

Standardni Model

Fizika elementarnih čestica

Željko Antunović

Sadržaj:

1. Uvod	1
1.1. Elementarne čestice u Standardnom Modelu	12
1.2. Prirodni sustav jedinica	24
Zadaci	27
2. Elementi relativističke kinematike	29
2.1 Relativistička notacija	29
2.2 Lorentzove transformacije za energiju i impuls čestica	31
2.3 Procesi $2 \rightarrow 2$	33
2.4 Transformacija kuta raspršenja	36
2.5 Elementi teorije raspršenja	39
2.5.1 Perturbativni razvoj S-matrice	47
2.5.2 Udarni presjeci i širine raspada	52
2.5.3 Produkcija rezonanci	58
Zadaci	62
3. Lagrangiani i jednačbe gibanja u fizici elementarnih čestica	64
3.1 Lagrangian vektorskog polja	67
3.2 Lagrangian skalarnog polja	74
3.3 Lagrangian kompleksnog skalarnog polja	83
3.4 Noether teorem i očuvane struje	87
3.5 Lagrangian spinorskog polja	92
3.5.1 Diracova jednačba	92
3.5.2 Rješenja Diracove jednačbe za slobodne čestice	99
3.6 Lagrangiani polja spina $\frac{3}{2}$ (gravitina) i spina 2 (gravitona)	108
Zadaci	113
4. Baždarne (gauge) teorije	116
4.1 Interakcije u kvantnoj teoriji polja i Feynmanovi dijagrami	116
4.2 Gauge invarijantnost	132
4.3 Elementi teorije Lie grupa	143
4.3.1 Spin i SU(2) grupa	143
4.3.2 SO(n) i SU(n) grupe	147
4.4 Yang-Mills (ne-Abelove) gauge teorije za kvarkove i leptone	157
Zadaci	166
5. Higgs mehanizam	169
5.1 Spektralne relacije	169
5.2 Spontano narušenje diskretne simetrije	173
5.3 Spontano narušenje kontinuirane simetrije	175
5.4 Spontano narušenje lokalne gauge simetrije	177
Zadaci	180

6.	Lagrangian Standardnog Modela elementarnih čestica	181
6.1	Elektro-slabe interakcije	188
6.2	Spontano narušenje $SU(2) \times U(1)$ elektro-slabe lokalne gauge simetrije	196
6.3	Feynmanova pravila u SM	212
	Zadaci	216
7.	Raspršenje fermiona u kvantnoj elektrodinamici	217
7.1	Potencijalno raspršenje elektrona	217
7.2	Tragovi Diracovih γ -matrica	221
7.3	Elektron-muon raspršenje	228
7.4	Polarizacija fotona	236
7.5	Elektron-pozitron anihilacija	241
	Zadaci	245
8.	Raspadi Z bozona	246
	Zadaci	255
9.	Raspadi W^\pm bozona	256
	Zadaci	261
10.	Raspadi Higgs bozona h	262
	Zadaci	267
11.	Raspadi leptona	268
11.1	Raspadi tau leptona	274
	Zadaci	285
12.	Jake interakcije	286
12.1	Raspadi π^\pm piona	293
12.2	Raspršenje sa velikim transferom impulsa	305
	Zadaci	309
	Literatura	310

1. Uvod

Moderna teorija elementarnih čestica formulirana je početkom 70-ih godina XX stoljeća i naziva se Standardni Model (SM). Iako se iz prilično neinventivnog imena ne može zaključiti, Standardni Model nije model, već matematički precizna teorija gibanja sustava najmanjih djelića materije – elementarnih čestica, čija se predviđanja u potpunosti slažu sa rezultatima brojnih eksperimenata sa točnošću boljom od jednog promila.

Zahtjev Lorentz (Poincare) invarijantnosti u relativističkoj kvantnoj fizici određuje da je svaka čestica karakterizirana očuvanim veličinama – svojom masom (energijom mirovanja) i spinom (sopstvenim angularnim momentom). Uz, takođe očuvani, električni naboj čestice, masa i spin su kvantni brojevi koji određuju vrstu elementarne čestice.

Moguće vrijednosti spina čestice su kvantizirane: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ i 2 . Čestice polucijelog spina

nazivaju se fermioni, a cijelog bozoni, po imenima statističkih distribucija koje moraju zadovoljavati njihove valne funkcije: Fermi-Diracova i Bose-Einsteinova statistika. U jednom kvantnom stanju može postajati samo jedan fermion (Paulijev princip isključenja) i zato su fermioni kvantne generalizacije klasičnih čestica tvari. Nasuprot tome, u jednom kvantnom stanju može postojati proizvoljno mnogo bozona, pa su bozoni kvantne generalizacije valova koji prenose interakcije među česticama kao elektromagnetski valovi između električno nabijenih klasičnih čestica. U relativističkoj kvantnoj fizici opis gibanja sustava čestica zahtijeva uvođenje kvantnih polja i pridruženih kvantnih čestica. Intuitivno je lako razumjeti zašto je tako.

U klasičnoj fizici jednadžba gibanja čestice i sustava je II Newtonov zakon: $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$ ili ekvivalentno, Lagrangeove ili Hamiltonove jednadžbe gibanja, gdje se pretpostavlja da čestice djeluju nelokalnim silama jedna na drugu (djelovanje na daljinu). Najpoznatiji

primjer su gravitacijske: $\vec{F}_{ij} = -G_N \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \vec{r}_{ij}$ ili električne: $\vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \vec{r}_{ij}$ sile.

U relativističkoj fizici zbog konačnosti maksimalne brzine prijenosa signala, jedna čestica ne može trenutno djelovati na drugu udaljenu česticu. Umjesto djelovanja na daljinu, u relativističkoj fizici sve interakcije moraju biti lokalne (u jednoj točki prostor-vremena), što se osigurava uvođenjem odgovarajućih polja. Svaka čestica je izvor polja koje se konačnom brzinom širi kroz prostor i nosi energiju i impuls (i druge kvantne brojeve). Polje čestice interagira (djeluje silom) sa svakom drugom česticom koja se nađe u polju. Već u klasičnoj elektrodinamici, koja je Lorentz invarijantna klasična teorija polja, eliminirano je djelovanje na daljinu uvođenjem elektromagnetskih polja \vec{E} i \vec{B} . Na

primjer, električna sila između dvije nabijene čestice i i j je: $\vec{F}_{ij} = q_i \vec{E}_j(\vec{r}_i)$, gdje je elektrostatsko polje čestice j u točki gdje se nalazi čestica i : $\vec{E}_j(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \vec{r}_{ij}$.

U kvantnoj fizici djelovanje je kvantizirano i energiju i impuls (i druge kvantne brojeve) prenose diskretni kvanti koje identificiramo sa kvantnim česticama medijatorima interakcije (sile). Na primjer, u kvantnoj teoriji elektromagnetskih interakcija – kvantnoj elektrodinamici, elektromagnetska sila između dvije nabijene kvantne čestice (dva elektrona, na primjer) je razmjena (emisija i apsorpcija) kvanata elektromagnetskog polja, tj. čestica koje su medijatori elektromagnetske interakcije – fotona. Potpuno analogno, u SM se i jaka i slaba interakcija elementarnih čestica razumiju kao razmjena (emisija i apsorpcija) baždarnih (gauge) bozona koji su medijatori tih sila. Kvantne teorije polja su najjednostavnije fizikalne teorije koje istodobno omogućuju i kvantni i relativistički opis gibanja sustava elementarnih čestica.

Ako želimo razmatrati prijelaz sa klasične na kvantnu i relativističku fiziku i konačno na kvantnu teoriju polja, moramo biti pažljivi sa konceptima raznih fizikalnih veličina. Princip relativnosti zahtijeva da su sve fizikalne veličine kovarijantne – Lorentz tenzori, a kvantna mehanika zahtijeva da su fizikalne veličine Hermitski operatori koji djeluju u prostoru stanja fizikalnog sustava. Neke fizikalne veličine imaju vrlo jednostavna poopćenja iz klasične na kvantnu i relativističku fiziku, dok ih neke druge nemaju uopće. Masa čestice je primjer fizikalne veličine koja se jednostavno generalizira na sva područja moderne fizike. U klasičnoj fizici masa čestice je konstantni skalar, a u relativističkoj kvantnoj teoriji masa čestice je skalarni Lorentz invarijantni kvantni broj čestice. Položaj čestice je sličan jednostavan primjer. U klasičnoj fizici položaj čestice u trenutku vremena t određen je 3-dimenzionalnim radijus vektorom $\vec{r}(t)$. U relativističkoj fizici položaj čestice određen je 4-dimenzionalnim vektorom $x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct, \vec{r})$. U kvantnoj mehanici položaj čestice postaje operator $\hat{\vec{r}}$.

Ali, već koncept brzine čestice, koja je 3-dimenzioni vektor u klasičnoj fizici $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, se zbog vremenske derivacije (precizno, zbog veze prostornih i vremenskih koordinata u Lorentzovim transformacijama, mora se derivirati po svojstvenom vremenu dt čestice koje je Lorentz skalar) mora pažljivo definirati, tako da je 4-dimenziona relativistička

generalizacija brzine čestice $(\gamma c, \gamma \vec{v})$, gdje je $\gamma = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ relativistički faktor čestice,

komplicirana veličina koja se ne koristi često. Heisenbergove relacije neodređenosti kvantne mehanika dodatno zahtijevaju da operatori položaja i brzine čestice ne komutiraju, tj. nisu simultano mjerljive veličine. Impuls $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} = m\vec{v}$ klasične čestice može se definirati za relativističku česticu kao 3-dimenzioni vektor $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, ali ta veličina nije Lorentz vektor. Relativistička fizika zahtijeva poopćenje koje znači nužnu vezu energije i impulsa čestice $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$ čiji kvadrat je Lorentz

invarijanta za svaku česticu $p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = c^2 m^2$. Za svaku česticu onda, osim u nerelativističkom limesu $v \ll c$, nema puno smisla govoriti o potencijalnoj energiji. Ako po analogiji sa klasičnom fizikom želimo insistirati da ukupnu energiju (Hamiltonian) relativističke čestice $H = E = H_0 + H_{\text{int.}} = \gamma mc$ rastavimo na kinetičku i potencijalnu energiju razvojem u red faktora γ dobijamo

$$H = E = mc^2 + \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + \frac{9}{24c^2} \vec{v}^4 + \frac{225}{720c^4} \vec{v}^6 + \dots + H_{\text{int.}} = T + \left(H_{\text{int.}} + mc^2 + \frac{9}{24c^2} \vec{v}^4 + \frac{225}{720c^4} \vec{v}^6 + \dots \right).$$

U nerelativističkom limesu energija čestice postaje $E \approx T + H_{\text{int.}} (\frac{v}{c} \rightarrow 0) + mc^2$, što do na konstantu mc^2 , možemo interpretirati kao energiju klasične čestice $E = T + U$. Slični problemi postoje zbog druge vremenske derivacije sa konceptom akceleracije čestice, posebno u kvantnoj teoriji. Zato se, pogotovo u kovarijantnoj formulaciji kvantne teorije polja, praktično nikad ne koriste koncepti akceleracije, potencijala ili sile na česticu i govori se o interakciji, tj. međudjelovanju, čestica.

Kvantne teorije polja su specijalna vrsta kvantno mehaničkih teorija koje opisuju ponašanje elementarnih čestica. Kao i u svakoj kvantnoj teoriji, osnovni objekti teorije su: skup stanja fizikalnog sustava koja čine Hilbertov prostor i Hamiltonian fizikalnog sustava H koji opisuje vremensku evoluciju sustava u tom Hilbertovom prostoru. Hamiltonian sustava je zbroj Hamiltoniana H_0 slobodnog sustava polja i Hamiltoniana interakcije H_{int}

$$H = H_0 + H_{\text{int.}}$$

Postoje određeni, vrlo generalni, minimalni uvjeti koje mora ispunjavati svaka kvantna teorija polja da bi potencijalno bila korektna fizikalna teorija. Ti zahtjevi se mogu iskazati kao pet uvjeta koje mora zadovoljavati Hamiltonian svakog kvantnog sustava H :

1. Unitarnost – očuvanje vjerojatnosti, zahtijeva da operator vremenske evolucije sustava

$$U = e^{-iHt},$$

bude unitaran, što znači da Hamiltonian H mora biti Hermitski operator: $H = H^\dagger$. Ovim se osigurava da je zbroj vjerojatnosti svih mogućih neovisnih događaja u bilo kojem trenutku vremena jednak jedinici.

