

Parcijalne diferencijalne jednađbe
Skripta–radna verzija

Saša Krešić–Jurić
Prirodoslovno–matematički fakultet
Sveučilište u Splitu

Sadržaj

1	Uvodna razmatranja	3
1.1	Osnovni pojmovi	3
1.2	Linearne jednačbe i princip superpozicije	5
1.3	Klasične jednačbe matematičke fizike	7
1.4	Elementarne tehnike	9
1.5	Početni i rubni uvjeti	12
1.6	Stabilnost rješenja	14
1.7	Zadaci	17
2	Fourierov red	19
2.1	Razvoj funkcije u Fourierov red	19
2.2	Konvergencija Fourierovog reda	24
2.2.1	Uniformna konvergencija	30
3	Kvazi–linearne jednačbe prvog reda	41
4	Klasifikacija jednačbi drugog reda	45
4.1	Kanonski oblik hiperboličkih jednačbi	49
4.2	Kanonski oblik paraboličkih jednačbi	52
4.3	Kanonski oblik eliptičkih jednačbi	54
5	Jednačba provođenja topline	59
5.1	Princip maksimuma i jedinstvenost rješenja	59
5.2	Separacija varijabli za homogenu jednačbu	65
5.3	Separacija varijabli za nehomogenu jednačbu	75

6	Valna jednađba	81
6.1	Valno gibanje i d'Alembertovo rješenje	81
6.2	D'Alembertovo rješenje za nehomogenu valnu jednađbu	86
6.3	Početno–rubni problem za valnu jednađbu	89
6.3.1	Separacija varijabli za homogenu jednađbu	92
6.3.2	Separacija varijabli za nehomogenu jednađbu	101
7	Laplaceova jednađba	105
7.1	Opća svojstva Laplaceove jednađbe	106
7.2	Separacija varijabli za Laplaceovu jednađbu	114
7.2.1	Pravokutne domene	115
7.2.2	Kružne domene	122
7.2.3	Poissonova formula	124

Poglavlje 1

Uvodna razmatranja

1.1 Osnovni pojmovi

Parcijalne diferencijalne jednačbe (PDJ) opisuju relacije između nepoznate funkcije u i njezinih parcijalnih derivacija. Ove jednačbe su vrlo važne u fizici i tehnici jer modeliraju različite pojave u prirodi. U novije vrijeme parcijalne diferencijalne jednačbe nalaze primjene u biologiji, kemiji, računalnim znanostima i ekonomiji.

Neka je $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkcija n nezavisnih varijabli $x_1, x_2, \dots, x_n$. Parcijalne derivacije označavamo sa

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \dots \quad (1.1)$$

Definicija 1.1 *Kažemo da je funkcija u klase C^k na Ω , i pišemo $u \in C^k(\Omega)$, ako u ima neprekidne parcijalne derivacije reda k na Ω .*

Ako je $u \in C^k(\Omega)$, onda redoslijed u kojem se parcijalne derivacije računaju nije važan. Primijetimo da $u \in C^k(\Omega)$ povlači $u \in C^{k-1}(\Omega)$. Skup neprekidnih funkcija na Ω označavamo sa $C^0(\Omega)$.

Definicija 1.2 *Parcijalna diferencijalna jednačba je jednačba oblika*

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0 \quad (1.2)$$

gdje je $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nepoznata funkcija u nezavisnim varijablama $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Red parcijalne diferencijalne jednačbe je red najviše derivacije koja se javlja u jednačbi. Parcijalne diferencijalna jednačbe obično promatramo na otvorenom povezanom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.3 *Rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe (1.2) reda $k > 0$ na skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je funkcija $u \in C^k(\Omega)$ koja zadovoljava jednačbu (1.2) u svakoj točki skupa Ω .*

Ova rješenja nazivamo *klasična* ili *jaka* rješenja. U primjenama su od interesa i tzv. distribucijska i slaba rješenja koja ovdje nećemo razmatrati.

Primjer 1.1 *Jednačba*

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (1.3)$$

je parcijalna diferencijalna jednačba drugog reda. Lako se provjeri da su funkcije $u(x, y) = (x + y)^3$ i $u(x, y) = \sin(x - y)$ rješenja jednačbe (1.3) na skupu $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Primjer 1.2 *Kortewe–de Vriesova jednačba*

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0 \quad (1.4)$$

modelira valove na vodi u plitkom kanalu. Provjerite da funkcija

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sch}^2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x - ct - x_0) \right], \quad c > 0, x_0 \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

zadovoljava jednačbu (1.5) gdje je $\operatorname{sch}(x) = 2/(e^x + e^{-x})$ hiperbolni sekans na skupu $\Omega = \mathbb{R}^2$. Ova funkcija opisuje solitonski val koji putuje bez disperzije brzinom $c > 0$.

Parcijalne diferencijalne jednačbe možemo grubo klasificirati prema sljedećim svojstvima.

- **Red jednačbe**

Osnovna podjela PDJ je prema redu jednačbe. Općenito se može kazati da što je red jednačbe veći to je jednačbu teže riješiti.

- **Linearne i nelinearne jednačbe**

- (a) Jednadžba (1.2) je *linearna* ako je F linearna funkcija u varijablama u i svim njezinim parcijalnim derivacijama. U tom slučaju koeficijenti koji množe u i njezine derivacije ovise samo o nezavisnim varijablama $x_1, \dots, x_n$.
- (b) Jednadžba je *nelinearna* ako nije linearna.
- (c) Jednadžba (1.2) je *kvazi-linearna* ako je F linearna u svim parcijalnim derivacijama od u najvišeg reda.

Na primjer, Eulerova jednadžba

$$xu_x + yu_y = nu, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.6)$$

je linearna jednadžba prvog reda jer je linearna u varijablama u_x i u_y . Jednadžba

$$u_x u_{xx} + xu u_y = \sin(y) \quad (1.7)$$

je kvazi-linearna jednadžba drugog reda jer je linearna u najvišoj derivaciji u_{xx} . Jednadžba

$$u_x u_{xx}^2 + xu u_y = \sin(y) \quad (1.8)$$

je nelinearna jer član u_{xx}^2 nije linearan. Navedimo još nekoliko primjera:

$$u u_{xy} + u_x = y, \quad \text{kvazilinearna jednadžba drugog reda,} \quad (1.9)$$

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1, \quad \text{nelinearna jednadžba prvog reda,} \quad (1.10)$$

$$u_x u_{xxy} + x u_y = \sin(y), \quad \text{kvazilinearna jednadžba trećeg reda,} \quad (1.11)$$

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0, \quad \text{kvazilinearna jednadžba trećeg reda.} \quad (1.12)$$

1.2 Linearne jednadžbe i princip superpozicije

Posebno će nas zanimati linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda jer ovaj tip jednadžbi ima važne primjene u prirodnim i tehničkim znanostima. Klasične jednadžbe matematičke fizike kao što su valna jednadžba, jednadžba provođenja topline, Poissonova i Schrödingerova jednadžba su linearne jednadžbe drugog reda. Linearna jednadžba drugog reda u n nezavisnih varijabli $x_1, x_2, \dots, x_n$ ima opći oblik

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i x_{x_i} + F u = G \quad (1.13)$$

gdje su A_{ij} , B_i , F i G funkcije varijabli $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ako je u klasično rješenje jednadžbe (1.13), onda je $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ pa se jednadžba (1.13) može svesti na oblik tako da je $A_{ij} = A_{ji}$. Diferencijalnoj jednadžbi (1.13) možemo pridružiti diferencijalni operator

$$L = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + F \quad (1.14)$$

gdje je F operator množenja funkcijom F . Tada jednadžbu možemo zapisati u kompaktnom obliku $L[u] = G$.

Definicija 1.4 *Jednadžba $L[u] = G$ je homogena ako je $G = 0$. U protivnom kažemo da je jednadžba nehomogena.*

Operator L je linearan jer vrijedi

$$L[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2] = \alpha_1 L[u_1] + \alpha_2 L[u_2], \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.15)$$

Linearne jednadžbe imaju važno svojstvo koje nazivamo *princip superpozicije*. Ako su u_1 i u_2 rješenja jednadžbi

$$L[u_1] = G_1, \quad L[u_2] = G_2, \quad (1.16)$$

onda je linearna kombinacija $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, rješenje jednadžbe

$$L[u] = \alpha_1 L[u_1] + \alpha_2 L[u_2] = \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2. \quad (1.17)$$

U posebnom slučaju ako su u_1, u_2 rješenja homogene jednadžbe $L[u] = 0$, onda je svaka linearna kombinacija $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ rješenje iste jednadžbe jer je $L[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2] = 0$. Ovaj princip je naročito važan u rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi metodom separacije varijabli jer se opće rješenje može napisati kao linearna kombinacija nekih posebnih rješenja. Ovu metodu ćemo detaljnije razmatrati u sljedećim poglavljima.

Primjer 1.3 *Promotrimo jednadžbu*

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \quad (1.18)$$

Lako se provjeri da su funkcije $u_n(x, t) = \sin(nt) \cos(nx)$ rješenja jednadžbe za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga je svaka linearna kombinacija

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n \sin(nt) \cos(nx), \quad c_n \in \mathbb{R}, \quad (1.19)$$

također rješenje jednadžbe (1.18).

Primjer 1.4 Odredite rješenje jednadžbe

$$u_{xx} - u_y = 18x + 8y \quad (1.20)$$

koristeći princip superpozicije. Promotrimo dvije jednadžbe

$$u_{xx} - u_y = 18x, \quad (1.21)$$

$$u_{xx} - u_y = 8y. \quad (1.22)$$

Rješenja ovih jednadžbi potražimo u obliku $u_1 = u_1(x)$ i $u_2 = u_2(y)$, redom. Tada je $u_1''(x) = 18x$ i $-u_2'(y) = 8y^2$ pa integracijom dobivamo

$$u_1(x) = 3x^3 + ax + b, \quad u_2(y) = -4y^2 + c \quad (1.23)$$

gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstante integracije. Prema principu superpozicije, funkcija

$$u(x, y) = u_1(x) + u_2(y) = 3x^3 - 4y^2 + ax + d, \quad (1.24)$$

gdje je $d = b + c$, daje rješenje jednadžbe (1.20).

1.3 Klasične jednadžbe matematičke fizike

Fundamentalni zakoni u prirodnim znanostima se često formuliraju u obliku parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Kada neka fizikalna veličina $u = u(x, y, z, t)$ ovisi o prostornim ili vremenskim promjenama od u , onda funkcija u zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu. U većini slučajeva to su linearne jednadžbe drugog reda koje ovise o prostornim varijablama x, y i z i vremenskoj varijabli t . Navedimo neke važne jednadžbe matematičke fizike.

- (1) **Valna jednadžba.** Valna gibanja u različitim medijima su opisana valnom jednadžbom

$$u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = 0 \quad (1.25)$$

gdje je

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.26)$$

Laplaceov operator. Na primjer, ako je $u(x, y, z, t)$ tlak zraka u točki (x, y, z) u trenutku t i c je brzina zvuka, onda jednadžba (1.25) opisuje širenje zvučnih valova. Ista jednadžba opisuje širenje elektromagnetskih valova kada u predstavlja skalarnu komponentu električnog ili magnetskog polja, a c je brzina svjetlosti.

- (2) **Jednadžba provođenja topline.** Neka je $u(x, y, z, t)$ temperatura homogenog toplinski vodljivog tijela koji nema izvora topline. Tada funkcija u zadovoljava jednadžbu provođenja topline

$$u_t - k \nabla^2 u = 0 \quad (1.27)$$

gdje je konstanta $k > 0$ toplinska vodljivost materijala. Ovu jednadžbu također nazivamo *difuzijska jednadžba* jer opisuje difuzijske procese u tvarima.

- (3) **Laplaceova jednadžba.** Ako je temperatura u toplinski vodljivom tijelu stacionarna, onda je $u_t = 0$ pa se jednadžba provođenja topline svodi na Laplaceovu jednadžbu

$$\nabla^2 u = 0. \quad (1.28)$$

Ova jednadžba također opisuje distribuciju električnog potencijala u u prostoru bez naboja.

Navedene jednadžbe predstavljaju tzv. kanonske ili standardne oblike parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda koje ćemo detaljno proučavati u sljedećim poglavljima. Navedimo još nekoliko jednadžbi drugog reda koje imaju važne primjene u fizici.

- (4) **Poissonova jednadžba**

$$\nabla^2 u = \rho(x, y, z), \quad (1.29)$$

(5) Helmholtzova jednadžba

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0, \quad (1.30)$$

(6) Schrödingerova jednadžba

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x, y, z) \psi = i\hbar \psi_t. \quad (1.31)$$

1.4 Elementarne tehnike

U jednostavnim slučajevima parcijalne diferencijalne jednadžbe se mogu riješiti direktnom integracijom ili uvođenjem novih varijabli. Ako jednadžba opisuje ponašanje nekog fizikalnog sustava koji ima određenu simetriju, na primjer ako je sustav invarijantan na rotacije ili neku drugu transformaciju, onda se korištenjem simetrija jednadžba može pojednostavniti. Prisjetimo se da rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi ovise o proizvoljnim konstantama integracije. Slično, opće rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe ovisi o proizvoljnim funkcijama koje se dobiju u postupku integracije. Sljedeći primjeri ilustriraju ova svojstva parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Primjer 1.5 *Odredite rješenje jednadžbe*

$$u_{yy} = 2 \quad (1.32)$$

za funkciju $u = u(x, y)$. Integracijom po varijabli y dobivamo

$$u_y = \int 2dy = 2y + f(x). \quad (1.33)$$

Ponavljanjem postupka nalazimo

$$u(x, y) = \int (2y + f(x))dy = y^2 + yf(x) + g(x) \quad (1.34)$$

gdje su $f(x)$ i $g(x)$ proizvoljne funkcije. S obzirom da je funkcija u klasično rješenje jednadžbe (1.32), f i g su funkcije klase C^2 .

Primjer 1.6 *Odredite opće rješenje PDJ*

$$u_x - u_y = 0. \quad (1.35)$$

Uvedimo nove varijable $\alpha = x + y$ i $\beta = x - y$. Tada je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta}. \quad (1.37)$$

Oduzimanjem dobivamo

$$u_x - u_y = 2u_\beta = 0. \quad (1.38)$$

U novim varijablama jednačba ima jednostavniji oblik

$$u_\beta = 0. \quad (1.39)$$

Integracijom jednačbe dobivamo

$$u = f(\alpha) = f(x + y) \quad (1.40)$$

gdje je $f(\alpha)$ proizvoljna C^1 funkcija. Na primjer, svaka od funkcija $e^{n(x+y)}$, $\sin(n(x+y))$ i $\cos(n(x+y))$, $n \in \mathbb{N}$, je rješenje jednačbe.

Primjer 1.7 Odredite opće rješenje problema

$$u_{xx} + cu = 0, \quad (1.41)$$

gdje je $u = u(x, t)$, za $c > 0$, $c = 0$ i $c < 0$. Obzirom da funkcija $u(x, t)$ ovisi o varijablama x i t , jednačbu (1.41) možemo promatrati kao običnu diferencijalnu jednačbu u varijabli x koja ovisi o parametru t . Ako je $c > 0$, opće rješenje je dano sa

$$u(x, t) = C_1(t) \sin(\sqrt{c}x) + C_2(t) \cos(\sqrt{c}x) \quad (1.42)$$

gdje su $C_1(t)$ i $C_2(t)$ proizvoljne funkcije klase C^2 . Slično, za $c = 0$ imamo

$$u(x, t) = C_1(t)x + C_2(t), \quad (1.43)$$

dok je za $c < 0$ rješenje dano sa

$$u(x, t) = C_1(t)e^{\sqrt{|c|x}} + C_2(t)e^{-\sqrt{|c|x}}. \quad (1.44)$$

Primjer 1.8 *Odredite opće rješenje jednadžbe*

$$u_x = u^2 \quad (1.45)$$

za funkciju $u = u(x, y)$. Kao u prethodnom primjeru, jednadžbu (1.45) možemo promatrati kao običnu diferencijalnu jednadžbu u varijabli x s parametrom y . Separiranjem jednadžbe dobivamo $u^{-2}du = dx$ iz čega slijedi $-u^{-1} = x + f(y)$. Dakle,

$$u(x, y) = -\frac{1}{x + f(y)} \quad (1.46)$$

gdje je $f(y)$ proizvoljna funkcija klase C^1 .

Sljedeći primjer ilustrira kako se simetrija problema može koristiti za svođenje parcijalne diferencijalne jednadžbe na jednostavniji oblik.

Primjer 1.9 *Odredite sferno simetrično rješenje Laplaceove jednadžbe*

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (1.47)$$

Traženo rješenje je invarijantno na grupu rotacija $SO(3)$ pa ovisi samo o udaljenosti točke (x, y, z) od ishodišta. Stoga $u(x, y)$ tražimo u obliku

$$u = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.48)$$

Sada je

$$u_x = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{r}, \quad (1.49)$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f'(r) \frac{x}{r} \right) + f'(r) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) \quad (1.50)$$

$$= f''(r) \left(\frac{x}{r} \right)^2 + f'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right). \quad (1.51)$$

Zbog simetrije funkcije u , preostale derivacije su dane analognim izrazima,

$$u_{yy} = f''(r) \left(\frac{y}{r} \right)^2 + f'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right), \quad (1.52)$$

$$u_{zz} = f''(r) \left(\frac{z}{r} \right)^2 + f'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right). \quad (1.53)$$

Zabrajanjem jednadžbi (1.51)-(1.53) dobivamo

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0. \quad (1.54)$$

Uvedimo supstituciju $g(r) = f'(r)$. Tada je $g'(r) + 2r^{-1}g(r) = 0$ što povlači $g(r) = Cr^{-2}$. Sada je

$$f(r) = \int g(r)dr = -\frac{C}{r} + K \quad (1.55)$$

gdje su $C, K \in \mathbb{R}$ proizvoljne konstante integracije. Dakle, sferno simetrično rješenje Laplaceove jednadžbe je dano sa

$$u(x, y, z) = -\frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + K. \quad (1.56)$$

1.5 Početni i rubni uvjeti

Iz prethodnih razmatranja je očigledno da parcijalne diferencijalne jednadžbe mogu imati beskonačno mnogo rješenja koja ovise o proizvoljnim funkcijama. Ako jednadžba modelira fizikalnu pojavu, onda je potrebno imati jedinstveno rješenje kako bismo mogli predvidjeti ponašanje sustava. Stoga parcijalne diferencijalne jednadžbe obično promatramo zajedno sa zadanim rubnim i/ili početnim uvjetima koji rješenje čine jedinstvenim. Na konkretnim primjerima ćemo ilustrirati parcijalne diferencijalne jednadžbe s pripadajućim rubnim i početnim uvjetima i objasniti njihovo fizikalno značenje.

Promotrimo jednodimenzionalnu valnu jednadžbu

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (1.57)$$

gdje funkcija $u(x, t)$ predstavlja amplitudu titranja u točki x u trenutku t . Ova jednadžba vrijedi pod pretpostavkom da nema disipativnih efekata i da se svaka točka giba okomito na os x . Titranje žice je dinamički problem koji zahtijeva poznavanje početnog položaja i početne brzine žice u svakoj točki $x \in [0, L]$. Stoga tražimo da funkcija u zadovoljava početne uvjete

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \quad (1.58)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L], \quad (1.59)$$

gdje su $f(x)$ početna amplituda, a $g(x)$ početna brzina u točki x . Rješenje valne jednadžbe također ovisi o rubnim uvjetima na krajevima žice. Ako je žica učvršćena u točkama $x = 0$ i $x = L$, onda u zadovoljava *Dirichletove* rubne uvjete

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.60)$$

Ako krajevi žice slobodno titraju okomito na os x , onda derivacija amplitude iščezava u $x = 0$ i $x = L$ pa u tom slučaju funkcija u zadovoljava *Neumannove* rubne uvjete

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.61)$$

Nadalje, ako je žica savijena u kružnicu tako da se točka $x = 0$ preklapa s točkom $x = L$, onda funkcija u zadovoljava *periodičke* uvjete

$$u(0, t) = u(L, t), \quad (1.62)$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t), \quad t \geq 0. \quad (1.63)$$

Rubni uvjeti također mogu biti kombinirani, na primjer u može zadovoljavati Dirichletov uvjet u jednom kraju, a Neumannov uvjet u drugom kraju intervala.

Promotrimo sada Laplaceovu jednadžbu

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.64)$$

na području $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ koje je omeđenom jednostavnom, zatvorenim, po dijelovima glatkom krivuljom $\partial\Omega$. Ako je poznata vrijednost funkcije u na rubu područja $\partial\Omega$, onda u zadovoljava Dirichletov rubni uvjet

$$u(x, y) = h(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (1.65)$$

Ako je zadana normalna derivacija na krivulju $\partial\Omega$, onda u zadovoljava Neumannov rubni uvjet

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y) = h(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (1.66)$$

gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor normale na $\partial\Omega$ usmjeren prema van, a

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} \quad (1.67)$$

je usmjerena derivacija u smjeru vektora $\vec{n}$. U narednim poglavljima ćemo vidjeti da za svaki od navedenih rubnih i/ili početnih uvjeta postoji jedinstveno rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe.

1.6 Stabilnost rješenja

U realnim problemima se početni i rubni uvjeti obično određuju mjerenjima pa te veličine nisu poznate s potpunom točnošću. Pogreška u početnim ili rubnim uvjetima tada uzrokuje pogrešku u rješenju jednadžbe koja ne mora biti mala. Nadalje, parcijalne diferencijalne jednadžbe na složenim domenama se često rješavaju numeričkim metodama pa diskretizacija jednadžbe utječe na točnost rješenja. Jedno od osnovnih teorijskih pitanja jest da li je matematički problem, koji se sastoji od parcijalne diferencijalne jednadžbe zajedno s početnim ili rubnim uvjetima, dobro postavljen. Ovo pitanje je formulirao francuski matematičar Jacques Hadamard (1865-1963). Prema njegovoj definiciji problem je dobro postavljen ako zadovoljava sljedeće uvjete:

- (1) *egzistencija*: problem ima rješenje,
- (2) *jedinstvenost*: rješenje je jedinstveno za zadane početne i/ili rubne uvjete,
- (3) *stabilnost*: rješenje kontinuirano ovisi o parametrima jednadžbe i rubnim ili početnim uvjetima.

Kažemo da je parcijalna diferencijalna jednadžba stabilna ako male perturbacije početnih ili rubnih uvjeta uzrokuju male promjene u rješenju. U tom slučaju će dobiveno rješenje biti dobra aproksimacija egzatknog rješenja. Klasične jednadžbe matematičke fizike opisane u poglavlju 1.3 su dobro postavljeni problemi, dok se u tehnici često susrećemo s jednadžbama koje nisu stabilne. Ilustrirajmo ove ideje na sljedećim primjerima.

Laplaceova jednadžba

Objasnimo kako se formulira stabilnost Laplaceove jednadžbe na domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.68)$$

s Dirichletovim rubnim uvjetom

$$u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (1.69)$$

Neka su u_1 i u_2 rješenja Laplaceove jednadžbe koja zadovoljavaju rubne uvjete $u_1(x, y) = f_1(x, y)$ i $u_2(x, y) = f_2(x, y)$ za $(x, y) \in \partial\Omega$. Kažemo da rješenje kontinuirano ovisi o

rubnom uvjetu (1.69) ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$\sup_{(x,y) \in \partial\Omega} |f_1(x,y) - f_2(x,y)| < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{(x,y) \in \bar{\Omega}} |u_1(x,y) - u_2(x,y)| < \varepsilon, \quad (1.70)$$

gdje je $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ zatvarač skupa Ω . Rješenja koja ispunjavaju ovaj uvjet se nazivaju *stabilna* rješenja. Drugim riječima, rješenje u je stabilno ako mala promjena rubnog uvjeta na krivulji $\partial\Omega$ uzrokuje malu promjenu rješenja na skupu Ω .

Hadamardov primjer

Sljedeći primjer ilustrira da za pogrešno postavljene rubne uvjete rješenje Laplaceove jednadžbe ne mora biti stabilno. U tom slučaju kažemo da problem nije dobro postavljen. Promotrimo jednadžbu

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.71)$$

s rubnim uvjetima na pravcu $y = 0$:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x). \quad (1.72)$$

Neka je $v(x, y)$ rješenje iste jednadžbe uz modificirane rubne uvjete

$$v(x, 0) = f(x), \quad v_y(x, 0) = g(x) + \frac{1}{n} \sin(nx). \quad (1.73)$$

Očigledno je da se za dovoljno veliki $n > 0$ razlika u rubnim uvjetima može napraviti proizvoljno malom jer je

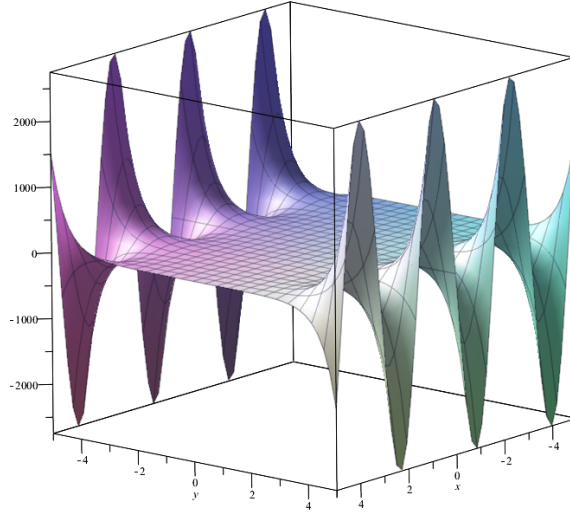
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(|v(x, 0) - u(x, 0)| + |v_y(x, 0) - u_y(x, 0)| \right) = \frac{1}{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin(nx)| \leq \frac{1}{n}. \quad (1.74)$$

Međutim, razlika u pripadnim rješenjima na domeni $\mathbb{R}^2$ je velika bez obzira na vrijednost parametra n . Definirajmo funkciju $w = v - u$. Tada w zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$w_{xx} + w_{yy} = 0 \quad (1.75)$$

s rubnim uvjetima

$$w(x, 0) = 0, \quad w_y(x, 0) = \frac{1}{n} \sin(nx). \quad (1.76)$$



Slika 1.1: Graf funkcije $w(x, y) = \frac{1}{n^2} \text{sh}(ny) \sin(nx)$ za $n = 2$.

Lako se provjeri da je rješenje problema (1.75)-(1.76) dano s

$$w(x, y) = \frac{1}{n^2} \text{sh}(ny) \sin(nx). \quad (1.77)$$

Funkcija $\text{sh}(ny)$ nije ograničena na $\mathbb{R}$ jer $|\text{sh}(yn)| \rightarrow \infty$ kada $y \rightarrow \pm\infty$. Stoga za svaki $x \in \mathbb{R}$ takav da je $\sin(nx) \neq 0$ vrijedi da

$$|w(x, y)| \rightarrow \infty \quad \text{kada} \quad y \rightarrow \pm\infty. \quad (1.78)$$

Ovo pokazuje da funkcija $w = v - u$ nije ograničena na $\mathbb{R}^2$. Graf funkcije w prikazan je na slici (1.1). Zaključujemo da, iako se razlika u početnim uvjetima može napraviti proizvoljno malom za dovoljno veliki $n > 0$, pripadna rješenja se znatno razlikuju kada je $|y|$ dovoljno velik. Stoga problem (1.71)-(1.72) nije dobro postavljen.

Obrnuta jednadžba provođenja topline

Promotrimo sada jednažbu

$$u_t + u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (1.79)$$

$$u(x, 0) = 1. \quad (1.80)$$

Ova jednadžba se dobiva tako da u jednadžbi provođenja topline $u_t - u_{xx} = 0$ varijablu t zamijenimo varijablom $-t$. Neka je $v(x, t)$ rješenje jednadžbe (1.79) uz početni uvjet

$$v(x, 0) = 1 + \frac{1}{n} \sin(nx). \quad (1.81)$$

Lako se provjeri da su rješenja $u(x, t)$ i $v(x, t)$ dana sa

$$u(x, t) = 1, \quad v(x, t) = 1 + \frac{1}{n} e^{n^2 t} \sin(nx). \quad (1.82)$$

Razliku u početnim uvjetima možemo učini proizvoljno malom jer je

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, 0) - v(x, 0)| = \frac{1}{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin(nx)| \leq \frac{1}{n}. \quad (1.83)$$

Međutim, razlika rješenja $w = v - u$ nije ograničena na $\mathbb{R}^2$ jer

$$|w(x, t)| = \frac{1}{n} e^{n^2 t} |\sin(nx)| \rightarrow \infty \quad \text{kada} \quad t \rightarrow \infty \quad (1.84)$$

za svaki x takav da je $\sin(nx) \neq 0$. Dakle, obrnuta jednadžba provođenja topline zajedno s rubnim uvjetom (1.80) nije dobro postavljen problem.

1.7 Zadaci

1. Pokažite da jednadžba $u_{xy} + u_x = 0$ ima opće rješenje

$$u(x, y) = D(x)e^{-y} + E(y). \quad (1.85)$$

Uputa: koristite supstituciju $v = u_x$.

