen skup)

$\partial\Omega$ je unija zatvorenih, jednostavnih, po dijelovima glatkih krivulja

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{Laplaceov operator} \quad (125)$$

Primjene Laplaceove jednađžbe

- Raspodjela električnog potencijala u području bez naboja.
- Stacionarna raspodjela temperature u toplinski vodljivom tijelu.

Definicija

Ako funkcija $u \in C^2(\Omega)$ zadovoljava Laplaceovu jednađžbu u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, onda kađemo da je u harmonijska funkcija u Ω .

Laplaceova jednađžba

Laplaceova jednađžba u domeni Ω je eliptička jednađžba

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (124)$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je ograničena domena (otvoren, povezan, ograničen skup)

$\partial\Omega$ je unija zatvorenih, jednostavnih, po dijelovima glatkih krivulja

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{Laplaceov operator} \quad (125)$$

Primjene Laplaceove jednađžbe

- Raspodjela električnog potencijala u području bez naboja.
- Stacionarna raspodjela temperature u toplinski vodljivom tijelu.

Definicija

Ako funkcija $u \in C^2(\Omega)$ zadovoljava Laplaceovu jednađžbu u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, onda kađžemo da je u harmonijska funkcija u Ω .

Rubni problem za Poissonovu jednadžbu

Poissonova jednadžba je zadana sa

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (126)$$

Ω ograničena domena

■ Dirichletov rubni problem

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (127)$$

■ Neumannov rubni problem

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (128)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla \cdot \vec{n} \quad \text{usmjerena derivacija,} \quad (129)$$

$$\vec{n} \quad \text{jedinični vektor normale u točki } (x, y) \in \partial\Omega \text{ usmjeren prema van.} \quad (130)$$

Rubni problem za Poissonovu jednadžbu

Poissonova jednadžba je zadana sa

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (126)$$

Ω ograničena domena

■ Dirichletov rubni problem

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (127)$$

■ Neumannov rubni problem

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (128)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla \cdot \vec{n} \quad \text{usmjerena derivacija,} \quad (129)$$

$$\vec{n} \quad \text{jedinični vektor normale u točki } (x, y) \in \partial\Omega \text{ usmjeren prema van.} \quad (130)$$

Rubni problem za Poissonovu jednadžbu

Poissonova jednadžba je zadana sa

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (126)$$

Ω ograničena domena

■ Dirichletov rubni problem

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (127)$$

■ Neumannov rubni problem

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (128)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla \cdot \vec{n} \quad \text{usmjerena derivacija,} \quad (129)$$

$$\vec{n} \quad \text{jedinični vektor normale u točki } (x, y) \in \partial\Omega \text{ usmjeren prema van.} \quad (130)$$

U proučavanju Laplaceove i Poissonove jednačbe koristimo se Gausovim teoremom.

Teorem (Gauss)

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena domena čiji rub $\partial\Omega = \cup_{i=1}^n C_i$ je unija zatvorenih, jednostavnih, po dijelovima glatkih krivulja. Neka je $\vec{n}$ jedinični vektor normale na $\partial\Omega$ usmjeren prema van. Ako je $\vec{F}$ vektorsko polje klase C^1 u $\bar{\Omega}$, onda je

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy \quad (131)$$

gdje je $\partial\Omega$ pozitivno orijentirani rub područja Ω .

Lema

Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$. Nužni uvjet za egzistenciju rješenja Neumannovog problema

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (132)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (133)$$

je uvjet konzistentnosti

$$\int_{\partial\Omega} g \, ds = \iint_{\Omega} f \, dx dy. \quad (134)$$

- Nužni uvjet za egzistenciju rješenja Laplaceove jednadžbe s Neumannovim uvjetima:

$$f = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial\Omega} g \, ds = 0. \quad (135)$$

- Harmonijska funkcija zadovoljava

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds = 0. \quad (136)$$

Lema

Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$. Nužni uvjet za egzistenciju rješenja Neumannovog problema