2. Klaster dekompozicija – mikrokauzalnost i lokalnost, zahtijeva neovisnost fizike u različitim točkama prostora u jednom trenutku vremena. Ovo zahtijeva da se amplituda dva prostorno odvojena događaja separira u produkt neovisnih amplituda, što vodi na dva zahtjeva:

Mikrokauzalnost – fizikalne opservable moraju komutirati u prostorno separiranim točkama, a vremenska evolucija mora očuvavati ovo svojstvo. Uvjet je ispunjen ako je ukupna energija sustava – Hamiltonian, zbroj energija stupnjeva slobode gibanja u svakoj pojedinoj točki prostora, što se naziva zahtjevom

Lokalnost – Hamiltonian je integral Hamiltove gustoće \mathcal{H}

$$H = \int d^3x \mathcal{H}.$$

3. Poincare invariantnost – invarijantnost Hamiltoniana sustava pod djelovanjem Poencare transformacija, tj. pri translacijama, rotacijama i Lorentz-ovim transformacijama. Ovaj zahtjev osigurava važenje principa relativnosti. U kvantnoj mehanici to znači postojanje očuvanih veličina koje su generatori Poencare grupe: četvero-impuls i angularni moment, P_μ i $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$, tako da je ukupna energija $H = P_0$. Čestična stanja se transformiraju kao unitarna reprezentacija Poencare grupe generirana operatorima

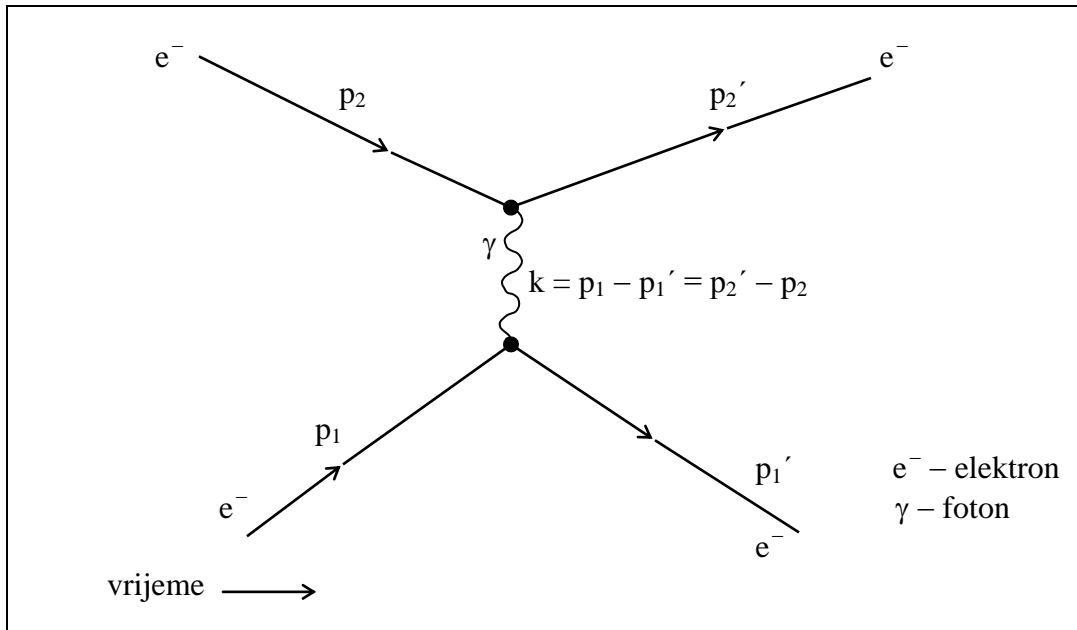
$$U(a,w) = \exp \left[-ia^\mu P_\mu + \frac{i}{2} w^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \right],$$

ovih očuvanih veličina. Stanja čestica $|\vec{p}, m, s, s_z; j\rangle$ određena su impulsom \vec{p} , masom m , spinom s , projekcijom spina s_z , kao i mogućim dodatnim internim kvantnim brojevima j .

4. Stabilnost – Hamiltonian H sustava mora biti ograničen odozdo, tj. mora postojati stanje minimalne energije $E_0 > -\infty$. Ovaj zahtjev osigurava stabilnost kvantnog stanja najniže energije. Ako uvjet ne bi bio ispunjen, sve kvantne čestice bi stalno „padale“ ka stanjima niže energije. U teoriji elementarnih čestica stanje minimuma Hamiltonijana sustava naziva se vakuum.
5. Renormalizabilnost – da bi efektivna fizikalna teorija bila dobra aproksimacija na skali energija $E \leq \Lambda$ (tj. na skali duljina $d \geq \frac{\hbar c}{\Lambda}$), mora biti vrlo slabo osjetljiva na nepoznatu fiziku na većim energijama $E \geq \Lambda$. To je uvijek zajamčeno ako je teorija renormalizabilna, jer se tada Λ pojavljuje samo u malom broju neizračunljivih parametara teorije (mase i naboji čestica) čije stvarne vrijednosti možemo uzeti iz eksperimenta. Renormalizabilnost osigurava da su predikcije teorije na niskim energijama praktično neovisne o nepoznatoj teoriji na visokim energijama $E \geq \Lambda$. Na primjer, kvantna elektrodinamika elektrona i fotona je fizikalno korektna teorija samo do energije $E \leq 2m_\mu c^2 \sim 200 \text{ MeV}$, jer iznad te energije više ne možemo zanemarivati muone koji se mogu kreirati u parovima $\mu^- \mu^+$. Na višim energijama korektna teorija je kvantna elektrodinamika elektrona, muona i fotona koja je dobra efektivna teorija do energije praga za kreaciju para piona, itd. Zahtjev renormalizabilnosti ograničava moguće tipove interakcija među elementarnim česticama, tj. oblik Hamiltoniana interakcije H_{int} .

Renormalizabilnosti je još uvijek predmet aktivnog istraživanja u teorijskoj fizici. Iako je renormalizabilnost vrlo poželjno svojstvo kvantne teorije polja, postoje odlične fizikalne teorije koje nisu renormalizabilne – opća teorija relativnosti, na primjer.

Najbolji primjer ovakve teorije je kvantna elektrodinamika (QED – Quantum Electrodynamics) koja je prva otkrivena renormalizabilna kvantna teorija polja. U kvantnoj elektrodinamici najjednostavnija interakcija između dvije nabijene čestice grafički se prikazuje Feynmanovim dijagramom, kao na Slici 1.1 Feynmanovi dijagrami su izvrstan način vizualizacije procesa između elementarnih čestica.



Slika 1.1

Elektron e^- četvero-impulsa p_1 u početnom stanju u jednoj točki prostor-vremena (lokalnost interakcije) emitira foton γ impulsa k_μ i skreće, tj. mijenja energiju i impuls u skladu sa zakonima očuvanja $p_1 = p_1' + k$. Drugi elektron u početnom stanju impulsa p_2 apsorbira taj foton, u nekoj drugoj točki prostor-vremena, i takođe mijenja svoj 4-impuls u $p_2' = p_2 + k$. Ukupan rezultat je transfer određene energije i impulsa (četvero-momenta k_μ) između dva elektrona: $p_1 - p_1' = p_2' - p_2 = k$, kao da je jedan elektron djelovao elektromagnetskom silom na drugi.

Feynmanovi dijagrami nisu samo način predočavanja procesa među elementarnim česticama, već što je mnogo važnije, omogućuju da se svakom pojedinom procesu pridruži kvantno mehanička amplituda – matrični element tog procesa. U svakoj kvantnoj teoriji polja postoje Feynmanova pravila koja određuju kako se generiraju (crtaju) svi mogući dijagrami i kako se za svaki dijagram računa kvantna vjerojatnost takvog procesa – prijelaza iz početnog i u krajnje f stanje. U kvantnoj elektrodinamici, matrični element za Feynmanov dijagram sa Slike 1.1, u nerelativističkom limesu, daje Coulombov zakon.

Specijalno važne za teoriju elementarnih čestica su takozvane baždarne (gauge) teorije – to su renormalizabilne kvantne teorije polja u kojima se čestice reprezentiraju titrajima odgovarajućih kvantnih polja, a interakcije (sile) među česticama su kompletno određene simetrijom teorije. Najbolji primjer je opet kvantna elektrodinamika.

Ako želimo relativističku kvantnu teoriju u kojoj za kvantno polje elektrona važi zakon očuvanja naboja (u svakoj točki prostor-vremena), prema Noether teoremu, moramo odabrati lokalno gauge invarijantnu teoriju polja čiji Lagrangian interakcije onda nužno sadrži još jedno dodatno polje gauge bozona koji je medijator elektromagnetskih interakcija tj., polje fotona. Električni naboj u takvoj teoriji nije samo očuvana i kvantizirana veličina koja karakterizira vrstu čestica, već i veličina koja određuje jakost elektromagnetske interakcije između nabijenih čestica i fotona (jakost vezanja), tj. između samih nabijenih čestica.

Do otkrića SM precizni proračuni vjerojatnosti fizikalnih procesa među elementarnim česticama bili su mogući samo za elektromagnetske procese u kvantnoj elektrodinamici. Renormalizabilnost lokalnih gauge teorija (eliminacija divergencija u teoriji) koju je 1971. dokazao Gerardus 't Hooft, omogućila je da se u SM rade pouzdani proračuni svih fizikalnih procesa sa elementarnim česticama, ne samo elektromagnetskih, već i procesa sa jakim i slabim interakcijama. Slaba interakcija odgovorna je za raspad nestabilnih elementarnih čestica – radioaktivni β -raspad, na primjer, a jaka interakcija osigurava stabilnost nukleona i atomskih jezgri. Svojstva slabe i jake interakcija su veoma neobična tako da su potpuno strana našem svakodnevnom iskustvu iz makro-svijeta. Zato je trebalo puno napora velikog broja istraživača i moralo je proteći više od dvadeset godina od otkrića kvantne elektrodinamike 1949. do otkrića SM elementarnih čestica, iako su obje renormalizabilne kvantne teorije polja.

Danas se smatra da su sve četiri osnovne interakcije među elementarnim česticama: jaka, elektromagnetska, slaba i gravitacijska (poredane po jakosti), upravo gauge interakcije čiji su medijatori odgovarajući baždarni bozoni. Standardni Model (SM) je lokalno gauge invarijantna kvantna teorija polja koja precizno i u skladu sa brojnim eksperimentima, opisuje tri od ovih interakcija: jaku (kromodinamičku) i elektroslabu – ujedinjenu elektromagnetsku i slabu interakciju.

Neka od najvažnija postignuća SM su:

- razumijevanje jakih interakcija što omogućuje proračun svojstava nukleona – protona i neutrona, te ostalih hadrona sa točnošću od 2-3 % ,
- razumijevanje svojstava slabih interakcija,
- teorijsko predviđanje postojanja i proračun svojstava W^{\pm} i Z gauge bozona koji su medijatori slabih interakcija u skladu sa opažanjima,
- teorijsko predviđanje postojanja i proračun svojstava t-kvarka,
- koncept spontanog narušenja simetrije i Higgsov mehanizam generiranja masa čestica,

- ujedinjenje slabih i elektromagnetskih interakcija u jednu elektroslabu interakciju,
- proračun stanja cjelokupne materije u ranom svemiru, što uz jednadžbe opće teorije relativnosti, daje koherentnu sliku cjelokupne evolucije svemira u skladu sa astronomskim opažanjima.

Više od 30 teorijskih i eksperimentalnih fizičara nagrađeno je Nobelovom nagradom za svoja istraživanja koja su direktno vezana za SM u zadnjih pedesetak godina i to:

God.	Laureat/i	Postignuće
1957	T. D. Lee i C. N. Yang	Narušenje parnosti
1960	D. A. Glaser	Maglena komora
1965	R. P. Feynman, J. S. Schwinger i S. I. Tomonaga	Kvantna elektrodinamika
1968	L. W. Alvarez	Otkriće rezonanci
1969	M. Gell-Mann	Kvark model
1976	B. Richter i S. C. C. Ting	Otkriće J/ψ čestice
1979	S. L. Glashow, A. Salam i S. Weinberg	Elektro-slabo ujedinjenje
1980	J. W. Cronin i V. L. Fitch	CP narušenje
1982	K. G. Wilson	Kritični fenomeni
1984	C. Rubbia i S. Van Der Meer	Otkriće W^\pm i Z bozona
1988	L. M. Lederman, M. Schwartz i J. Steinberger	Otkriće da je $\nu_\mu \neq \nu_e$
1990	J. I. Friedman, H. W. Kendall i R. E. Taylor	Duboko neelastično raspršenje
1992	G. Charpak	Čestični detektori (wire chamber)
1995	M. L. Perl i F. Reines	Otkriće neutrina
1999	G. 't Hooft i M. J. G. Veltman	Elektro-slabe interakcije
2004	D. J. Gross, H. D. Politzer i F. Wilczek	Asimptotska sloboda
2008	Y. Nambu, M. Kobayashi i T. Maskawa	Narušenje simetrije

Buduća istraživanja na novom LHC akceleratoru u CERN-u vjerojatno će nastaviti ovaj popis.