2. Odredite konstante a i b tako da funkcija $u(x, y) = f(ax + by)$ bude rješenje jednadžbe

$$u_x + 3u_y = 0. \quad (1.86)$$

3. Riješite jednadžbu

$$u_{xx} + u_{yy} = 5e^{x-2y}. \quad (1.87)$$

Uputa: pretpostavite rješenje u obliku $u(x, y) = Ce^{ax+by}$.

4. Riješite sustav jednadžbi

$$u_x = 3x^2y + y, \quad (1.88)$$

$$u_y = x^3 + x. \quad (1.89)$$

5. Pokažite da jednadžba

$$u_t + u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (1.90)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.91)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (1.92)$$

nije dobro postavljen problem. Uputa: provjerite da je

$$v_n(x, t) = \frac{1}{n} e^{n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (1.93)$$

rješenje problema $v_t + v_{xx} = 0$, $v(0, t) = v(L, t) = 0$, $v(x, 0) = (1/n) \sin(n\pi x/L)$.

Poglavlje 2

Fourierov red

2.1 Razvoj funkcije u Fourierov red

Fourierova analiza se bavi razvojem funkcija u trigonometrijske redove. Joseph Fourier (1768–1830), francuski matematičar i inženjer, je uveo trigonometrijske redove kao metodu rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačbi koje modeliraju valna gibanja i prijenos topline u tvarima. Danas Fourierova analiza ima veliku važnost u primjenama na različite probleme u fizici i tehnici. Također, veliki dio moderne analize je rezultat pokušaja da se Fourierovi redovi formuliraju na strogim matematičkim osnovama. U ovom poglavlju izložit ćemo neke rezultate iz teorije Fourierovih redova koji su nam potrebni za daljnje proučavanje materije.

Neka je $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana na simetričnom intervalu $[-L, L]$. Zanima nas može li se f prikazati u obliku trigonometrijskog reda

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (2.1)$$

Ovdje je potrebno odgovoriti na sljedeća pitanja.

- (1) Je li prikaz funkcije pomoću reda (2.1) moguć?
- (2) Na koji način možemo odrediti koeficijente a_n i b_n ?
- (3) Kakva je konvergencija reda (2.1): po točkama, uniformna ili u nekom drugom smislu?

Na drugo pitanje možemo odgovoriti ako prepostavimo da red (2.1) konvergira uniformno na $[-L, L]$. Ovdje koristimo činjenicu da funkcije

$$1, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

zadovoljavaju relacije ortogonalnosti

$$\int_{-L}^L 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad (2.3)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L \delta_{nm}, \quad (2.4)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L \delta_{nm}, \quad (2.5)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad n, m \geq 1 \quad (2.6)$$

gdje je δ_{nm} Kroneckerov simbol definiran sa

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad (2.7)$$

Jednakosti (2.3)–(2.6) se lako pokazuju upotrebom trigonometrijskog identiteta za pretvorbu umnoška u zbroj trigonometrijskih funkcija. Integracijom jednadbnosti (2.1) dobivamo

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] = a_0 L \quad (2.8)$$

što povlači

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (2.9)$$

(ovdje smo zamijenili sumu i integral jer po pretpostavci red (2.1) konvergira uniformno). Množenjem jednakosti (2.1) sa $\cos(m\pi x/L)$ i primjenom relacije ortogonalnosti (2.6) dobivamo

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \right] \\ &= a_m L. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dakle,

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx, \quad m \geq 1. \quad (2.11)$$

Na sličan način se pokaže da je

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx, \quad m \geq 1. \quad (2.12)$$

Primijetimo da je konstantni član u redu (2.1) definiran ako $a_0/2$ kako bi se izrazi za a_0 i a_m mogli napisati u kompaktnom obliku

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx, \quad m \geq 0. \quad (2.13)$$

Ova početna razmatranja motiviraju sljedeću definiciju.

Definicija 2.1 (Fourierov red) *Trigonometrijski red*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (2.14)$$

gdje su

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

se naziva *Fourierov red funkcije f na intervalu $[-L, L]$* . Koeficienti a_n i b_n se nazivaju *Fourierovi koeficijenti*.

Prije nego proučimo važno pitanje konvergencije Fourierovog reda, promotrimo nekoliko jednostavnih primjera. Fourierov red funkcije f označavamo sa $\tilde{f}$ jer, kao što ćemo uskoro vidjeti, suma reda ne mora biti jednaka vrijednosti funkcije u danoj točki.

Pri računanju Fourierovih koeficijenata korisno je uočiti da vrijede sljedeća pravila:

(i) ako je $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ neparna funkcija, onda je

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0, \quad (2.17)$$

(ii) ako je $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ parna funkcija, onda je

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx. \quad (2.18)$$

Primjer 2.1 *Odredimo Fourierov red funkcije $f(x) = x$ na intervalu $[-L, L]$.*

Funkcija $x \cos(n\pi x/L)$ je neparna pa je

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad n \geq 0. \quad (2.19)$$

Koeficijenti b_n su dani sa

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.20)$$

$$= \frac{2}{L} \left[-\frac{Lx}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \Big|_0^L \quad (2.21)$$

$$= -\frac{2L}{n\pi} \cos(n\pi), \quad n \geq 1. \quad (2.22)$$

Kako je $\cos(n\pi) = (-1)^n$, imamo

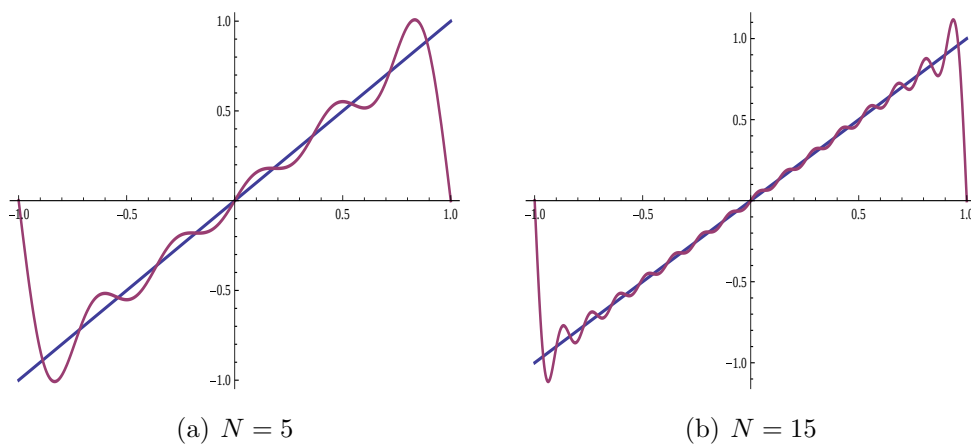
$$b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}. \quad (2.23)$$

Dakle, Fourierov red funkcije $f(x) = x$ ima oblik

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= \frac{2L}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) - \dots \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Slika 2.1 prikazuje parcijalne sume reda s $N = 5$ i $N = 15$ članova. Primijetimo da suma Fourierovog reda u točkama $x = \pm L$ nije jednaka vrijednosti funkcije. U točkama $x \in (-L, L)$ Fourierov red konvergira ka $f(x)$ što se može naslutiti iz slike 2.1 (b). Međutim, konvergencija je “sporiya” što je točka x bliže rubovima intervala $\pm L$. Zanimljivo je primijetiti sljedeću činjenicu. Za $L = \pi$ izraz (2.24) ima jednostavniji oblik

$$\tilde{f}(x) = 2 \left(\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \dots \right). \quad (2.25)$$

Slika 2.1: Razvoj funkcije $f(x) = x$ u Fourierov red.

Ako uvrstimo $x = \pi/2$, onda je $\tilde{f}(\pi/2) = \pi/2$ pa dobivamo Gregoryev red

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \quad (2.26)$$

pomoću kojeg računamo aproksimacije broja π . ■

Primjer 2.2 Odredimo Fourierov red funkcije $f(x) = x^2 - 1$ na intervalu $[-1, 1]$.

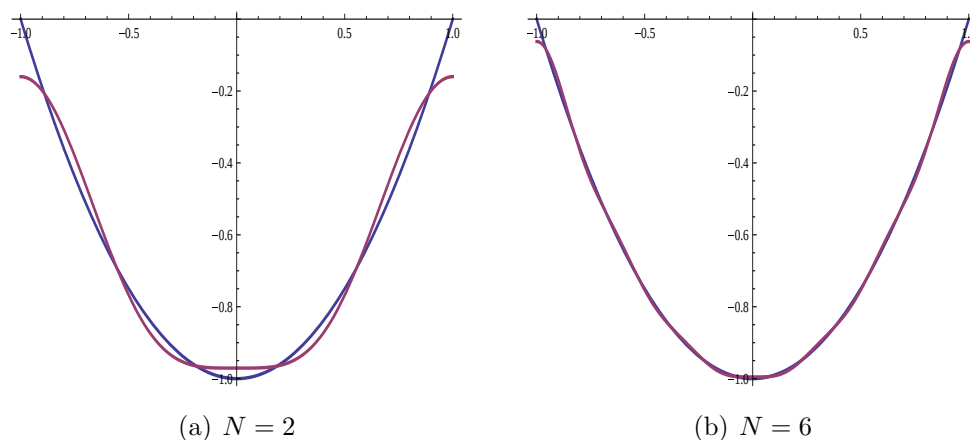
Koeficijenti a_n su dani sa

$$a_0 = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = -\frac{4}{3}, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 (x^2 - 1) \cos(n\pi x) dx = \int_{-1}^1 x^2 \cos(n\pi x) dx - \int_{-1}^1 \cos(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{(n\pi)^3} \left[2n\pi x \cos(n\pi x) + ((n\pi x)^2 - 2) \sin(n\pi x) \right] \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{4}{(n\pi)^2} \cos(n\pi) = \frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Funkcija $(x^2 - 1) \sin(n\pi x)$ je neparna pa je

$$b_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) \sin(n\pi x) dx = 0, \quad n \geq 1. \quad (2.29)$$

Slika 2.2: Razvoj funkcije $f(x) = x^2 - 1$ u Fourierov red.

Stoga je Fourierov red funkcije f ima oblik

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= -\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x) \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left(-\cos(\pi x) + \frac{1}{4} \cos(2\pi x) - \frac{1}{9} \cos(3\pi x) + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Paricijalne sume reda s $N = 2$ i $N = 6$ članova su prikazane na slici 2.2. Primijetimo da ovaj red konvergira brže od reda u prethodnom primjeru jer se dobra aproksimacija funkcije postiže sa samo $N = 6$ članova. Također, slika 2.2 (b) sugerira da red konvergira podjednako brzo na cijelom intervalu $[-1, 1]$. ■

Navedeni primjeri pokazuju da razvoj funkcije u Fourierov red ima smisla. Iz primjera također uočavamo da suma Fourierovog reda ne mora biti jednaka vrijednosti funkcije u svim točkama. Stoga je potrebno pobliže proučiti uvjete pod kojima i na koji način Fourierov red konvergira ka zadanoj funkciji.

2.2 Konvergencija Fourierovog reda

Fourierov reda je potpuno određen integralom funkcije f na intervalu $[-L, L]$. Ako vrijednost funkcije promijenimo u jednoj točki, vrijednost integrala se ne mijenja pa Fourierov red ostaje isti. Stoga ne možemo očekivati da Fourierov red konvergira

ka f u svakoj točki. Ovo jednostavno zapažanje sugerira da je problem konvergencije Fourierovog reda vrlo složen. Može se pokazati da postoji neprekidna funkcija čiji Fourierov red divergira u svim racionalnim točkama, dok je Kolmogorov je oko 1930. godine pokazao da postoji integrabilna funkcija (u Lebesgueovom smislu) čiji Fourierov red divergira svugdje. Mi ćemo se ovdje ograničiti na funkcije koje su po dijelovima neprekidne i proučavati svojstva Fourierovih redova takvih funkcija. One čine dovoljno široku klasu funkcija za primjenu Fourierovih redova na različite probleme.

Definicija 2.2 *Kažemo da je funkcija f po dijelovima neprekidna na $[a, b]$ ako*

(i) *je definirana i neprekidna osim najviše u konačno mnogo točaka*

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b,$$

(ii) *u točkama prekida $x_k \neq a, b$ postoje jednostrani limesi*

$$f(x_k^-) = \lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x), \quad f(x_k^+) = \lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x), \quad (2.31)$$

(iii) *u rubnim točkama postoje limesi $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.*

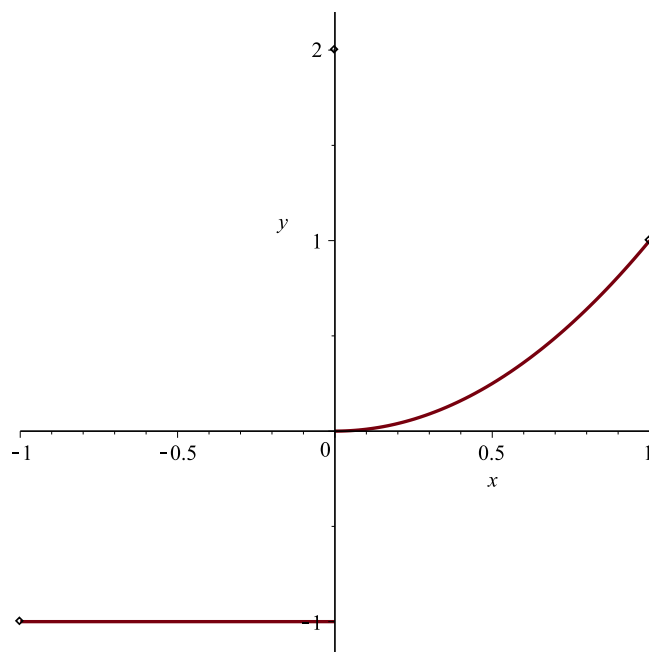
Uočimo da po dijelovima neprekidna funkcija ne mora biti definirana u točkama prekida. Ako je $f(x_k)$ definirano, onda $f(x_k)$ ne mora biti jednako lijevom ili desnom limes u x_k . U točkama x_k funkcija f ima prekid prve vrste, a razlika

$$\beta_k = f(x_k^+) - f(x_k^-) \quad (2.32)$$

predstavlja skok vrijednosti funkcije u točki prekida. Ako je $\beta_k = 0$, onda funkcija ima uklonjivi prekid u točki x_k . Jedan od središnjih rezultata o konvergenciji Fourierovog reda se odnosi na funkcije koje su po dijelovima C^1 na intervalu $[a, b]$.

Definicija 2.3 *Kažemo da je funkcija f po dijelovima C^1 na intervalu $[a, b]$ ako su f i f' po dijelovima neprekidne na $[a, b]$.*

Prema ovoj definiciji, f je po dijelovima C^1 na $[a, b]$ ako funkcije f i f' imaju najviše konačno mnogo točaka prekida i u tim točkama imaju prekid prve vrste. Kod takve funkcije razlikujemo točke prekida prve vrste u kojima je $f(x_k^-) \neq f(x_k^+)$ i točke u kojima funkcija ima šiljak jer je $f(x_k^-) = f(x_k^+)$, ali je $f'(x_k^-) \neq f'(x_k^+)$. Ilustrirajmo ove pojmove na sljedećem primjeru.

Slika 2.3: Funkcija (2.33) je po dijelovima C^1 na $[-1, 1]$.

Primjer 2.3 Zadana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (2.33)$$

Funkcije f je neprekidna na otvorenom skupu $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Ima prekid prve vrste u $x = 0$ jer je $f(0^-) = -1$ i $f(0^+) = 0$. U rubnim točkama vrijedi $f(-1^+) = -1$ i $f(1^-) = 1$. Derivacija f' je dana sa

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 2x, & 0 < x < 1, \end{cases} \quad (2.34)$$

dok u točkama $x = -1, 0$ i 1 nije definirana. U točki $x = 0$ imamo $f'(0^-) = f'(0^+) = 0$, a u rubnim točkama je $f'(-1^+) = 0$ i $f'(1^-) = 2$. Dakle, f i f' ispunjavaju uvjete iz Definicije 2.2 pa je f po dijelovima C^1 na intervalu $[-1, 1]$.

Grubo govoreći, po dijelovima C^1 funkcije imaju konačno mnogo prekida prve vrste i konačno mnogo šiljaka u kojima funkcija nije derivabilna. U ovom slučaju može se pokazati sljedeći rezultat koji navodimo bez dokaza.

Teorem 2.1 (Dirichletov teorem) *Neka je f po dijelovima C^1 funkcija na $[-L, L]$ i neka je $\tilde{f}$ Fourierov red funkcije f . Onda vrijedi*

- (i) $\tilde{f}(x_0) = f(x_0)$ ako je f neprekidna u točki $x_0 \in (-L, L)$,
- (ii) $\tilde{f}(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$ ako f ima prekid u točki $x_0 \in (-L, L)$,
- (iii) $\tilde{f}(\pm L) = \frac{1}{2}[f(-L^+) + f(L^-)]$.

Prema ovom teoremu, ako f ima prekid u x_0 , onda je $\tilde{f}(x_0)$ jednako srednjoj vrijednosti jednostranih limesa u x_0 . Suma Fourierovog reda u rubnim točkama $\pm L$ se također može interpretirati kao srednja vrijednost jednostranih limesa ako interval $[-L, L]$ savijemo u kružnicu i identificiramo točke $-L$ i L .

Ilustrirajmo Dirichletov teorem na primjeru step funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (2.35)$$

prikazane na slici 2.4. Funkcija f je očigledno po dijelovima C^1 na intervalu $[-1, 1]$. Fourierovi koeficijenti su dani sa

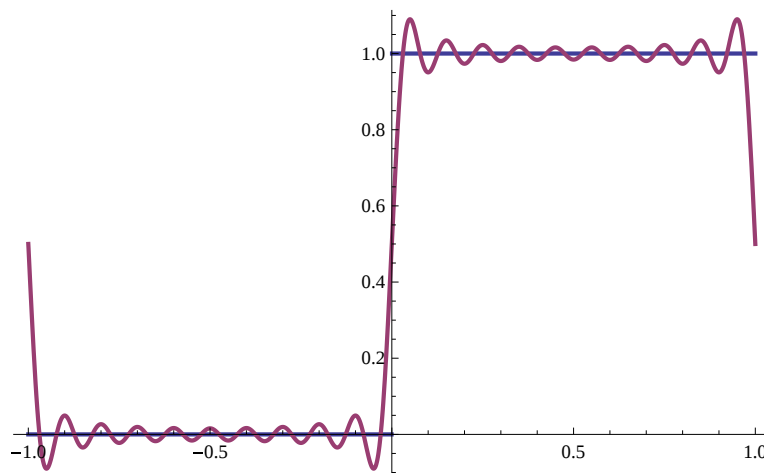
$$a_0 = \int_0^1 dx = 1, \quad (2.36)$$

$$a_n = \int_0^1 \cos(n\pi x) dx = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} = 0, \quad n \geq 1, \quad (2.37)$$

$$b_n = \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{2}{n\pi}, & n = 2k + 1. \end{cases} \quad (2.38)$$

Stoga je

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\pi x). \quad (2.39)$$



Slika 2.4: Fourierov red step funkcije (2.35).

Suma reda (2.39) u $x = 0$ je jednaka $\tilde{f}(0) = 1/2$. S druge strane, $f(0^-) = 0$ i $f(0^+) = 1$ pa je

$$\tilde{f}(0) = \frac{1}{2}[f(0^-) + f(0^+)] \quad (2.40)$$

u skladu s Dirichletovim teoremom. Također, na rubovima intervala imamo

$$\tilde{f}(\pm 1) = \frac{1}{2}[f(-1^+) + f(1^-)] \quad (2.41)$$

jer je $\tilde{f}(\pm 1) = 1/2$. Pokažimo da red ne konvergira uniformno na $[-1, 1]$. Razlog tome je prekid funkcije u točki $x = 0$. Označimo sa $S_N(x)$ N -tu parcijalnu sumu Fourierovog reda (2.39),

$$S_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\pi x). \quad (2.42)$$

Funkcija $S_N(x)$ je neprekidna i $S_N(0) = 1/2$ pa za $\varepsilon = 1/4$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$|x - 0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| S_N(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{4}. \quad (2.43)$$

Posebno, za $0 < x < \delta$ iz (2.43) slijedi

$$\frac{1}{4} < S_N(x) < \frac{3}{4}. \quad (2.44)$$

S druge strane, $f(x) = 1$ za $0 < x < \delta$ pa imamo

$$|S_N(x) - f(x)| > f(x) - S_N(x) > 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \quad (2.45)$$

Odavde zaključujemo da je

$$\frac{1}{4} < |S_N(x) - f(x)| \quad \text{za sve} \quad 0 < x < \delta, \quad N \geq 1, \quad (2.46)$$

što povlači

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |S_N(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4} \quad \text{za svaki} \quad N \geq 1. \quad (2.47)$$

Dakle, konvergencija reda nije uniformna na skupu $[-1, 1]$.

Primjer 2.4 *Odredimo Fourierov red funkcije $f(x) = |x|$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.*

Ova funkcija je po dijelovima C^1 na $[-\pi, \pi]$ i neprekidna na $[-\pi, \pi]$. Za Fourierove koeficijente nalazimo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi, \quad (2.48)$$

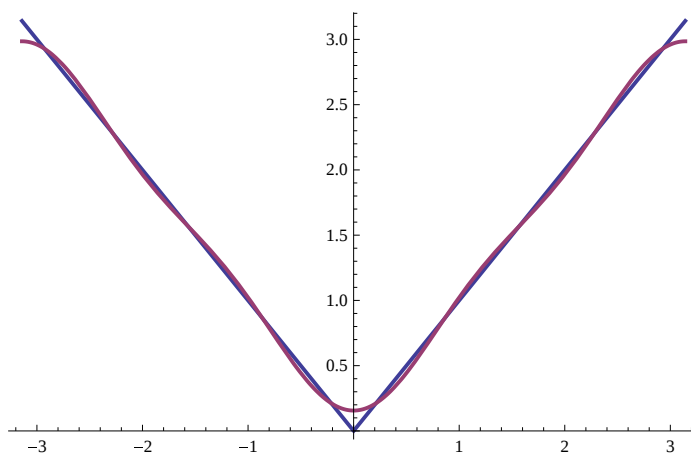
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Kako je $f(x) = |x|$ parna funkcija, to je

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(nx) dx = 0, \quad n \geq 1. \quad (2.50)$$

Stoga Fourierov red ima oblik

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(nx) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Slika 2.5: Razvoj funkcije $f(x) = |x|$ u Fourierov red.

(vidi sliku 2.5). Obzirom da je f neprekidna na $[-\pi, \pi]$, prema Dirichletovom teoremu je $\tilde{f}(x) = f(x)$ za svaki $x \in [-\pi, \pi]$. Primijetimo da je $\tilde{f}(0) = f(0) = 0$ pa iz relacije (2.51) dobivamo sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (2.52)$$

■

2.2.1 Uniformna konvergencija

U mnogim primjenama Fourierovih redova poželjno je da red uniformno konvergira. Važnost uniformne konvergencije ćemo posebno vidjeti kod rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačbi metodom separacije varijabli. Uočimo na primjeru step funkcije (2.35) da je neprekidnost nužan uvjet za uniformnu konvergenciju Fourierovog reda. U ovom poglavlju ćemo dokazati da uz neke dodatne uvjete na funkciju f Fourierov red konvergira uniformno ka f . Za dokaz ove tvrdnje potrebni su nam sljedeći rezultati.

Propozicija 2.1 (Cauchy–Schwartzova nejednakost) *Neka su z_i, w_i kompleksni brojevi za $1 \leq i \leq n$. Tada je*

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |w_i|^2}. \quad (2.53)$$

Dokaz. Definirajmo $a = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i$. Tada za svaki realni broj λ imamo

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{i=1}^n |z_i - \lambda a w_i|^2 = \sum_{i=1}^n (z_i - \lambda a w_i)(\bar{z}_i - \lambda \bar{a} \bar{w}_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i - \lambda \sum_{i=1}^n a w_i \bar{z}_i - \lambda \sum_{i=1}^n z_i \bar{a} \bar{w}_i + \lambda^2 a \bar{a} \sum_{i=1}^n w_i \bar{w}_i \\
 &= \sum_{i=1}^n |z_i|^2 - 2\lambda |a|^2 + \lambda^2 |a|^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Izraz (2.54) je kvadratni polinom $p(\lambda)$ u varijabli λ za koji vrijedi $p(\lambda) \geq 0$. Stoga diskriminanta polinoma

$$\Delta = (-2|a|^2)^2 - 4 \left(|a|^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \tag{2.55}$$

mora zadovoljavati $\Delta \leq 0$. Ako je $a = 0$, onda je uvjet trivijalno zadovoljen. Ako je $a \neq 0$, onda dijeljenjem s $|a|^2 \neq 0$ iz uvjeta $\Delta \leq 0$ dobivamo

$$|a|^2 \leq \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2, \tag{2.56}$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^n |z_i \bar{w}_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |w_i|^2}. \tag{2.57}$$

■

Cauchy–Schwartzova nejednakost je možda najvažnija nejednakost u matematičkoj analizi. Posebno je važna njezina generalizacija na unitarne prostore.

Teorem 2.2 (Besselova nejednakost) *Neka je $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna funkcija i neka su*

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 0, \tag{2.58}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1, \tag{2.59}$$

Fourierovi koeficijenti funkcije f . Tada vrijedi

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx. \quad (2.60)$$

Dokaz. Neka je

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (2.61)$$

N -ta parcijalna suma Fourierovog reda. Kvadriranjem dobivamo

$$0 \leq \int_{-L}^L (f(x) - S_N(x))^2 dx = \int_{-L}^L f(x)^2 dx - 2 \int_{-L}^L f(x)S_N(x)dx + \int_{-L}^L S_N(x)^2 dx. \quad (2.62)$$

Iz definicije Fourierovih koeficijenata izravnim računom dobivamo

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x)S_N(x)dx &= \int_{-L}^L f(x) \left[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L f(x)dx + \sum_{n=1}^N \left[a_n \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + b_n \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \right] \\ &= L \left(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Nadalje, relacije ortogonalnosti (2.3)-(2.6) povlače da je

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L S_N(x)^2 dx &= \int_{-L}^L S_N(x) \left[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L S_N(x)dx + \sum_{n=1}^N \left[a_n \int_{-L}^L S_N(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + b_n \int_{-L}^L S_N(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \right] \\ &= L \left(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Sada supstitucijom izraza (2.63) i (2.64) u (2.62) dobivamo

$$0 \leq \int_{-L}^L f(x)^2 dx - L \left(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right) \quad (2.65)$$

odnosno

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx. \quad (2.66)$$

Nejednakost (2.66) vrijedi za svaki $N \geq 1$ pa zaključujemo da je

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx. \quad (2.67)$$

■

Kažemo da je funkcija kvadratno integrabilna na intervalu $[a, b]$ ako je

$$\int_a^b f(x)^2 dx < \infty. \quad (2.68)$$

Za kvadratno integrabilne funkcije se može pokazati da vrijedi *Parsevalova jednakost*

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx. \quad (2.69)$$

Po dijelovima neprekidne funkcije su kvadratno integrabilne pa takve funkcije zadovoljavaju jednakost (2.69). Dokaz Parsevalove jednakosti prelazi okvire ovog teksta jer zahtijeva poznavanje teorije Hilbertovih prostora. Ova jednakost je često korisna za sumiranje redova realnih brojeva, kako ilustrira sljedeći primjer.

Primjer 2.5 *Odredite sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Prisjetimo se da funkcija $f(x) = x$, $x \in [-L, L]$, u primjeru 2.1 ima Fourierove koeficijente $a_n = 0$ za svaki $n \geq 0$ i*

$$b_n = \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}, \quad n \geq 1, \quad (2.70)$$

Stoga iz relacije (2.69) dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2L}{n\pi} \right)^2 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x^2 dx = \frac{2}{3}L^2 \quad (2.71)$$

što povlači

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (2.72)$$

Izravna posljedica Besselove nejednakosti je

Teorem 2.3 (Riemann-Lebesgueova lema) *Neka je $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna funkcija. Onda za Fourierove koeficijente vrijedi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{L} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad (2.73)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{L} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0. \quad (2.74)$$

Dokaz. Besselova nejednakost implicira da $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ konvergira pa iz nužnog uvjeta za konvergenciju reda slijedi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 0$. Stoga je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. ■

Sada možemo dozati naš glavni rezultat.