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (132)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (133)$$

je uvjet konzistentnosti

$$\int_{\partial\Omega} g \, ds = \iint_{\Omega} f \, dx dy. \quad (134)$$

- Nužni uvjet za egzistenciju rješenja Laplaceove jednadžbe s Neumannovim uvjetima:

$$f = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial\Omega} g \, ds = 0. \quad (135)$$

- Harmonijska funkcija zadovoljava

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds = 0. \quad (136)$$

Slabi princip maksimuma

Neka je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonijska funkcija na ograničenoj domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Onda je

$$\max_{\bar{\Omega}} u = u(x', y') \quad (137)$$

za neku točku $(x', y') \in \partial\Omega$. Drugim riječima, funkcija u ima maksimum po skupu $\bar{\Omega}$ u nekoj točki ruba $\partial\Omega$.

Slabi princip minimuma

Neka je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonijska funkcija na ograničenoj domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Onda je

$$\min_{\bar{\Omega}} u = u(x', y') \quad (138)$$

za neku točku $(x', y') \in \partial\Omega$.

Za harmonijsku funkciju vrijedi

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u. \quad (139)$$

Slabi princip maksimuma

Neka je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonijska funkcija na ograničenoj domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Onda je

$$\max_{\bar{\Omega}} u = u(x', y') \quad (137)$$

za neku točku $(x', y') \in \partial\Omega$. Drugim riječima, funkcija u ima maksimum po skupu $\bar{\Omega}$ u nekoj točki ruba $\partial\Omega$.

Slabi princip minimuma

Neka je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonijska funkcija na ograničenoj domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Onda je

$$\min_{\bar{\Omega}} u = u(x', y') \quad (138)$$

za neku točku $(x', y') \in \partial\Omega$.

Za harmonijsku funkciju vrijedi

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u. \quad (139)$$

Slabi princip maksimuma

Neka je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonijska funkcija na ograničenoj domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Onda je

$$\max_{\bar{\Omega}} u = u(x', y') \quad (137)$$

za neku točku $(x', y') \in \partial\Omega$. Drugim riječima, funkcija u ima maksimum po skupu $\bar{\Omega}$ u nekoj točki ruba $\partial\Omega$.

Slabi princip minimuma

Neka je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonijska funkcija na ograničenoj domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Onda je

$$\min_{\bar{\Omega}} u = u(x', y') \quad (138)$$

za neku točku $(x', y') \in \partial\Omega$.

Za harmonijsku funkciju vrijedi

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u. \quad (139)$$

Korolar

Ako je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonijska funkcija na ograničenoj domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ i $u(x, y) = 0$ u svakoj točki $(x, y) \in \partial\Omega$, onda je $u = 0$.

Jedinstvenost rješenja Dirichletovog problema

Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$. Onda postoji najviše jedno rješenje $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ Dirichletovog problema

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (140)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (141)$$

Korolar

Ako je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonijska funkcija na ograničenoj domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ i $u(x, y) = 0$ u svakoj točki $(x, y) \in \partial\Omega$, onda je $u = 0$.

Jedinstvenost rješenja Dirichletovog problema

Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$. Onda postoji najviše jedno rješenje $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ Dirichletovog problema

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (140)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (141)$$

Stabilnost rješenja Dirichletovog problema

Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$, i neka su $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ rješenja Poissonove jednačbe

$$\Delta u_1(x, y) = f(x, y), \quad \Delta u_2(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (142)$$

koje zadovoljavaju rubne uvjete

$$u_1(x, y) = g_1(x, y) \quad u_2(x, y) = g_2(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (143)$$

gdje su g_1 i g_2 neprekidne funkcije na $\partial\Omega$. Ako je

$$\max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| < \varepsilon, \quad (144)$$

onda je

$$\max_{\Omega} |u_1 - u_2| < \varepsilon. \quad (145)$$

Princip srednje vrijednosti

Neka je u harmonijska funkcija u domeni Ω (koja nije nužno ograničena), i neka je $\bar{K}_r(x_0, y_0) \subset \Omega$ zatvoreni krug radijusa $r > 0$ sa središtem u $(x_0, y_0) \in \Omega$. Tada je

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} u \, ds \quad (146)$$

gdje je C_r kružnica radiju $r > 0$ sa središtem u (x_0, y_0) .