Pored toga, SM je ukazao na moguće pravce formuliranja neke buduće, potpunije teorije elementarnih čestica na višim energijama. Najvažniji primjer su supersimetrične (SUSY) teorije i teorije velikog ujedinja (Grand Unified Theories – GUT).

Ipak, bez obzira na sva postignuća, fizičari su sigurni da SM nije konačna teorija elementarnih čestica, već samo vrlo dobra aproksimativna teorija na niskim energijama jer postoji nekoliko važnih problema na koje unutar SM nije moguće naći odgovor.

Na primjer, gravitacijska interakcija nije uključena u SM. Na skalama duljina dostupnim našim današnjim instrumentima (precizno, na skali duljina koje su daleko veće

od Planckove duljine $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}$, tj. na energijama daleko manjim od Planck-ove energije $E_P = 10^{19} \text{ GeV}$) to nije nikakav problem, jer su gravitacijske interakcije među elementarnim česticama potpuno zanemarive. Gravitacijska sila između dva elektrona je $\sim 10^{40}$ puta slabija od električne – Zadatak 1.1. Kako u teoriju uključiti gravitaciju i zašto postoji takav kolosalni raspon jakosti fundamentalnih interakcija je veliki neriješeni problem teorijske fizike.

Iako SM nije ultimativna teorija elementarnih čestica, bilo koja buduća potpunija teorija, u aproksimaciji kad se mogu zanemariti gravitacijske interakcije, tj. na niskim energijama $E \sim 200\text{--}300 \text{ GeV}$, mora rezultirati efektivnom teorijom koja je upravo SM.

Da se razumije ponašanje materije na skali najmanjih duljina (najvećih danas dostupnih energija $\sim 2 \text{ TeV}$) treba znati koje elementarne čestice postoje i kakve su njihove interakcije. U eksperimentima se onda pažljivo pripremljenim inicijalnim snopovima elementarnih čestica (tačno određene energije, impulsa, spina, naboja, ...) dozvoljava da kontrolirano međusobno interagiraju, te se u detektorima mjere kvantni brojevi (4-impulsi, naboji, spin, itd.) finalnih čestica. Takvi eksperimenti omogućuju da se odredi:

- **Spektar stanja čestica** – je skup osnovnih jednočestičnih stanja koja opisuju individualne slobodne čestice pojedine vrste određene odgovarajućim kvantnim brojevima. Čestice mogu biti elementarne ili neka njihova vezana stanja. Ta stanja su svojstvena stanja Hamiltoniana sustava koji određuje njihovu vremensku evoluciju.
- **Raspršenje čestica** – u sudarima snopova čestica moguće je otkriti nove čestice i odrediti svojstva interakcija među česticama. Inicijalni snopovi čestica su uvijek ili elektroni ili protoni koji se dobijaju ionizacijom atoma vodika. Propuštanjem takvih snopova kroz neku metu dobijaju se snopovi različitih sekundarnih čestica (muona, piona, ...) koji se takođe koriste u eksperimentima raspršenja. Raspršenje se opisuje kvantno mehaničkom amplitudom procesa. Teorija omogućuje da se izračuna amplituda (matrični element) procesa raspršenja koja je Lorentz invarijantna kompleksna funkcija kvantnih brojeva čestica u inicijalnom i finalnom stanju. Kvadrat apsolutne vrijednosti amplitude daje vjerojatnost tog procesa.

- Produkcija rezonanci** – je najčešći način otkrivanja novih čestica. U sudarima inicijalnih čestica mogu nastati nove, izolirane čestice – rezonancije, koje žive dovoljno dugo da izađu iz regiona interakcije u raspršenju i zatim se u nezavisnom procesu raspadnu u finalne čestice. Rezonancije opisujemo masom (energijom) m i vremenom života $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma_{\text{tot}}}$, koji je inverzna vrijednost ukupne širine raspada Γ_{tot} rezonancije. Masa i spektar stanja rezonancija određen je obično slobodnim dijelom Hamiltoniana sustava (kinetička energija polja) H_0 i najčešće je istog oblika kao i spektar stanja stabilnih elementarnih čestica. Raspad rezonancija određen je ostatkom Hamiltoniana sustava, tj. Hamiltonijanom interakcija (potencijalna energija) H_{int} . Tipičan primjer je produkcija Z bozona neutralnih slabih interakcija $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow \bar{f}f$ u elektron-pozitron sudarima, koji se potom raspadnu u fermion-antifermion par. Z -bozoni su upravo tako i otkriveni u svibnju 1983. u proton-antiproton sudarima na SpS akceleratoru u CERN-u.
- Produkcija mlazova (jets)** – u sudarima na vrlo visokim energijama često nastaje veliki broj jako interagujućih čestica u finalnom stanju. Amplituda procesa koja bi uzimala u obzir sve finalne čestice, čak i kad bi je bili u stanju izračunati, potpuno bi opskurirala neke globalne karakteristike procesa. Zato se u takvim procesima koristi funkcija raspodjele koja sve jako interagujuće čestice sličnog 4-impulsa u finalnom stanju grupira u mali broj (jedan, dva, tri ili ponekad četiri) mlaza (jets) koji svaki potiču samo od jednog kvarka ili gluona nastalog u inicijalnom sudaru. Na primjer, u elektron-pozitron sudarima može nastati par kvark-antikvark visokih energija koji praktično trenutno hadroniziraju (raspadaju se u puno hadrona) grupiranih u dva mlaza j_1 i j_2 u finalnom stanju $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow j_1 + j_2$ koji odlaze u različite hemisfere detektora.

Pošto smo ukratko opisali veličine koje se dobijaju iz eksperimenata, razmotrimo u najgrubljim crtama kako se od klasične fizike poopćenjima dolazi do kvantne teorije polja. To je ujedno i povijesni put razvoja teorijske fizike koji je doveo do otkrića SM elementarnih čestica.

Jednadžbe gibanja diskretnog sustava čestica opisanog generaliziranim koordinatama $q_i(t)$ čije je djelovanje: $I = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i, t)$, gdje je Lagrangian sustava $L = T - U$, slijede iz Hamiltonovog principa (principa minimalnog djelovanja)

$$\delta I = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0.$$

Zamjenimo li generalizirane brzine novim varijablama, generaliziranim momentima koji se definiraju kao

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} ,$$

Hamiltonian $H = T + U$ i Lagrangian $L = T - U$ postaju ekvivalentni načini opisivanja sustava vezani Legendreovom transformacijom

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L .$$

Jednadžba gibanja u nerelativističkoj kvantnoj fizici, koja je analog II Newtonovog zakona iz klasične fizike, je Schrödingerova jednadžba za valnu funkciju ψ sustava čestica

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi ,$$

gdje je kvantni Hamiltonijan $H = T + U$. Interakcije među česticama (sile) uključene su preko potencijalne energije U .

U teoriji polja generalizirane koordinate postaju polja ϕ_i koja su kontinuirane funkcije točke u prostor-vremenu $\phi_i = \phi_i(x^\mu)$, a sustav se opisuje Lagrangeovom gustoćom: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, x^\mu)$ koja je funkcija polja i njihovih prvih parcijalnih derivacija.

Osnovni uvjeti 1. – 5. koje mora ispunjavati fizikalna teorija polja zahtijevaju da je djelovanje sustava oblika $I = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}$, što osigurava lokalnost. Hamiltonov princip (princip minimalnog djelovanja) daje jednadžbe gibanja za polja ϕ_i koje su upravo Lagrangeove jednadžbe

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 . \quad (1.1)$$

Lagrangeova gustoća \mathcal{L} za svako polje ϕ_i je zbroj Lagrangeove gustoće za slobodno polje $\mathcal{L}_{sl.}$ i gustoće Lagrangiana interakcije $\mathcal{L}_{int.}$ samointerakcije polja ϕ_i ili njegove interakcije sa drugim poljima $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{sl.} + \mathcal{L}_{int.}$.

Unitarnost je osigurana ako je Lagrangeova gustoća \mathcal{L} Hermitski operator (realan ili zbroj dva kompleksno konjugirana člana).

Translatorna invarijantnost zahtijeva da \mathcal{L} ne zavisi eksplicitno od x^μ .

Lorentz invarijantnost zahtijeva da Lagrangeova gustoća $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$ bude Lorentz skalar konstruiran od polja $\phi_i(x^\mu)$ koja se transformiraju kao konačno dimenziona reprezentacija Lorentzove grupe (to su polja spina $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ i 2).

Kauzalnost zahtijeva da veličine bilinearne po poljima (kao Hamiltonian) komutiraju u prostorno separiranim točkama, što je moguće samo ako za svaku česticu postoji i antičestica iste mase i suprotnih naboja koja ima identične interakcije. Posljedica je neočuvanje ukupnog broja čestica, jer postoje procesi kreacije i anihilacije čestica, i važenje spin-statistika teorema koji zahtijeva da bozonska polja komutiraju, a fermionska antikomutiraju u prostorno separiranim točkama.

Stabilnost zahtijeva da Lagrangeova gustoća \mathcal{L} sadrži samo prve parcijalne derivacije polja ϕ_i , što osigurava da jednačbe gibanja sadrže najviše druge vremenske derivacije polja ϕ_i .

Svi članovi u Lagrangeovoj gustoći \mathcal{L} moraju imati istu dimenziju (masa)⁴. Renormalizabilnost zahtijeva da svaki parametar u Lagrangeovoj gustoći ima dimenzije pozitivne potencije mase. Zato član oblika $c O(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$ u Lagrangianu \mathcal{L} ima koeficijent c dimenzije (masa)^d gdje mora biti $d \leq 4$, jer su dimenzije operatora ϕ_i i ∂_μ pozitivne. Renormalizabilnost ograničava oblik članova u Lagrangianu interakcije na operatore O dimenzija $d \leq 4$, a takvih je u pravilu svega nekoliko.

Da bi se razumjelo ponašanje materije u svemiru treba identificirati najmanje sastavne djeliće sustava – elementarne čestice, zatim poznavati interakcije (sile) tih elementarnih čestica, tj. Lagrangian (ili Hamiltonijan) sustava koji onda određuje jednačbe gibanja.

Cilj nam je naći Lagrangian Standardnog Modela \mathcal{L}_{SM} elementarnih čestica i razumjeti kako se računaju vjerojatnosti fizikalnih procesa među elementarnim česticama.

Razmotrimo prvo koje su to elementarne čestice čije gibanje opisuju Standardni Model.

1.1 Elementarne čestice u Standardnom Modelu

Elementarne čestice su realni kvantni objekti koji se u svim eksperimentima ponašaju kao materijalne točke, bez ikakve unutarnje strukture i bez dimenzija. Ako i imaju dimenzije različite od nule, one su manje od 10^{-18} m, što je rezolucije naših najboljih «mikroskopa» – akceleratora (ubrzivača) čestica. Krajem 2009. će u CERN-u, Ženeva proraditi novi akcelerator LHC (Large Hadron Collider) čija rezolucija će biti bolja za red veličine, oko 10^{-19} m do 10^{-20} m.

Veza prostorne rezolucije i energije je nužna posljedica specijalne teorije relativnosti i kvantne mehanike. Da bi se razlučila dva događaja na prostornom rastojanju Δx potrebno je minimalno vrijeme $t_{\min} = \Delta x/c$ neophodno za razmjenu signala između te dvije točke. Neodređenost vremena Δt mora biti manja od samog minimalnog vremena, tj.