Teorem 2.4 (Teorem o uniformnoj konvergenciji) *Neka je f neprekidna i po dijelovima C^1 funkcija na $[-L, L]$ takva da je $f(-L) = f(L)$. Onda Fourierov red konvergira uniformno ka f na skupu $[-L, L]$.*

Dokaz. Neka je

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \quad (2.75)$$

N -ta parcijalna suma Fourierovog reda funkcije f . Prema Dirichletovom teoremu je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x) \quad \text{za svaki } x \in [-L, L] \quad (2.76)$$

jer je f neprekidna i po dijelovima C^1 na $[-L, L]$. Sada je

$$\begin{aligned} |f(x) - S_N(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \quad \text{za svaki } x \in [-L, L]. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Ako pokažemo da su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergentni, onda će uniformna konvergencija slijediti iz nejednakosti (2.77). Koeficijente a_n možemo parcijalnom integracijom prikazati u obliku

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (2.78)$$

$$= \frac{1}{L} \left[f(x) \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L f'(x) \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] \quad (2.79)$$

$$= -\frac{L}{n\pi} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = -\frac{L}{n\pi} A_n, \quad n \geq 1, \quad (2.80)$$

gdje je

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (2.81)$$

Slično, koristeći uvjet $f(-L) = f(L)$ dobivamo

$$b_n = \frac{L}{n\pi} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{n\pi} B_n, \quad n \geq 1 \quad (2.82)$$

gdje je

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (2.83)$$

Dakle, Fourierovi koeficijenti za f i f' zadovoljavaju

$$|a_n| = \frac{L}{\pi n} |A_n| \quad \text{i} \quad |b_n| = \frac{L}{\pi n} |B_n|, \quad n \geq 1. \quad (2.84)$$

Pokažimo sada da redovi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |A_n|$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |B_n|$ konvergiraju. Primijetimo da je

$$B_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) dx = \frac{1}{L} (f(L) - f(-L)) = 0. \quad (2.85)$$

Stoga Besselova nejednakost za funkciju f' povlači

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f'(x))^2 dx < \infty. \quad (2.86)$$

Prema Cauchy–Schwartzovoj nejednakosti, za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} |A_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^N A_n^2} \leq \frac{\pi^2}{6} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2} \quad (2.87)$$

jer je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Slično dobivamo

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} |B_n| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2} \quad (2.88)$$

za svaki $N \geq 1$. Nejednakosti (2.87) i (2.88) impliciraju da redovi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergiraju. Stoga iz (2.77) slijedi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-L, L]} |f(x) - S_N(x)| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = 0. \quad (2.89)$$

Time je dokazano da Fourierov red konvergira uniformno ka f na $[-L, L]$. ■

Grubo govoreći, Teorem o uniformnoj konvergenciji vrijedi za neprekidne funkcije koje imaju najviše konačan broj šiljaka u intervalu $[-L, L]$ u kojima prva derivacija ne postoji. Primjer takve funkcije je $f(x) = |x|$ koja ima šiljak u točki $x = 0$.

Posebno važan aspekt u teoriji Fourierovih redova je odnos između glatkoće funkcije i brzine kojom Fourierovi koeficijenti teže k nuli. U dokazu teorema 2.4 pretpostavka da je f' po dijelovima neprekidna povlači da redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ apsolutno konvergiraju što znači da $|a_n|$ i $|b_n|$ teže k nuli brže od $1/n$. Poznavajući ocjenu za gornju među koeficijenata $|a_n|$ i $|b_n|$ možemo procijeniti koliko članova Fourierovog reda je potrebno da bi postigli određenu točnost u aproksimaciji funkcije.

Propozicija 2.2 *Neka je $f \in C^2[-L, L]$ takva da je $f(-L) = f(L)$ i $f'(-L) = f'(L)$. Neka je $M = \max_{x \in [-L, L]} |f''(x)|$. Onda Fourierovi koeficijenti imaju gornje međe*

$$|a_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{2L^2 M}{\pi^2 n^2}, \quad (2.90)$$

$$|b_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{2L^2 M}{\pi^2 n^2}, \quad n \geq 1. \quad (2.91)$$

Dokaz. Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
 &= \frac{1}{L} \left[\frac{L}{n\pi} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{x=-L}^{x=L} - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\
 &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

Iz uvjeta $f'(-L) = f'(L)$ slijedi da je

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= -\frac{L}{n\pi} f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{x=-L}^{x=L} + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
 &= \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

pa supstitucijom (2.93) u (2.92) dobivamo

$$a_n = -\frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \tag{2.94}$$

Slično se pokazuje da uvjet $f(-L) = f(L)$ povlači

$$b_n = -\frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \tag{2.95}$$

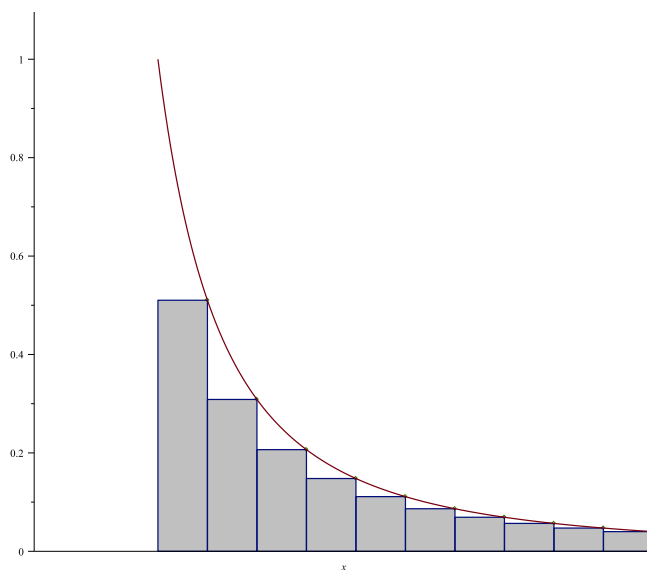
Sada iz jednažbi (2.94) i (2.95) zaključujemo da su gornje međe za $|a_n|$ i $|b_n|$ dane sa

$$|a_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L \left| f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| dx \leq \frac{2L^2 M}{n^2\pi^2}, \tag{2.96}$$

$$|b_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L \left| f''(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| dx \leq \frac{2L^2 M}{n^2\pi^2} \tag{2.97}$$

gdje je $M = \max_{x \in [-L, L]} |f''(x)|$. ■

Ove ocjene za Fourierove koeficijente su korisne ako a_n i b_n nisu eksplicitno poznati, na primjer ako se računaju numeričkim metodama. Onda se iz relacija (2.96) i (2.97) može dobiti gruba procjena koliko je članova Fourierovog reda potrebno za aproksimaciju funkcije unutar zadane točnosti. Razlika između funkcije $f(x)$ i N -te parcijalne

Slika 2.6: Suma reda $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

sume Fourierovog reda $S_N(x)$ je omeđena sa

$$\begin{aligned} |f(x) - S_N(x)| &\leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = \frac{4L^2M}{\pi^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned} \quad (2.98)$$

za sve $x \in [-L, L]$. Primijetimo da je suma reda $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ manja od površine ispod krivulje $y = \frac{1}{x^2}$, $N \leq x < \infty$ (vidi sliku 2.6). Stoga je

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N} \quad (2.99)$$

pa iz (2.98) dobivamo ocjenu

$$\sup_{x \in [-L, L]} |f(x) - S_N(x)| \leq \frac{4L^2M}{\pi^2 N}. \quad (2.100)$$

Ako želimo da je pogreška aproksimacije manja od $\epsilon > 0$, onda N treba uzeti tako da je

$$N > \frac{4L^2M}{\pi^2 \epsilon}. \quad (2.101)$$

Ovu metodu procjene broja N nazivamo integralna metoda jer je u relaciji (2.99) suma reda majorizirana integralom. Mnogo finije procjene broja N se mogu dobiti ako se Fourierovi koeficijenti eksplicitno izračunaju i onda primijeni integralna metoda u majorizaciji reda. Ilustrirajmo ovaj postupak na sljedećem primjeru.

Primjer 2.6 *Procijenite koliko članova Fourierovog reda je potrebno za aproksimaciju funkcije $f(x) = x^3 - x$, $x \in [-1, 1]$, s pogreškom manjom od $\epsilon = 0.01$.*

Funkcija $f(x) = x^3 - x$ je neparna pa je $a_n = 0$ za svaki $n \geq 0$. Koeficijenti b_n su dani sa

$$b_n = \int_{-1}^1 (x^3 - x) \sin(n\pi x) dx = (-1)^n \frac{12}{(n\pi)^3}. \quad (2.102)$$

Stoga je Fourierov red jednak

$$\tilde{f}(x) = \frac{12}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(n\pi x). \quad (2.103)$$

Prema teoremu 2.4, red (2.103) konvergira uniformno ka f i vrijedi

$$\left| f(x) - \frac{12}{\pi^3} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(n\pi x) \right| = \left| \frac{12}{\pi^3} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(n\pi x) \right| \leq \frac{12}{\pi^3} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad (2.104)$$

za svaki $x \in [-1, 1]$. Suma reda $\sum_{n=N+1}^{\infty} 1/n^3$ je manja od površine ispod krivulje $y = 1/x^3$, $N \leq x < \infty$, stoga je

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_N^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2N^2}. \quad (2.105)$$

Sada iz (2.104) dobivamo ocjenu

$$\left| f(x) - \frac{12}{\pi^3} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(n\pi x) \right| \leq \frac{6}{\pi^3 N^2}. \quad (2.106)$$

Ako želimo da je pogreška aproksimacije manja od $\epsilon = 0.01$, onda N treba uzeti takav da je $6/(\pi^3 N^2) < 0.01$, odnosno

$$N > \sqrt{\frac{6}{\pi^3 \cdot 0.01}} \approx 4.4. \quad (2.107)$$

Dakle, dovoljno je uzeti $N = 5$ članova reda. Za usporedbu odredimo N iz relacije (2.101). Maksimalna vrijednost druge derivacije je dana sa

$$M = \max_{-1 \leq x \leq 1} |6x| = 6, \quad (2.108)$$

pa uvjet (2.101) povlači

$$N > \frac{4 \cdot 6}{\pi^2 \cdot 0.01} \approx 243.17, \quad (2.109)$$

odnosno $N = 244$. Očigledno je prva procjena mnogo bolja od procjene dobivene relacijom (2.101). ■

Poglavlje 3

Kvazi–linearne jednađžbe prvog reda

U ovom poglavlju razmatramo opće rješenje kvazi–linearne jednađžbe prvog reda

$$P(x, y, u)u_x + Q(x, y, u)u_y = R(x, y, u). \quad (3.1)$$

Pretpostavimo da su P , Q i R funkcije klase C^1 na domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ koje ne isčezavaju istodobno ni u jednoj točki $(x, y, u) \in \Omega$. Rješenje jednađžbe (3.1) je funkcija $u = u(x, y)$ klase C^1 na domeni $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ takva da je $(x, y, u(x, y)) \in \Omega$ za svaku točku $(x, y) \in \Omega_0$. Drugim riječima, funkcije $P(x, y, u(x, y))$, $Q(x, y, u(x, y))$ i $R(x, y, u(x, y))$ su dobro definirane na domeni Ω_0 . Rješenje $u = u(x, y)$ se može promatrati kao nivo–ploha funkcije $f(x, y) = u(x, y) - u$,

$$S = \{(x, y, u) \mid f(x, y, u) = 0\}, \quad (3.2)$$

koju nazivamo *integralna ploha* jednađžbe (3.1). Vektor $\nabla f = u_x \vec{e}_1 + u_y \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ je okomit na plohu S u svakoj točki $(x, y, u) \in S$ gdje je $\nabla f \neq 0$. Primijetimo da se jednađžba (3.1) može napisati kao skalarni umnožak vektora

$$(P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 + R\vec{e}_3) \cdot (u_x \vec{e}_1 + u_y \vec{e}_2 - \vec{e}_3) = 0 \quad (3.3)$$

što povlači da je vektor $\vec{F} = P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 + R\vec{e}_3$ okomit na ∇f ako je $\nabla f \neq 0$. Zaključujemo da $\vec{F}$ mora biti tangencijalni vektor na integralnu plohu S u svakoj točki gdje je $\nabla f \neq 0$. Pravac koji određuje vektor $\vec{F}$ naziva se Mongeova os i ima ključnu ulogu u rješavanju jednađžbe (3.1).

Definicija 3.1 Kažemo da je $\gamma \subset S$ karakteristična krivulja ako je u svakoj točki $(x, y, u) \in \gamma$ tangencijalni vektor od γ jednak $\vec{F}(x, y, u) = P(x, y, u)\vec{e}_1 + Q(x, y, u)\vec{e}_2 + R(x, y, u)\vec{e}_3$.

Ako je γ definirana parametarskim jednadžbama

$$\gamma: \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad u = u(t), \quad t \in I, \quad (3.4)$$

onda je

$$x'(t) = P(x, y, u), \quad y'(t) = Q(x, y, u), \quad u'(t) = R(x, y, u). \quad (3.5)$$

Jednadžbe (3.5) nazivaju se *karakteristične jednadžbe* kvazi-linearne jednadžbe (3.1). Karakteristične jednadžbe možemo zapisati u neparametarskom obliku

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R}. \quad (3.6)$$

Pronalaženje općeg rješenja jednadžbe (3.1) se svodi na rješavanje karakterističnih jednadžbi (3.5), odnosno (3.6). Ova metoda se naziva *Lagrangeova metoda karakteristika*. Rješenja jednadžbi (3.6) općenito možemo zapisati u obliku $\phi(x, y, u) = C$ za neki $C \in \mathbb{R}$. Kažemo da su $\phi(x, y, u) = C_1$ i $\psi(x, y, u) = C_2$ funkcionalno nezavisna rješenja ako je

$$\nabla\phi \times \nabla\psi \neq 0. \quad (3.7)$$

Teorem 3.1 (Metoda karakteristika) Neka su $\phi(x, y, u) = C_1$ i $\psi(x, y, u) = C_2$ dva funkcionalno nezavisna rješenja karakterističnih jednadžbi (3.6) u domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ u kojoj su definirane funkcije P , Q i R . Opće rješenje jednadžbe (3.1) je dano sa $f(\phi, \psi) = 0$ gdje je f proizvoljna funkcija klase C^1 .

Dokaz. Neka je $\gamma \subset S$ karakteristična krivulja s parametrizacijom $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(t)$, $t \in I$. Tada je $\phi(x(t), y(t), u(t)) = C_1$ pa vrijedi

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi_x x'(t) + \phi_y y'(t) + \phi_u u'(t) = P\phi_x + Q\phi_y + R\phi_u = 0. \quad (3.8)$$

Slično, iz $\psi(x(t), y(t), u(t)) = C_2$ dobivamo

$$\frac{d\psi}{dt} = P\psi_x + Q\psi_y + R\psi_u = 0. \quad (3.9)$$

Kako su ϕ i ψ funkcionalno nezavisni, to je

$$\nabla\phi \times \nabla\psi = \vec{i} \begin{vmatrix} \phi_y & \phi_u \\ \psi_y & \psi_u \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_u \\ \psi_x & \psi_u \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.10)$$

Bez gubitka općenitosti pretpostavimo da je $\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x \neq 0$. Tada koristeći jednadžbe (3.8) i (3.9) funkcije P i Q možemo izraziti pomoću R ,

$$P = -R \frac{\begin{vmatrix} \phi_u & \phi_y \\ \psi_u & \psi_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}, \quad Q = -R \frac{\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_u \\ \psi_x & \psi_u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}. \quad (3.11)$$

S druge strane, deriviranjem izraza $f(\phi, \psi) = 0$ dobivamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial f}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.13)$$

gdje smo uzeli u obzir da varijabla u ovisi o x i y . Sustav jednadžbi (3.12)–(3.13) ima netrivialna rješenja za $\partial f/\partial \phi$ i $\partial f/\partial \psi$ samo ako je

$$\begin{vmatrix} \phi_x + \phi_u u_x & \psi_x + \psi_u u_x \\ \phi_y + \phi_u u_y & \psi_y + \psi_u u_y \end{vmatrix} = 0. \quad (3.14)$$

Uvjet (3.14) se može zapisati u obliku

$$\begin{vmatrix} \phi_u & \phi_y \\ \psi_u & \psi_y \end{vmatrix} u_x + \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_u \\ \psi_x & \psi_u \end{vmatrix} u_y = - \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}. \quad (3.15)$$

Sada iz jednadžbi (3.11) i (3.15) slijedi da u zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$Pu_x + Qu_y = R. \quad (3.16)$$

■

Primijetimo da se do istog rezultata dolazi ako pretpostavimo da je bilo koja determinanta u jednadžbi (3.10) različita od nule.

Primjer 3.1 *Odredite opće rješenje kvazi-linearne jednadžbe*

$$x^2 u_x + y^2 u_y = (x + y)u. \quad (3.17)$$

Karakteristične krivulje su određene jednadžbama

$$x'(t) = x^2, \quad y'(t) = y^2, \quad u'(t) = (x + y)u. \quad (3.18)$$

Integracijom prve dvije jednadžbe u (3.18) dobivamo

$$x = -\frac{1}{t + C_1}, \quad y = -\frac{1}{t + C_2} \quad (3.19)$$

gdje su C_1 i C_2 konstante integracije. Supstitucijom (3.19) u treću jednadžbu u (3.18) slijedi da funkcija u zadovoljava

$$u'(t) = -\left(\frac{1}{t + C_1} + \frac{1}{t + C_2}\right)u. \quad (3.20)$$

Integracijom jednadžbe (3.20) dobivamo

$$u(t) = \frac{K_1}{(t + C_1)(t + C_2)} \quad (3.21)$$

za neku konstantu K_1 . Sada iz jednadžbi (3.19) i (3.21) možemo odrediti funkcije ϕ i ψ koje su konstantne duž karakterističnih krivulja. Primijetimo da je

$$\frac{1}{t + C_1} \frac{1}{t + C_2} = xy \quad (3.22)$$

pa iz jednadžbe (3.21) slijedi

$$\frac{u}{xy} = K_1. \quad (3.23)$$

Nadalje, jednadžba (3.19) implicira

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C_2 - C_1 = K_2. \quad (3.24)$$

Ako definiramo funkcije

$$\phi(x, y, u) = \frac{u}{xy}, \quad \psi(x, y, u) = \frac{y - x}{xy}, \quad (3.25)$$

onda iz (3.23) i (3.24) slijedi da je $\phi = K_1$ i $\psi = K_2$ duž karakterističnih krivulja. Stoga je opće rješenje dano sa

$$f\left(\frac{u}{xy}, \frac{y - x}{xy}\right) = 0 \quad (3.26)$$

gdje je f proizvoljna C^1 funkcija. ■

Poglavlje 4

Jednadžbe drugog reda u dvije nezavisne varijable

U ovom poglavlju proučavamo linearne jednadžbe drugog reda u dvije nezavisne varijable. Ove jednadžbe se mogu klasificirati na tri tipa: hiperboličke, paraboličke i eliptičke jednadžbe. Fundamentalne jednadžbe matematičke fizike, valna, difuzijska i Laplaceove jednadžba su važni primjeri ovih tipova jednadžbi. Rješenja istog tipa imaju slična kvalitativna svojstva, a svaki tip jednadžbe se može transformacijom varijabli svesti na tzv. kanonski oblik koji je jednostavniji za proučavanje.

Opća linearna jednadžba drugog reda u dvije nezavisne varijable ima oblik

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (4.1)$$

gdje su u, A, B, C, D, E, F, G funkcije varijabli x, y u zadanom području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Pretpostavljamo da funkcije A, B i C ne iščezavaju istovremeno u Ω i da je $u \in C^2(\Omega)$. Jednadžbu (4.1) možemo zapisati u operatorskom obliku $L[u] = G$ gdje je

$$L = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F. \quad (4.2)$$

Operator

$$L_0 = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4.3)$$

naziva se glavni dio operatora L . Operatoru L_0 pridružena je diskriminanta

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y). \quad (4.4)$$

Pokazat ćemo da je predznak diskriminante Δ invarijantan obzirom na regularnu transformaciju varijabli, odnosno da ne ovisi o koordinatnom sustavu u kojem promatramo jednadžbu. Ovo sugerira da jednadžbe drugog reda možemo klasificirati prema predznaku diskriminante Δ .

Definicija 4.1 *Kažemo da je jednadžba (4.1)*

(a) *hiperbolička u točki (x, y) ako je $\Delta(x, y) > 0$,*

(b) *parabolička u točki (x, y) ako je $\Delta(x, y) = 0$,*

(c) *eliptička u točki (x, y) ako je $\Delta(x, y) < 0$.*

Ako je jednadžba (4.1) hiperbolička (parabolička, eliptička) u svakoj točki područja Ω , onda kažemo da je ona hiperbolička (parabolička, eliptička) u Ω . Klasifikacija jednadžbi na spomenute tipove je motivirana krivuljama drugog reda jer jednadžba

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (4.5)$$

predstavlja hiperbolu, parabolu, odnosno elipsu ovisno o tome je li diskriminanta $\Delta = B^2 - AC$ pozitivna, nula ili negativna.

Valna jednadžba

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (4.6)$$

je hiperbolička u $\mathbb{R}^2$ jer je $\Delta = c^2 > 0$ ($A = -c^2, B = 0, C = 1$). Jednadžba provođenja topline

$$u_t - k u_{xx} = 0, \quad k > 0, \quad (4.7)$$

je parabolička u $\mathbb{R}^2$ jer je $\Delta = 0$ ($A = -k, B = C = 0$) dok je Laplaceova jednadžba

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (4.8)$$

je eliptička u $\mathbb{R}^2$ jer je $\Delta = -1 < 0$ ($A = C = 1, B = 0$). Tricomijeva jednadžba

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (4.9)$$

ima diskriminantu $\Delta = -y$ ($A = y, B = 0, C = 1$). Jednadžba je eliptička u poluravnini $y > 0$, hiperbolička u poluravnini $y < 0$ i parabolička na pravcu $y = 0$.

Zanima nas kako se jednađba (4.1) transformira uvođenjem novih varijabli

$$\alpha = \alpha(x, y), \quad \beta = \beta(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (4.10)$$

Pretpostavit ćemo da su $\alpha, \beta \in C^2(\Omega)$ i da je Jacobijan transformacija

$$J = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} = \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (4.11)$$

U tom slučaju postoji inverzna transformacija

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad (4.12)$$

a transformirana funkcija $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ je klase C^2 .

Lema 4.1 *Neka je*

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (4.13)$$

linearna jednađba drugog reda. Neka je $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ regularna transformacija varijabli. Tada je predznak diskriminante $\Delta = B^2 - AC$ invarijantan obzirom na transformaciju $(x, y) \mapsto (\alpha, \beta)$.

Lema 4.1 pokazuje da je predznak diskriminante $\Delta(x, y)$ intrinzično svojstvo jednađbe (4.13) jer funkcije $u(x, y)$ i $w(\alpha, \beta)$ zadovoljavaju jednađbu istog tipa.

Dokaz. Funkcije u i w povezane su relacijom $u(x, y) = w(\alpha(x, y), \beta(x, y))$. Primjenom pravila za derivaciju kompozicije dobivamo

$$u_x = w_\alpha \alpha_x + w_\beta \beta_x, \quad (4.14)$$

$$u_y = w_\alpha \alpha_y + w_\beta \beta_y, \quad (4.15)$$

$$u_{xx} = w_{\alpha\alpha} \alpha_x^2 + 2w_{\alpha\beta} \alpha_x \beta_x + w_{\beta\beta} \beta_x^2 + w_\alpha \alpha_{xx} + w_\beta \beta_{xx}, \quad (4.16)$$

$$u_{xy} = w_{\alpha\alpha} \alpha_x \alpha_y + w_{\alpha\beta} (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) + w_{\beta\beta} \beta_x \beta_y + w_\alpha \alpha_{xy} + w_\beta \beta_{xy}, \quad (4.17)$$

$$u_{yy} = w_{\alpha\alpha} \alpha_y^2 + 2w_{\alpha\beta} \alpha_y \beta_y + w_{\beta\beta} \beta_y^2 + w_\alpha \alpha_{yy} + w_\beta \beta_{yy}. \quad (4.18)$$

Suptitucijom ovih izraza u (4.13) slijedi da funkcija w zadovoljava transformiranu jednađbu

$$\bar{L}[w] \equiv \bar{A}w_{\alpha\alpha} + 2\bar{B}w_{\alpha\beta} + \bar{C}w_{\beta\beta} + \bar{D}w_\alpha + \bar{E}w_\beta + \bar{F}w = \bar{G} \quad (4.19)$$

gdje je

$$\bar{A}(\alpha, \beta) = A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2, \quad (4.20)$$

$$\bar{B}(\alpha, \beta) = A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y, \quad (4.21)$$

$$\bar{C}(\alpha, \beta) = A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2. \quad (4.22)$$

Ostale koeficijente ne trebamo eksplicitno izračunati jer tip jednadžbe ovisi samo o koeficijentima A , B i C . Jednadžbe (4.20)-(4.22) se mogu zapisati u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ \alpha_y & \beta_y \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Računanjem determinante lijeve i desne strane jednadžbe (4.23) dobivamo

$$\bar{A}\bar{C} - \bar{B}^2 = (AC - B^2)(\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x)^2, \quad (4.24)$$

odnosno

$$\bar{\Delta} = \Delta J^2 \quad (4.25)$$

gdje je $J = \alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x$ Jacobijan transformacije. Kako je $(x, y) \mapsto (\alpha, \beta)$ regularna transformacija, to je $J \neq 0$ pa zaključujemo da diskriminante $\bar{\Delta}$ i Δ imaju isti predznak ili su obje nula. Ovo implicira da funkcije u i w zadovoljavaju jednadžbu istog tipa. ■

Uvođenjem novih varijabli jednadžba (4.1) se može transformirati u jednostavniji, tzv. *kanonski oblik*. Proučavanjem kanonskih oblika dobivamo lakši uvid u opća svojstva jednadžbe (4.1). Ako nam je poznato rješenje $w(\alpha, \beta)$ kanonskog oblika jednadžbe, onda je rješenje početne jednadžbe dano sa $u(x, y) = w(\alpha(x, y), \beta(x, y))$. Razlikujemo sljedeće kanonske oblike jednadžbi drugog reda.

Definicija 4.2 (1) *Kanonski oblik **hiperboličke** jednadžbe je*

$$u_{xy} + L_1[u] = G \quad (4.26)$$

gdje je L_1 diferencijalni operator prvog reda. Ovaj kanonski oblik je ekvivalentan sa

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} + L_1[w] = G \quad (4.27)$$

gdje su varijable α , β dane transformacijom $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$.

(2) Kanonski oblik **paraboličke** jednadžbe je

$$u_{xx} + L_1[u] = G. \quad (4.28)$$

(3) Kanonski oblik **eliptičke** jednadžbe je

$$u_{xx} + u_{yy} + L_1[u] = G. \quad (4.29)$$

Primijetimo da su fundamentalne jednadžbe matematičke fizike, valna, difuzijska i Laplaceova jednadžba glavni dijelovi hiperboličke, paraboličke i eliptičke jednadžbe, redom. U sljedećem poglavlju proučavamo transformacije varijabli kojima se jednadžbe svode na kanonske oblike.

4.1 Kanonski oblik hiperboličkih jednadžbi

Teorem 4.1 *Neka je*

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (4.30)$$

hiperbolička jednadžba u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Onda postoje varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ u kojima jednadžba (4.30) ima kanonski oblik

$$w_{\alpha\beta} + L_1[w] = \bar{G} \quad (4.31)$$

gdje je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ i L_1 je diferencijalni operator prvog reda.

Dokaz. Ako je $A = C = 0$, onda je $\Delta = B^2 > 0$ pa se u ovom slučaju jednadžba svodi na kanonski oblik dijeljenjem s $2B \neq 0$. Pretpostavimo sada bez gubitka općenitosti da je $A \neq 0$ u području Ω . Ako je $C \neq 0$, možemo zamijeniti uloge x i y . Jednadžbu ćemo svesti na kanonski oblik ako odredimo varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ takve da je

$$\bar{A} = A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2 = 0, \quad (4.32)$$

$$\bar{C} = A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2 = 0. \quad (4.33)$$

Kvadratna jednadžba

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0 \quad (4.34)$$

ima dva različita realna rješenja $\lambda_1(x, y)$ i $\lambda_2(x, y)$ u Ω ,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad (4.35)$$

jer je $\Delta = B^2 - AC > 0$. Neka su $\alpha(x, y)$ i $\beta(x, y)$ netrivialna rješenja jednadžbi prvog reda

$$\alpha_x = \lambda_1(x, y)\alpha_y, \quad (4.36)$$

$$\beta_x = \lambda_2(x, y)\beta_y. \quad (4.37)$$

Jednadžbe (4.36) i (4.37) nazivamo *karakteristične* jednadžbe. Supstitucijom ovih jednadžbi u izraze za koeficijente $\bar{A}$ i $\bar{C}$ dobivamo

$$\bar{A} = (A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1 + C)\alpha_y^2 = 0, \quad (4.38)$$

$$\bar{C} = (A\lambda_2^2 + 2B\lambda_2 + C)\beta_y^2 = 0. \quad (4.39)$$

Dakle, jednadžba (4.30) u novim varijablama ima oblik

$$2\bar{B}w_{\alpha\beta} + L_1[w] = \bar{G} \quad (4.40)$$

gdje je L_1 diferencijalni operator prvog reda. Prema lemi 4.1 transformirana diskriminanta zadovoljava $\bar{\Delta} = \bar{B}^2 > 0$, stoga jednadžbu (4.40) možemo podijeliti s $2\bar{B} \neq 0$ čime dobivamo kanonski oblik (4.31).