Teorem

Pretpostavimo da funkcija $u \in C^2(\Omega)$ zadovoljava princip srednje vrijednosti u svakoj točki domene Ω . Onda je u harmonijska funkcija u Ω .

Jaki princip maksimuma

Neka je u harmonijska funkcija u domeni Ω (koja nije nužno ograničena). Ako u ima minimum ili maksimum u unutrašnjosti područja Ω , onda je u konstantna funkcija.

Princip srednje vrijednosti

Neka je u harmonijska funkcija u domeni Ω (koja nije nužno ograničena), i neka je $\bar{K}_r(x_0, y_0) \subset \Omega$ zatvoreni krug radijusa $r > 0$ sa središtem u $(x_0, y_0) \in \Omega$. Tada je

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} u \, ds \quad (146)$$

gdje je C_r kružnica radiju $r > 0$ sa središtem u (x_0, y_0) .

Teorem

Pretpostavimo da funkcija $u \in C^2(\Omega)$ zadovoljava princip srednje vrijednosti u svakoj točki domene Ω . Onda je u harmonijska funkcija u Ω .

Jaki princip maksimuma

Neka je u harmonijska funkcija u domeni Ω (koja nije nužno ograničena). Ako u ima minimum ili maksimum u unutrašnjosti područja Ω , onda je u konstantna funkcija.

Princip srednje vrijednosti

Neka je u harmonijska funkcija u domeni Ω (koja nije nužno ograničena), i neka je $\bar{K}_r(x_0, y_0) \subset \Omega$ zatvoreni krug radijusa $r > 0$ sa središtem u $(x_0, y_0) \in \Omega$. Tada je

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} u \, ds \quad (146)$$

gdje je C_r kružnica radiju $r > 0$ sa središtem u (x_0, y_0) .

Teorem

Pretpostavimo da funkcija $u \in C^2(\Omega)$ zadovoljava princip srednje vrijednosti u svakoj točki domene Ω . Onda je u harmonijska funkcija u Ω .

Jaki princip maksimuma

Neka je u harmonijska funkcija u domeni Ω (koja nije nužno ograničena). Ako u ima minimum ili maksimum u unutrašnjosti područja Ω , onda je u konstantna funkcija.

Separacija varijabli za Laplaceovu jednadžbu

Separacijom varijabli dobivamo rješenje Laplaceove jednadžbu u obliku reda

$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gdje su u_n harmonijske funkcije u području Ω .

Oblik rješenja ovisi o

- geometriji domene Ω ,
- uvjetima na rubu domene $\partial\Omega$.

Problem: Pod kojim uvjetima formalno rješenje $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ definira harmonijsku funkciju u Ω ?

Teorem

Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$. Neka je $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ formalno rješenje Dirichletovog problema

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (147)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (148)$$

gdje je $g \in C(\partial\Omega)$ i $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ je harmonijska funkcija u Ω za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira uniformno ka g na skupu $\partial\Omega$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira uniformno u $\bar{\Omega}$, i u je klasično rješenje problema (148)–(149).

Separacija varijabli za Laplaceovu jednadžbu

Separacijom varijabli dobivamo rješenje Laplaceove jednadžbu u obliku reda

$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gdje su u_n harmonijske funkcije u području Ω .

Oblik rješenja ovisi o

- geometriji domene Ω ,
- uvjetima na rubu domene $\partial\Omega$.

Problem: Pod kojim uvjetima formalno rješenje $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ definira harmonijsku funkciju u Ω ?

Teorem

Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$. Neka je $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ formalno rješenje Dirichletovog problema

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (147)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (148)$$

gdje je $g \in C(\partial\Omega)$ i $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ je harmonijska funkcija u Ω za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira uniformno ka g na skupu $\partial\Omega$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira uniformno u $\bar{\Omega}$, i u je klasično rješenje problema (148)–(149).

Separacija varijabli za Laplaceovu jednadžbu

Separacijom varijabli dobivamo rješenje Laplaceove jednadžbu u obliku reda

$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gdje su u_n harmonijske funkcije u području Ω .

Oblik rješenja ovisi o

- geometriji domene Ω ,
- uvjetima na rubu domene $\partial\Omega$.