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}.$$

Zbog kvantno mehaničkih relacija neodređenosti

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \text{slijedi} \quad \Delta E \geq \frac{\hbar c}{2 \Delta x}.$$

Kako je

$$\hbar c = 1.97327 \times 10^{-16} \text{ GeVm} = 3.16153 \times 10^{-26} \text{ Jm} \quad \text{tj.} \quad \hbar c = 2 \times 10^{-16} \text{ GeVm},$$

vrijedi

$$\Delta E \geq \frac{10^{-16} \text{ GeVm}}{\Delta x}.$$

Bolja prostorna rezolucija nužno zahtijeva više energije, pa tako imamo:

- prostorna rezolucija $\Delta x = 10^{-10}$ m \Leftrightarrow energiju $E \sim 10^3$ eV – skala atomske fizike,
- prostorna rezolucija $\Delta x = 10^{-15}$ m \Leftrightarrow energiju $E \sim 100$ MeV – skala nuklearne fizike,
- prostorna rezolucija $\Delta x = 10^{-20}$ m \Leftrightarrow energiju $E \sim 10$ TeV – skala LHC,
- prostorna rezolucija $\Delta x = 10^{-35}$ m \Leftrightarrow energiju $E \sim 10^{19}$ TeV – Planckova skala.

Želimo li bolji „mikroskop“ moramo graditi sve veće ubrzivače čestica.

Elementarne čestice u SM su: **kvarkovi, leptoni, gauge bozoni i Higgs bozon.**

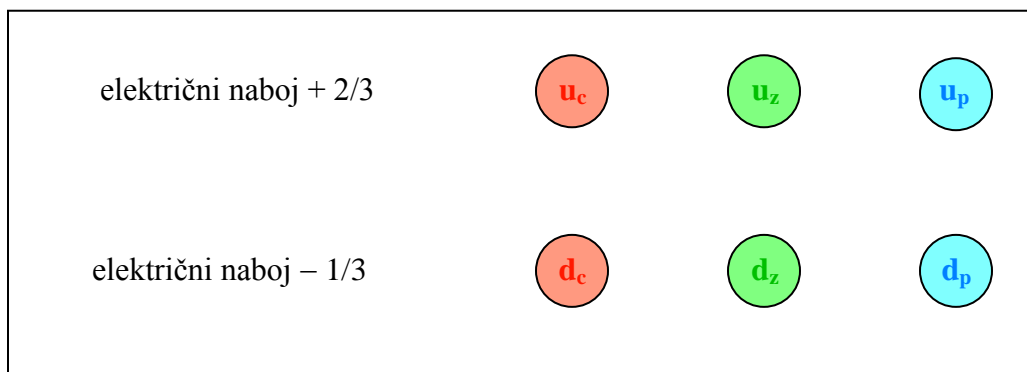
- **Kvarkovi**

Kvarkovi su fermioni (spin $\frac{1}{2}$) koji pored električnog naboja nose i kromodinamički (QCD) naboj koji se naziva boja (color) jer može imati tri različite vrijednosti, recimo: crvena, zelena i plava (kao tri primarne boje). Zato što nose električni naboj, kvarkovi imaju elektromagnetske interakcije, a zato što nose boju (QCD naboj) imaju jake interakcije. Teorija elektromagnetskih interakcija naziva se kvantna elektrodinamika (Quantum Electrodynamics – QED). Analogno, teorija jakih interakcija naziva se kvantna kromodinamika (Quantum Chromodynamics – QCD). Jake interakcije, tj. razmjena obojanih gluona, vezuju kvarkove u triplete koji se nazivaju barioni – najvažniji su proton i neutron koji grade nukleuse atoma. Postoji šest različitih kvarkova – ili se kaže da postoji 6 različitih kvarkovskih okusa (flavor), aranžiranih u tri dubleta (ili tri familije ili obitelji)

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

sa imenima: (u-up, d-down); (c-charm, s-strange); (t-top, b-bottom) ili: (gornji, donji); (šarm, strani); (vrh, dno). Očito je najbolje koristiti najjednostavniju nomenklaturu: u-kvark, s-kvark, itd. Od 6 kvarkova posljednji je otkriven t-kvark 1995. u Fermilab-u, pokraj Čikaga. Kvarkovi u gornjem redu dubleta: u, c i t imaju električni naboj $+\frac{2}{3}e$, a u donjem redu: d, s i b imaju naboj $-\frac{1}{3}e$, gdje je e kvant električnog naboja: $e = 1.60217653(14) \times 10^{-19} \text{C}$. Kvarkovi nose još i barionski kvantni broj $B = +\frac{1}{3}$, tako da barioni, koji se sastoje od po tri kvarka, imaju barionski broj $B = +1$. Proton je (uud) triplet, a neutron (udd) triplet.

Prva familija kvarkova shematski je prikazana na Slici 1.2.



Slika 1.2

U relativističkoj kvantnoj fizici svaka čestica ima svoju antičesticu, koja ima isti masu i spin, a sve ostale kvantne brojeve suprotnog znaka u odnosu na česticu. Antikvark se označava potezom iznad imena kvarka. Na primjer, u_c -antikvark je \bar{u}_c (u_c -bar), i to je čestica spina $\frac{1}{2}$, električnog naboja $-\frac{2}{3}e$, barionskog broja $-\frac{1}{3}$ i «anti-crvene» boje (boje komplementarne crvenoj), što znači da je vezano stanje ($u_c\bar{u}_c$) kolor singlet, tj. ne nosi boju. Čestice koje su vezana stanja kvark-antikvark nazivaju se mezoni.

U teoriji jakih interakcija zahtijeva se postojenje samo kolor singlet stanja, tj. kvarkovska stanja čiji je QCD naboj nula (stanja bez boje). Ovaj zahtjev se naziva zatočenje boje (color confinement), jer obojana stanja mogu postojati samo na «mikroskopskim» udaljenostima unutar bariona i/ili mezona čije su dimenzije oko 10^{-15} m. Na većim rastojanjima (nižim energijama) postoje samo jako vezana stanja kvarkova – barioni i mezoni, koji se jednim imenom nazivaju hadroni. Primjer neobojanih kvarkovskih stanja su stanja potpuno simetrična ili potpuno antisimetrična u odnosu na sve tri boje.

Primjer: Kvarkovska kolor singlet stanja boje

Ilustrirajmo postojanje kvantnih stanja mezona i bariona za koja je intuitivno očigledno da su kolor singleti jer sadrže jednake frakcije svake pojedine boje. Kompletan provjera zahtijeva poznavanje reprezentacije generatora $SU_c(3)$ grupe jakih interakcija koji su operatori boje u QCD i ostavićemo je za kasnije.

Neka su normirana i međusobno ortogonalna svojstvena stanja kvarka bilo kojeg okusa crvene, zelene i plave boje

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Valna funkcija mezona je produkt prostorne, spinske i valne funkcije boje. Valna funkcija boje mezona χ^M , tj. vezanog kvark-antikvark $q\bar{q}$ stanja, je onda

$$\chi_s^M = \alpha_1 c\bar{c} + \alpha_2 c\bar{z} + \alpha_3 c\bar{p} + \alpha_4 z\bar{c} + \alpha_5 z\bar{z} + \alpha_6 z\bar{p} + \alpha_7 p\bar{c} + \alpha_8 p\bar{z} + \alpha_9 p\bar{p},$$

gdje su α_i ($i = 1, 2, \dots, 9$) konstante. Odabirom $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0$ i $\alpha_1 = \alpha_5 = \alpha_9 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dobijamo normiranu simetričnu valnu funkciju boje mezona

$$\chi_s^M = \frac{1}{\sqrt{3}} (c\bar{c} + z\bar{z} + p\bar{p}). \quad (1.4)$$

Za barione koji su vezana stanja tri kvarka $q_1q_2q_3$ opća valna funkcija boje je

$$\chi^B = \alpha_1 c_1 z_2 p_3 + \alpha_2 c_1 p_2 z_3 + \alpha_3 z_1 p_2 c_3 + \alpha_4 z_1 c_2 p_3 + \alpha_5 p_1 c_2 z_3 + \alpha_6 p_1 z_2 c_3 .$$

Potpuno antisimetrična valna funkcija boje bariona je

$$\chi_A^B = \frac{1}{\sqrt{6}} (c_1 z_2 p_3 - c_1 p_2 z_3 + z_1 p_2 c_3 - z_1 c_2 p_3 + p_1 c_2 z_3 - p_1 z_2 c_3) . \quad (1.5)$$

Zbog simetrije stanja (1.4) i (1.5) u kojima je svaka boja podjednako zastupljena, čak i bez poznavanja eksplicitne reprezentacije osam SU(3) operatora boje \hat{C}_a ($a = 1, 2, \dots, 8$), jasno je da mora važiti: $\hat{C}_a \chi_S^M = \hat{C}_a \chi_A^B = 0$, što znači da su stanja χ_S^M i χ_A^B kolor singleti (stanja bez boje – po analogiji sa bijelom vidljivom svjetlošću koja je ravnomjerna mješavina tri primarne boje).

Zatočenje boje ima važnu posljedicu – zatočenje kvarkova (quark confinement). Nemoguće je izvući jedan kvark iz vezanog stanja bez boje, jer bi novonastala stanja bila obojana. Iako su kvarkovi osnovne elementarne čestice u SM, oni su (bar na niskim energijama koje su danas dostupne u laboratoriju) zauvijek zarobljeni unutar hadrona (bariona i mezona). Slobodan kvark nikad nije primećen ni u jednom eksperimentu. Particle Data Group (<http://pdg.lbl.gov/>) – grupa fizičara koja sistematski prati istraživanja svojstava elementarnih čestica, 2008. godine za traženje slobodnih kvarkova navodi samo: “All searches since 1977 have had negative results”. Egzistencija kvarkova prvi put je utvrđena indirektno u eksperimentima jako neelastičnog raspršenja elektrona na protonima u akceleratoru SLAC, Stanford 1969. Postojanje kvarkova kao čestica od kojih su sagrađeni hadroni (čestice koje imaju jake interakcije) teorijski je predviđeno pet godina ranije u radovima Gell-Manna i Zweiga 1964.

Mase kvarkova nije lako odrediti jer su kvarkovi zatočeni unutar hadrona i današnje najbolje vrijednosti: C. Amsler *et al.* (Particle Data Group), Phys. Lett. **B667**, 1 (2008) – prikazane su na Slici 1.3 u jedinicama MeV/c².

naboj + 2/3 e masa (MeV/c ²)	u 1.5 do 3	c 1270 ± 70	t 171200 ± 2100
naboj – 1/3 e masa (MeV/c ²)	d 3 do 6	s 104 ± 35	b 4200 ± 170

Slika 1.3

Kao primjer slaganja teorijskih SM proračuna i eksperimenta navedimo masu t-kvarka iz gornje reference

$$\begin{aligned} m_t &= 170.9 \pm 1.8 \pm 0.6 \text{ GeV} && \text{(direct observation of top events at Tevatron),} \\ m_t &= 171.1 \pm 1.9 \text{ GeV} && \text{(Standard Model electroweak fit).} \end{aligned}$$

U SM mase kvarkova su slobodni parametri koje teorija ne može predvidjeti. Ogromni raspon fermionskih masa od 0.5 MeV do 171 GeV čeka razumjevanje u okviru neke potpunije teorije.

Fizičari bi takođe voljeli razumjeti zašto je u prvoj familiji d-kvark masivniji od u-kvarka. Ta mala razlika ima izuzetno značajnu posljedicu – osigurava stabilnost protona, tj. jezgri atoma. d-kvark ima malo veću masu i raspada se u u-kvark (β -raspad). To znači da je slobodni neutron nestabilan (ali, dugog poluživota $\tau = 885.7 \pm 0.8 \text{ s}$), a proton stabilan. Zbog relativno vrlo male razlike masa protona i neutrona, u velikoj većini jezgara i neutroni, a time i ta jezgra, su stabilne čestice. Bilo koji kompleksniji sustav, jezgre i atomi (pa i mi), ne bi postojali da je kojim slučajem $m_u > m_d$ jer bi proton bio nestabilan.