Ostaje nam provjeriti je li transformacija $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ regularna. Supstitucijom jednadžbi (4.36) i (4.37) u Jacobijan transformacije dobivamo

$$J = \begin{vmatrix} \lambda_1\alpha_y & \alpha_y \\ \lambda_2\beta_y & \beta_y \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_y\beta_y. \quad (4.41)$$

Ovdje je $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ jer su λ_1 i λ_2 različita rješenja jednadžbe (4.34). Kako je α netrivialno rješenje karakteristične jednadžbe, to je $\alpha_y \neq 0$ jer u protivnom iz (4.36) slijedi da je $\alpha_x = \alpha_y = 0$, odnosno $\alpha = konst$. Slično zaključujemo da je $\beta_y \neq 0$. Stoga je $J \neq 0$ pa netrivialna rješenja karakterističnih jednadžbi daju regularnu transformaciju varijabli. ■

Ako su λ_1 i λ_2 konstante, onda karakteristične jednadžbe imaju jednostavna rješenja $\alpha(x, y) = a(\lambda_1 x + y)$ i $\beta(x, y) = b(\lambda_2 x + y)$ gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ proizvoljni.

Primjer 4.1 *Odredite kanonski oblik i opće rješenje jednadžbe*

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2. \quad (4.42)$$

Imamo $A = 4$, $B = 5/2$ i $C = 1$ i $\Delta = 9/4 > 0$ pa je jednadžba hiperbolička u $\mathbb{R}^2$. Kvadratna jednadžba $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$ ima dva realna korijena $\lambda_1 = -1/4$ i $\lambda_2 = -1$. Karakteristične jednadžbe su dane sa

$$\alpha_x = -\frac{1}{4}\alpha_y, \quad \beta_x = -\beta_y, \quad (4.43)$$

odakle slijedi

$$\alpha = -\frac{1}{4}x + y, \quad \beta = -x + y. \quad (4.44)$$

Neka je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$. Onda je

$$u_x = -\frac{1}{4}w_\alpha - w_\beta, \quad (4.45)$$

$$u_y = w_\alpha + w_\beta, \quad (4.46)$$

$$u_{xx} = \frac{1}{16}w_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2}w_{\alpha\beta} + w_{\beta\beta}, \quad (4.47)$$

$$u_{yy} = w_{\alpha\alpha} + 2w_{\alpha\beta} + w_{\beta\beta}, \quad (4.48)$$

$$u_{xy} = -\frac{1}{4}w_{\alpha\alpha} - \frac{5}{4}w_{\alpha\beta} - w_{\beta\beta} \quad (4.49)$$

pa supstitucijom izraza (4.45)–(4.49) u jednadžbu (4.42) dobivamo kanonski oblik jednadžbe

$$w_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}w_\alpha - \frac{8}{9}. \quad (4.50)$$

Funkcija $v = w_\alpha$ zadovoljava jednadžbu prvog reda $v_\beta - \frac{1}{3}v = -\frac{8}{9}$. Opće rješenje je dano sa $v(\alpha, \beta) = B(\alpha)e^{\frac{1}{3}\beta} + \frac{8}{3}$ gdje konstanta integracije B ovisi o varijabli α . Sada je

$$w(\alpha, \beta) = \int v(\alpha, \beta) d\alpha = \int B(\alpha) d\alpha e^{\frac{1}{3}\beta} + \frac{8}{3}\alpha + C. \quad (4.51)$$

Dakle, opće rješenje jednadžbe (4.42) ima oblik

$$u(x, y) = w\left(-\frac{1}{4}x + y, -x + y\right) = f\left(-\frac{1}{4}x + y\right)e^{\frac{1}{3}(-x+y)} - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}y + C \quad (4.52)$$

gdje je f proizvoljna C^2 funkcija.

Ako uvedemo varijable $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$ i funkciju $\bar{w}(\xi, \eta) = w(\alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta))$, onda je ekvivalentni kanonski oblik jednadžbe (4.42) dan sa

$$\bar{w}_{\xi\xi} - \bar{w}_{\eta\eta} = \frac{1}{3}\bar{w}_{\xi} + \frac{1}{3}\bar{w}_{\eta} - \frac{8}{9}. \quad (4.53)$$

■

4.2 Kanonski oblik paraboličkih jednadžbi

Teorem 4.2 *Neka je*

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (4.54)$$

parabolička jednadžba u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Onda postoje varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ u kojima jednadžba (4.54) ima kanonski oblik

$$w_{\alpha\alpha} + L_1[w] = \bar{G} \quad (4.55)$$

gdje je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ i L_1 je diferencijalni operator prvog reda.

Dokaz. Kako A , B i C nisu svi nula, pretpostavka $\Delta = B^2 - AC = 0$ povlači da je $A \neq 0$ ili $C \neq 0$. Bez gubitka općenitosti pretpostavimo da je $A \neq 0$ u Ω . Ako je $C \neq 0$, dokaz se modificira na očigledni način. Prema lemi 4.1, potrebno je odrediti varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ takve da je

$$\bar{B} = A\alpha_x \beta_x + B(\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) + C\alpha_y \beta_y = 0, \quad (4.56)$$

$$\bar{C} = A\beta_x^2 + 2B\beta_x \beta_y + C\beta_y^2 = 0. \quad (4.57)$$

Zbog uvjeta $\Delta = B^2 - AC = 0$, jednadžba $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$ ima jedno realno rješenje u Ω ,

$$\lambda(x, y) = -\frac{B(x, y)}{A(x, y)}. \quad (4.58)$$

Neka je β netrivialno rješenje karakteristične jednadžbe

$$\beta_x = \lambda(x, y)\beta_y. \quad (4.59)$$

Supstitucijom jednadžbe (4.59) u (4.56) i (4.57) dobivamo

$$\bar{B} = (A\lambda + B)\alpha_x\beta_y + (B\lambda + C)\alpha_y\beta_y = \frac{1}{A}(AC - B^2)\alpha_y\beta_y = 0, \quad (4.60)$$

$$\bar{C} = (A\lambda^2 + 2B\lambda + C)\beta_y^2 = 0. \quad (4.61)$$

Za $\alpha(x, y)$ možemo uzeti proizvoljnu funkciju za koju Jacobijan transformacije $(x, y) \mapsto (\alpha, \beta)$ ne iščezava. Ako odaberemo $\alpha = x$, onda je

$$J = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} = \beta_y \neq 0 \quad (4.62)$$

jer je β netrivialno rješenje karakteristične jednadžbe. Sada za koeficijente imamo

$$\bar{A} = A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2 = A \neq 0 \quad (4.63)$$

i $\bar{B} = \bar{C} = 0$ pa je transformirana jednadžba dana sa $\bar{A}w_{\alpha\alpha} + L_1[w] = \bar{G}$. Dijeljenjem s $\bar{A} \neq 0$ dobivamo kanonski oblik (4.55). ■

Primjer 4.2 *Odredite kanonski oblik jednadžbe*

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0 \quad (4.64)$$

i pronađite opće rješenje jednadžbe u poluravnini $\Omega = \{(x, y) \mid x > 0\}$.

Jednadžba je parabolička u $\mathbb{R}^2$ jer je $A = x^2$, $B = -xy$ i $C = y^2$ što povlači $\Delta = B^2 - AC = (-xy)^2 - x^2y^2 = 0$. Prema prethodnom teoremu treba odrediti rješenje karakteristične jednadžbe

$$\beta_x = \lambda\beta_y \quad \text{gdje je} \quad \lambda = -\frac{B}{A} = \frac{y}{x}. \quad (4.65)$$

Jedno rješenje je dano sa $\beta = xy$, stoga transformacija varijabli glasi $\alpha = x$, $\beta = xy$. Transformacija je regularna u poluravnini Ω jer je Jacobijan transformacije $J = \beta_y = x > 0$ u Ω . Definirajmo $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$. Onda je

$$u_x = w_\alpha + w_\beta \frac{\beta}{\alpha}, \quad (4.66)$$

$$u_y = w_\beta \alpha, \quad (4.67)$$

$$u_{xx} = w_{\alpha\alpha} + 2w_{\alpha\beta} \frac{\beta}{\alpha} + w_{\beta\beta} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2, \quad (4.68)$$

$$u_{xy} = w_{\alpha\beta} \alpha + w_{\beta\beta} \beta + w_\beta, \quad (4.69)$$

$$u_{yy} = w_{\beta\beta} \alpha^2. \quad (4.70)$$

Supstitucijom ovih izraza u jednadžbu (4.64) dobivamo

$$\alpha^2 w_{\alpha\alpha} + \alpha w_\alpha = 0. \quad (4.71)$$

Integracijom jednadžbe nalazimo

$$w_\alpha = \frac{1}{\alpha} f(\beta), \quad (4.72)$$

pa je funkcija w dana sa

$$w = \int w_\alpha d\alpha = f(\beta) \ln |\alpha| + g(\beta) \quad (4.73)$$

gdje su f i g proizvoljne C^2 funkcije. Dakle, opće rješenje jednadžbe (4.64) u poluravnini $x > 0$ je funkcija

$$u(x, y) = f(xy) \ln(x) + g(xy). \quad (4.74)$$

■

4.3 Kanonski oblik eliptičkih jednadžbi

Određivanje varijabli u kojima eliptička jednadžba ima kanonski oblik je u općem slučaju složenije nego za hiperboličke ili paraboličke jednadžbe (vidi [P.R. Garabedian, Partial Differential Equations, John Wiley and Sons, New York, 1964]). Međutim, ako su koeficijenti uz druge derivacije konstantni, onda je procedura za svođenje na kanonski oblik slična hiperboličkom slučaju.

Teorem 4.3 *Neka je*

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (4.75)$$

eliptička jednadžba u području $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Onda postoje varijable $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ u kojima jednadžba (4.75) ima kanonski oblik

$$w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} + L_1[w] = \bar{G} \quad (4.76)$$

gdje je $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ i L_1 je diferencijalni operator prvog reda.

Dokaz. Dokaz provodimo u slučaju kada su koeficijenti A , B i C konstantni. Iz uvjeta $\Delta = B^2 - AC < 0$ slijedi da je $A \neq 0$ i $C \neq 0$. Koeficijenti glavnog dijela jednadžbe se transformiraju prema pravilu

$$\bar{A} = A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2, \quad (4.77)$$

$$\bar{B} = A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y, \quad (4.78)$$

$$\bar{C} = A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2. \quad (4.79)$$

Želimo odrediti varijable $\alpha = \alpha(x, y)$ i $\beta = \beta(x, y)$ takve da je $\bar{A} = \bar{C} \neq 0$ i $\bar{B} = 0$. U tom slučaju α i β zadovoljavaju jednadžbe $\bar{A} - \bar{C} = 0$ i $\bar{B} = 0$, odnosno

$$A(\alpha_x^2 - \beta_x^2) + 2B(\alpha_x\alpha_y - \beta_x\beta_y) + C(\alpha_y^2 - \beta_y^2) = 0, \quad (4.80)$$

$$A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y = 0. \quad (4.81)$$

Sustav jednadžbi (4.80)–(4.81) je ekvivalentan sa

$$A\phi_x^2 + 2B\phi_x\phi_y + C\phi_y^2 = 0 \quad (4.82)$$

gdje je ϕ kompleksna funkcija $\phi = \alpha + i\beta$. Jednadžba $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$ ima dva kompleksno-konjugirana rješenja

$$\lambda_1 = \frac{-B + i\sqrt{AC - B^2}}{A}, \quad \lambda_2 = \frac{-B - i\sqrt{AC - B^2}}{A} \quad (4.83)$$

jer je $AC - B^2 > 0$. Neka je ϕ netrivialno rješenje karakteristične jednadžbe

$$\phi_x = \lambda_1\phi_y. \quad (4.84)$$

Onda je

$$A\phi_x^2 + 2B\phi_x\phi_y + C\phi_y^2 = (A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1 + C)\phi_y^2 = 0 \quad (4.85)$$

što znači da su za ovaj izbor funkcije ϕ vrijedi $\bar{A} = \bar{C}$ i $\bar{B} = 0$. Definirajmo $a = -B/A$ i $b = \sqrt{AC - B^2}/A$ tako da je $\lambda_1 = a + ib$. Jednadžba (4.84) ima rješenje $\phi = \lambda_1 x + y$ odakle slijedi da je tražena transformacija dana sa

$$\alpha = \operatorname{Re}(\phi) = ax + y, \quad \beta = \operatorname{Im}(\phi) = bx. \quad (4.86)$$

Transformacija je regularna u $\mathbb{R}^2$ jer je

$$J = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b \neq 0. \quad (4.87)$$

Za koeficijente $\bar{A}$ i $\bar{C}$ imamo

$$\bar{A} = Aa^2 + 2Ba + C = A \frac{AC - B^2}{A^2} = Ab^2, \quad \bar{C} = Ab^2, \quad (4.88)$$

stoga je transformirana jednađžba dana sa $Ab^2w_{\alpha\alpha} + Ab^2w_{\beta\beta} + L_1[w] = \bar{G}$. Sada dijeljenjem s $Ab^2 \neq 0$ dobivamo kanonski oblik (4.76). ■

Napomenimo da se eliptička jednađžba može svesti na kanonski oblik i ako za ϕ odaberemo $\phi_x = \lambda_2 \phi_y$. U tom slučaju jednađžbe se razlikuju samo u diferencijalnom operatoru L_1 , ali rješenje $u(x, y)$ ima isti oblik.

Primjer 4.3 *Oredite kanonski oblik jednađžbe*

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0. \quad (4.89)$$

Koeficijenti glavnog dijela jednađžbe su $A = 1$, $B = 1/2$ i $C = 1$. Jednađžba je eliptička u $\mathbb{R}^2$ jer je

$$\Delta = B^2 - AC = -\frac{3}{4} < 0. \quad (4.90)$$

Rješenja jednađžbe $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$ su

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad (4.91)$$

pa prema jednađžbi (4.86) transformirane varijable imaju oblik

$$\alpha = -\frac{1}{2}x + y, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}x. \quad (4.92)$$

Odavde dobivamo

$$u_x = -\frac{1}{2}w_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}w_\beta, \quad (4.93)$$

$$u_{xx} = \frac{1}{4}w_{\alpha\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2}w_{\alpha\beta} + \frac{3}{4}w_{\beta\beta}, \quad (4.94)$$

$$u_{xy} = -\frac{1}{2}w_{\alpha\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2}w_{\alpha\beta}, \quad (4.95)$$

$$u_{yy} = w_{\beta\beta}. \quad (4.96)$$

Supstitucijom izraza (4.93)–(4.95) u jednadžbu (4.89) nalazimo

$$\frac{3}{4}w_{\alpha\alpha} + \frac{3}{4}w_{\beta\beta} - \frac{1}{2}w_{\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2}w_{\beta} = 0, \quad (4.97)$$

odnosno

$$w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} - \frac{2}{3}w_{\alpha} + \frac{2}{\sqrt{3}}w_{\beta} = 0. \quad (4.98)$$

Ako umjesto λ_1 odaberemo rješenje $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, onda su transformirane varijable dane sa

$$\alpha = -\frac{1}{2}x + y, \quad \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}x. \quad (4.99)$$

Pripadni kanonski oblik je u tom slučaju

$$w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} - \frac{2}{3}w_{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{3}}w_{\beta} = 0. \quad (4.100)$$

Uočimo da je glavni dio kanonskog oblika jedinstven, ali preostali dio ovisi o izboru korijena λ_1 ili λ_2 .

Zadaci

1. Neka je u rješenje jednadžbe

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0. \quad (4.101)$$

Napišite jednadžbu u koordinatama $s = x$, $t = x - y$ i odredite opće rješenje.

2. Jednadžbu

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0 \quad (4.102)$$

napišite u koordinatama $s = x + y$, $t = 2x$, i odredite opće rješenje jednadžbe.

3. Klasificirajte sljedeće jednadžbe:

$$x^2 u_{xy} - y u_{yy} + u_x - 4u = 0, \quad (4.103)$$

$$xy u_{xx} + 4u_{xy} - (x^2 + y^2)u_{yy} - u = 0. \quad (4.104)$$

4. Za svaku od sljedećih jednađbi odredite područja u ravnini gdje su jednađbe hiperboličke, paraboličke ili eliptičke:

$$2u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} - u = 0, \quad (4.105)$$

$$u_{xx} + 2xu_{xy} + u_{yy} + \sin(xy)u = 5, \quad (4.106)$$

$$yu_{xx} - 2u_{xy} + e^x u_{yy} + x^2 u_x - u = 0. \quad (4.107)$$

5. Reducirajte na kanonski oblik sljedeće jednađbe:

$$c^2 u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad (4.108)$$

$$2u_{xx} + u_{xy} + y u_{yy} = 0, \quad y > 1, \quad (4.109)$$

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0, \quad (4.110)$$

$$x u_{xx} - 4u_{xy} = 0, \quad x > 0. \quad (4.111)$$

Poglavlje 5

Jednadžba provođenja topline

Jednadžba provođenja topline ili difuzijska jednadžba opisuje distribuciju temperature u toplinski vodljivom tijelu. To je najvažniji primjer diferencijane jednadžbe paraboličkog tipa. Prvi dio poglavlja posvećen je proučavanju kvalitativnih svojstava rješenja jednadžbe, principa maksimuma i stabilnosti rješenja obzirom na početne i rubne uvjete. U drugom dijelu poglavlja ćemo konstruirati rješenje difuzijske jednadžbe metodom separacije varijabli i Fourierovih redova.

5.1 Princip maksimuma i jedinstvenost rješenja

Promotrimo jednadžbu provođenja topline na konačnom intervalu:

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (5.1)$$

Funkcija $u(x, t)$ opisuje temperaturu u tankom, homogenom, toplinski vodljivom štapu u točki x u trenutku t . Pretpostavljamo da je štap izoliran osim eventualno na krajevima $x = 0$ i $x = L$ i da nema izvora koji griju ili hlade štap. Konstanta $k > 0$ ovisi o materijalu tijela i naziva se toplinska vodljivost. Fizikalna intuicija sugerira da je raspodjela temperature poznata ako je poznata početna temperatura $u(x, 0)$ i temperatura na krajevima štapa $u(0, t)$ i $u(L, t)$. Ovo nas vodi na razmatranje

početno–rubnog problema s *Dirichletovim* uvjetima

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.3)$$

$$u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (5.4)$$

U daljnjem tekstu pretpostavljamo da su f , a i b neprekidne funkcije. Kompatibilnost početnih i rubnih uvjeta implicira da je $f(0) = a(0)$ i $f(L) = b(0)$. Ako je umjesto temperature na krajevima štapa poznat njezin gradijent, onda funkcija u zadovoljava *Neumannove* uvjete

$$u_x(0, t) = a(t), \quad u_x(L, t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (5.5)$$

U tom slučaju funkcije f , a i b zadovoljavaju uvjete kompatibilnosti $f'(0) = a(0)$ i $f'(L) = b(0)$. Funkcija u je definirana na domeni (vidi sliku 5.1)

$$\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < L, \quad t > 0\}, \quad (5.6)$$

a rubni i početni uvjeti su zadani na rubu domene

$$\partial\Omega = \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq L\} \cup \{(0, t) \mid t \geq 0\} \cup \{(L, t) \mid t \geq 0\}. \quad (5.7)$$

Naš zadatak je odrediti funkciju $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ koja zadovoljava jednadžbu (5.2) s početnim i rubnim uvjetima (5.3)–(5.4).

Teorem 5.1 (Jedinstvenost rješenja) *Ako su u_1 i u_2 C^2 rješenja problema (5.2)–(5.4), onda je $u_1 = u_2$.*

Dokaz. Neka je $w = u_1 - u_2$. Funkcija w zadovoljava jednadžbu

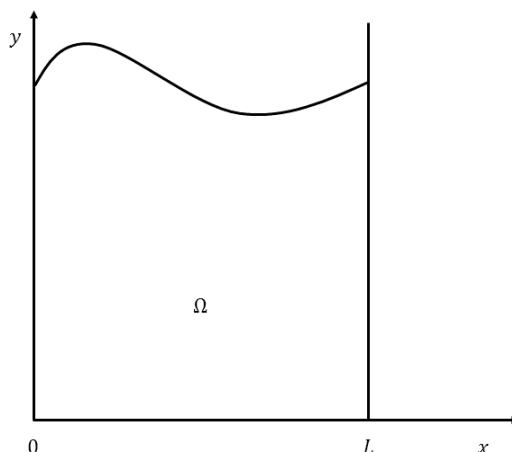
$$w_t - kw_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.8)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.9)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.10)$$

Definirajmo pomoćnu funkciju

$$J(t) = \frac{1}{2k} \int_0^L w^2(x, t) dx. \quad (5.11)$$



Slika 5.1: Domena za jednadžbu provođenja topline.

Kako je $(w^2)_t = 2w w_t$ neprekidna funkcija, prema Leibnizovom pravilu $J(t)$ možemo derivirati pod znakom integrala pa dobivamo

$$J'(t) = \frac{1}{2k} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} w^2 dx = \frac{1}{k} \int_0^L w w_t dx = \int_0^L w w_{xx} dx \quad (5.12)$$

jer je $w_t = k w_{xx}$. Parcijalnom integracijom slijedi

$$\int_0^L w w_{xx} dx = w w_x \Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L w_x^2 dx = - \int_0^L w_x^2 dx \quad (5.13)$$

gdje smo uzeli u obzir da je $w(0, t) = w(L, t) = 0$. Dakle,

$$J'(t) = - \int_0^L w_x^2 dx \leq 0, \quad (5.14)$$

što povlači da $J(t)$ nije strogo rastuća funkcija. Nadalje, početni uvjet $w(x, 0) = 0$ implicira $J(0) = 0$. Sada uvjeti $J(0) = 0$ i $J'(t) \leq 0$ zajedno povlače da je $J(t) \leq 0$ za svaki $t \geq 0$. Međutim, iz definicije (5.11) imamo $J(t) \geq 0$, što implicira da je

$$J(t) = \frac{1}{2k} \int_0^L w^2 dx = 0 \quad (5.15)$$

za svaki $t \geq 0$. Kako je $w^2 \geq 0$, ovo povlači $w = 0$, odnosno $u_1 = u_2$. ■

Primijetimo da prema istom dokazu Neumannov problem također ima jedinstveno rješenje jer slobodni član u jednadžbi (5.13) isčezava kada je $w_x(0, t) = w_x(L, t) = 0$. Sada ćemo dokazati zanimljivi rezultat prema kojem u svakom konačnom vremenskom intervalu $[0, T]$ rješenje homogene jednadžbe (5.1) ima maksimum na paraboličkom rubu pravokutnika $D = [0, L] \times [0, T]$,

$$\partial_p D = \{(0, t) \mid 0 \leq t \leq T\} \cup \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq L\} \cup \{(L, t) \mid 0 \leq t \leq T\}. \quad (5.16)$$

Parbolički rub $\partial_p D$ je unija stranica $x = 0$, $t = 0$ i $x = L$.

Teorem 5.2 (Princip maksimuma) *Neka je funkcija u C^2 rješenje jednadžbe*

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (5.17)$$

Neka je $T > 0$ i neka je D zatvoreni pravokutnik $[0, L] \times [0, T]$. Tada funkcija u ima maksimum po D na paraboličkom rubu $\partial_p D$, odnosno

$$\max_{(x,t) \in D} u(x, t) = u(x_0, t_0) \quad (5.18)$$

za neku točku $(x_0, t_0) \in \partial_p D$.

Dokaz. Neka je $M = \max_{(x,t) \in D} u(x, t)$. Kako je u neprekidna na D , postoji točka $(x_0, t_0) \in D$ takva da je $M = u(x_0, t_0)$. Pretpostavimo da funkcija nema maksimum na paraboličkom rubu, odnosno $(x_0, t_0) \in D \setminus \partial_p D$. Onda je

$$\max_{(x,t) \in \partial_p D} u(x, t) = M - \varepsilon \quad (5.19)$$

za neki $\varepsilon > 0$. Uvedimo pomoćnu funkciju

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{\varepsilon}{2L^2}(x - x_0)^2. \quad (5.20)$$

Za točke paraboličkog ruba vrijedi $|x - x_0| < L$ pa jednakost (5.19) povlači

$$v(x, t) \leq u(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} \leq M - \frac{\varepsilon}{2}, \quad (x, t) \in \partial_p D. \quad (5.21)$$

S druge strane,

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M > M - \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.22)$$

pa zaključujemo da $\max_{(x,t) \in D} v(x,t)$ nije dosegnut na paraboličkom rubu $\partial_p D$. Dakle,

$$\max_{(x,t) \in D} v(x,t) = v(x_1, t_1) \quad \text{u nekoj točki} \quad (x_1, t_1) \in D \setminus \partial_p D. \quad (5.23)$$

U točki (x_1, t_1) funkcija v zadovoljava nužni uvjet za postojanje maksimuma:

$$v_t(x_1, t_1) = 0, \quad v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0 \quad \text{ako je} \quad 0 < t_1 < T, \quad (5.24)$$

ili

$$v_t(x_1, t_1) \geq 0, \quad v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0 \quad \text{ako je} \quad t_1 = T. \quad (5.25)$$

U oba slučaja vrijedi

$$v_t(x_1, t_1) - kv_{xx}(x_1, t_1) \geq 0. \quad (5.26)$$

Međutim, iz definicije funkcije v imamo

$$v_t(x_1, t_1) - kv_{xx}(x_1, t_1) = u_t(x_1, t_1) - ku_{xx}(x_1, t_1) - \frac{k\varepsilon}{L^2} < 0 \quad (5.27)$$

jer je $u_t(x_1, t_1) - ku_{xx}(x_1, t_1) = 0$ i $k\varepsilon > 0$, što vodi na kontradikciju s relacijom (5.26). Zaključujemo da funkcija u ima maksimum po skupu D u nekoj točki paraboličkog ruba $\partial_p D$. ■

Fizikalna interpretacija ovog principa je sljedeća. Temperatura u unutrašnjosti štapa (u točki $x \in (0, L)$) je u svakom trenutku $0 \leq t \leq T$ manja od maksimalne početne temperature ili maksimalne temperature na rubovima štapa. U geometrijskim terminima, ploha $u = u(x, t)$ ima maksimalnu visinu na jednoj od stranica $x = 0$, $x = L$ ili $t = 0$ pravokutnika $[0, L] \times [0, T]$.

Korolar 5.1 (Princip minimuma) *Ako funkcija u zadovoljava pretpostavke iz teorema 5.2, onda u ima minimum u nekoj točki paraboličkog ruba $\partial_p D$.*

Dokaz. Funkcija $w = -u$ zadovoljava jednadžbu provođenja u teoremu 5.2 pa w ima maksimum u nekoj točki $(x_0, t_0) \in \partial_p D$. Ovo povlači da $u = -w$ ima minimum u (x_0, t_0) . ■

Principi maksimuma i minimuma imaju za posljedicu stabilnost rješenja jednadžbe provođenja. Preciznije, u svakom konačnom vremenskom intervalu $[0, T]$ mala promjena u početnim ili rubnim uvjetima rezultira malom promjenom u rješenju. Ova

rezultat je važan jer u primijenjenim problemima početni i rubni uvjeti nisu uvijek egzaktno poznati.

Teorem 5.3 (Stabilnost rješenja) *Neka su u_1 i u_2 C^2 rješenja početno–rubnih problema*

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.28)$$

$$u_i(x, 0) = f_i(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.29)$$

$$u_i(0, t) = a_i(t), \quad u_i(L, t) = b_i(t), \quad t \geq 0 \quad (5.30)$$

za $i = 1, 2$. Neka je $T > 0$ i neka je $D = [0, L] \times [0, T]$. Ako je

$$\max_{0 \leq x \leq L} |f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon, \quad (5.31)$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} |a_1(t) - a_2(t)| < \varepsilon, \quad \max_{0 \leq t \leq T} |b_1(t) - b_2(t)| < \varepsilon \quad (5.32)$$

za neki $\varepsilon > 0$, onda je

$$\max_{(x,t) \in D} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon. \quad (5.33)$$

Dokaz. Funkcija $v = u_1 - u_2$ zadovoljava jednadžbu $v_t - kv_{xx} = 0$ i na paraboličkom rubu od D vrijedi

$$|v(x, 0)| = |f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.34)$$

$$|v(0, t)| = |a_1(t) - a_2(t)| < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.35)$$

$$|v(L, t)| = |b_1(t) - b_2(t)| < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.36)$$

Ovo povlači da je

$$|v(x, t)| < \varepsilon, \quad (x, t) \in \partial_p D, \quad (5.37)$$

odnosno

$$-\varepsilon < v(x, t) < \varepsilon, \quad (x, t) \in \partial_p D. \quad (5.38)$$

Prema principu maksimuma i minimuma imamo

$$-\varepsilon < \min_{(x,t) \in D} v(x, t) \quad \text{i} \quad \max_{(x,t) \in D} v(x, t) < \varepsilon \quad (5.39)$$

što implicira

$$\max_{(x,t) \in D} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| = \max_{(x,t) \in D} |v(x, t)| < \varepsilon. \quad (5.40)$$

■

5.2 Separacija varijabli za homogenu jednadžbu

U ovom poglavlju ćemo odrediti rješenje jednadžbe provođenja topline metodom separacije varijabli i Fourierovih redova. Ovom metodom se rješenje dobiva u obliku reda po vlastitim funkcijama pridruženog Sturm–Liouvilleovog problema. Pokazat ćemo da uz određene pretpostavke na početne uvjete dobiveni red konvergira i predstavlja klasično rješenje jednadžbe. Promotrimo za početak rubni problem s Dirichletovim uvjetima.