Problem: Pod kojim uvjetima formalno rješenje $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ definira harmonijsku funkciju u Ω ?

Teorem

Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$. Neka je $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ formalno rješenje Dirichletovog problema

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (147)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (148)$$

gdje je $g \in C(\partial\Omega)$ i $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ je harmonijska funkcija u Ω za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira uniformno ka g na skupu $\partial\Omega$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira uniformno u $\bar{\Omega}$, i u je klasično rješenje problema (148)–(149).

Separacija varijabli za Laplaceovu jednadžbu

Separacijom varijabli dobivamo rješenje Laplaceove jednadžbu u obliku reda

$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gdje su u_n harmonijske funkcije u području Ω .

Oblik rješenja ovisi o

- geometriji domene Ω ,
- uvjetima na rubu domene $\partial\Omega$.

Problem: Pod kojim uvjetima formalno rješenje $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ definira harmonijsku funkciju u Ω ?

Teorem

Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$. Neka je $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ formalno rješenje Dirichletovog problema

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (147)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (148)$$

gdje je $g \in C(\partial\Omega)$ i $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ je harmonijska funkcija u Ω za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira uniformno ka g na skupu $\partial\Omega$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira uniformno u $\bar{\Omega}$, i u je klasično rješenje problema (148)–(149).

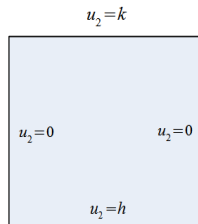
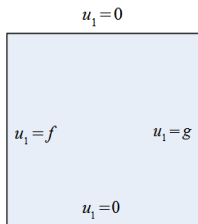
Dirichletov problem na pravokutnoj domeni

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < d, \quad (149)$$

$$u(x, 0) = h(x), \quad u(x, d) = k(x), \quad 0 \leq x \leq b, \quad (150)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad u(b, y) = g(y), \quad 0 \leq y \leq d. \quad (151)$$

- Rješenje Laplaceove jednadžbe želimo napisati kao red po vlastitim funkcijama Sturm–Liouvilleovog problema.
- Rješenje tražimo u obliku $u = u_1 + u_2$ gdje u_1 i u_2 zadovoljavaju homogene rubne uvjete na suprotnim stranicama pravokutnika.



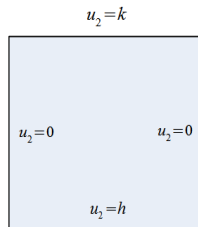
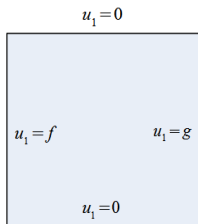
Dirichletov problem na pravokutnoj domeni

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < d, \quad (149)$$

$$u(x, 0) = h(x), \quad u(x, d) = k(x), \quad 0 \leq x \leq b, \quad (150)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad u(b, y) = g(y), \quad 0 \leq y \leq d. \quad (151)$$

- Rješenje Laplaceove jednadžbe želimo napisati kao red po vlastitim funkcijama Sturm–Liouvilleovog problema.
- Rješenje tražimo u obliku $u = u_1 + u_2$ gdje u_1 i u_2 zadovoljavaju homogene rubne uvjete na suprotnim stranicama pravokutnika.



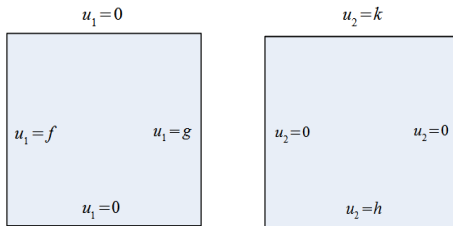
Dirichletov problem na pravokutnoj domeni

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < d, \quad (149)$$

$$u(x, 0) = h(x), \quad u(x, d) = k(x), \quad 0 \leq x \leq b, \quad (150)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad u(b, y) = g(y), \quad 0 \leq y \leq d. \quad (151)$$

- Rješenje Laplaceove jednadžbe želimo napisati kao red po vlastitim funkcijama Sturm–Liouvilleovog problema.
- Rješenje tražimo u obliku $u = u_1 + u_2$ gdje u_1 i u_2 zadovoljavaju homogene rubne uvjete na suprotnim stranicama pravokutnika.