- **Leptoni**

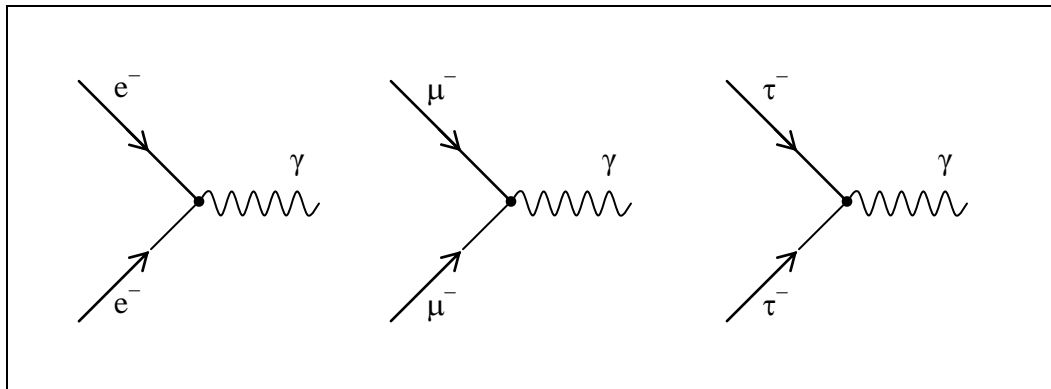
Leptoni su dobili ime kad su bili najlakše subatomske čestice (grčki: leptós – sitan, tanak), što od otkrića tau leptona 1975. koji ima masu skoro dva puta veću od mase protona, više ne odgovara istini. Precizno, leptoni su fermioni (spin $\frac{1}{2}$) koji nemaju jakih interakcija (nemaju QCD naboj). Postoji šest leptona (ili leptonskih okusa) koji se u SM grupiraju u tri dubleta (familije):

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Elektron e , muon μ , i tau τ imaju naboje $-e$, i svaki ima svoj neutrino ν_i koji nema električnog naboja. Elektron je prva otkrivena elementarna čestica i jedina otkrivena u XIX. stoljeću. Otkriće se obično pripisuje John. J. Thompsonu koji je 1897. načinio eksperiment za mjerenje odnosa $\frac{e}{m}$. Točnu vrijednost naboja i mase elektrona odredio je Robert Millikan 1910. Iako su teorijski već prije predviđeni u SM, do eksperimentalnog otkrića leptona iz treće familije trebalo je prilično čekati: 1975. na SLAC-u je otkriven tau, a 2000. na Fermilabu je direktno detektiran tau neutrino.

U prvoj aproksimaciji, na skali energija $\leq 1 \text{ GeV}$, leptoni interaguju samo sa fotonom, tj. imaju samo elektromagnetske interakcije koje opisuje kvantna elektrodinamika (QED). Osnovne lokalne interakcije leptona sa fotonima reprezentiraju se verteksima sa Slike 1.4.

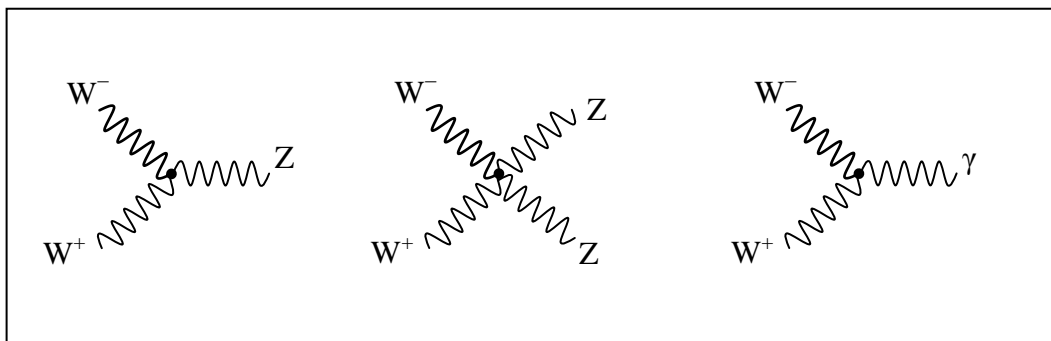
koji znače emisiju ili apsorpciju fotona (medijatora elektromagnetske interakcije) od strane leptona.



Slika 1.4

Neutrini nemaju električni naboj i ne interaguju sa fotonima. U ovoj aproksimaciji nema procesa koji bi pretvarali jedan lepton u drugi. Zato bi svih šest leptona bilo stabilno – nijedan se ne bi raspadao.

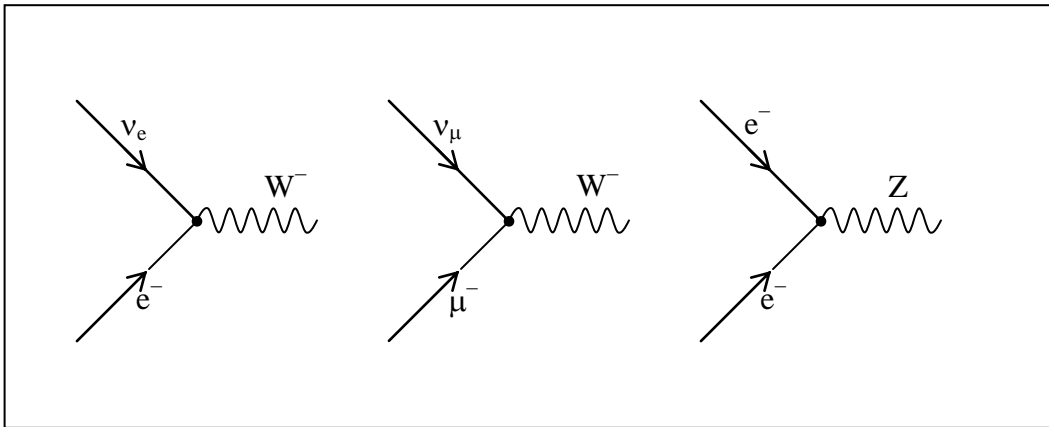
U prirodi, i u SM, leptoni imaju i dodatnu slabu interakciju, koja na niskim energijama izgleda puno slabija od elektromagnetske i koja povezuje leptone iz istog dubleta. Medijatori slabih interakcija su tri gauge bozona W^\pm i Z , koji kao i foton imaju spin 1, ali za razliku od fotona imaju masu i slabe samointerakcije. Postojanje samo-interakcija medijatora slabih interakcija znači da u SM postoje verteksi (tro- i četvoro-gauge bozon verteksi) interakcija samih W^\pm i Z bozona, od kojih su neki prikazani na Slici 1.5.



Slika 1.5

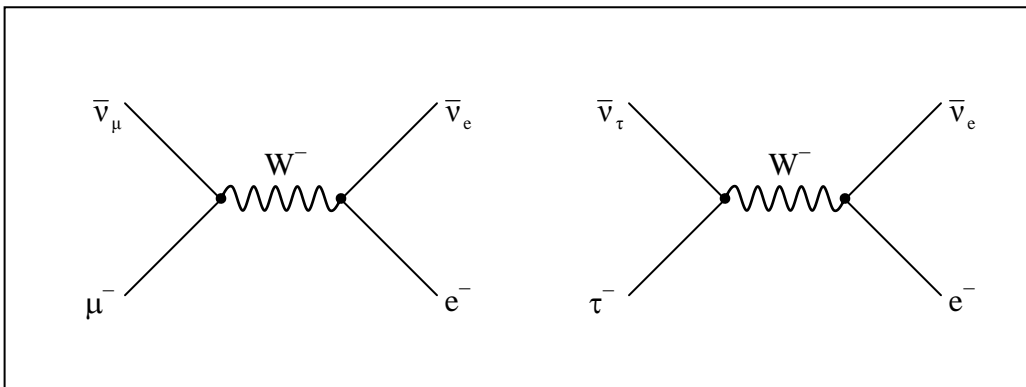
Slabi W^\pm gauge bozoni imaju električni naboj, pa imaju i elektromagnetske interakcije, tj. vežu se sa fotonom kao što je prikazano zadnjim verteksom sa Slike 1.5. Ovo je prva indikacija elektroslabih interakcija, tj. postojanja veze između medijatora slabih i elektromagnetskih interakcija u SM.

Slabe interakcije leptona se reprezentiraju verteksima od kojih su neki prikazani na Slici 1.6 i znače emisiju/apsorpciju medijatora slabih interakcija od strane leptona.



Slika 1.6

Kao i elektro-magnetski verteksi sa Slike 1.4 i verteksi slabih interakcija leptona reprezentiraju interakciju tri čestice u jednoj točki. Spajanjem dva verteksa sa Slike 1.6 može se dobiti Feynmanov dijagram raspada nestabilnih leptona – muona i tau, koji je prikazan na Slici 1.7.



Slika 1.7

Na isti način kako Slika 1.1 prikazuje elektromagnetsku interakciju električno nabijenih čestica (elektrona) koja se reprezentira Feynmanovim dijagramom razmjene fotona između dvije struje elektrona, tako dijagrami raspada leptona sa Slike 1.7 prikazuju razmjenu električno nabijenih slabih bozona W^- između dvije leptonske struje. Analogni procesi postoje i za anti-čestice, pri čemu, na primjer, slabe interakcije pozitrona e^+ znače emisiju/apsorpciju W^+ gauge bozona.

Zakon očuvanja naboja zahtijeva da najlakši nabijeni lepton, elektron bude stabilna čestica, dok su muon i tau nestabilne čestice.

Muon se raspada u procesu $\mu \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ sa vremenom poluživota 2.2×10^{-6} s. Tau lepton ima brojne, uglavnom hadronske, kanale raspada i vrijeme poluživota 2.9×10^{-13} s. Najjednostavniji su leptonski procesi raspada: $\tau \rightarrow \mu + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$ i $\tau \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\tau$ čija je relativna zastupljenost (branching ratio) 17.36 ± 0.05 % i 17.84 ± 0.05 % respektivno.

Eksperimentalno je uočeno da se tri familije leptona ne mješaju u interakcijama, te u SM postoje tri zakona očuvanja leptonskog broja – posebno za l_e , l_μ i l_τ iako nema nijednog fundamentalnog razlog za to. Na primjer, leptonski kvantni brojevi za elektron e su: $l_e = +1$, $l_\mu = l_\tau = 0$, a za elektronski antineutrino $\bar{\nu}_e$ su: $l_e = -1$, $l_\mu = l_\tau = 0$, itd.

Neutrini su još uvijek nedovoljno istraženi sektor SM jer su neutrino eksperimenti, uz eksperimente sa gravitonima, najteži u fizici čestica. To je posve razumljivo, jer neutrini imaju samo slabe i gravitacijske interakcije, pošto nemaju ni električni, ni QCD naboj. Zato neutrini lako i bez traga prolaze ne samo kroz detektore čestica, već i kroz cijele planete. Iako neutrina ima jako puno u svemiru (svake sekunde kroz vrh malog prsta svakog od nas, tj. kroz 1 cm^2 površine, prođe oko 10^6 neutrina) u prosjeku samo jedan od njih interagira sa nekom česticom u našem tijelu tijekom cijelog ljudskog života.

Dugo se vjerovalo da su neutrini čestice bez mase koje se prema tome gibaju brzinom svjetlosti. Tek od 1998. iz rezultata eksperimenta Super-Kamiokande u Japanu indirektno znamo da neutrini ipak imaju masu, iako puno, puno manju (masa elektronskog neutrina ν_e manja je od $2 \text{ eV}/c^2$) od drugih fermiona. Postojanje mase neutrina čini ih sličnijim drugim fermionima, ali i drastično povećava ukupni raspon fermionskih masa. Nekoliko velikih eksperimenata dizajniranih da precizno izmjere masu neutrina i parametre njihovih interakcija već uzimaju podatke ili su u zadnjim fazama pripreme za početak rada.

Moguće je relativno lako proširiti SM tako da neutrini dobiju mase, a da se pri tome ne promjene druga svojstva teorije. Postojanje mase neutrina znači da postoji mješanje različitih neutrino okusa (neutrino oscillations) uz narušenje (iako jako malo), zakona očuvanja pojedinih leptonskih okusa, a tek treba eksperimentalno provjeriti važi li zakon očuvanja ukupnog leptonskog broja.

Električni naboj i masa leptona prikazani su na Slici 1.8.

naboj – e masa	e $0.51 \text{ MeV}/c^2$	μ $105.66 \text{ MeV}/c^2$	τ $1777 \text{ MeV}/c^2$
naboj 0 masa	ν_e $< 2 \text{ eV}/c^2$	ν_μ $< 170 \text{ keV}/c^2$	ν_τ $< 15.5 \text{ MeV}/c^2$

Slika 1.8

Očigledna je sličnost načina na koji se u SM uvode osnovne čestice tvari – fermioni, tj. kvarkovi i leptoni.

Postoji po šest okusa kvarkova i leptona, grupiranih u po tri dubleta (1.2) i (1.6), tj. tri familije. Sve tri familije fermiona imaju identične interakcije i razlikuju se samo po masi čestica. Tri familije fermiona su:

$$\begin{bmatrix} \nu_e & u \\ e & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\mu & c \\ \mu & s \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\tau & t \\ \tau & b \end{bmatrix}.$$

Postojanje više familija, i to točno tri, elementarnih čestica je još jedan od problema za koji unutar SM ne postoji fundamentalno objašnjenje.