Dirichletovi rubni uvjeti

Odredimo rješenje jednadžbe provođenja

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.41)$$

s početnim i rubnim uvjetima

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.42)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.43)$$

Kompatibilnost uvjeta (5.42) i (5.43) implicira da je $f(0) = f(L) = 0$. Rješenje ćemo potražiti u separiranom obliku

$$u(x, t) = P(x)Q(t). \quad (5.44)$$

Supstitucijom jednadžbe (5.44) u (5.41) dobivamo

$$\frac{Q_t}{kQ} = \frac{P_{xx}}{P}. \quad (5.45)$$

Kako su x i t nezavisne varijable, iz (5.45) slijedi da su obje strane jednadžbe konstantne. Stoga je

$$\frac{Q_t}{kQ} = \frac{P_{xx}}{P} = -\lambda \quad (5.46)$$

za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Konstantu λ nazivamo *separacijska konstanta*, a negativni predznak je odabran radi konvencije. Dakle, funkcije P i Q su rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi

$$P_{xx} + \lambda P = 0, \quad 0 < x < L, \quad (5.47)$$

$$Q_t + k\lambda Q = 0, \quad t > 0. \quad (5.48)$$

Rubni uvjeti

$$u(0, t) = P(0)Q(t) = 0, \quad u(L, t) = P(L)Q(t) = 0 \quad (5.49)$$

povlače da je $P(0) = P(L) = 0$. Rubni problem za funkciju P ,

$$P_{xx} + \lambda P = 0, \quad (5.50)$$

$$P(0) = P(L) = 0, \quad (5.51)$$

naziva se *Sturm–Liouvilleov* problem pridružen jednadžbi (5.41)–(5.43). Ako jednadžba (5.50) s rubnim uvjetom (5.51) ima netrivialno rješenje $P \neq 0$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$, onda se P naziva *vlastita funkcija*, a λ *vlastita vrijednost* Sturm–Liouvilleovog problema. Prvi korak u rješavanju jednadžbe provođenja je odrediti vlastite funkcije i vlastite vrijednosti ovog problema. Obzirom da priroda rješenja ovisi o predznaku konstante λ , posebno ćemo razmatrati slučajeve $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ i $\lambda > 0$. Uvedimo oznaku $\lambda = \pm c^2$, $c \geq 0$.

Slučaj $\lambda = -c^2 < 0$. Opće rješenje jednadžbe (5.50) je dano sa

$$P(x) = Ae^{cx} + Be^{-cx}. \quad (5.52)$$

Rubni uvjeti impliciraju da A i B zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$P(0) = A + B = 0, \quad (5.53)$$

$$P(L) = Ae^{cL} + Be^{-cL} = 0. \quad (5.54)$$

Determinanta matrice ovog sustava je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{cL} & e^{-cL} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.55)$$

pa sustav ima samo trivialno rješenje $A = B = 0$. Stoga $\lambda < 0$ nije vlastita vrijednost Sturm–Liouvilleovog problema.

Slučaj $\lambda = 0$. U ovom slučaju imamo

$$P(x) = A + Bx \quad (5.56)$$

što daje

$$P(0) = A = 0, \quad (5.57)$$

$$P(L) = A + BL = 0. \quad (5.58)$$

Očigledno je $A = B = 0$ pa slijedi da $\lambda = 0$ nije vlastita vrijednost problema (5.50)–(5.51).

Slučaj $\lambda = c^2 > 0$. Opće rješenje jednadžbe (5.50) je linearna kombinacija

$$P(x) = A \cos(cx) + B \sin(cx). \quad (5.59)$$

Iz rubnih uvjeta dobivamo

$$P(0) = A = 0, \quad (5.60)$$

$$P(L) = A \cos(cL) + B \sin(cL) = 0. \quad (5.61)$$

Ovaj sustav ima netrivialno rješenje $B \neq 0$ samo ako konstanta c zadovoljava

$$\sin(cL) = 0. \quad (5.62)$$

Jednadžba ima diskretna rješenja

$$c_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.63)$$

pa su vlastite vrijednosti Sturm–Liouvilleovog problema dane sa

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \geq 1. \quad (5.64)$$

Svakoј vrijednosti λ_n pripada vlastita funkcija

$$P_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \geq 1. \quad (5.65)$$

Zaključujemo da Sturm–Liouvilleov problem (5.50)–(5.51) ima beskonačno mnogo rješenja (5.65) s pripadnim vlastitim vrijednostima (5.64).

Za svaku vlastitu vrijednost λ_n funkcija Q zadovoljava pripadnu jednadžbu

$$Q_t + k\lambda_n Q = 0 \quad (5.66)$$

koja ima eksponencijalno rješenje

$$Q_n(t) = e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n \geq 1. \quad (5.67)$$

Ovom metodom dobivamo niz separiranih rješenja

$$u_n(x, t) = Q_n(t)P_n(x) = B_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \geq 1 \quad (5.68)$$

koji zadovoljavaju rubne uvjete $u_n(0, t) = u_n(L, t) = 0$. Prema principu superpozicije, svaka linearna kombinacija

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N B_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (5.69)$$

je također rješenje jednadžbe provođenja sa svojstvom da je $u(0, t) = u(L, t) = 0$. U početnom trenutku $t = 0$ imamo $u(x, 0) = f(x)$. Ako se zadana funkcija f može napisati kao linearna kombinacija

$$f(x) = \sum_{n=1}^N B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.70)$$

onda je funkcija (5.69) rješenje našeg problema (5.41)–(5.43).

Primjer 5.1 *Odredite rješenje problema*

$$u_t - 2u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (5.71)$$

$$u(x, 0) = 5 \sin(2x) - 10 \sin(3x), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (5.72)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.73)$$

U ovom primjeru je $L = \pi$ i $k = 2$, stoga rješenje ima oblik

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N B_n e^{-2n^2 t} \sin(nx). \quad (5.74)$$

Iz početnog uvjeta

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^N B_n \sin(nx) = 5 \sin(2x) - 10 \sin(3x) \quad (5.75)$$

zaključujemo da je $N = 3$, $B_1 = 0$, $B_2 = 5$ i $B_3 = -10$. Supstitucijom ovih vrijednosti u jednadžbu (5.74) dobivamo

$$u(x, t) = 5e^{-8t} \sin(2x) - 10e^{-18t} \sin(3x). \quad (5.76)$$

Očigledno je da se proizvoljna funkcija f ne možemo napisati kao linearnu kombinaciju (5.70). Međutim, ako se f može razviti u Fourierov red

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (5.77)$$

na intervalu $[0, L]$, onda očekujemo da je rješenje problema dano u obliku reda $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$. Sljedeći teorem daje uvjete koji garantiraju da je red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ klasično rješenje jednadžbe provođenja.

Teorem 5.4 (Egzistencija rješenja) *Pretpostavimo da je funkcija $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$*

(i) *neprekidna na $[0, L]$ i po dijelovima C^1 na $[0, L]$,*

(ii) *$f(0) = f(L) = 0$.*

Tada je funkcija

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (5.78)$$

klasično rješenje početno–rubnog problema

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.79)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.80)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.81)$$

Dokaz. Neka je $\tilde{f}$ neparno proširenje funkcije f ,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ -f(-x), & -L \leq x < 0. \end{cases} \quad (5.82)$$

Funkcija $\tilde{f}$ je neprekidna i po dijelovima C^1 na $[-L, L]$ i očigledno je $\tilde{f}(-L) = \tilde{f}(L) = 0$. Prema teoremu 2.4 Fourierov red

$$\tilde{f}(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.83)$$

konvergira uniformno ka $\tilde{f}$ na $[-L, L]$. Fourierovi koeficijenti su dani sa

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad n \geq 0, \quad (5.84)$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1, \quad (5.85)$$

i vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \infty$. Funkcije

$$u_n(x, t) = B_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad n \geq 1 \quad (5.86)$$

zadovoljavaju jednadžbu provođenja i rubne uvjete $u_n(0, t) = u_n(L, t) = 0$. Kako su $u_n(x, t)$ ograničene konvergentnim redom,

$$|u_n(x, t)| \leq |B_n| \quad \text{za sve } 0 \leq x \leq L, t \geq 0, \quad (5.87)$$

prema Weierstrassovom kriteriju red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ konvergira uniformno na zatvorenom skupu $\bar{\Omega} = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$. Funkcije $u_n(x, t)$ su neprekidne na $\bar{\Omega}$ pa je suma reda neprekidna funkcija

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}. \quad (5.88)$$

Pokažimo sada da funkcija $u(x, t)$ zadovoljava jednadžbu provođenja na skupu Ω . Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $\Omega_\varepsilon = \{(x, t) \mid 0 < x < L, t > \varepsilon\}$. Funkcija f je ograničena pa vrijedi

$$|B_n| = \frac{2}{L} \left| \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \right| \leq \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| dx \leq 2M \quad (5.89)$$

gdje je $M = \max_{x \in [-L, L]} |f(x)|$. Deriviranjem po varijabli t dobivamo

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -B_n k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \quad (5.90)$$

Stoga je u svakoj točki $(x, t) \in \Omega_\varepsilon$ derivacija ograničena sa

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| \leq |B_n| k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \leq 2Mk \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2 e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 \varepsilon}. \quad (5.91)$$

Lako se provjeri da red $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 \varepsilon}$ konvergira što prema Weierstrassovom kriteriju povlači da red $\sum_{n=1}^{\infty} \partial u_n / \partial t$ konvergira uniformno na Ω_ε . Stoga funkciju u možemo derivirati po članovima pa imamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}, \quad (x, t) \in \Omega_\varepsilon. \quad (5.92)$$

Slično se pokaže da vrijedi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Omega_\varepsilon. \quad (5.93)$$

Sada iz jednadžbi (5.92) i (5.93) slijedi da u zadovoljava

$$u_t - ku_{xx} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) - k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (5.94)$$

na skupu Ω_ε . Kako je $\varepsilon > 0$ odabran proizvoljno, zaključujemo da je u rješenje jednadžbe provođenja na otvorenom skupu $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < L, t > 0\}$. Funkcija u očigledno zadovoljava rubne uvjete $u(0, t) = u(L, t) = 0$ i početni uvjet

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.95)$$

jer Fourierov red (5.95) konvergira uniformno ka f na skupu $[0, L]$. ■

Primjer 5.2 *Odredite rješenje problema*

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, t > 0 \quad (5.96)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (5.97)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases} \quad (5.98)$$

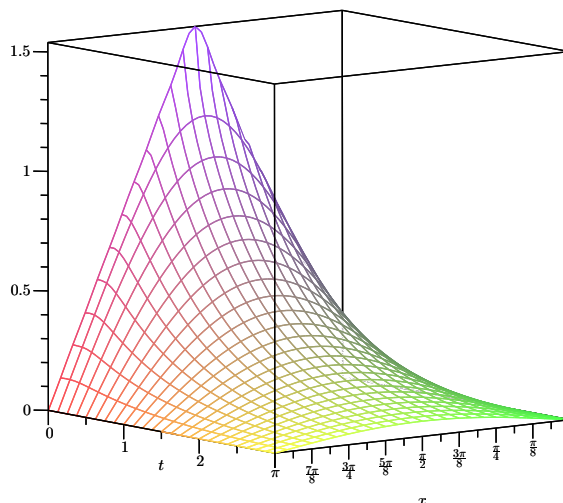
Rješenje Duljina intervala je $L = \pi$ pa je funkcija u dana sa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \sin(nx). \quad (5.99)$$

Funkcija $f(x) = u(x, 0)$ je neprekidna i po dijelovima C^1 na $[0, \pi]$. Stoga je prema Dirichletovom teoremu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) \quad \text{za svaki } 0 \leq x \leq \pi \quad (5.100)$$

Fourierovi koeficijenti su dani sa



Slika 5.2: Graf funkcije (5.104).

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi - x) \sin(nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi} \left[-\frac{(\pi - x) \cos(nx)}{n} - \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\
 &= \frac{4}{\pi n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{5.101}$$

Kako je

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ (-1)^{m+1}, & n = 2m - 1, \end{cases} \tag{5.102}$$

samo koeficijenti

$$B_{2m-1} = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2}, \quad m \geq 1, \tag{5.103}$$

su različiti od nule. Stoga je

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2} e^{-(2m-1)^2 t} \sin((2m-1)x). \tag{5.104}$$

Rješenje $u(x, t)$ prikazano je na slici 5.2. Primijetimo da za svaki $T > 0$ funkcija u ima maksimum na stranici $t = 0$ pravokutnika $[0, \pi] \times [0, T]$, u skladu s principom maksimuma. ■

Neumannovi rubni uvjeti

Na sličan način se metodom separacije može izvesti rješenje Neumannovog problema

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.105)$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.106)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -L \leq x \leq L. \quad (5.107)$$

Funkcija f zadovoljava uvjete kompatibilnosti početnih i rubnih uvjeta $f'(0) = f'(L) = 0$. Pokazuje se da je rješenje dano redom

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (5.108)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n \geq 0. \quad (5.109)$$

Periodični rubni uvjeti

Pretpostavimo da je žica duljine $2L$ savijena u obliku kružnice. U točkama $x = -L$ i $x = L$ temperatura i njezin gradijent imaju iste vrijednosti pa funkcija $u(x, t)$ zadovoljava jednadžbu

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad -L < x < L, \quad t > 0, \quad (5.110)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -L \leq x \leq L, \quad (5.111)$$

s periodičkim rubnim uvjetima

$$u(-L, t) = u(L, t), \quad u_x(-L, t) = u_x(L, t), \quad t \geq 0. \quad (5.112)$$

Separacijom varijabli se može pokazati da je opće rješenje dano sa

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \quad (5.113)$$

gdje su

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n \geq 0, \quad (5.114)$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (5.115)$$

Primjer 5.3 *Odredite rješenje problema*

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad -L < x < L, \quad t > 0, \quad (5.116)$$

$$u(x, 0) = \cos^3\left(\frac{\pi}{L}x\right), \quad -L \leq x \leq L, \quad (5.117)$$

$$u(-L, t) = u(L, t), \quad u_x(-L, t) = u_x(L, t), \quad t \geq 0. \quad (5.118)$$

Funkciju $f(x) = \cos^3(\frac{\pi}{L}x)$ možemo razviti u Fourierov red na $[-L, L]$ koristeći trigonometrijski identitet

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]. \quad (5.119)$$

Iz jednadžbe (5.119) dobivamo

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= \cos(x) \cos^2(x) = \frac{1}{2} \cos(x) [\cos(2x) + 1] \\ &= \frac{1}{2} \cos(x) \cos(2x) + \frac{1}{2} \cos(x) \\ &= \frac{1}{4} [\cos(3x) + \cos(x)] + \frac{1}{2} \cos(x) \\ &= \frac{3}{4} \cos(x) + \frac{1}{4} \cos(3x). \end{aligned} \quad (5.120)$$

Dakle,

$$\cos^3\left(\frac{\pi}{L}x\right) = \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right). \quad (5.121)$$

Jednadžba (5.121) predstavlja razvoj fukcije $\cos^3(\pi x/L)$ u Fourierov red

$$\cos^3\left(\frac{\pi}{L}x\right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \quad (5.122)$$

gdje su $A_1 = \frac{3}{4}$ i $A_3 = \frac{1}{4}$ dok svi ostali koeficijenti A_n i B_n iščezavaju. Uvrštavanjem ovih koeficijenata u izraz (5.113) dobivamo

$$u(x, t) = \frac{3}{4} e^{-k(\frac{\pi}{L})^2 t} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{4} e^{-k(\frac{3\pi}{L})^2 t} \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right). \quad (5.123)$$

Ostali rubni uvjeti

Na kraju navedimo da se metodom separacije varijabli mogu konstruirati rješenja jednadžbe provođenja za različite kombinacije rubnih uvjeta. Na primjer, na jednom kraju intervala može biti zadan Dirichletov a na drugom Neuannov rubni uvjet,

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.124)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.125)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.126)$$

U tom slučaju rješenje je dano sa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k(\frac{\pi}{2L})^2 (2n-1)^2 t} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x\right) \quad (5.127)$$

gdje je

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x\right) dx. \quad (5.128)$$

Koeficijenti C_n se mogu odrediti tako da se funkcija f proširi sa intervala $[0, L]$ na $[0, 2L]$. Proširena funkcija

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ f(2L - x), & L \leq x \leq 2L. \end{cases} \quad (5.129)$$

se razvije u Fourierov red po funkcijama $\sin(n\pi x/(2L))$ na intervalu $[0, 2L]$ (koristeći neparno proširenje na interval $[-2L, 2L]$) iz čega se potom dobiju koeficijenti C_n .

5.3 Separacija varijabli za nehomogenu jednadžbu

Modifikacijom prethodne metode moguće je odrediti rješenje nehomogene jednadžbe provođenja

$$u_t - ku_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.130)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.131)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.132)$$

Ako je $F = 0$, onda znamo da je rješenje dano sa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (5.133)$$

što možemo interpretirati kao Fourireov red čiji koeficijenti $B_n(t) = B_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$ ovise o parametru t . Ovo sugerira da rješenje nehomogene jednadžbe potražimo metodom varijacije parametara u obliku

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (5.134)$$

gdje su $T_n(t)$ nepoznate funkcije. Funkcije $T_n(t)$ možemo odrediti ako se $F(x, t)$ može razviti u Fourierov red istog oblika kao (5.134). Pretpostavimo da je $F(x, t)$ neprekidna i po dijelovima C^1 u varijabli $x \in [0, L]$ za svaki $t \geq 0$. Obzirom da funkcija $F(x, t)$ modelira unutarnji izvor koji grije ili hladi štap, razumno je pretpostaviti da je $F(0, t) = F(L, t) = 0$. Tada Fourierov red

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (5.135)$$

uniformno konvergira ka $F(x, t)$ na intervalu $[0, L]$ za svaki $t \geq 0$. Supstitucijom izraza (5.134) i (5.135) u jednadžbu provođenja dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(t) + k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 T_n(t) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (5.136)$$

Odavde slijedi da funkcije $T_n(t)$ zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe

$$T_n'(t) + k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 T_n(t) = F_n(t), \quad n \geq 1. \quad (5.137)$$

Opće rješenje jednadžbe (5.137) je dano sa

$$T_n(t) = B_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} + T_n^p(t) \quad (5.138)$$

gdje je B_n konstanta integracije, a $T_n^p(t)$ je partikularno rješenje koje ovisi o funkciji $F_n(t)$. Uvrštenjem rješenja (5.138) u jednadžbu (5.78) dobivamo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n^p(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (5.139)$$

Prvi član u jednadžbi (5.139) prepoznamo kao rješenje homogenog problema,

$$u_h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (5.140)$$

dok je drugi član partikularno rješenje

$$u_p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^p(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (5.141)$$

koje ovisi o funkciji $F(x, t)$. Koeficijente B_n određujemo iz početnog uvjeta $u(x, 0) = f(x)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B_n + T_n^p(0)) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.142)$$

odakle dobivamo

$$B_n + T_n^p(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (5.143)$$

Time je rješenje nehomogene jednadžbe provođenja potpuno određeno.

Primjer 5.4 *Riješite nehomogenu jednadžbu*

$$u_t - u_{xx} = e^{-t} \sin(3x), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (5.144)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.145)$$

$$u(x, 0) = x \sin(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (5.146)$$

Nehomogeni član $F(x, t) = e^{-t} \sin(3x)$ zadovoljava uvjet $F(0, t) = F(\pi, t) = 0$ pa rješenje tražimo u obliku

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(nx). \quad (5.147)$$

Supstitucijom izraza (5.147) u jednadžbu (5.144) dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n'(t) + n^2 T_n(t)) \sin(nx) = e^{-t} \sin(3x). \quad (5.148)$$

Ovo povlači da funkcije $T_n(t)$ zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe

$$T_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0, \quad n \neq 3, \quad (5.149)$$

$$T_3'(t) + 9T_3(t) = e^{-t}. \quad (5.150)$$

Rješenje prve jednadžbe je dano sa

$$T_n(t) = B_n e^{-n^2 t}, \quad n \neq 3. \quad (5.151)$$

Drugu jednadžbu možemo riješiti metodom varijacije konstanti, $T_3(t) = C_3(t)e^{-9t}$. Tada iz (5.150) slijedi da je $C_3'(t) = e^{8t}$ što povlači $C_3(t) = \frac{1}{8}e^{8t} + B_3$. Dakle,

$$T_3(t) = B_3 e^{-9t} + \frac{1}{8}e^{-t}. \quad (5.152)$$

Stoga $u(x, t)$ možemo zapisati kao

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \sin(nx) + \frac{1}{8}e^{-t} \sin(3x). \quad (5.153)$$

Iz početnog uvjeta (5.146) dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) + \frac{1}{8} \sin(3x) = x \sin(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (5.154)$$

Definirajmo koeficijente $\tilde{B}_n = B_n$ za $n \neq 3$ i $\tilde{B}_3 = B_3 + \frac{1}{8}$ tako da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n \sin(nx) = x \sin(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (5.155)$$

$\tilde{B}_n$ su Fourierovi koeficijenti

$$\tilde{B}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1. \quad (5.156)$$

Za $n = 1$ imamo

$$\tilde{B}_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin^2(x) dx = \frac{\pi}{2}. \quad (5.157)$$

Za $n \geq 2$ dobivamo

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \frac{1}{2} [\cos((n-1)x) - \cos((n+1)x)] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{(n-1)^2} \left[\cos((n-1)x) + (n-1)x \sin(x) \sin((n-1)x) \right]_0^{\pi} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(n+1)^2} \left[\cos((n+1)x) + (n+1)x \sin(x) \sin((n+1)x) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{(n-1)^2} - \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(n+1)^2} = -\frac{4n((-1)^n + 1)}{\pi(n^2 - 1)^2}. \end{aligned} \quad (5.158)$$

Primijetimo da je $\tilde{B}_n = 0$ za neparni $n > 1$, dok je za parne indekse

$$\tilde{B}_{2n} = -\frac{16}{\pi} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.159)$$

Iz jednadžbi (5.157) i (5.159) dobivamo

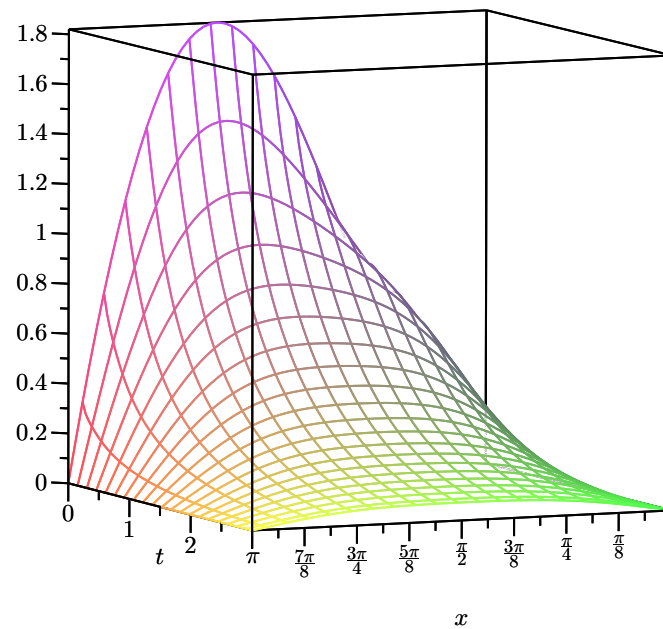
$$B_1 = \frac{\pi}{2}, \quad B_3 = -\frac{1}{8}, \quad B_n = 0 \quad \text{za neparni } n > 3, \quad (5.160)$$

$$B_{2n} = -\frac{16}{\pi} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.161)$$

Supstitucijom koeficijenata B_n u jednadžbu (5.153) nalazimo rješenje problema

$$u(x, t) = \frac{\pi}{2} e^{-t} \sin(x) + \frac{1}{8} (e^{-t} - e^{-9t}) \sin(3x) - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} e^{-4n^2 t} \sin(2nx). \quad (5.162)$$

Graf funkcije u je prikazan na slici 5.3. ■



Slika 5.3: Graf funkcije (5.162).

Poglavlje 6

Valna jednađba

6.1 Valno gibanje i d'Alembertovo rješenje

Valna jednađba ima istaknuto mjesto u primjenama jer opisuje titranje kontinuiranih mehaničkih sredina, širenje elektromagnetskih i zvučnih valova, a nalazi primjene i u kvantnom opisu elementarnih čestica. U ovom poglavlju razmatrat ćemo valnu jednađbu u jednoj prostornoj dimenziji

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \quad (6.1)$$

Jednađba (6.1) opisuje titranje elastične žice u idealiziranom slučaju kada možemo zanemariti disipativne efekte kao što su unutarnje trenje žice ili trenje zraka. Žica je položena duž osi x , a otklon žice $u(x, t)$ od ravnotežnog položaja je okomit na os x . Ovakvo titranje se naziva transferzalno za razliku od logitudinalnog titranja koje se odvija duž osi x . Konstanta $c > 0$ predstavlja brzinu širenja vala.

Proučavanje valne jednađbe počinjemo nekim općim zapažanjima o valnim gibanjima. Uvedimo nove variable

$$\alpha = x + ct, \quad \beta = x - ct \quad (6.2)$$

i funkciju $w(\alpha, \beta) = u(x(\alpha, \beta), t(\alpha, \beta))$. Tada je

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 w_{\alpha\beta} \quad (6.3)$$

pa u novim varijablama jednađba ima kanonski oblik

$$w_{\alpha\beta} = 0. \quad (6.4)$$

Integracijom ove jednađbe dobivamo

$$w(\alpha, \beta) = A(\alpha) + B(\beta), \quad (6.5)$$

stoga je opće rješenje dano sa

$$u(x, t) = A(x + ct) + B(x - ct) \quad (6.6)$$

gdje su A i B proizvoljne funkcije klase C^2 . Funkcija $A(x + ct)$ predstavlja val koji se kreće brzinom c u negativnom smjeru, dok $B(x - ct)$ predstavlja val koji se kreće istom brzinom u pozitivnom smjeru. Dakle, opće rješenje valne jednađbe je superpozicija dvaju valova koji se gibaju u suprotnim smjerovima.

Pretpostavimo da valna jednađba opisuje titranje vrlo dugačke žice. Kako se valno gibanje širi konačnom brzinom, možemo zanemariti rubne uvjete na krajevima žice barem u nekom vremenskom intervalu. U tom slučaju titranje žice možemo modelirati jednađbom

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (6.7)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6.8)$$

gdje funkcije $f(x)$ i $g(x)$ predstavljaju početni otklon i početnu brzinu u točki x , redom. Supstitucijom općeg rješenja u početne uvjete (6.8) dobivamo

$$u(x, 0) = A(x) + B(x) = f(x), \quad (6.9)$$

$$u_t(x, 0) = cA'(x) - cB'(x) = g(x). \quad (6.10)$$

Integracijom jednađbe (6.10) slijedi

$$A(x) - B(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds + D \quad (6.11)$$

gdje je D konstanta integracije. Dakle, funkcije A i B zadovoljavaju sistem jednađbi

$$A(x) + B(x) = f(x), \quad (6.12)$$

$$A(x) - B(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds + D \quad (6.13)$$

koji ima jedinstveno rješenje

$$A(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + \frac{D}{2}, \quad (6.14)$$

$$B(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds - \frac{D}{2}. \quad (6.15)$$

Dakle, rješenje valne jednadžbe je dano sa

$$u(x, t) = A(x + ct) + B(x - ct) \quad (6.16)$$

$$= \frac{1}{2} \left[f(x + ct) + f(x - ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds. \quad (6.17)$$

Ovo rješenje nazivamo *d'Alembertovo* rješenje s početnom amplitudom $f \in C^2(\mathbb{R})$ i brzinom $g \in C(\mathbb{R})$. Intuitivno je jasno da je gibanje žice jedinstveno određeno ako su poznati početni položaj i brzina. Također je razumno očekivati da male promjene u početnim uvjetima uzrokuju male promjene u rješenju $u(x, t)$ kada titranje promatramo u konačnom vremenskom intervalu. Dokažimo ove tvrdnje u sljedećem teoremu.