Separacijom varijabli dobivamo

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{d} x \right) + B_n \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{d} (x - b) \right) \right] \sin \left(\frac{n\pi}{d} y \right), \quad (152)$$

$$A_n = \frac{2}{d \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi b}{d} \right)} \int_0^d g(y) \sin \left(\frac{n\pi}{d} y \right) dy, \quad (153)$$

$$B_n = -\frac{2}{d \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi b}{d} \right)} \int_0^d f(y) \sin \left(\frac{n\pi}{d} y \right) dy. \quad (154)$$

Drugo rješenje je dano sa

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + D_n \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{b} (y - d) \right) \right] \sin \left(\frac{n\pi}{b} x \right), \quad (155)$$

$$C_n = \frac{2}{b \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi d}{b} \right)} \int_0^b k(x) \sin \left(\frac{n\pi}{b} x \right) dx, \quad (156)$$

$$D_n = -\frac{2}{b \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi d}{b} \right)} \int_0^b h(x) \sin \left(\frac{\pi}{b} x \right) dx. \quad (157)$$

Ako funkcije f , g , h i k ne iščezavaju u vrhovima pravokutnika $\Omega = (0, b) \times (0, d)$, onda se Dirichletov problem može riješiti dodavanjem harmonijski polinoma u rubne uvjete.

Početni problem

$$\nabla^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (158)$$

$$u(x, y) = G(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad G \in C(\partial\Omega). \quad (159)$$

Transformirani problem

$$\nabla^2 (u(x, y) - P_2(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (160)$$

$$u(x, y) - P_2(x, y) = G(x, y) - P_2(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (161)$$

gdje je

$$P_2(x, y) = a_1(x^2 - y^2) + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5, \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (162)$$

Ako funkcije f , g , h i k ne iščezavaju u vrhovima pravokutnika $\Omega = (0, b) \times (0, d)$, onda se Dirichletov problem može riješiti dodavanjem harmonijski polinoma u rubne uvjete.

Početni problem

$$\nabla^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (158)$$

$$u(x, y) = G(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad G \in C(\partial\Omega). \quad (159)$$

Transformirani problem

$$\nabla^2 \left(u(x, y) - P_2(x, y) \right) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (160)$$

$$u(x, y) - P_2(x, y) = G(x, y) - P_2(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (161)$$

gdje je

$$P_2(x, y) = a_1(x^2 - y^2) + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5, \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (162)$$

Ako funkcije f , g , h i k ne iščezavaju u vrhovima pravokutnika $\Omega = (0, b) \times (0, d)$, onda se Dirichletov problem može riješiti dodavanjem harmonijski polinoma u rubne uvjete.

Početni problem

$$\nabla^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (158)$$

$$u(x, y) = G(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad G \in C(\partial\Omega). \quad (159)$$

Transformirani problem

$$\nabla^2 (u(x, y) - P_2(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (160)$$

$$u(x, y) - P_2(x, y) = G(x, y) - P_2(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (161)$$

gdje je

$$P_2(x, y) = a_1(x^2 - y^2) + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5, \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (162)$$

$P_2(x, y)$ je *harmonijski polinom* jer je

$$\nabla^2 P_2(x, y) = 0 \quad \text{za svaki izbor koeficijenata } a_i \in \mathbb{R}. \quad (163)$$

Definirajmo funkcije

$$v(x, y) = u(x, y) - P_2(x, y), \quad \tilde{G}(x, y) = G(x, y) - P_2(x, y). \quad (164)$$

Dirichletov problem za funkciju v :

$$\nabla^2 v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (165)$$

$$v(x, y) = \tilde{G}(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (166)$$