Pored fermiona koji su bazične čestice tvari, elementarne čestice su još i bozoni (čestice cjelobrojnog spina) koji su medijatori interakcija među elementarnim česticama. To su čestice spina 1. Kako su kvantne teorije polja koje opisuju interakcije elementarnih čestica baždarne (gauge) teorije, medijatori interakcija se najčešće nazivaju baždarnim bozonima ili gauge bozonima.

- **Gauge bozoni**

Medijatori (prenositelji) interakcija su gauge bozoni: **gravitoni**, **fotoni** (γ), W^\pm i **Z bozoni**, i **gluoni** (g) prikazani u Tabeli 1.1.

Interakcija	djeluje na	medijator
gravitacija	sve masivne čestice	graviton (bez mase, spin 2)
elektromagnetizam	sve električno nabijene čestice	foton (bez mase, spin 1)
slaba	kvarkove, leptone, W^\pm i Z bozone	W^\pm i Z^0 (masivni, spin 1)
jaka	sve obojane čestice (kvarkove i gluone)	8 gluona (bez mase, spin 1)

Tabela 1.1

Većina medijatora interakcija (gluoni, fotoni i gravitoni) su čestice bez mase, kako se i očekuje u gauge teorijama.

Kao što je već napomenuto, SM ne uključuje gravitacijske interakcije. Gauge bozoni u SM su osam **gluona** (g), tri slaba W^\pm i Z **bozona** i **foton** (γ).

Razvoj SM elementarnih čestica dugo je bio zakočen jer su medijatori slabih interakcija W^\pm i Z^0 (gornji indeksi označavaju električni naboj u jedinicama e) izuzetak – imaju, i to veliku, masu i nije bilo jednostavno razumjeti ih kao baždarne bozone za koje teorija predviđa da su bez mase. Mase medijatora slabih interakcija su

$$m_W = 80.403 \pm 0.029 \text{ GeV}/c^2 = 85.7 m_p ; \quad m_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}/c^2 = 97.2 m_p ,$$

gdje je m_p masa protona, slične masama cijelih atoma rubidija ($Rb_{85.5}^{37}$) i tehnečija ($Tc_{98.9}^{43}$). Ponekad se za označavanje antičestica koristi samo oznaka električnog naboja. Tako je W^- antičestica od W^+ , a Z bozon (kao i foton) je identičan svojoj antičestici.

Fotoni i gravitoni su stabilne čestice. W^\pm i Z bozoni su nestabilne čestice vrlo kratkog poluzivota $\tau \sim 10^{-24}$ s. Gluoni su također vrlo nestabilne čestice izrazito kratkog vremena života $\tau \sim 10^{-24}$ s, koji razmjenjuju boju između kvarkova. Kako imaju QCD naboj (boju), kao i kvarkovi, i gluoni su zarobljeni unutar hadrona.

Fotone je nakon Einsteinove hipoteze iz 1905. u eksperimentima fotoelektričnog efekta 1914. otkrio Miliken. Postojanje gluona i elektroslabih gauge bozona W^\pm i Z teorijski je predviđeno u SM krajem 1960-ih. Gluoni su eksperimentalno otkriveni u elektron-pozitron akceleratoru PETRA, u laboratoriju DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron) u Hamburgu 1979. Eksperimentalna detekcija W^\pm i Z bozona u CERN-u (Centre Européenne pour la Recherche Nucléaire), Ženeva 1983. u potpunom skladu sa teorijskim predviđanjima jedno je od najvažnijih postignuća SM.

Zbog izuzetne slabosti gravitacijskih interakcija gravitoni su dosada samo indirektno detektirani kao općom teorijom relativnosti predviđeni gubitak energije emisijom gravitacijskih valova iz dvojnog sustava pulsara. Nekoliko eksperimenata koji se nadaju direktno detektirati gravitone upravo uzimaju podatke.

Cjelokupna materija u poznatom svemiru sastoji se samo od fermiona prve familije (u i d kvarkova, elektrona e i elektronskih neutrina ν_e) i gauge bozona. Svi drugi kvarkovi i leptoni su kratko živuće nestabilne čestice proizvedene u sudarima čestica u akceleratorima (ili u sudarima kozmičkih zraka sa jezgri atoma u atmosferi) i nemaju nikakvu poznatu ulogu u današnjem svemiru. Ali, u vrlo ranoj fazi evolucije svemira neposredno nakog velikog praska materiju su sačinjavale sve poznate vrste čestica, a vrlo vjerojatno i dodatne još uvijek neotkrivene elementarne čestice.

U današnjem svemiru elementarne čestice uslijed međusobnih interakcija stvaraju različite strukture (vezana stanja) na svim skalama duljina.

Hadroni (barioni i mezoni) su vezana stanja kvarkova, koji se međusobno vežu razmjenom gluona, medijatora jakih interakcija. QCD interakcija (jaka sila) između obojanih čestica (kvarkova i gluona) zarobljava ih unutar hadrona čije su dimenzije oko 10^{-15} m. Rezidualna jaka interakcija između stabilnih nebojanih hadrona – nukleona, je nuklearna sila koja vezuje protone i neutrone u atomska jezgra.

Elektromagnetska sila, koja je razmjena fotona, veže stabilna električno nabijena jezgra i stabilne nabijene leptone – elektrone u atome dimenzija 10^{-8} m. Preostala elektromagnetska sila između neutralnih atoma stvara stabilna vezana stanja – molekule. Rezidualna elektromagnetska interakcija između molekula (Van der Waalsove sile) veže molekule u nakupine koje tvore različite makroskopske supstance.

Na kraju, na astronomskim skalama duljina, preostaje jedino gravitacijska sila koju prenose gravitoni, koja veže nakupine atoma i molekula u gravitacijski vezana stanja: komete, asteroide, planete, zvijezde, zvjezdane sustave, oblake plina i prašine, galaksije i klastere galaksija.

Istraživanja tijekom zadnjeg desetljeća pokazuje da dinamika čak i najvećih astronomskih struktura u svemiru (pulsari, supernove, crne rupe, aktivne galaktičke jezgre, kvazari), kao i cjelokupnog ranog svemira uostalom, esencijalno ovisi o ponašanju ultrarelativističkih elementarnih čestica opisanih Standardnim Modelom unutar takvih objekata.

- **Higgs bozon**

Higgs bozon je jedina predviđena i još neotkrivena čestica iz SM. Da bi SM bio matematički konzistentna teorija, pored kvarkova, leptona i gauge bozona mora postojati još jedna vrsta čestica – Higgs bozon h . Elektroslaba teorija unutar SM modela zahtijeva postojanje skalarne (spina nula), električno neutralne i bezbojne (bez jakih interakcija) čestice h , točno određenih interakcija sa fermionima i gauge bozonima, ali neodređene mase. Preko mehanizma spontanog narušenja gauge simetrije (Higgsovog mehanizma), fermioni i gauge bozoni slabih interakcija W^\pm i Z dobijaju masu kao rezultat interakcije sa Higgs bozonima. Pored generiranja mase drugih čestica, postojanje Higgsova polja koje spontano narušava gauge simetriju elektroslabih interakcija, ima i važne astrofizičke implikacije za evoluciju cijelog svemira – inflacija i kozmološka konstanta.

Kozmološka «big bang» teorija po kojoj je svemir nastao u velikom prasku prije 13.7 milijardi godina dobila je eksperimentalnu potvrdu 1965. otkrićem pozadinske mikrovalne radijacije (CMB – Cosmic Microwave Background). Iako je objasnila puno astronomskih opažanja – ekspanziju svemira, nukleosintezu, nastajanje, život i smrt zvijezda, itd., u teoriji velikog praska ostalo je nekoliko važnih otvorenih pitanja, kao što su problem uniformnosti i problem nezakrivljenosti (flatness) svemira, a prije svega, problem minimalne entropije neophodne za razumijevanje asimetrije strelice vremena. Početkom 80-tih godina prošlog stoljeća standardna teorija velikog praska dopunjena je idejom inflacije koja je došla iz teorije elementarnih čestica – Standardnog Modela. Ova poboljšana teorija svemira naziva se inflatorna kozmologija i u početne trenutke svemira uvodi kratkotrajni period inflacije – eksponencijalne ekspanzije svemira. Tijekom inflacije koju uzrokuje oslobađanje energije kozmičkog Higgsovog polja za manje od 10^{-30} s svemir se raširi za faktor veći od 10^{30} . Inflatorna kozmologija lako objašnjava opserviranu nezakrivljenost vidljivog svemira jer eksponencijalna ekspanzija praktično trenutno drastično reducira bilo kakvu inicijalnu zakrivljenost.

Još važnije, inflatorna kozmologija pojašnjava kako je nastalo stanje svemira s minimalnom entropijom u početnom stanju – to je stanje s ravnomjernom raspodjelom materije i malom specifičnom gravitacijskom entropijom u kojem infinitezimalne primordijalne kvantne fluktuacije gustoće nužno, tijekom vremena, djelovanjem gravitacije rezultiraju formiranjem zvijezda i galaksija, tj. svemirom kakav danas vidimo. Infinitezimalno male kvantne fluktuacije u užarenoj «juhi» elementarnih čestica u početnim trenucima svemira $t \sim 10^{-35}$ s, poslije milijardi godina evolucije, nužno uzrokuju nastajanje najvećih poznatih struktura u svemiru – klastera galaksija.

Razumjevanje Higgs sektora SM danas je centralni problem fizike elementarnih čestica. Dosadašnja neuspješna eksperimentalna potraga je utvrdila da je masa Higgs bozona veća od $110 \text{ GeV}/c^2$.

2009. će proraditi LHC akcelerator u CERN-u optimiziran upravo za traženje Higgs bozona u intervalu masa $\leq 1 \text{ TeV}/c^2$. Otkriće Higgs bozona opravdalo bi uvjerenje velike većine fizičara visokih energija da je SM odlična efektivna teorija elementarnih čestica na «niskim» energijama ($\leq 200\text{-}300 \text{ GeV}$).

Znanstvenici se nadaju da će u okviru potrage za Higgs bozonom eksperimenti na LHC-u, naići i na indikacije nove fizike elementarnih čestica, izvan («beyond») SM. Otkriće bilo koje nove čestice pored Higgs bozona, dalo bi nove eksperimentalne podatke neophodne za razvoj poboljšane teorije i omogućilo provjeru valjanosti raznih postojećih teorijskih modela elementarnih čestica općenitijih od SM. Kao primjer, navedimo samo mogućnost postojanja više od jednog Higgs bozona, dodatnih gauge bozona ili supersimetričnih čestica.