Teorem 6.1 *Neka su $f \in C^2(\mathbb{R})$ i $g \in C^1(\mathbb{R})$. Tada valna jednadžba (6.7)-(6.8) ima jedinstveno rješenje*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[f(x + ct) + f(x - ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \quad (6.18)$$

koje je u svakom konačnom intervalu $0 \leq t \leq T$ stabilno obzirom na početne uvjete $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Koristeći formulu

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(u)du = f(\varphi_2(x)) \varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x)) \varphi_1'(x) \quad (6.19)$$

lako se provjeri da funkcija (6.18) zadovoljava jednadžbu (6.7) i početne uvjete (6.8). Iz konstrukcije rješenja slijedi da je svaka funkcija koja zadovoljava jednadžbe (6.7)-(6.8) nužno oblika (6.18) pa je rješenje jedinstveno.

Pokažimo da je rješenje (6.18) stabilno. Neka su u_1 i u_2 rješenja pridružena početnim uvjetima f_1, g_1 i f_2, g_2 , redom. Promotrimo u_1 i u_2 u vremenskom intervalu $[0, T]$. Odaberimo $\varepsilon > 0$ i pretpostavimo da početni uvjeti zadovoljavaju

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)| < \frac{\varepsilon}{1+T}, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_1(x) - g_2(x)| < \frac{\varepsilon}{1+T}. \quad (6.20)$$

Razlika rješenja jednaka je

$$\begin{aligned} u_1(x, t) - u_2(x, t) &= \frac{1}{2} [f_1(x+ct) - f_2(x+ct) + f_1(x-ct) - f_2(x-ct)] \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} (g_1(s) - g_2(s)) ds, \end{aligned} \quad (6.21)$$

pa iz nejednakosti (6.20) slijedi

$$\begin{aligned} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &\leq \frac{1}{2} (|f_1(x+ct) - f_2(x+ct)| + |f_1(x-ct) - f_2(x-ct)|) \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g_1(s) - g_2(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{1+T} + \frac{\varepsilon}{1+T} \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{\varepsilon}{1+T} ds \\ &= \frac{\varepsilon}{1+T} (1+t) \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (6.22)$$

za svaki $0 \leq t \leq T$. Ovo implicira da je

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ 0 \leq t \leq T}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon. \quad (6.23)$$

Pokazali samo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = 2\varepsilon/(1+T)$ takav da

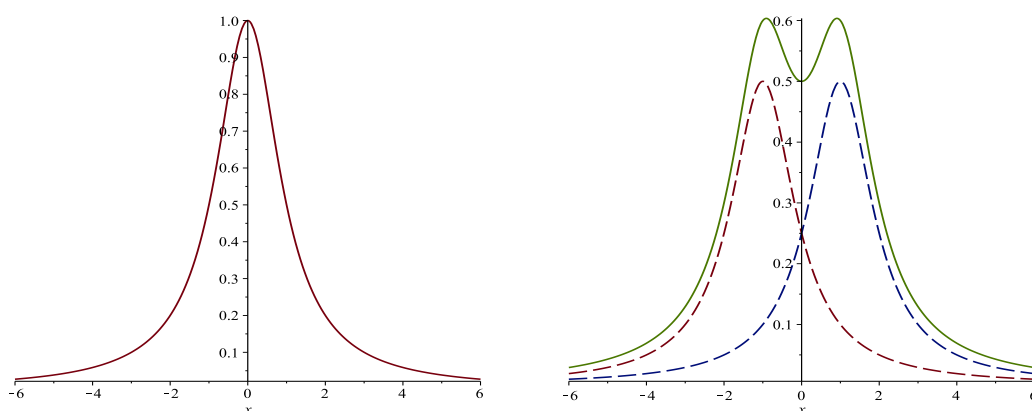
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (|f_1(x) - f_2(x)| + |g_1(x) - g_2(x)|) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ 0 \leq t \leq T}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon. \quad (6.24)$$

Dakle, u svakom konačnom intervalu $0 \leq t \leq T$ mala promjena u početnim uvjetima uzrokuje malu promjenu u rješenju pa je rješenje valne jednadžbe stabilno. ■

Primjer 6.1 *Riješite valnu jednadžbu*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (6.25)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (6.26)$$

(a) Početni profil $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.(b) Funkcija $u(x, t)$ kao superpozicija dva putujuća vala.

Slika 6.1:

U ovom problemu je $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ i $g(x) = 0$. D'Alembertovo rješenje je dano sa

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + (x + ct)^2} + \frac{1}{1 + (x - ct)^2} \right]. \quad (6.27)$$

Slika 6.1 prikazuje početni profil vala i rješenje $u(x, t)$. ■

Primjer 6.2 Odredite rješenje problema

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (6.28)$$

$$u(x, 0) = \sin(x), \quad u_t(x, 0) = \cos(x). \quad (6.29)$$

Prema d'Alembertovoj formuli imamo

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\sin(x + ct) + \sin(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \cos(s) ds \\ &= \sin(x) \cos(ct) + \frac{1}{2c} [\sin(x + ct) - \sin(x - ct)] \\ &= \sin(x) \cos(ct) + \frac{1}{c} \cos(x) \sin(ct). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Koristeći identitet $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$, rješenje možemo zapisati kao superpoziciju valova koji putuju u suprotnim smjerovima

$$u(x, t) = \frac{c+1}{2c} \sin(x + ct) + \frac{c-1}{2c} \sin(x - ct). \quad (6.31)$$

■

6.2 D'Alembertovo rješenje za nehomogenu valnu jednadžbu

U ovom poglavlju ćemo d'Alembertovo rješenje proširiti na nehomogenu valnu jednadžbu

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (6.32)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.33)$$

Funkcija $F(x, t)$ modelira vanjsku silu koja djeluje na žicu u točki x u trenutku t . Uvedimo varijablu $y = ct$ i definirajmo funkciju $w(x, y) = u(x, t)$. Ovom transformacijom dobivamo ekvivalentni problem

$$w_{xx} - w_{yy} = F^*(x, y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \quad (6.34)$$

$$w(x, 0) = f(x), \quad w_y(x, 0) = g^*(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (6.35)$$

gdje su

$$F^*(x, y) = -\frac{1}{c^2} F(x, t), \quad g^*(x) = \frac{1}{c} g(x). \quad (6.36)$$

Neka je (x_0, y_0) proizvoljna točka u poluravnini $x \in \mathbb{R}, y > 0$. Promotrimo trokut D kojeg tvore vrhovi $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_0 - y_0, 0)$ i $P_2 = (x_0 + y_0, 0)$. Označimo stranice trokuta s B_0 , B_1 i B_2 kao na slici 6.2. Ideja za rješenje problema (6.34)–(6.35) je sljedeća. Jednadžbu (6.34) ćemo integrirati po trokutu D i primjenom Greenovog teorema integral zamijeniti krivuljnim integralom po stranicama trokuta. Računanjem krivuljnih integrala dobit ćemo vrijednost funkcije w u točki (x_0, y_0) . Time je rješenje određeno jer je točka (x_0, y_0) odabrana proizvoljno. Integracijom jednadžbe (6.34) po trokutu D dobivamo

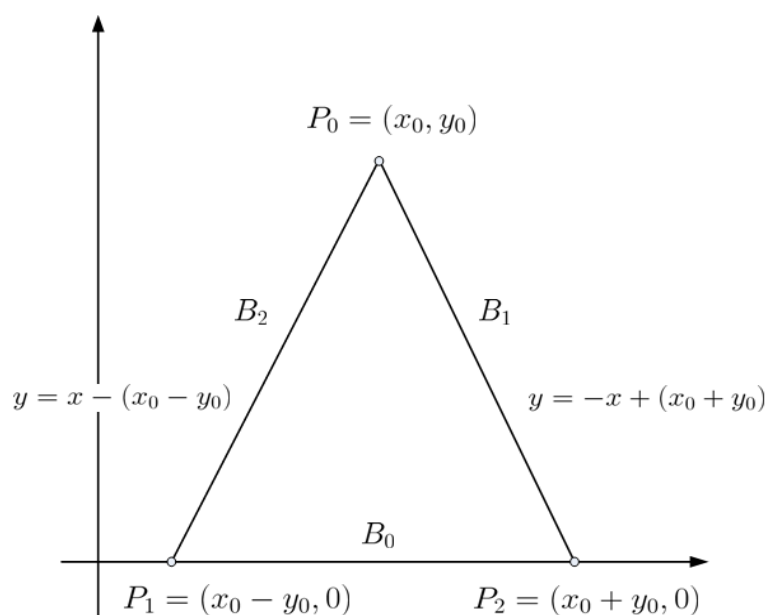
$$\iint_D (w_{xx} - w_{yy}) dx dy = \iint_D F^*(x, y) dx dy. \quad (6.37)$$

Prema Greenovom teoremu integral na lijevoj strani jednak je

$$\iint_D (w_{xx} - w_{yy}) dx dy = \int_{\partial D} (w_y dx + w_x dy) \quad (6.38)$$

gdje je ∂D pozitivno orijentirani rub trokuta D sastavljen od segmenata B_0 , B_1 i B_2 . Integral po segmentu B_0 iznosi

$$\int_{B_0} (w_y dx + w_x dy) = \int_{x_0 - y_0}^{x_0 + y_0} w_y(x, 0) dx = \int_{x_0 - y_0}^{x_0 + y_0} g^*(x) dx. \quad (6.39)$$



Slika 6.2: Područje integracije za nehomogenu valnu jednadžbu.

Integral po segmentu B_1 se može izračunati uvodeći parametrizaciju

$$x(t) = x_0 + (1 - t)y_0, \quad y(t) = ty_0, \quad t \in [0, 1] \quad (6.40)$$

gdje smo vodili računa o orijentaciji segmenta. Sada je

$$\int_{B_1} (w_y dx + w_x dy) = \int_0^1 [w_y(x(t), y(t)) x'(t) + w_x(x(t), y(t)) y'(t)] dt. \quad (6.41)$$

Primijetimo da je $x'(t) = -y'(t) = -y_0$, stoga zamjenom $x'(t)$ sa $y'(t)$ u integralu (6.41) dobivamo

$$\begin{aligned} \int_{B_1} (w_y dx + w_x dy) &= - \int_0^1 [w_x(x(t), y(t)) x'(t) + w_y(x(t), y(t)) y'(t)] dt \\ &= - \int_0^1 \frac{d}{dt} w(x(t), y(t)) dt = -w(x(t), y(t)) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= w(x_0 + y_0, 0) - w(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Slično se pokazuje da je integral po segmentu B_2 jednak

$$\int_{B_2} (w_y dx + w_x dy) = w(x_0 - y_0, 0) - w(x_0, y_0). \quad (6.43)$$

Kako je $w(x, 0) = f(x)$, zbrajanjem integrala po segmentima B_0 , B_1 i B_2 dobivamo

$$\int_{\partial D} (w_y dx + w_x dy) = f(x_0 + y_0) + f(x_0 - y_0) - 2w(x_0, y_0) + \int_{x_0 - y_0}^{x_0 + y_0} g^*(x) dx. \quad (6.44)$$

Iz jednadžbi (6.37), (6.38) i (6.44) slijedi da je

$$\begin{aligned} \iint_D F^*(x, y) dx dy &= \int_{\partial D} (w_y dx + w_x dy) \\ &= f(x_0 + y_0) + f(x_0 - y_0) - 2w(x_0, y_0) + \int_{x_0 - y_0}^{x_0 + y_0} g^*(x) dx. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Odavde nalazimo

$$w(x_0, y_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 + y_0) + f(x_0 - y_0)] + \frac{1}{2} \int_{x_0 - y_0}^{x_0 + y_0} g^*(x) dx - \frac{1}{2} \iint_D F^*(x, y) dx dy.$$

Funkcija w u točki (x_0, y_0) je potpuno određena funkcijama f , g i F . Kako je točka $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ odabrana proizvoljno, možemo pisati

$$w(x, y) = \frac{1}{2} [f(x + y) + f(x - y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} g^*(x') dx' - \frac{1}{2} \iint_D F^*(x', y') dx' dy' \quad (6.46)$$

gdje podrazumijevamo da se vrh trokuta D nalazi u točki (x, y) . Početno rješenje nalazimo iz jednadžbe $u(x, t) = w(x, ct)$. Primijetimo da su prva dva člana u gornjoj jednadžbi rješenja homogene valne jednadžbe dok je treći član partikularno rješenje koje ovisi o funkciji $F(x, t)$.

Primjer 6.3 *Odredite rješenje problema*

$$w_{xx} - w_{yy} = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \quad (6.47)$$

$$w(x, 0) = \sin(x), \quad w_y(x, 0) = x. \quad (6.48)$$

U ovom problemu je $F^(x, y) = 1$, $f(x) = \sin(x)$ i $g^*(x) = x$. Iz d'Alembertove formule slijedi*

$$w(x, y) = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} x' dx' - \frac{1}{2} \iint_D dx' dy' \quad (6.49)$$

$$= \sin(x) \cos(y) + \frac{1}{4} (x')^2 \Big|_{x=y}^{x+y} - \frac{1}{2} (2y)y \quad (6.50)$$

$$= \sin(x) \cos(y) + xy - \frac{1}{2} y^2. \quad (6.51)$$

Primjer 6.4 *Riješite jednadžbu*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = xe^t, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (6.52)$$

$$u(x, 0) = \sin(x), \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (6.53)$$

Definirajmo funkcije $F(x, t) = xe^t$, $f(x) = \sin(x)$ i $g(x) = 0$. Tada su

$$F^*(x, y) = -\frac{1}{c^2} x e^{y/c} \quad i \quad g^*(x) = 0 \quad (6.54)$$

pa je prema d'Alembertovoj formuli

$$w(x, y) = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)] + \frac{1}{2c^2} \iint_D x' e^{y'/c} dx' dy'. \quad (6.55)$$

Označimo vrh trokuta D s (x, y) (vidi sliku 6.2). Tada je

$$\begin{aligned} \iint_D x' e^{y'/c} dx' dy' &= \int_0^y \int_{y'+(x-y)}^{-y'+(x+y)} x' e^{y'/c} dx' dy' = \int_0^y e^{y'/c} \left(\frac{1}{2} (x')^2 \Big|_{x'=y'+(x-y)}^{x'=-y'+(x+y)} \right) dy' \\ &= \frac{1}{2} \int_0^y e^{y'/c} [(-y' + x + y)^2 - (y' + x - y)^2] dy' \\ &= 2x \int_0^y e^{y'/c} (-y' + y) dy' = 2c^2 x \left(e^{y/c} - \frac{y}{c} - 1 \right). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Supstitucijom jednadžbe (6.56) u (6.55) dobivamo

$$w(x, y) = \sin(x) \cos(y) + x \left(e^{y/c} - \frac{y}{c} - 1 \right). \quad (6.57)$$

Dakle, rješenje $u(x, t)$ je dano sa

$$u(x, t) = w(x, ct) = \sin(x) \cos(ct) + x (e^t - t - 1). \quad (6.58)$$

6.3 Početno–rubni problem za valnu jednadžbu

Razmotrimo sada titranje žice duljine L na koju djeluje vanjska sila $F(x, t)$. Ovaj problem je opisan valnom jednadžbom

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (6.59)$$

i početnim uvjetima

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (6.60)$$

Ako su krajevi žice učvršćeni, onda u zadovoljava Dirichletove uvjete

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (6.61)$$

Ako krajevi žice slobodno titraju okomito na os x , onda se žica postavlja tako da je tangenta na nju horizontalna u točkama $x = 0$ i $x = L$. U tom slučaju funkcija u zadovoljava Neumannove uvjete

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (6.62)$$

Očigledno, ako je žica učvršćena u jednom kraju, a u drugom kraju slobodno titra, onda u zadovoljava kombinirane Dirichletove i Neumannove uvjete. Rješenje valne jednadžbe promatramo na domeni $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < L, t > 0\}$.

Teorem 6.2 (Jedinstvenost rješenja) *Neka su u_1 i u_2 C^2 rješenja problema (6.59)–(6.61). Tada je $u_1 = u_2$.*

Dokaz. Neka je $w = u_1 - u_2$. Tada je w rješenje homogene jednadžbe

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (6.63)$$

$$w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6.64)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (6.65)$$

Pokazat ćemo da problem (6.63)–(6.65) ima samo trivijalno rješenje $w = 0$. Definirajmo pomoćnu funkciju

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (c^2 w_x^2 + w_t^2) dx. \quad (6.66)$$

Funkcija $E(t)$ predstavlja ukupnu energiju titrajuće žice u trenutku t . Funkcije $(w_x)_t^2 = 2w_x w_{xt}$ i $(w_t)_t^2 = 2w_t w_{tt}$ su neprekidne, pa prema Leibnizovom pravilu za deriviranje pod integralom dobivamo

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L (c^2 w_x w_{xt} + w_t w_{tt}) dt. \quad (6.67)$$

Parcijalnom integracijom prvog člana nalazimo

$$\begin{aligned} \int_0^L w_x w_{xt} dx &= w_x w_t \Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L w_t w_{xx} dx \\ &= w_x(L, t) w_t(L, t) - w_x(0, t) w_t(0, t) - \int_0^L w_t w_{xx} dx. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Funkcija w zadovoljava rubni uvjet $w(0, t) = 0$ za svaki $t \geq 0$ što implicira

$$w_t(0, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{w(0, t + \Delta t) - w(0, t)}{\Delta t} = 0. \quad (6.69)$$

Slično, iz uvjeta $w(L, t) = 0$ za svaki $t \geq 0$ slijedi

$$w_t(L, t) = 0. \quad (6.70)$$

Stoga je

$$\int_0^L w_x w_{xt} dx = - \int_0^L w_t w_{xx} dx \quad (6.71)$$

pa je derivacija energije dana sa

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L w_t (w_{tt} - c^2 w_{xx}) dx = 0 \quad (6.72)$$

jer je $w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$. Zaključujemo da je funkcija $E(t)$ konstantna, odnosno

$$E(t) = E(0) \quad \text{za svaki } t \geq 0. \quad (6.73)$$

U početnom trenutku je

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L [c^2 w_x^2(x, 0) - w_t^2(x, 0)] dx = \frac{1}{2} \int_0^L c^2 w_x^2(x, 0) dx \quad (6.74)$$

zbog početnog uvjeta $w_t(x, 0) = 0$. Kako je $w(x, 0) = 0$ za svaki $x \in [0, L]$, vrijedi

$$w_x(x, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w(x + \Delta x, 0) - w(x, 0)}{\Delta x} = 0. \quad (6.75)$$

Zaključujemo da je $E(0) = 0$ što povlači

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (c^2 w_x^2 + w_t^2) dx = 0. \quad (6.76)$$

Oдавde slijedi da je

$$w_x(x, t) = w_t(x, t) = 0 \quad (6.77)$$

pa je funkcija w konstantna jer ne ovisi o varijablama x i t . Sada iz početnog uvjeta $w(x, 0) = 0$ zaključujemo $w(x, t) = 0$ za svaki $x \in [0, L]$ i $t \geq 0$. Dakle, $u_1 = u_2$ čima je pokazano da je rješenje problema jedinstveno. ■

Primijetimo da iz istog dokaza slijedi jedinstvenost rješenja valne jednadžbe s Neumannovim rubnim uvjetima $u_x(0, t) = 0$ i $u_x(L, t) = 0$.

6.3.1 Separacija varijabli za homogenu jednadžbu

Dirichletovi rubni uvjeti

Razmotrimo sada rješenje homogene valne jednadžbe s Dirichletovim rubnim uvjetima

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (6.78)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6.79)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (6.80)$$

Kompatibilnost početnih i rubnih uvjeta zahtijeva da f i g zadovoljavaju $f(0) = f(L) = 0$ i $g(0) = g(L) = 0$ jer su početna amplituda i brzina u točkama $x = 0$ i $x = L$ jednake nuli. Rješenje problema tražimo u separiranom obliku

$$u(x, t) = P(x)Q(t). \quad (6.81)$$

Supstitucijom izraza (6.81) u jednadžbu (6.78) dobivamo $PQ_{tt} = c^2 P_{xx}Q$, odnosno

$$\frac{P_{xx}}{P} = \frac{1}{c^2} \frac{Q_{tt}}{Q}. \quad (6.82)$$

Varijable x i t su nezavisne pa obje strane u jednadžbi (6.82) moraju biti konstantne. Dakle,

$$\frac{P_{xx}}{P} = \frac{1}{c^2} \frac{Q_{tt}}{Q} = -\lambda \quad (6.83)$$

za neki $\lambda \in \mathbb{R}$ koji nazivamo separacijska konstanta. Odavde slijedi da su funkcije P i Q rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi

$$P_{xx} + \lambda P = 0, \quad 0 < x < L, \quad (6.84)$$

$$Q_{tt} + \lambda c^2 Q = 0, \quad t > 0. \quad (6.85)$$

Rubni uvjeti $u(0, t) = P(0)Q(t) = 0$ i $u(L, t) = P(L)Q(t) = 0$ povlače $P(0) = 0$ i $P(L) = 0$. Stoga funkcija P zadovoljava pridruženi Sturm–Liouvilleov problem

$$P_{xx} + \lambda P = 0, \quad (6.86)$$

$$P(0) = P(L) = 0. \quad (6.87)$$

U poglavlju 5.2 je pokazano da jednađžba (6.86)-(6.87) ima netrivialna rješenja samo za vlastite vrijednosti

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \geq 1, \quad (6.88)$$

kojima pripadaju vlastite funkcije

$$P_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \geq 1. \quad (6.89)$$

Za svaku vlastitu vrijednost λ_n možemo odrediti funkciju $Q(t)$ iz jednađžbe (6.85). Opće rješenje je dano sa

$$Q_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right), \quad n \geq 1. \quad (6.90)$$

Time dobivamo niz funkcija

$$u_n(x, t) = P_n(x)Q_n(t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (6.91)$$

gdje su a_n i b_n neodređene konstante. Funkcije $u_n(x, t)$ zadovoljavaju valnu jednađžbu (6.78) i rubne uvjete (6.80), a svaka linearna kombinacija

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (6.92)$$

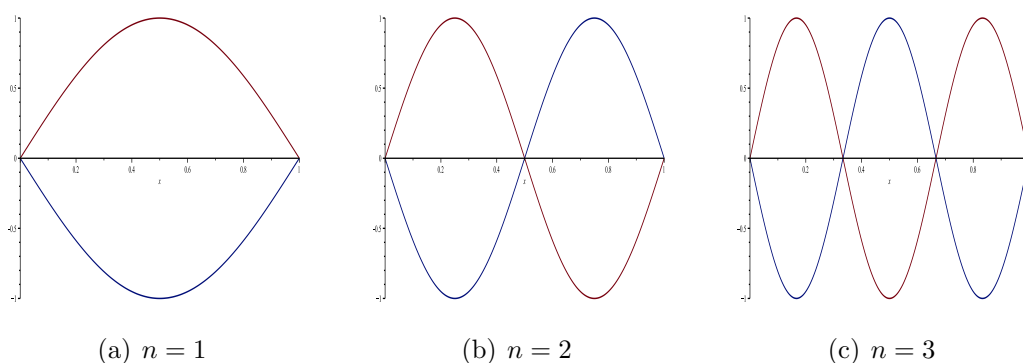
je također rješenje istog problema.

Funkciju $u_n(x, t)$ nazivamo *harmonik* n -tog reda za žicu s učvršćenim krajevima u $x = 0$ i $x = L$. Ako a_n i b_n nisu oba nula, onda se harmonik $u_n(x, t)$ može zapisati u sljedećem obliku. Definirajmo $R_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. S obzirom da je $(a_n/R_n)^2 + (b_n/R_n)^2 = 1$, postoji $\theta_n \in \mathbb{R}$ takav da je

$$a_n = R_n \sin(\theta_n) \quad \text{i} \quad b_n = R_n \cos(\theta_n). \quad (6.93)$$

Tada je

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= R_n \left[\sin(\theta_n) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \cos(\theta_n) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= R_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t + \theta_n\right). \end{aligned} \quad (6.94)$$



Slika 6.3: Prva tri harmonika za titranje žice s učvršćenim krajevima.

U točki x harmonik $u_n(x, t)$ ima amplitudu $R_n |\sin(\frac{n\pi}{L}x)|$ i fazu θ_n . Period harmonika, odnosno vrijeme potrebno za jednu oscilaciju, dobivamo iz jednadžbe $n\pi cT/L = 2\pi$ što daje

$$T_n = \frac{2L}{nc}. \quad (6.95)$$

Frekvencija titranja f_n je broj oscilacija u jedinici vremena,

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{nc}{2L}. \quad (6.96)$$

Slika 6.3 prikazuje prva tri harmonika za titrajuću žicu s učvršćenim krajevima. Titranje žice je općenito superpozicija harmonika svakog reda, odnosno svih mogućih frekvencija, pa očekujemo da se opće rješenje valne jednadžbe može zapisati u obliku

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (6.97)$$

Konstante a_n i b_n su određene početnim uvjetima $u(x, 0) = f(x)$ i $u_t(x, 0) = g(x)$. Ako pretpostavimo da se red (6.97) može derivirati po članovima, onda dobivamo

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6.98)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi c}{L}\right) b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (6.99)$$

Neparnim proširenjem funkcija f i g na $[-L, L]$ možemo odrediti Fourierove koeficijente

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad (6.100)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (6.101)$$

Iz dobivenog rješenja se vidi da je titranje žice potpuno određeno početnim i rubnim uvjetima. Ovo rješenje je formalno jer je potrebno odrediti uvjete pod kojima red (6.97) predstavlja C^2 funkciju koja zadovoljava valnu jednadžbu.

Teorem 6.3 (Egzistencija rješenja) *Neka su $f \in C^4([0, L])$ i $g \in C^3([0, L])$. Pretpostavimo da funkcije f i g zadovoljavaju uvjete*

$$(i) \quad f(0) = f(L) = 0, \quad f''(0) = f''(L) = 0,$$

$$(ii) \quad g(0) = g(L) = 0.$$

Tada je funkcija (6.97), gdje su Fourierovi koeficijenti dani relacijama (6.100) i (6.101), klasično rješenje valne jednadžbe s Dirichletovim uvjetima

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (6.102)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6.103)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (6.104)$$

Dokaz. Pokažimo da koeficijenti a_n i b_n teže k nuli dovoljno brzo tako da je suma reda (6.97) neprekidna funkcija koja se može derivirati po članovima. Parcijalnom integracijom relacije (6.100) dobivamo

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (6.105)$$

jer je $f(0) = f(L) = 0$. Koristeći pretpostavku $f''(0) = f''(L) = 0$, iteracijom parcijalne integracije tri puta nalazimo

$$a_n = \frac{2L^3}{(n\pi)^4} \int_0^L f^{(4)}(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (6.106)$$

Oдавde slijedi da je

$$\left|\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_n\right| \leq \frac{2L}{(n\pi)^2} \int_0^L |f^{(4)}(x)| dx. \quad (6.107)$$

Kako je $f^{(4)}$ neprekidna na $[0, L]$, to je $f^{(4)}$ ograničena na $[0, L]$ pa možemo definirati konstantu

$$C_1 = \frac{2L}{\pi^2} \int_0^L |f^{(4)}(x)| dx. \quad (6.108)$$

Tada je

$$\left| \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 a_n \right| \leq \frac{C_1}{n^2}, \quad n \geq 1. \quad (6.109)$$

Slično se pokazuje da koristeći uvjete $g(0) = g(L) = 0$ i $g \in C^3([0, L])$, iz relacije (6.101) dobivamo

$$\left| \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 b_n \right| \leq \frac{C_2}{n^2}, \quad n \geq 1, \quad (6.110)$$

gdje je

$$C_2 = \frac{2L}{c\pi^2} \left(|g''(0)| + |g''(L)| + \int_0^L |g^{(3)}(x)| dx \right). \quad (6.111)$$

Definirajmo funkcije

$$u_n(x, t) = \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) \right] \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad n \geq 1. \quad (6.112)$$

Nejednakosti (6.109) i (6.110) povlače da su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergenti. Kako je

$$|u_n(x, t)| \leq |a_n| + |b_n| \quad (6.113)$$

za svaki $0 \leq x \leq L$ i $t \geq 0$, prema Weierstrassovom kriteriju red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ konvergira uniformno na skupu $\bar{\Omega} = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ ka neprekidnoj funkciji

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) \right] \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad (6.114)$$

Pokažimo da se red (6.114) može derivirati po članovima na otvorenom skupu $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < L, t > 0\}$. Deriviranjem funkcije (6.114) dobivamo

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) \right] \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad (6.115)$$

pa nejednakosti (6.109) i (6.110) povlače

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| \leq \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 |a_n| + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 |b_n| \leq \frac{C_1 + C_2}{n^2} \quad (6.116)$$

za svaki $0 < x < L$ i $t > 0$. Red $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ je konvergentan pa prema Weierstrassovom kriteriju red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} \partial^2 u_n / \partial x^2$ konvergira uniformno na Ω . Stoga se red $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ može derivirati po članovima i vrijedi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Omega. \quad (6.117)$$

Deriviranjem po varijabli t dobivamo

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \right| \leq c^2 \frac{C_1 + C_2}{n^2} \quad (6.118)$$

za svaki $0 < x < L$ i $t > 0$ pa prema istom argumentu zaključujemo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}, \quad (x, t) \in \Omega. \quad (6.119)$$

Funkcije u_n zadovoljavaju valnu jednadžbu $(u_n)_{tt} - c^2(u_n)_{xx} = 0$ i rubne uvjete $u_n(0, t) = u_n(L, t) = 0$. Oдавde slijedi da u zadovoljava

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (6.120)$$

i rubne uvjete $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Promotrimo sada početne uvjete

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x), \quad (6.121)$$

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi c}{L}\right) b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (6.122)$$

Ako su $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ neparna proširenja funkcija f i g na $[-L, L]$, onda su $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ neprekidne i po dijelovima C^1 na $[-L, L]$, i vrijedi $\tilde{f}(-L) = \tilde{f}(L) = 0$, $\tilde{g}(-L) = \tilde{g}(L) = 0$. Prema teoremu 2.4 Fourierovi redovi (6.121) i (6.122) konvergiraju uniformno ka f i g na intervalu $[0, L]$, a Fourierovi koeficijenti su dani sa

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad (6.123)$$

$$\frac{n\pi c}{L} b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad (6.124)$$

odnosno

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (6.125)$$

Time je pokazano da funkcija u zadovoljava početne uvjete (6.121) i (6.122). ■

U dokazu teorema 6.3 smo pretpostavili da funkcije f i g zadovoljavaju uvjete koji u primjenama ne moraju biti ispunjeni. Na primjer, ako je u početnom trenutku žica transferzalno zategnuta u točki $0 < x_0 < L$ i puštena da slobodno titra, onda je početni položaj trokutasta funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{u_0}{x_0}x, & 0 \leq x \leq x_0, \\ u_0 \frac{x-L}{x_0-L}, & x_0 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (6.126)$$

(vidi sliku 6.4). Funkcija f nema derivaciju u x_0 pa $f \notin C^4([0, L])$. Za opis ovakvih početnih uvjeta prirodno je pretpostaviti da je početni položaj definiran samo neprekidnom funkcijom $f \in C([0, L])$ takvom da je $f(0) = f(L) = 0$. Također bismo htjeli uzeti u obzir da početna brzina g ima eventualno prekide prve vrste kako bismo mogli opisati titranje žice koja je pokrenuta udarcem oštrog predmeta. Sljedeći primjer pokazuje da pod ovakvim slabijim pretpostavkama rješenje valne jednadžbe nije C^2 funkcija, odnosno nije klasično rješenje u smislu definicije 1.3. U ovom slučaju potrebno je proširiti koncept rješenja diferencijalne jednadžbe na tzv. slaba rješenja koja se prirodno javljaju u formulaciji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi primjenom varijacijskog računa. Razmatranje slabih rješenja prelazi okvire ove skripte.