Polinom P_2 možemo odabrati tako da funkcija $\tilde{G}(x, y) = G(x, y) - P_2(x, y)$ iščezava u vrhovima pravokutnika Ω :

$$G(0, 0) - P_2(0, 0) = 0, \quad (167)$$

$$G(b, 0) - P_2(b, 0) = 0, \quad (168)$$

$$G(0, d) - P_2(0, d) = 0, \quad (169)$$

$$G(b, d) - P_2(b, d) = 0. \quad (170)$$

$P_2(x, y)$ je *harmonijski polinom* jer je

$$\nabla^2 P_2(x, y) = 0 \quad \text{za svaki izbor koeficijenata } a_i \in \mathbb{R}. \quad (163)$$

Definirajmo funkcije

$$v(x, y) = u(x, y) - P_2(x, y), \quad \tilde{G}(x, y) = G(x, y) - P_2(x, y). \quad (164)$$

Dirichletov problem za funkciju v :

$$\nabla^2 v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (165)$$

$$v(x, y) = \tilde{G}(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (166)$$

Polinom P_2 možemo odabrati tako da funkcija $\tilde{G}(x, y) = G(x, y) - P_2(x, y)$ iščezava u vrhovima pravokutnika Ω :

$$G(0, 0) - P_2(0, 0) = 0, \quad (167)$$

$$G(b, 0) - P_2(b, 0) = 0, \quad (168)$$

$$G(0, d) - P_2(0, d) = 0, \quad (169)$$

$$G(b, d) - P_2(b, d) = 0. \quad (170)$$

$P_2(x, y)$ je *harmonijski polinom* jer je

$$\nabla^2 P_2(x, y) = 0 \quad \text{za svaki izbor koeficijenata } a_i \in \mathbb{R}. \quad (163)$$

Definirajmo funkcije

$$v(x, y) = u(x, y) - P_2(x, y), \quad \tilde{G}(x, y) = G(x, y) - P_2(x, y). \quad (164)$$

Dirichletov problem za funkciju v :

$$\nabla^2 v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (165)$$

$$v(x, y) = \tilde{G}(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (166)$$

Polinom P_2 možemo odabrati tako da funkcija $\tilde{G}(x, y) = G(x, y) - P_2(x, y)$ iščezava u vrhovima pravokutnika Ω :

$$G(0, 0) - P_2(0, 0) = 0, \quad (167)$$

$$G(b, 0) - P_2(b, 0) = 0, \quad (168)$$

$$G(0, d) - P_2(0, d) = 0, \quad (169)$$

$$G(b, d) - P_2(b, d) = 0. \quad (170)$$

$P_2(x, y)$ je *harmonijski polinom* jer je

$$\nabla^2 P_2(x, y) = 0 \quad \text{za svaki izbor koeficijenata } a_i \in \mathbb{R}. \quad (163)$$

Definirajmo funkcije

$$v(x, y) = u(x, y) - P_2(x, y), \quad \tilde{G}(x, y) = G(x, y) - P_2(x, y). \quad (164)$$

Dirichletov problem za funkciju v :

$$\nabla^2 v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (165)$$

$$v(x, y) = \tilde{G}(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (166)$$

Polinom P_2 možemo odabrati tako da funkcija $\tilde{G}(x, y) = G(x, y) - P_2(x, y)$ iščezava u vrhovima pravokutnika Ω :

$$G(0, 0) - P_2(0, 0) = 0, \quad (167)$$

$$G(b, 0) - P_2(b, 0) = 0, \quad (168)$$

$$G(0, d) - P_2(0, d) = 0, \quad (169)$$

$$G(b, d) - P_2(b, d) = 0. \quad (170)$$

Rubni uvjeti za v su neprekidni na $\partial\Omega$ pa se jednačba za v može riješiti na standardni način metodom separacije varijabli.

Rješenje početnog problema: $u(x, y) = v(x, y) + P_2(x, y)$.

- Diskutirajte zašto rješenje $u(x, y)$ ne ovisi o izboru koeficijenata polinoma $P_2(x, y)$.

Rubni uvjeti za v su neprekidni na $\partial\Omega$ pa se jednačba za v može riješiti na standardni način metodom separacije varijabli.

Rješenje početnog problema: $u(x, y) = v(x, y) + P_2(x, y)$.

- Diskutirajte zašto rješenje $u(x, y)$ ne ovisi o izboru koeficijenata polinoma $P_2(x, y)$.