1.2 Prirodni sustav jedinica

Fizika elementarnih čestica je relativistička i kvantna teorija, precizno kvantna teorija polja. Svaka od tih teorija uvodi u fiziku po jednu fundamentalnu prirodnu konstantu – brzinu svjetlosti $c = 299\,792\,458\text{ ms}^{-1}$ i Planckovu konstantu $\hbar = 1.054\,571\,68(18) \times 10^{-34}\text{ J s} = 6.582\,119\,15(56) \times 10^{-22}\text{ MeV s}$, (Planckovu konstantu h kroz 2π), za kvant energije $E = h\nu = \hbar\omega$. Sve formule će biti najjednostavnije, odaberemo li prirodni sustav jedinica u kome te konstante imaju vrijednost

$$\hbar = c = 1. \quad (1.7)$$

To znači da se u prirodnom sustavu, za osnovne jedinice djelovanja (ili angularnog momenta) i brzine biraju \hbar i c . Iz $c = 1$ slijedi da duljina i vrijeme imaju iste dimenzije, a iz $\hbar = 1$ slijedi da je dimenzija vremena (i duljine) E^{-1} . Da se potpuno fiksira prirodni sustav jedinica treba odabrati samo još jednu osnovnu jedinicu, za koju se bira jedinica energije elektron-volt (eV) = $1.6022 \times 10^{-19}\text{ J}$. Veće jedinice energije su keV, MeV, GeV ili TeV. Na primjer, relativistička formula za energiju čestice mase m u prirodnom sustavu jedinica postaje

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \Rightarrow E^2 = \vec{p}^2 + m^2. \quad (1.8)$$

Vrijednosti energije (mc^2), impulsa (mc) i mase m čestica se najčešće izražavaju u GeV ili MeV. Osnovne veličine mehanike – masa, duljina i vrijeme u prirodnom sustavu jedinica su:

$$m = \frac{E}{c^2}; \quad l = \frac{\hbar c}{E}; \quad t = \frac{\hbar}{E}. \quad (1.9)$$

Konverzioni faktori slijede iz numeričkih vrijednosti:

$$\hbar = 6.6 \times 10^{-25}\text{ GeV s} \Rightarrow 1\text{ GeV} = \frac{1}{6.6 \times 10^{-25}}\text{ s}^{-1}, \quad (1.10)$$

i

$$c = 3 \times 10^8\text{ m/s} \Rightarrow 1\text{ s} = 3 \times 10^8\text{ m}, \quad (1.11)$$

kao i

$$1 = \hbar c = 1.97327 \times 10^{-16}\text{ GeV m} = 3.16153 \times 10^{-26}\text{ Jm}. \quad (1.12)$$

Relacija (1.10) često se koristi za konverziju širina raspada Γ u vrijeme poluživota τ nestabilnih čestica. Iz (1.10) i (1.11) slijedi

$$1\text{ fm} = 10^{-15}\text{ m} \approx 5\text{ GeV}^{-1}, \quad (1.13)$$

pa za jedan barn $1\text{ b} \equiv 10^{-28}\text{ m}^2$, jedinicu udarnog presjeka (efikasnog presjeka raspršenja), imamo

$$1\text{ mb} \equiv 10^{-27}\text{ cm}^2 = 2.57\text{ GeV}^{-2} \Leftrightarrow 1\text{ GeV}^{-2} = 0.389 \times 10^{-27}\text{ cm}^2 = 0.389\text{ mb}. \quad (1.14)$$

U prirodnom sustavu (p.s.) jedinica sve fizikalne veličine izražavaju se pomoću jedinica energije. Prema (1.9), ako fizikalna veličina u SI sustavu ima dimenzije $M^p L^q T^r$ u prirodnom sustavu ima dimenzije $E^n = E^{p-q-r}$. Za neke važnije fizikalne veličine dimenzije su prikazane u Tabeli 1.2.

Fizikalna veličina	SI			p.s.
	p	q	r	n
Djelovanje (\hbar)	1	2	-1	0
Brzina (c)	0	1	-1	0
Masa	1	0	0	1
Duljina	0	1	0	-1
Vrijeme	0	0	1	-1
Impuls	1	1	-1	1
Energija	1	2	-2	1
Udarni presjek	0	2	0	-2
Konstanta fine strukture α	0	0	0	0
Fermijeva konstanta G_F	1	5	-2	-2
Newtonova gravitacijska konstanta G_N	-1	3	-2	-2

Tabela 1.2

Zadnja tri reda u gornjoj tabeli su prirodne konstante koje određuju jakost elektromagnetskih (α), slabih (G_F) i gravitacijskih (G_N) interakcija. Precizno za elektromagnetske interakcije je

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.036} \approx \frac{1}{137} = 0.0073.$$

Konstanta fine strukture $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ mjeri jakost kvanta električnog naboja e, tj. jakost elektromagnetskih interakcija. Takođe, u bilo kojem sustavu jedinica, α daje odnose najbitnijih elektromagnetskih veličina

Bohrov radijus atoma : Comptova valna duljina elektrona : klasični radijus elektrona =

$$= \frac{\hbar^2}{m_e e^2} : \frac{\hbar}{m_e c} : \frac{e^2}{m_e c^2} = 1 : \alpha : \alpha^2 .$$

Za slabe interakcije je

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1.16637(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} ,$$

što na energijama $\sim 1 \text{ GeV}$ daje numeričku vrijednost: $\alpha_w(m_p) \sim 10^{-13}$. O preciznom značenju konstante jakosti slabih interakcija biti će više govora u Poglavlju 6.

Konstanta naslabije, gravitacijske interakcije (Zadatak 1.1) je

$$G_N = 6.6742(10) \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} = 6.7087(10) \times 10^{-39} \hbar c (\text{GeV}/c^2)^{-2} .$$

Za kompletnu numeričku usporedbu jakosti interakcija među elementarnim česticama navodimo i konstantu jakih interakcija α_s (mjerenu na energiji m_W)

$$\alpha_s(m_W) = 0.1176(20) .$$

Napomena: Kako konstante interakcija zavise od energije na kojoj se mjere (running coupling constants), treba uspoređivati konstantu jakih interakcija sa konstantom fine strukture na istoj skali energija m_W . Konstanta fine strukture na energijama $m_W \sim 80 \text{ GeV}$

je malo [6.57%] veća: $\alpha(m_W) = \frac{1}{128} = 0.0078$, tako da su jake interakcije oko 15 puta jače od elektromagnetskih

$$\frac{\alpha_s(m_Z)}{\alpha(m_W)} \approx 15 .$$

Zadaci:

Zadatak 1.1. Usporediti jakost električnih i gravitacijskih sila između dva elektrona.

Zadatak 1.2. Konstanta fine strukture α je mjera jakosti elektromagnetskih interakcija. Comptonova valne duljine elektrona je $\lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c} = 3.86 \times 10^{-13} \text{ m}$ – to je skala

duljina na kojoj se elektron počinje ponašati kao relativistička kvantna čestica i elektromagnetske interakcije se moraju opisivati kvantnom elektrodinamikom. Pokazati da je na udaljenosti Comptonove valne duljine elektrona elektrostatska potencijalna energija dva elektrona α puta manja od energije mirovanja elektrona.

Zadatak 1.3. Da se odredi jakost gravitacijske sile, po analogiji sa prethodnom zadatkom, pokazati da je odnos gravitacijske potencijalne energije dva elektrona na udaljenosti λ_C i energije mirovanja elektrona $\alpha_G = 1.75 \times 10^{-45}$, što znači da možemo uzeti da je elektromagnetska interakcija $\approx 4 \times 10^{42}$ puta jača od gravitacijske.

Zadatak 1.4. Odrediti Planckovu masu, tj. pokazati da je masa čestice čija je gravitacijska potencijalna energija na rastojanju Comptonove valne duljine čestice

jednaka energiji mirovanja čestice: $m_{\text{Pl.}} = \left(\frac{\hbar c}{G_N} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV} = 2.18 \times 10^{-5} \text{ g}$.

Comptova valna duljina takve čestice naziva se Planckovom duljinom: $L_{\text{Pl.}}$

$= \frac{\hbar}{m_{\text{Pl.}} c} = \left(\frac{G_N \hbar}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}$ i predstavlja skalu duljina na kojima gravitaciju moramo

opisivati kvantnom teorijom. Vrijeme potrebno svjetosti da prijeđe Planckovu duljinu je

Planckovo vrijeme: $t_{\text{Pl.}} = \left(\frac{G_N \hbar}{c^5} \right)^{\frac{1}{2}} = 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}$.

Zadatak 1.5. Udarni presjek za raspršenje elektromagnetskih valova na slobodnim

elektronima (Thompsonovo raspršenje) je: $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m_e^2} u$ prirodnom sustavu.

Dimenzionom analizom obnoviti faktore \hbar i c i pokazati da je za elektrone: $\sigma_T = 0.665$ barna.

Zadatak 1.6. Vrijeme poluživota parapositronija (nestabilnog vezanog stanja elektrona i pozitrona) je $\tau = \frac{2}{m_e \alpha^5}$ u prirodnom sustavu jedinica. Dimenzionom analizom obnoviti faktore \hbar i c i pokazati da je $\tau = 1.24 \times 10^{-10}$ s.

2. Elementi relativističke kinematike

U fizici elementarnih čestica koristi se relativistička notacija koja znatno uprosti izgled većine relacija. U raznim eksperimentima čestice su u pravilu relativističke, tj. imaju energiju daleko veću od energije mirovanja $E \gg m$. Relativistička kinematika neophodna je za opis energija, impulsa i kuteva raspršenja čestica, primjene zakona očuvanja, kao i za prijelaz iz jednog u drugi sustav referencije – laboratorijskog u kome se vrše mjerenja i sustava centra mase u kome se rade teorijski računi, te proračune amplituda i vjerojatnosti fizikalnih procesa.

2.1 Relativistička notacija

Grčkim slovima ($\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$) označavaćemo tenzorske indekse (gornje ili donje) u četvero dimenzionalnom prostoru Minkowskog (prostor-vremenu), na primjer: $\mu = 0, 1, 2, 3$, a latinskim slovima ($a, b, \dots, i, j, k, \dots$) označavaćemo prostorne komponente, na primjer: $i = 1, 2, 3$. Uvijek se podrazumjeva sumacija po bilo kojem dva puta ponovljenom indeksu (bilo gornjem ili donjem), na primjer: $a^\mu b_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 a^\mu b_\mu$ ili $a^i b^i \equiv \sum_{i=1}^3 a^i b^i$.

Proizvoljni kontravarijantni četvero-vektor a^μ ima vremensku komponentu a^0 i tri prostorne komponente a^i

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3). \quad (2.1)$$

Najvažniji je četvero-vektor položaja točke u prostoru: $x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Lorentz vektori sa gornjim i donjim indeksima se razlikuju, pa je proizvoljni kovarijantni 4-vektor

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -a^1, -a^2, -a^3), \quad (2.2)$$

jer je metrički tenzor $g_{\mu\nu}$ koji podiže i spušta tenzorske indekse $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$ ili $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Položaj i impuls čestice su takođe četvero vektori: $x^\mu = (t, \vec{x})$ i $p^\mu = (E, \vec{p})$. [U SI sustavu je: $x^\mu = (ct, \vec{p})$ i $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$].

Skalarni produkt dva vektora je Lorentz invarijantan, tj. ima istu vrijednost u svakom inercijalnom referentnom sustavu (IRS)

$$a_\mu b^\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3, \quad (2.4)$$

tako da je invarijantna masa svake čestice

$$m^2 = p^2 \equiv p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2, \quad (2.5)$$

kao u (1.8).

Notacija za derivacije po prostorno-vremenskim koordinatama tenzorskih polja je

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial^0, -\nabla), \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \nabla). \quad (2.6)$$

Prema (2.4) četvero-divergencija vektorskog polja je onda

$$\partial_\mu a^\mu = \partial^\mu a_\mu = \frac{\partial a^0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{a}, \quad (2.7)$$

a Laplasijan je

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \partial_0^2 - \nabla^2. \quad (2.8)$$

Element volumne integracije po prostornim komponentama 4-vektora je: $d^3x = dx dy dz = dx^1 dx^2 dx^3$, dok je 4-dimenzioni element volumena prostor-vremena (Minkowskog prostora): $d^4x = dt d^3x = dx^0 d^3x$.

Procedura kanonske kvantizacije podrazumjeva zamjenu: $H \equiv E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$, pa bi umjesto Schrodingerove, za slobodnu kvantnu relativističku česticu prema (2.5) očekivali jednačbu gibanja

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \psi. \quad (2.9)$$

Zbog kvadratnog korena operatora gornja jednačba nije ni Lorentz invarijantna, ni lokalna, te nije jednačba gibanja relativističke čestice. Kao što ćemo vidjeti, umjesto (2.9) definira se više jednačbi gibanja za slobodne relativističke čestice različitog spina. Jedna od njih za slobodnu relativističku česticu spina 0, naziva se Klein-Gordonova jednačba i upravo je kvadrat jednačbe (2.9)

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi \quad \Leftrightarrow \quad \left[\partial^\mu \partial_\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0, \quad (2.10)$$

što je prema (2.8), klasična nehomogena valna jednačba.

2.2 Lorentzove transformacije za energiju i impuls čestica

Neka su koordinate čestice $x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ u sustavu S. U IRS sa paralelnim koordinatnim osima S' koji se giba konstantnom brzinom V duž x-osi, ako su se ishodišta dva sustava poklapala za $t = t' = 0$, koordinate čestice x'^μ određene su specijalnom Lorentzovom transformacijom

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3, \quad (2.11)$$

gdje je $\beta = \frac{V}{c}$ i $\gamma \equiv \gamma(V) = \left(1 - \beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. Ovakva specijalna Lorentz transformacija naziva se i potisak (boost).