Primjer 6.5 (Gibanje transferzalno zategnute žice) *Odredite formalno rješenje valne jednadžbe*

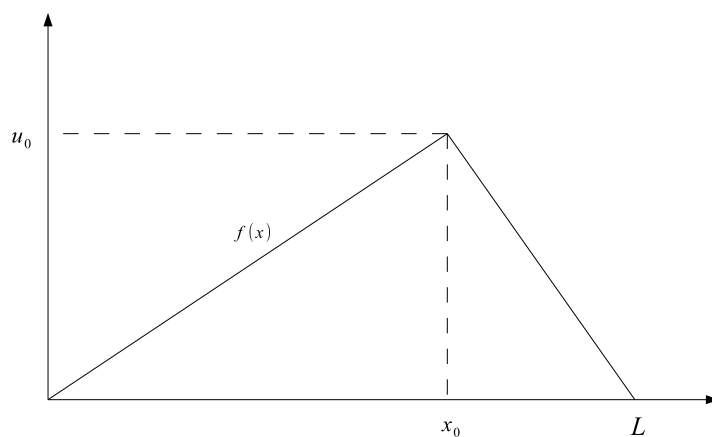
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad (6.127)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (6.128)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (6.129)$$

gdje je funkcija $f(x)$ dana jednadžbom (6.126). Kako je $u_t(x, 0) = 0$, to je $b_n = 0$ za svaki n . Stoga formalno rješenje ima oblik

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (6.130)$$



Slika 6.4: Graf funkcije (6.126).

gdje je

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^{x_0} \frac{u_0}{x_0} x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \frac{2}{L} \int_{x_0}^L u_0 \frac{x-L}{x_0-L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \end{aligned} \quad (6.131)$$

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int_0^{x_0} x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) - \frac{Lx_0}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right), \quad (6.132)$$

$$\int_{x_0}^L (x-L) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{n\pi}(x_0-L) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) - \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right). \quad (6.133)$$

Supstitucijom (6.132) i (6.133) u jednadžbu (6.131) nalazimo

$$a_n = 2\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \frac{u_0}{x_0(L-x_0)} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \quad (6.134)$$

Stoga je formalno rješenje dano sa

$$u(x, t) = \frac{2L^2}{\pi^2} \frac{u_0}{x_0(L-x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (6.135)$$

Primijetimo da red (6.135) konvergira uniformno za sve $x \in [0, L]$ i $t \geq 0$, ali $u(x, t)$ nije C^2 funkcija (sto se događa kada red deriviramo po članovima dva puta po x i t ?). Međutim, parcijalne sume reda $u_N(x, t)$ su glatke funkcije koje zadovoljavaju valnu jednadžbu i rubne uvjete $u_N(0, t) = u_N(L, t) = 0$. Nadalje, $u_N(x, 0) \rightarrow f(x)$ uniformno na $[0, L]$ kada $N \rightarrow \infty$ pa je $u_N(x, t)$ aproksimativno rješenje našeg problema čija se točnost povećava kako N raste.

Neumannovi rubni uvjeti

Titrajuća žica sa slobodnim krajevima zadovoljava valnu jednadžbu s Neumannovim rubnim uvjetima

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad (6.136)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6.137)$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (6.138)$$

Kompatibilnost početnih i rubnih uvjeta povlači da je

$$f'(0) = f'(L) = 0, \quad g'(0) = g'(L) = 0. \quad (6.139)$$

Postupak rješavanja problema (6.136)–(6.138) je sličan prethodnom slučaju s Dirichletovim rubnim uvjetima. Rješenje tražimo u obliku $u(x, t) = P(x)Q(t)$. Iz rubnih uvjeta $u_x(0, t) = P_x(0)Q(t) = 0$ i $u_x(L, t) = P_x(L)Q(t) = 0$ dobivamo sljedeće jednadžbe za funkcije P i Q :

$$P''(x) + \lambda P(x) = 0, \quad P_x(0) = P_x(L) = 0, \quad (6.140)$$

$$Q''(t) + \lambda c^2 Q(t) = 0, \quad (6.141)$$

gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$ separacijska konstanta. Vlastite vrijednosti Sturm–Liouvilleovog problema (6.140) su diskretizirane, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \geq 0$, a vlastite funkcije $P_n(x)$ su dane sa

$$P_0 = B_0, \quad P_n(x) = B_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.142)$$

Za $\lambda = \lambda_n$ jednadžba (6.141) ima rješenja

$$Q_0 = C_0 + D_0 t, \quad (6.143)$$

$$Q_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.144)$$

Time dobivamo niz funkcija $u_n(x, t) = P_n(x)Q_n(t)$ koje možemo zapisati u obliku

$$u_0(x, t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2}, \quad (6.145)$$

$$u_n(x, t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.146)$$

za neke konstante a_n i b_n . Dakle, rješenje $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$ je dano sa

$$u(x, t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (6.147)$$

a Fourierovi koeficijenti a_n i b_n su određeni početnim uvjetima

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6.148)$$

$$u_t(x, 0) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi c}{L}\right) b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (6.149)$$

Parnim proširenjem funkcija f i g na interval $[-L, L]$ dobivamo

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad (6.150)$$

$$b_0 = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (6.151)$$

Time je rješenje problema potpuno određeno.

6.3.2 Separacija varijabli za nehomogenu jednadžbu

Metoda separacije varijabli se može prilagoditi za rješavanje nehomogene valne jednadžbe. Ilustrirajmo postupak rješavanja na Neumannovom problemu

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (6.152)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6.153)$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (6.154)$$

Iz prethodnih razmatranja znamo da ako je $F = 0$, onda je rješenje dano sa

$$u(x, t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (6.155)$$

Ovo sugerira da rješenje nehomogene jednadžbe potražimo u obliku

$$u(x, t) = \frac{1}{2}Q_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (6.156)$$

gdje su $Q_n(t)$ nepoznate funkcije. Supstitucijom relacije (6.156) u valnu jednadžbu (6.152) dobivamo

$$\frac{1}{2}Q_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[Q_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 Q_n(t) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = F(x, t). \quad (6.157)$$

Ako funkciju $F(x, t)$ možemo razviti u Fourierov red u varijabli x po kosinusima, onda $Q_n(t)$ možemo odrediti uspoređivanjem koeficijenata dvaju Fourierovih redova. Ovo će biti moguće ako $F(x, t)$ zadovoljava rubne uvjete

$$F_x(0, t) = F_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (6.158)$$

Tada je

$$F(x, t) = \frac{1}{2}C_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6.159)$$

gdje Fourierovi koeficijenti C_n ovise o varijabli t . Supstitucijom ovog izraza u jednadžbu (6.157) dobivamo

$$\frac{1}{2}\left(Q_0''(t) - C_0(t)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[Q_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 Q_n(t) - C_n(t) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0. \quad (6.160)$$

Ovo povlači da funkcije $Q_n(t)$ zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe

$$Q_0''(t) = C_0(t), \quad (6.161)$$

$$Q_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 Q_n(t) = C_n(t), \quad n \geq 1. \quad (6.162)$$

Rješenja ovih jednadžbi možemo zapisati kao zbroj rješenja pripadne homogene jednadžbe i partikularnog rješenja $Q_n^p(t)$:

$$Q_0(t) = a_0 + b_0 t + Q_0^p(t), \quad (6.163)$$

$$Q_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + Q_n^p(t). \quad (6.164)$$

Funkcije $Q_n^p(t)$ su jedinstveno određene Fourierovim koeficijentima $C_n(t)$. Supstitucijom rješenja za $Q_n(t)$ u jednadžbu (6.156) nalazimo da je

$$u(x, t) = u_h(x, t) + u_p(x, t) \quad (6.165)$$

gdje je $u_h(x, t)$ dano izrazom (6.155) rješenje pripadne homogene jednadžbe, a

$$u_p(x, t) = \frac{1}{2}Q_0^p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^p(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (6.166)$$

je partikularno rješenje. Koeficijenti a_n i b_n su određeni početnim uvjetima $u(x, 0) = f(x)$ i $u_t(x, 0) = g(x)$.

Primjer 6.6 *Odredite rješenje valne jednadžbe*

$$u_{tt} - u_{xx} = \cos(2\pi x) \cos(2\pi t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (6.167)$$

$$u(x, 0) = \cos^2(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6.168)$$

$$u_t(x, 0) = 2 \cos(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6.169)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0. \quad (6.170)$$

Ovdje je $L = c = 1$ pa opće rješenje ima oblik

$$u(x, t) = \frac{1}{2}Q_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \cos(n\pi x). \quad (6.171)$$

Supstitucijom izraza (6.171) u jednadžbu (6.167) dobivamo

$$\frac{1}{2}Q_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n''(t) + (n\pi)^2 Q_n(t)) \cos(n\pi x) = \cos(2\pi t) \cos(2\pi x). \quad (6.172)$$

Za $n = 0, 2$ funkcije Q_n zadovoljavaju

$$Q_0''(t) = 0, \quad (6.173)$$

$$Q_2''(t) + 4\pi^2 Q_2(t) = \cos(2\pi t), \quad (6.174)$$

dok za $n \neq 0, 2$ vrijedi

$$Q_n''(t) + (n\pi)^2 Q_n(t) = 0. \quad (6.175)$$

Rješenja jednadžbi (6.173) i (6.175) su dana sa

$$Q_0(t) = a_0 + b_0 t, \quad Q_n(t) = a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t). \quad (6.176)$$

Partikularno rješenje jednadžbe (6.174) ima oblik

$$Q_2^p(t) = \frac{t}{4\pi} \sin(2\pi t) \quad (6.177)$$

jer su prirodna frekvencija i frekvencija prisilnih titraja jednake 2π . Stoga je

$$Q_2(t) = a_2 \cos(2\pi t) + b_2 \sin(2\pi t) + \frac{t}{4\pi} \sin(2\pi t). \quad (6.178)$$

Dakle, rješenje jednadžbe je dano redom

$$u(x, t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)) \cos(n\pi x) + \frac{t}{4\pi} \sin(2\pi t) \cos(2\pi x) \quad (6.179)$$

gdje su koeficijenti a_n i b_n određeni početnim uvjetima. Iz uvjeta (6.168) dobivamo

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) = \cos^2(\pi x). \quad (6.180)$$

Koristeći identitet $\cos^2(\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi x)$ i uspoređivanjem Fourierovih koeficijenata u gornjoj jednadžbi zaključujemo da je

$$a_0 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 0, \quad n \neq 0, 2. \quad (6.181)$$

Slično, iz uvjeta (6.169) slijedi

$$u_t(x, 0) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \cos(n\pi x) = 2 \cos(2\pi x) \quad (6.182)$$

odakle dobivamo

$$b_2 = \frac{1}{\pi}, \quad b_n = 0, \quad n \neq 2. \quad (6.183)$$

Uvrštavanjem Fourierovih koeficijenata a_n i b_n u izraz za $u(x, t)$ nalazimo rješenje problema

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \frac{4+t}{4\pi} \sin(2\pi t) \right) \cos(2\pi x). \quad (6.184)$$

■

Poglavlje 7

Laplaceova jednađžba

Jedan od najvažnijih primjera eliptičkih jednađžbi je Laplaceova jednađžba nazvana po francuskom matematičaru i fizičaru Pierre Simon de Laplaceu (1749–1827) koji je zaslužan za razvoj teorije potencijala. Laplaceova jednađžba ima primjene u elektrostatici, teoriji gravitacije, mehanici fluda i drugim problemima fizike i tehnike. U ovom poglavlju proučavamo Laplaceovu jednađžbu u dvije dimenzije

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (7.1)$$

gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena domena. Diferencijalni operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (7.2)$$

naziva se Laplaceov operator. Laplaceova jednađžba je posebni slučaj Poissonove jednađžbe

$$\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (7.3)$$

za $f = 0$. U prvom dijelu izlaganja razmatrat ćemo opća svojstva Laplaceove jednađžbe od kojih su najvažniji principi maksimuma i princip srednje vrijednosti. Metodom separacije varijabli ćemo konstruirati rješenja Laplaceove jednađžbe za pravokutne i kružne domene. Na kraju, izvest ćemo rješenje Laplaceove jednađžbe u obliku Poissonove formule i proširiti metodu separacije varijabli na Poissonovu jednađžbu.

7.1 Opća svojstva Laplaceove jednadžbe

Funkciju $u \in C^2(\Omega)$ koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ nazivamo *harmonijska* funkcija u Ω . Harmonijske funkcije se prirodno javljaju u teoriji funkcija kompleksne varijable. Ako je $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitička funkcija u $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, onda u i v zadovoljavaju Cauchy–Riemannove jednadžbe $u_x = v_y$ i $u_y = -v_x$. Stoga je

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}(v_y) - \frac{\partial}{\partial y}(v_x) = 0. \quad (7.4)$$

Slično se pokazuje da v zadovoljava $v_{xx} + v_{yy} = 0$. Dakle, realni i imaginarni dio analitičke funkcije $f = u + iv$ je harmonijska funkcija. Na primjer,

$$e^z = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) \quad (7.5)$$

je analitička funkcija u $\mathbb{C}$. Lako se provjeri da su $u(x, y) = e^x \cos(y)$ i $v(x, y) = e^x \sin(y)$ harmonijske funkcije u $\mathbb{R}^2$.

U daljnjem tekstu pretpostavljamo je rub ograničenog područja Ω unija $\partial\Omega = \cup_{i=1}^n C_i$ po dijelovima glatkih jednostavnih zatvorenih krivulja $C_1, C_2, \dots, C_n$. Jedinični normalni vektor $\vec{n}$ je definiran u svakoj točki na rubu $\partial\Omega$ osim eventualno u točkama gdje se krivulje C_i nastavljaju jedna na drugu.

Definicija 7.1 *Neka je u rješenje Poissonove jednadžbe (7.3) na domeni Ω , i neka je funkcija g definirana na $\partial\Omega$. Kažemo da funkcija u zadovoljava*

(i) *Dirichletov uvjet na Ω ako je*

$$u(x, y) = g(x, y) \quad \text{za svaki } (x, y) \in \partial\Omega, \quad (7.6)$$

(ii) *Neumannov uvjet na Ω ako je*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y) = g(x, y) \quad \text{za svaki } (x, y) \in \partial\Omega \quad (7.7)$$

gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor normale na $\partial\Omega$ usmjeren prema van, a $\partial u / \partial \vec{n} = \nabla u \cdot \vec{n}$ je usmjerena derivacija funkcije u u smjeru vektora $\vec{n}$.

Ako rješenje Poissonove jednadžbe zadovoljava Neumannov uvjet, onda funkcije f i g moraju zadovoljavati tzv. uvjet konzistentnosti.

Lema 7.1 *Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$. Nužni uvjet za egistenciju rješenja Neumannovog problema*

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (7.9)$$

je uvjet konzistentnosti

$$\int_{\partial\Omega} g ds = \iint_{\Omega} f dx dy. \quad (7.10)$$

Dokaz. Koristeći vektorski identitet za Laplaceov operator

$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) \quad (7.11)$$

Poissonovu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\nabla \cdot (\nabla u) = f. \quad (7.12)$$

Ako je $\vec{G}$ vektorsko polje klase C^1 na Ω , onda je prema Gaussovom teoremu

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{G} dx dy = \int_{\partial\Omega} (\vec{G} \cdot \vec{n}) ds \quad (7.13)$$

gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor normale na $\partial\Omega$ usmjeren prema van. Integracijom jednadžbe (7.12) po Ω i primjenom Gaussovog teorema dobivamo

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f dx dy &= \iint_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u) dx dy \\ &= \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \vec{n}) ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \int_{\partial\Omega} g ds. \end{aligned}$$

■

Primijetimo da u slučaju kada je u rješenje Laplaceove jednadžbe ($f = 0$), tada je nužan uvjet za egistenciju rješenja

$$\int_{\partial\Omega} g ds = 0. \quad (7.14)$$

Drugim riječima, integral normalne derivacije harmonijske funkcije u po $\partial\Omega$ isčezava,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = 0. \quad (7.15)$$

Ako uvjet konzistentnosti nije ispunjen, onda Neumannov problem nije rješiv.

Sljedeći rezultat pokazuje da harmonijska funkcija na ograničenoj domeni doseže svoju maksimalnu i minimalnu vrijednost na rubu te domene. Ovaj zaključak je sličan principu maksimuma za jednadžbu provodjenja topline.

Teorem 7.1 (Slabi princip maksimuma) *Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$ i neka je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonijska funkcija na Ω . Tada je*

$$\max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} u(x,y) = u(x',y') \quad (7.16)$$

za neku točku $(x',y') \in \partial\Omega$. Drugim riječima, funkcija u doseže maksimum po $\bar{\Omega}$ u nekoj točki ruba $\partial\Omega$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Definirajmo funkciju

$$v(x,y) = u(x,y) + \varepsilon(x^2 + y^2), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}. \quad (7.17)$$

Funkcija v je neprekidna na kompaktnom skupu $\bar{\Omega}$, pa v doseže maksimum u nekoj točki $(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}$. Ako je (x_0, y_0) unutarnja točka skupa $\bar{\Omega}$, odnosno $(x_0, y_0) \in \Omega$, onda je $v(x_0, y_0)$ lokalni maksimum pa vrijedi

$$v_{xx}(x_0, y_0) < 0 \quad \text{ i } \quad v_{yy}(x_0, y_0) < 0. \quad (7.18)$$

Medjutim,

$$v_{xx} + v_{yy} = u_{xx} + u_{yy} + 4\varepsilon = 4\varepsilon > 0 \quad (7.19)$$

u svakoj točki $(x,y) \in \Omega$, pa zaključujemo da $(x_0, y_0) \notin \Omega$. Dakle, v doseže maksimalnu vrijednost na rubu $\partial\Omega$, stoga je

$$\max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} v(x,y) = v(x_0, y_0) \quad \text{ za neku točku } (x_0, y_0) \in \partial\Omega. \quad (7.20)$$

Neka su

$$M = \max_{(x,y) \in \partial\Omega} u(x,y) \quad \text{ i } \quad K = \max_{(x,y) \in \partial\Omega} (x^2 + y^2). \quad (7.21)$$

Sada iz relacija (7.20) i (7.21) slijedi da za svaki $(x, y) \in \Omega$ imamo

$$v(x, y) \leq \max_{(x, y) \in \partial\Omega} v(x, y) = \max_{(x, y) \in \partial\Omega} (u(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2)) = M + \varepsilon K. \quad (7.22)$$

Stoga za svaki $(x, y) \in \Omega$ vrijedi nejednakost

$$u(x, y) = v(x, y) - \varepsilon(x^2 + y^2) \leq M + \varepsilon K - \varepsilon(x^2 + y^2) \leq M + \varepsilon K. \quad (7.23)$$

Kako je $\varepsilon > 0$ odabran proizvoljno, zaključujemo da je

$$u(x, y) \leq M \quad \text{za svaki } (x, y) \in \Omega. \quad (7.24)$$

Ovo povlači da je

$$\max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} u(x, y) = M = \max_{(x, y) \in \partial\Omega} u(x, y). \quad (7.25)$$

Funkcija u je neprekidna na kompaktnom skupu $\partial\Omega$, pa postoji $(x', y') \in \partial\Omega$ takav da je

$$\max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} u(x, y) = u(x', y'). \quad (7.26)$$

■

Primijetimo da slabi princip maksimuma ne isključuje mogućnost da $u(x, y)$ ima maksimum u nekoj točki $(x, y) \in \Omega$, na primjer ako je $u(x, y)$ konstantna funkcija.

Ako je u harmonijska funkcija na Ω , tada je $v = -u$ takodjer harmonijska na Ω . S obzirom da je $\max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} v(x, y) = \min_{(x, y) \in \bar{\Omega}} u(x, y)$, prema prethodnom teoremu zaključujemo da vrijedi

Teorem 7.2 (Slabi princip minimuma) *Neka je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonijska funkcija na ograničenoj domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada postoji $(x', y') \in \partial\Omega$ takav da je*

$$\min_{(x, y) \in \bar{\Omega}} u(x, y) = u(x', y'). \quad (7.27)$$

Iz principa maksimuma i minimuma neposredno slijedi

Korolar 7.1 *Ako je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonijska funkcija na ograničenoj domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ i $u(x, y) = 0$ za svaki $(x, y) \in \partial\Omega$, tada je $u = 0$.*

Dokaz. Prema slabom principu maksimuma i minimuma imamo

$$0 = \min_{(x,y) \in \partial\Omega} u(x,y) \leq u(x,y) \leq \max_{(x,y) \in \partial\Omega} u(x,y) = 0 \quad (7.28)$$

za svaki $(x,y) \in \bar{\Omega}$, pa je $u = 0$. ■

Jedna od važnih posljednica principa maksimuma je jedinstvenost rješenja Dirichletovog problema za Poissonovu jednadžbu.

Teorem 7.3 *Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$. Tada postoji najviše jedno rješenje $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ Dirichletovog problema*

$$\Delta u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \quad (7.29)$$

$$u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega. \quad (7.30)$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dva rješenja u_1 i u_2 problema (7.29)–(7.30). Tada je $u = u_1 - u_2$ harmonijska funkcija koja zadovoljava problem

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \quad (7.31)$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega. \quad (7.32)$$

Prema korolaru 7.1 je $u = 0$, što povlači $u_1 = u_2$. ■

Naglasimo da je ograničenost domene Ω važna pretpostavka u teoremu 7.3. Promotrimo Dirichletov problem na neograničenoj domeni $\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$:

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \quad (7.33)$$

$$u(x,y) = 1, \quad x^2 + y^2 = 4. \quad (7.34)$$

Lako se provjeri da su funkcije $u_1(x,y) = 1$ i $u_2(x,y) = \frac{1}{\ln(2)} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ rješenja problema (7.33)–(7.34), pa rješenje Laplaceove jednadžbe na Ω nije jedinstveno.

Princip maksimuma takodjer ima za posljedicu da su rješenja Dirichletovog problema za Poissonovu jednadžbu stabilna u odnosu na rubne uvjete. Drugim riječima, male promjene u rubnim uvjetima rezultiraju malim promjenama u rješenju Poissonove jednadžbe.

Teorem 7.4 *Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$, i neka su $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ rješenja Poissonove jednadžbe*

$$\Delta u_1(x, y) = f(x, y), \quad \Delta u_2(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (7.35)$$

koje zadovoljavaju rubne uvjete

$$u_1(x, y) = g_1(x, y) \quad u_2(x, y) = g_2(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (7.36)$$

gdje su g_1 i g_2 neprekidne funkcije na $\partial\Omega$. Ako je

$$\max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| < \varepsilon, \quad (7.37)$$

onda je

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| < \varepsilon. \quad (7.38)$$

Dokaz. Definirajmo $u = u_1 - u_2$. Tada je u rješenje Laplaceove jednadžbe $\nabla^2 u = 0$ u Ω koje zadovoljava rubni uvjet $u(x, y) = g_1(x, y) - g_2(x, y)$, $(x, y) \in \partial\Omega$. Na rubu domene vrijedi

$$|u(x, y)| = |g_1(x, y) - g_2(x, y)| < \varepsilon, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (7.39)$$

što povlači

$$-\varepsilon < \min_{\partial\Omega} u \quad \text{i} \quad \max_{\partial\Omega} u < \varepsilon. \quad (7.40)$$

Prema slabom principu maksimuma i minimuma imamo

$$-\varepsilon < \min_{\partial\Omega} u \leq u(x, y) \leq \max_{\partial\Omega} u < \varepsilon, \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (7.41)$$

dakle,

$$|u(x, y)| = |u_1(x, y) - u_2(x, y)| < \varepsilon \quad \text{za svaki} \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (7.42)$$

■

Teorem 7.5 (Princip srednje vrijednosti) *Neka je u harmonijska funkcija u domeni Ω (koja nije nužno ograničena), i neka je $\bar{K}_r(x_0, y_0) \subset \Omega$ zatvoreni krug radijusa $r > 0$ sa središtem u $(x_0, y_0) \in \Omega$. Tada je*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} u \, ds \quad (7.43)$$

gdje je C_r kružnica radiju $r > 0$ sa središtem u (x_0, y_0) .

Prema ovom principu, vrijednost harmonijske funkcije u središtu kružnice jednaka je srednjoj vrijednosti funkcije po kružnici.

Dokaz. Neka je $0 < \rho \leq r$ i neka je C_ρ kružnica radijusa ρ sa središtem u (x_0, y_0) . Definirajmo funkciju

$$V(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{C_\rho} u \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos(\varphi), y_0 + \rho \sin(\varphi)) \, d\varphi. \quad (7.44)$$

Funkcija $V(\rho)$ ima uklonjivi prekid u $\rho = 0$ jer je

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos(\varphi), y_0 + \rho \sin(\varphi)) \, d\varphi = u(x_0, y_0). \quad (7.45)$$

Pokažimo da je $V(\rho)$ konstanta. Deriviranjem dobivamo

$$\begin{aligned} V'(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} u(x_0 + \rho \cos(\varphi), y_0 + \rho \sin(\varphi)) \, d\varphi, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u_x(x_0 + \rho \cos(\varphi), y_0 + \rho \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \\ &\quad + u_y(x_0 + \rho \cos(\varphi), y_0 + \rho \sin(\varphi)) \cos(\varphi)] \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, d\varphi = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds \end{aligned} \quad (7.46)$$

gdje je $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n}$ usmjerena derivacija u smjeru jediničnog radijalnog vektora $\vec{n} = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}$. Prema jednadžbi (7.15) imamo

$$\int_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds = 0 \quad (7.47)$$

jer je u harmonijska funkcija na krugu $K_\rho(x_0, y_0)$. Stoga je $V'(\rho) = 0$, što povlači da je $V(\rho)$ konstantna funkcija. Odavde slijedi da je

$$V(r) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} V(\rho) = u(x_0, y_0) \quad (7.48)$$

što implicira

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} u \, ds = u(x_0, y_0). \quad (7.49)$$

■

Princip srednje vrijednosti karakterizira harmonijske funkcije jer vrijedi i obrat ovog teorema.

Teorem 7.6 *Pretpostavimo da funkcija $u \in C^2(\Omega)$ zadovoljava princip srednje vrijednosti u svakoj točki domene Ω . Tada je u harmonijska funkcija u Ω .*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $(x_0, y_0) \in \Omega$ takav da je $\Delta u(x_0, y_0) \neq 0$. Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti $\Delta u(x_0, y_0) > 0$. Kako je Δu neprekidna na Ω , postoji $r > 0$ takav da je $\Delta u(x, y) > 0$ na krugu K_r radijusa r sa središtem u (x_0, y_0) . Neka je C_r rub kruga K_r . Iz Gaussovog teorema (vidi (7.13)) slijedi

$$\begin{aligned}
 0 &< \frac{1}{2\pi} \int_{K_r} \Delta u \, dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\nabla u \cdot \vec{n}) r d\varphi \\
 &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[u_x(x_0 + r \cos(\varphi), y_0 + r \sin(\varphi)) \cos(\varphi) \right. \\
 &\quad \left. + u_y(x_0 + r \cos(\varphi), y_0 + r \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \right] d\varphi \\
 &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(x_0 + r \cos(\varphi), y_0 + r \sin(\varphi)) d\varphi \\
 &= r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos(\varphi), y_0 + r \sin(\varphi)) d\varphi
 \end{aligned} \tag{7.50}$$

gdje je $\vec{n} = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}$ jedinični normalni vektor na C_r . Prema pretpostavci u zadovoljava princip srednje vrijednosti na Ω , pa je

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos(\varphi), y_0 + r \sin(\varphi)) d\varphi = u(x_0, y_0). \tag{7.51}$$

Ovo vodi na kontradikciju jer iz jednadžbe (7.50) dobivamo

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos(\varphi), y_0 + r \sin(\varphi)) d\varphi = r \frac{\partial}{\partial r} u(x_0, y_0) = 0. \tag{7.52}$$

Dakle, $\Delta u(x_0, y_0) = 0$ za svaki $(x_0, y_0) \in \Omega$ pa zaključujemo da je u harmonijska funkcija na Ω . ■

Iz principa srednje vrijednosti može se dokazati

Teorem 7.7 (Jaki princip maksimuma) *Neka je u harmonijska funkcija u domeni Ω (koja nije nužno ograničena). Ako u ima minimum ili maksimum u unutrašnjosti područja Ω , onda je u konstantna funkcija.*

Jaki princip maksimuma garantira da harmonijske funkcije koje nisu konstantne ne mogu doseći svoju minimalnu ili maksimalnu vrijednost u unutrašnjosti domene Ω . Ako je Ω ograničena domena, tada znamo da je minimum ili maksimum dosegnut u nekoj točki na rubu $\partial\Omega$. Međutim, ako Ω nije ograničen skup, tada harmonijska funkcija u ne mora dosegnuti svoj maksimum ili minimum u $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Na primjer, $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ je harmonijska funkcija u domeni $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ i $u(x, y) = 0$ u svakoj točki $(x, y) \in \partial\Omega$, ali u ne doseže maksimum u $\bar{\Omega}$.

7.2 Separacija varijabli za Laplaceovu jednadžbu

Metoda separacije varijabli se može primijeniti na Laplaceovu jednadžbu ako domena Ω ima odredjenu simetriju. U ovom poglavlju ćemo proučiti metode rješavanja Laplaceove jednadžbe za pravokutne i kružne domene. Formalno rješenje Laplaceove jednažbe je dano u obliku reda $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gdje su u_n harmonijske funkcije u Ω . Stoga je potrebno znati pod kojim uvjetima red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira prema harmonijskoj funkciji, odnosno koji uvjeti garantiraju da je $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ klasično rješenje Laplaceove jednadžbe.

Teorem 7.8 *Neka je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^2$. Neka je $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ formalno rješenje Dirichletovog problema*

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (7.53)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (7.54)$$

gdje je g neprekidna funkcija na $\partial\Omega$ i $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ je harmonijska funkcija u Ω za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira uniformno ka funkciji g na $\partial\Omega$, tada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira uniformno u $\bar{\Omega}$, i u je klasično rješenje problema (7.53)-(7.54).

Dokaz. Definirajmo parcijalne sume $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Tada je $s_n \in C^2(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$ niz harmonijskih funkcija koji konvergira uniformno ka g na $\partial\Omega$. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema Cauchyevom kriteriju za uniformnu konvergenciju postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{(x, y) \in \partial\Omega} |s_n(x, y) - s_m(x, y)| < \varepsilon. \quad (7.55)$$

Kako je $s_n - s_m \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonijska funkcija u Ω , slabi princip maksimuma povlači da je

$$\sup_{(x,y) \in \bar{\Omega}} |s_n(x,y) - s_m(x,y)| < \varepsilon. \quad (7.56)$$

Prema Cauchyevom kriteriju niz $\{s_n\}$ konvergira uniformno na $\bar{\Omega}$, pa red $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergira uniformno na $\bar{\Omega}$.

Pokažimo da je $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ harmonijska funkcija u Ω . Neka je $(x_0, y_0) \in \Omega$ i neka je $K_r(x_0, y_0) \subset \Omega$ krug radijusa $r > 0$ sa središtem u (x_0, y_0) . Funkcije u_n su harmonijske u Ω pa zadovoljavaju princip srednje vrijednosti

$$u_n(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial K_r} u_n ds \quad (7.57)$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada je

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0, y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial K_r} u_n ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial K_r} u_n ds = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial K_r} u ds \end{aligned} \quad (7.58)$$

gdje se integral i suma smiju zamijeniti zbog uniformne konvergencije reda. Dakle, funkcija u zadovoljava princip srednje vrijednosti u svakoj točki $(x_0, y_0) \in \Omega$, pa je prema teoremu 7.6 u harmonijska funkcija u Ω . Nadalje, u zadovoljava rubni uvjet $u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y) = g(x, y)$, $(x, y) \in \partial\Omega$, stoga je u klasično rješenje problema (7.53)-(7.54). ■

7.2.1 Pravokutne domene

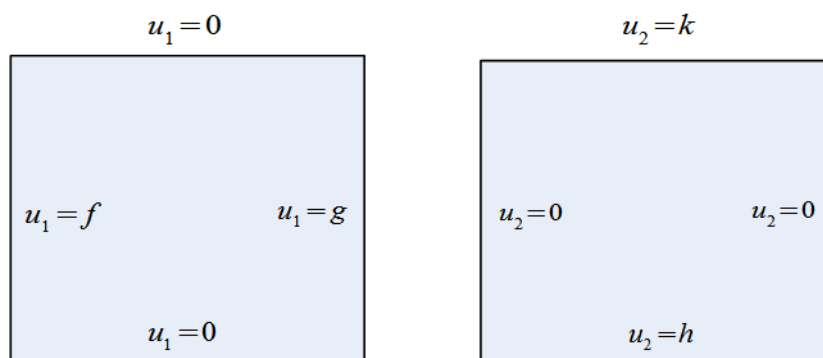
U ovom poglavlju ćemo razviti metodu separacije varijabli za Laplaceovu jednadžbu na pravokutnoj domeni. Translacijom koordinatnog sustava možemo pretpostaviti da je domena definirana sa $\Omega = (0, b) \times (0, d)$. Promotrimo Laplaceovu jednadžbu

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (7.59)$$

s Dirichletovim rubnim uvjetima

$$u(x, 0) = h(x), \quad u(x, d) = k(x), \quad 0 \leq x \leq b, \quad (7.60)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad u(b, y) = g(y), \quad 0 \leq y \leq d. \quad (7.61)$$



Slika 7.1:

Da bismo riješili problem potrebno je Laplaceovoj jednadžbi pridružiti odgovarajući Sturm-Liouvilleov problem koje daje bazne funkcije po kojima se rješenje u razvija u red. Prisjetimo se da Sturm-Liouvilleov problem zahtijeva homogene rubne uvjete. Stoga je rješenje u potrebno rastaviti na zbroj $u = u_1 + u_2$ gdje su u_1 i u_2 harmonijske funkcije koje zadovoljavaju sljedeće rubne uvjete (vidi sliku 7.1):

$$u_1(x, 0) = 0, \quad u_1(x, d) = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad (7.62)$$

$$u_1(0, y) = f(y), \quad u_1(b, y) = g(y), \quad 0 \leq y \leq d, \quad (7.63)$$

$$u_2(x, 0) = h(x), \quad u_2(x, d) = k(x), \quad 0 \leq x \leq b, \quad (7.64)$$

$$u_2(0, y) = 0, \quad u_2(b, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq d. \quad (7.65)$$

Rubni uvjeti u teoremu 7.8 su definirani neprekidnom funkcijom na $\partial\Omega$. Da bi rubni uvjeti za funkcije u_1 i u_2 bili neprekidni, potrebno je pretpostaviti da funkcije f , g , h i k zadovoljavaju uvjete kompatibilnosti

$$f(0) = f(d) = 0, \quad g(0) = g(d) = 0, \quad (7.66)$$

$$h(0) = h(b) = 0, \quad k(0) = k(b) = 0. \quad (7.67)$$

Očigledno je da $u = u_1 + u_2$ zadovoljava rubne uvjete (7.60)-(7.61) pa je prema teoremu 7.3 funkcija $u = u_1 + u_2$ jedinstveno rješenje problema (7.59)-(7.61).

Pokažimo kako se nalazi funkcija u_1 . Rješenje tražimo u separiranom obliku $u_1(x, y) = P(x)Q(y)$. Iz Laplaceove jednadžbe dobivamo

$$\frac{P''(x)}{P(x)} = -\frac{Q''(y)}{Q(y)} = \lambda \quad (7.68)$$

za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Dakle, funkcije P i Q zadovoljavaju jednadžbe

$$P''(x) - \lambda P(x) = 0, \quad 0 < x < b, \quad (7.69)$$

$$Q''(y) + \lambda Q(y) = 0, \quad 0 < y < d. \quad (7.70)$$

Rubni uvjeti (7.62) povlače

$$Q(0) = Q(d) = 0 \quad (7.71)$$

pa funkcija Q zadovoljava pridruženi Sturm-Liouvilleov problem (7.70)-(7.71). Vlastite vrijednosti i funkcije su dane sa

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2, \quad Q_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.72)$$

Sada jednadžba za funkciju P ima oblik

$$P''(x) - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 P(x) = 0, \quad 0 < x < b. \quad (7.73)$$

Zbog rubnih uvjeta na stranicama pravokutnika $x = 0$ i $x = b$ opće rješenje zapišimo kao

$$P_n(x) = A_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{d}x\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{d}(x-b)\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.74)$$

Primijetimo da su hiperbolne funkcije $\operatorname{sh}(n\pi x/d)$ i $\operatorname{sh}(n\pi(x-b)/d)$ linearno nezavisna rješenja jednadžbe (7.73). Prema principu superpozicije, formalno rješenje u_1 je dano u obliku reda

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{d}x\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{d}(x-b)\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right). \quad (7.75)$$

Supstitucijom izraza (7.75) u rubne uvjete (7.63) dobivamo

$$u_1(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} -B_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{d}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right) = f(y), \quad 0 \leq y \leq d, \quad (7.76)$$

$$u_1(b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{d}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right) = g(y), \quad 0 \leq y \leq d. \quad (7.77)$$

Definirajmo koeficijente

$$\alpha_n = A_n \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi b}{d} \right), \quad \beta_n = -B_n \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi b}{d} \right). \quad (7.78)$$

Jednadžbe (7.76) i (7.77) predstavljaju razvoj funkcija f i g u Fourierov red po sinusima na intervalu $[0, d]$,

$$g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \left(\frac{n\pi}{d} y \right), \quad f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \left(\frac{n\pi}{d} y \right), \quad 0 \leq y \leq d, \quad (7.79)$$

gdje su Fourierovi koeficijenti dani sa

$$\alpha_n = \frac{2}{d} \int_0^d g(y) \sin \left(\frac{n\pi}{d} y \right) dy, \quad \beta_n = \frac{2}{d} \int_0^d f(y) \sin \left(\frac{n\pi}{d} y \right) dy. \quad (7.80)$$

Sada iz jednadžbe (7.78) dobivamo

$$A_n = \frac{2}{d \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi b}{d} \right)} \int_0^d g(y) \sin \left(\frac{n\pi}{d} y \right) dy, \quad (7.81)$$

$$B_n = -\frac{2}{d \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi b}{d} \right)} \int_0^d f(y) \sin \left(\frac{n\pi}{d} y \right) dy. \quad (7.82)$$

Sličnim računom se može pokazati da je rješenje za $u_2(x, y)$ dano sa

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + D_n \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{b} (y - d) \right) \right] \sin \left(\frac{n\pi}{b} x \right) \quad (7.83)$$

gdje je

$$C_n = \frac{2}{b \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi d}{b} \right)} \int_0^b k(x) \sin \left(\frac{n\pi}{b} x \right) dx, \quad (7.84)$$

$$D_n = -\frac{2}{b \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi d}{b} \right)} \int_0^b h(x) \sin \left(\frac{n\pi}{b} x \right) dx. \quad (7.85)$$

U ovom postupku pretpostavili smo da rubne funkcije f , g , h i k zadovoljavaju uvjete kompatibilnosti (7.66)-(7.67). U primjenama ova pretpostavka često nije opravdana pa je potrebno modificirati postupak kako bi obuhvatili rubne uvjete koji ne iščezavaju u vrhovima pravokutnika. To se može napraviti dodavanjem harmonijskih polinoma funkcijama koje definiraju rubne uvjete. Promotrimo Dirichletov problem

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (7.86)$$

$$u(x, y) = G(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (7.87)$$

gdje je $G(x, y)$ neprekidna funkcija na rubu pravokutnika $\Omega = (0, b) \times (0, d)$. Naš zadatak je transformirati problem (7.86)-(7.87) u Dirichletov problem s neprekidnim rubnim uvjetima koji isčezavaju u vrhovima pravokutnika Ω . Rastavimo funkciju u na zbroj $u(x, y) = v(x, y) + P_2(x, y)$ gdje je $P_2(x, y)$ harmonijski polinom drugog reda. Opći oblik polinoma P_2 je

$$P_2(x, y) = a_1(x^2 - y^2) + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5 \quad (7.88)$$

gdje su $a_1, \dots, a_5$ proizvoljni koeficijenti. Funkcija v je harmonijska u Ω i u vrhovima pravokutnika zadovoljava

$$v(0, 0) = G(0, 0) - P_2(0, 0), \quad (7.89)$$

$$v(0, d) = G(0, d) - P_2(0, d), \quad (7.90)$$

$$v(b, 0) = G(b, 0) - P_2(b, 0), \quad (7.91)$$

$$v(b, d) = G(b, d) - P_2(b, d). \quad (7.92)$$

Ako koeficijene polinoma P_2 odaberemo tako da je

$$P_2(0, 0) = G(0, 0), \quad P_2(0, d) = G(0, d), \quad (7.93)$$

$$P_2(b, 0) = G(b, 0), \quad P_2(b, d) = G(b, d), \quad (7.94)$$

tada funkcija $v(x, y)$ zadovoljava Dirichletov problem

$$\nabla^2 v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (7.95)$$

$$v(x, y) = \tilde{G}(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (7.96)$$

gdje je $\tilde{G}(x, y) = G(x, y) - P_2(x, y)$ neprekidna funkcija na $\partial\Omega$ koja zadovoljava uvjete kompatibilnosti jer isčezava u vrhovima pravokutnika. Funkcija v se može odrediti postupkom kako je opisano ranije. Time dobivamo rješenje problema (7.86)-(7.87) u obliku

$$u(x, y) = v(x, y) + P_2(x, y). \quad (7.97)$$

Primijetimo da uvjeti (7.93)-(7.94) daju četiri jednadžbe za pet nepoznanica $a_1, \dots, a_5$ što daje beskonačno mnogo harmonijskih polinoma $P_2(x, y)$. Ovo nije u kontradikciji s činjenicom da je rješenje Dirichletovog problema jedinstveno jer izbor polinoma P_2 mijenja rubne uvjete za funkciju v pa time i samu funkciju v . Medjutim, rješenje (7.97) ostaje nepromijenjeno.

Primjer 7.1 *Odredite rješenje Laplaceove jednadžbe na pravokutniku $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ s rubnim uvjetima*

$$u(x, 0) = 1 + \sin(\pi x), \quad u(0, y) = 1 + y, \quad (7.98)$$

$$u(x, 1) = 2, \quad u(1, y) = 1 + y. \quad (7.99)$$

Primijetimo da su rubni uvjeti danu neprekidnom funkcijom na rubu pravokutnika, ali ne ispunjavaju uvjet kompatibilnosti. Neka je $u(x, y) = v(x, y) + P_2(x, y)$ gdje je $P_2(x, y) = a_1(x^2 - y^2) + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5$. Funkcija $v(x, y)$ zadovoljava rubne uvjete

$$v(x, 0) = 1 + \sin(\pi x) - P_2(x, 0), \quad v(0, y) = 1 + y - P_2(0, y), \quad (7.100)$$

$$v(x, 1) = 2 - P_2(x, 1), \quad v(1, y) = 1 + y - P_2(1, y). \quad (7.101)$$

Polinom $P_2(x, y)$ ćemo odabrati tako da rubni uvjeti za $v(x, y)$ iščezavaju u vrhovima pravokutnika:

$$v(0, 0) = 1 - P_2(0, 0) = 0, \quad (7.102)$$

$$v(0, 1) = 2 - P_2(0, 1) = 0, \quad (7.103)$$

$$v(1, 0) = 1 - P_2(1, 0) = 0, \quad (7.104)$$

$$v(1, 1) = 2 - P_2(1, 1) = 0. \quad (7.105)$$

Oдавде slijedi da koeficijenti polinoma zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$a_5 = 1, \quad -a_1 + a_4 + a_5 = 2, \quad a_1 + a_3 + a_5 = 1, \quad a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2. \quad (7.106)$$

Jedan od koeficijenata možemo odabrati po volji. Ako odaberemo $a_1 = 0$, onda je $a_2 = a_3 = 0$ i $a_4 = 1$ pa dobivamo

$$P_2(x, y) = 1 + y. \quad (7.107)$$

Sada su rubni uvjeti za funkciju $v(x, y)$ dani sa

$$v(x, 0) = \sin(\pi x), \quad v(0, y) = 0, \quad (7.108)$$

$$v(x, 1) = 0, \quad v(1, y) = 0. \quad (7.109)$$

Rubni uvjeti na stranicama pravokutnika $x = 0$ i $x = 1$ su homogeni pa metodu separacije konstanti možemo primijeniti na funkciju $v(x, y)$. Neka je $v(x, y) = P(x)Q(y)$. Tada $\Delta v = 0$ povlači

$$P''(x) - \lambda P(x) = 0, \quad Q''(y) + \lambda Q = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (7.110)$$

Iz rubnih uvjeta na stranicama $x = 0$ i $x = 1$ dobivamo

$$v(0, y) = P(0)Q(y) = 0, \quad v(1, y) = P(1)Q(y) = 0, \quad (7.111)$$

odnosno $P(0) = P(1) = 0$. Stoga funkcija $P(x)$ zadovoljava Sturm–Liouvilleov problem

$$P''(x) - \lambda P(x) = 0, \quad P(0) = P(1) = 0, \quad (7.112)$$

čije rješenje je dano sa

$$\lambda_n = -(n\pi)^2, \quad P_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n \geq 1. \quad (7.113)$$

Oдавде slijedi da funkcija $Q(y)$ zadovoljava jednadžbu

$$Q''(y) - (n\pi)^2 Q(y) = 0. \quad (7.114)$$

Opće rješenje jednadžbe (7.114) možemo zapisati kao superpoziciju linearno nezavisnih rješenja

$$Q_n(y) = A_n \operatorname{sh}(n\pi y) + B_n \operatorname{sh}(n\pi(y - 1)), \quad n \geq 1. \quad (7.115)$$

Sada je rješenje Laplaceove jednadžbe dano u obliku reda

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)Q_n(y) \quad (7.116)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{sh}(n\pi y) + B_n \operatorname{sh}(n\pi(y - 1)) \right] \sin(n\pi x). \quad (7.117)$$

Iz rubnog uvjeta na stranici $y = 0$ dobivamo

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh}(-n\pi) \sin(n\pi x) = \sin(\pi x) \quad (7.118)$$

što povlači $B_1 = -1/\operatorname{sh}(\pi)$ i $B_n = 0$ za $n \geq 2$. Slično, na stranici $y = 1$ imamo

$$v(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}(n\pi) \sin(n\pi x) = 0 \quad (7.119)$$

pa je $A_n = 0$ za sve $n \geq 1$. Dakle, funkcija $v(x, y)$ ima jednostavni oblik

$$v(x, y) = -\frac{1}{sh(\pi)} sh(\pi(y-1)) \sin(\pi x). \quad (7.120)$$

Konačno, rješenje početnog problema je dano sa

$$u(x, y) = v(x, y) + P_2(x, y) = 1 + y - \frac{1}{sh(\pi)} sh(\pi(y-1)) \sin(\pi x). \quad (7.121)$$

7.2.2 Kružne domene

Drugi primjer domene na kojoj Laplaceovu jednadžbu možemo riješiti separacijom varijabli je krug. Neka je $K_a \subset \mathbb{R}^2$ krug radijusa $a > 0$ sa središtem u ishodištu. Promotrimo Dirichletov problem

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in K_a, \quad (7.122)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial K_a, \quad (7.123)$$

gdje je g neprekidna funkcija na ∂K_a . Zbog simetrije domene uvedimo polarne koordinate $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ i definirajmo funkciju $w(r, \theta) = u(r \sin(\theta), r \cos(\theta))$. Laplaceovu jednadžbu u polarnom sustavu možemo dobiti na sljedeći način. Derivacije funkcije $w(r, \theta)$ su dane sa

$$\frac{\partial w}{\partial r} = u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta), \quad (7.124)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = u_{xx} \cos^2(\theta) + 2u_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta) + u_{yy} \sin^2(\theta), \quad (7.125)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = -u_x r \sin(\theta) + u_y r \cos(\theta), \quad (7.126)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= r^2 (u_{xx} \sin^2(\theta) + u_{yy} \cos^2(\theta)) - 2u_{xy} r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ &\quad - r (u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta)). \end{aligned} \quad (7.127)$$

Iz jednadžbi (7.125) i (7.127) slijedi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{r} (u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta)). \quad (7.128)$$

Supstitucijom jednadžbe (7.124) u (7.128) dobivamo

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}. \quad (7.129)$$

Dakle, Laplaceov operator u polarnom sustavu ima oblik

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (7.130)$$

pa Dirichletov problem glasi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 < r < a. \quad (7.131)$$

Na rubu kruga funkcija $w(r, \theta)$ zadovoljava uvjet

$$w(a, \theta) = g(a \cos(\theta), a \sin(\theta)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (7.132)$$

Obzirom da nas zanimaju neprekidna rješenja na krugu K_a (koja nemaju singularitet u ishodištu), potrebno je dodati uvjet da je $\lim_{t \rightarrow 0^+} w(r, \theta)$ konačan. Rješenje tražimo u obliku $w(r, \theta) = P(r)Q(\theta)$. Supstitucijom u jednadžbu (7.131) i separacijom varijabli dobivamo

$$\frac{r^2 P''(r) + r P'(r)}{P(r)} = \lambda, \quad \frac{Q''(\theta)}{Q(\theta)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (7.133)$$

Slijedi da funkcije $P(r)$ i $Q(\theta)$ zadovoljavaju obične diferencijalne jednadžbe

$$r^2 P''(r) + r P'(r) - \lambda P(r) = 0, \quad 0 < r < a, \quad (7.134)$$

$$Q''(\theta) + \lambda Q(\theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (7.135)$$

Granice $\theta = 0$ i $\theta = 2\pi$ predstavljaju istu točku na kružnici, stoga $Q(\theta)$ zadovoljava periodički rubni uvjet $Q(0) = Q(2\pi)$. Sturm–Liouvilleov problem (7.135) ima rješenja za vlastite vrijednosti $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ kojima su pridružene vlastite funkcije

$$Q_0(\theta) = A_0, \quad n = 0, \quad (7.136)$$

$$Q_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.137)$$

Ovo povlači da radijalni dio rješenja zadovoljava jednadžbu

$$r^2 P''(r) + r P'(r) + n^2 P(r) = 0. \quad (7.138)$$

Za $n = 0$ rješenje dobivamo direktnom integracijom,

$$P_0(r) = C_0 + D_0 \ln(r). \quad (7.139)$$

Za $n > 0$ rješenje tražimo u obliku $P(r) = r^k$ čime dobivamo indicijalnu jednadžbu $k^2 - n^2 = 0$, odnosno $k = \pm n$. Odavde slijedi da jednadžba ima opće rješenje

$$P_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.140)$$

Obzirom da traženo rješenje nema singularitet u $r = 0$, koeficijenti D_n isčezavaju pa dobivamo

$$P_0(r) = C_0, \quad n = 0, \quad (7.141)$$

$$P_n(r) = C_n r^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.142)$$

Opće rješenje Laplaceovu jednadžbe na krugu je dano superpozicijom

$$w(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(r) Q_n(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) \quad (7.143)$$

gdje su $\alpha_0 = 2A_0C_0$, $\alpha_n = A_nC_n$ i $\beta_n = B_nC_n$ koeficijenti koji su određeni rubnim uvjetom (7.132). Definirajmo funkciju $h(\theta) = g(a \cos(\theta), a \sin(\theta))$. Tada iz jednadžbi (7.132) i (7.143) slijedi

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) = h(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (7.144)$$

Ako je h neprekidna i po dijelovima C^1 na $[0, 2\pi]$, onda iz uvjeta $h(0) = h(2\pi)$ slijedi da Fourierov red (7.144) konvergira uniformno ka h . Fourierovi koeficijenti su dani sa

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.145)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.146)$$

Time je rješenje Dirichletovog problema na krugu potpuno određeno.

7.2.3 Poissonova formula

Relacije (7.143) i (7.145)–(7.146) daju rješenje Laplaceove jednadžbe na krugu u obliku beskonačnog reda. Isto rješenje se može napisati u integralnoj reprezentaciji koju nazivamo Poissonova formula. U toj reprezentaciji rješenje je dano kao integral

po rubu domene funkcije $h(\varphi)$ pomnožene s Poissonovom jezgrom. Supstitucijom jednadžbi (7.145) i (7.146) u (7.143) dobivamo

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^n h(\varphi) \cos(n(\theta - \varphi)) d\varphi \quad (7.147)$$

gdje smo koristili identitet $\cos(n(\theta - \varphi)) = \cos(n\theta) \cos(n\varphi) + \sin(n\theta) \sin(n\varphi)$. Definirajmo funkcije

$$f_n(\varphi) = \left(\frac{r}{a}\right)^n h(\varphi) \cos(n(\theta - \varphi)), \quad n \geq 1. \quad (7.148)$$

Funkcija $h(\varphi)$ je neprekidna na zatvorenom skupu $[0, 2\pi]$ pa postoji $M > 0$ takav da je $|h(\varphi)| \leq M$ za svaki $\varphi \in [0, 2\pi]$. Stoga je $f_n(\varphi)$ ograničena sa

$$\sup_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f_n(\varphi)| \leq \left(\frac{r}{a}\right)^n M. \quad (7.149)$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n$ konvergira za svaki $0 \leq r < a$ pa prema Weierstrassovom kriteriju (7.149) red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\varphi)$ konvergira uniformno na $[0, 2\pi]$. Stoga smijemo zamijeniti integral i sumu u jednadžbi (7.147) što povlači

$$w(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n(\theta - \varphi)) \right] d\varphi. \quad (7.150)$$

Naš sljedeći zadatak je odrediti sumu reda

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n(\theta - \varphi)). \quad (7.151)$$

Definirajmo $\rho = r/a$, $\alpha = \theta - \varphi$ i $z = \rho e^{i\alpha}$. Prema Moivreovoj formuli je $z^n = \rho^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$ što povlači

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n(\theta - \varphi)) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right). \quad (7.152)$$

Kako je $|z| = r/a < 1$, geometrijski red konvergira i vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = z/(1 - z)$. Stoga je

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1 + z}{2(1 - z)} = \frac{1 - \rho^2 + i2\rho \sin(\alpha)}{2(1 - 2\rho \cos(\alpha) + \rho^2)} \quad (7.153)$$

pa odvajanjem realnog dijela dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n(\theta - \varphi)) &= \frac{1 - \rho^2}{2(1 - 2\rho \cos(\alpha) + \rho^2)} \\ &= \frac{a^2 - r^2}{2(a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi) + r^2)}. \end{aligned} \quad (7.154)$$

Uvrštenjem jednadžbe (7.154) u (7.150) dobivamo Poissonovu formulu

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi) + r^2} h(\varphi) d\varphi. \quad (7.155)$$

Jednadžba (7.155) daje harmonijsku funkciju $w(r, \theta)$ na krugu K_a u ovisnosti o njezinim vrijednostima na rubu domene ∂K_a . Podintegralna funkcija

$$K(r, \varphi; a, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi) + r^2} \quad (7.156)$$

naziva se Poissonova jezgra. Primijetimo da za $r = 0$ dobivamo teorem srednje vrijednosti za harmonijske funkcije jer je u ishodištu

$$w(r = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial K_a} h ds. \quad (7.157)$$

Poissonova jezgra je primjer Greenove funkcije pomoću koje se rješenje diferencijalne jednadžbe može napisati u integralnoj reprezentaciji koja uključuje rubne uvjete. Greenove funkcije za Laplaceovu jednadžbu se mogu konstruirati za različite rubne uvjete i različite domene, kako konačne tako i beskonačne.