Ako u sustavu S čestica mase m ima brzinu \vec{v} , energija i impuls čestice su

$$E = \gamma(v) m, \quad \vec{p} = \gamma(v) m \vec{v}, \quad (2.12)$$

gdje je $v = |\vec{v}|$ i $\gamma(v) = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Iz (2.12) slijedi da je brzina čestice

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}. \quad (2.13)$$

Jednostavnosti radi uzmimo da je brzina čestice takođe duž x-osi, tj. $\vec{v} = v \hat{i}$. Iz definicije brzine i transformacija (2.11) onda slijedi da je brzina čestice u sustavu S'

$$v' = \frac{v - V}{1 - \beta_v \beta_V}, \quad (2.14)$$

pa vrijedi

$$\gamma(v') \equiv \left(1 - \beta_{v'}^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \gamma(v) \gamma(V) (1 - \beta_v \beta_V). \quad (2.15)$$

Energija i impuls čestice u sustavu S' su onda

$$E' = \gamma(V) (E - V p^1), \quad p'^1 = \gamma(V) (p^1 - \beta_V E). \quad (2.16)$$

Gornji izrazi se lako generaliziraju na slučaj kad su brzina (i impuls) čestice u proizvoljnom pravcu

$$p'^0 = \gamma_V (p^0 - \beta_V p^1), \quad p'^1 = \gamma_V (p^1 - \beta_V p^0), \quad p'^2 = p^2, \quad p'^3 = p^3, \quad (2.17)$$

potpuno analogno Lorentz transformaciji 4-vektora položaja čestice (2.11).

Kompletnosti radi, navedimo i specijalnu Lorentzovu transformaciju (boost) za prijelaz u IRS koji se giba proizvoljnom konstantnom brzinom \vec{V} za kontravarijantni 4-vektor $a^\mu = (a^0, \vec{a})$:

Lorentzova transformacija (boost)

$$\begin{aligned} a^0 &= \gamma (a'^0 + \vec{\beta} \cdot \vec{a}') & a'^0 &= \gamma (a^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{a}) \\ \vec{a} &= \vec{a}' + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{a}') \vec{\beta} + \gamma \vec{\beta} a'^0 & \vec{a}' &= \vec{a} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{a}) \vec{\beta} - \gamma \vec{\beta} a^0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

gdje je $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$ i $\gamma = (1 - \vec{\beta}^2)^{-\frac{1}{2}}$, a \vec{a}_\parallel i \vec{a}_\perp su komponente vektora \vec{a} paralelne i okomite na pravac vektora \vec{V} , tj.

$$\vec{a}_\parallel = \frac{1}{V^2} (\vec{a} \cdot \vec{V}) \vec{V} = \frac{1}{\beta^2} (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta}; \quad \vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel.$$

Inverzne Lorentz transformacije se lako dobijaju zamjenom $\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$.

Kako je (2.17) linearano po p^μ , iste transformacije važe i za komponente p^μ ukupnog 4-vektora energije-impulsa sustava N slobodnih (tj. čestica koje su dovoljno udaljene jedna od druge da možemo zanemariti energije njihova međudjelovanja) čestica A,B,C,...

$$p^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu + p_C^\mu + \dots = (E, \vec{p}). \quad (2.19)$$

U eksperimentima raspršenja elementarnih čestica, u početnom i krajnjem stanju, čestice su uvijek na makroskopskim udaljenostima i možemo ih smatrati slobodnima.

Invarijantna masa W sustava N čestica (kvadrat 4-impulsa) definira se kao

$$W^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2, \quad (2.20)$$

gdje su E i \vec{p} ukupna energija i impuls sustava čestica. Njena vrijednost se najlakše računa u sustavu centra mase (CM), tj. centra impulsa, gdje je: $\vec{p} = 0$, pa je invarijantna masa sustava čestica jednaka energiji u sustavu centra mase: $W = E_{CM}$.

2.3 Procesi $2 \rightarrow 2$

U eksperimentima raspršenja elementarnih čestica najčešći procesi su: $A + B \rightarrow C + D$, takozvani $2 \rightarrow 2$ procesi. Na primjer, sudari projektil + projektil ili projektil + meta. Početno stanje čine čestice A i B, a konačno čestice C i D. Neka su mase čestice m_A , m_B , m_C , i m_D , a njihovi 4-momenti

$$P_A = (E_A, \vec{p}_A), \quad P_B = (E_B, \vec{p}_B), \quad P_C = (E_C, \vec{p}_C), \quad P_D = (E_D, \vec{p}_D). \quad (2.21)$$

Za svaki 4-moment važi: $p_i^2 = m_i^2$ ($i = A, B, C, D$). Zakon očuvanja energije-impulsa daje još četiri relacije: $p_A + p_B = p_C + p_D$. Sa četiri momenta (2.21) može se konstruirati ukupno deset skalara: p_A^2 , $p_A \cdot p_B$, $p_A \cdot p_C$, Znači, postoje samo dvije nezavisne skalarnе varijable koje opisuju ovaj proces. U nerelativističkoj teoriji najčešće se biraju energija i kut raspršenja. U teoriji elementarnih čestica češće se koriste Lorentz invarijantne skalarnе varijable s , t i u (Mandelstamove varijable) definirane kao

$$s = (p_a + p_b)^2, \quad t = (p_a - p_c)^2, \quad u = (p_a - p_d)^2. \quad (2.22)$$

Samo dvije od ovih varijabli su nezavisne, ali se radi simetrije obično definiraju sve tri. Lako je vidjeti da važi

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2. \quad (2.23)$$

Vrijednost Lorentz skalara je ista u svim IRS, pa se s , t i u najčešće računaju u CM sustavu u kome možemo odabrati da se inicijalne čestice gibaju duž z -osi

$$P_A = (E_A, 0, 0, p) \quad \text{i} \quad P_B = (E_B, 0, 0, -p). \quad (2.24)$$

Finalne čestice se raspršuju pod kutom θ , tj. imaju 4-momente

$$p_c = (E_C, \vec{p}') \quad \text{i} \quad p_d = (E_D, -\vec{p}'), \quad (2.25)$$

pri čemu \vec{p}' uvijek možemo odabrati da bude u xz -ravnini (θ je onda uobičajeni kut sfernih koordinata), tj. ima komponente

$$\vec{p}' = (p' \sin\theta, 0, p' \cos\theta). \quad (2.26)$$

Kut θ je kut raspršenja: $\cos\theta = \hat{p} \cdot \hat{p}'$.

U CM sustavu je

$$s = (E_A + E_B)^2 = \left[\sqrt{m_A^2 + p^2} + \sqrt{m_B^2 + p^2} \right]^2, \quad (2.27)$$

što se može riješiti po p

$$p^2 = \frac{1}{4s} \left[s - (m_A + m_B)^2 \right] \left[s - (m_A - m_B)^2 \right]. \quad (2.28)$$

Analogno je $s = (E_C + E_D)^2$, što daje

$$p'^2 = \frac{1}{4s} \left[s - (m_C + m_D)^2 \right] \left[s - (m_C - m_D)^2 \right]. \quad (2.29)$$

Kako je prema (2.24) i (2.27): $p_A + p_B = (\sqrt{s}, \vec{0})$ dobija se

$$E_A = \frac{s + m_A^2 - m_B^2}{2\sqrt{s}}, \quad \text{te: } E_C = \frac{s + m_C^2 - m_D^2}{2\sqrt{s}}, \quad (2.30)$$

uz analogne izraze za E_B i E_D .

Kut raspršenja θ pojavljuje se u varijablama t i u . Zaista,

$$\begin{aligned} t &= m_C^2 + m_A^2 - 2p_A \cdot p_C = m_C^2 + m_A^2 - 2E_A E_C + 2\vec{p} \cdot \vec{p}' = \\ &= m_C^2 + m_A^2 - 2E_A E_C + 2pp' \cos\theta, \end{aligned} \quad (2.31)$$

te

$$u = m_D^2 + m_A^2 - 2E_D E_A - 2pp' \cos\theta. \quad (2.32)$$

Za ultrarelativističke procese u kojima su mase čestica zanemarive – na primjer, LHC će sudarati protone ($m_p \approx 1 \text{ GeV}$) energija 7 TeV , formule se znatno pojednostave

$$E_A = E_B = p = E_C = E_D = p' = \frac{\sqrt{s}}{2}, \quad (2.33)$$

te

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta), \quad u = -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta). \quad (2.34)$$

Veza kuteva raspršenja u sustavu CM i laboratorijskom sustavu (LAB) može se naći izjednačavajući vrijednosti $t_{\text{CM}} = t_{\text{LAB}}$.

Diferencijalni udarni presjek raspršenja (efikasni presjek raspršenja) $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, gdje je diferencijal prostornog kuta $d\Omega = d\varphi d(\cos\theta)$, za ultrarelativističke sudare pri fiksnoj početnoj energiji može se zgodno prikazati pomoću $\frac{d\sigma}{dt}$, jer je $dt = \frac{s}{2} d(\cos\theta)$.

U slučaju raspršenja na fiksnoj meti, jedna od inicijalnih čestica miruje u laboratorijskom sustavu: $p_B = (m_B, \vec{0})$, pa je raspoloživa energija u sudaru

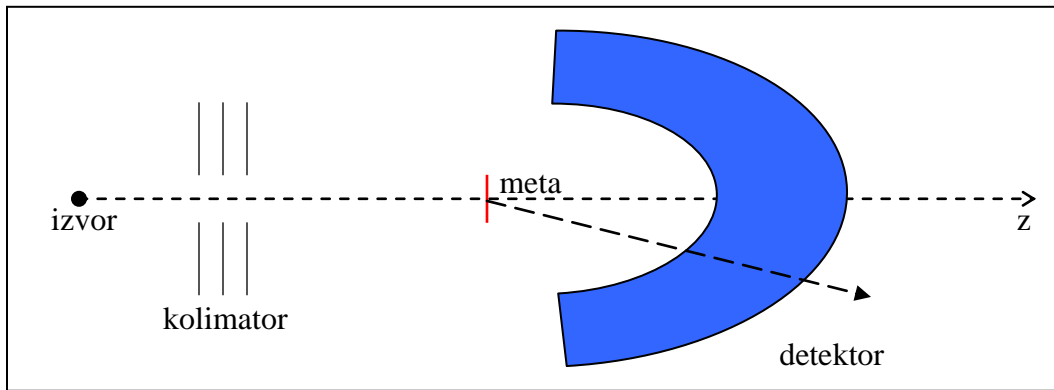
$$s = m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B, \quad (2.35)$$

određena energijom projektila E_A .

2.4 Transformacija kuta raspršenja

Kao još jedan primjer relativističke kinematike razmotrimo kuteve raspršenja u dva sustava CM i LAB u slučaju sudara sa fiksnom metom. Mjerenja se uvijek vrše u laboratorijskom, a teorijski proračuni se u pravilu izvode u sustavu centra mase.

Tipični eksperiment raspršenja na fiksnoj meti izgleda kao Rutherfordov eksperiment. Snop projektila, zovimo ih česticama A, se ubrza do određene energije E_A i usmjeri na nepokretnu metu koja se sastoji od čestica B. Na makroskopskoj udaljenosti iza mete nalazi se detektor koji, pomoću tragova koje čestice ostave u materijalu detektora, mjeri energije i impulse, te identificira čestice nastale u sudarima projektila i mete. Shematski prikaz eksperimenta je na Slici 2.1.



Slika 2.1

Detektor identificira i mjeri 4-momente stabilnih čestica – uglavnom fotone, elektrone i muone (relativistički muoni dovoljno dugo žive da se ne raspadnu unutar detektora), ali i neke dulje živuće hadrone (pione) i hadronske mlazove, koji nastaju ili direktno u sudarima projektila sa česticama mete ili u raspadu kratko živućih nestabilnih čestica ($\tau \leq 10^{-13}$ s) kreiranih u tim sudarima. Odaberemo li longitudinalni pravac (pravac snopa projektila) za z-os laboratorijskog referentnog sustava eksperiment raspršenja na fiksnoj meti je proces općeg oblika

$$A(E_A, 0, 0, p) + B(m_B, 0, 0, 0) \rightarrow C(E_C, \vec{p}_C) + \dots \quad (2.36)$$

U sudaru čestica A i B, čiji su 4-momenti dati u zagradama, nastaje čestica C za koju detektor izmjeri energiju E_C i impuls \vec{p}_C . Uvijek možemo odabrati sustav u kome se čestica C giba u xz-ravnini, tj. uzeti da je

$$\vec{p}_C = (p_C \sin\theta, 0, p_C \cos\theta) \quad (2.37)$$

Kut θ je kut raspršenja u laboratorijskom sustavu. Točkice na desnoj strani (2.36) označavaju jednu ili više drugih čestica koje, uz česticu C, mogu nastati u procesu.

Prvo treba naći Lorentzovu transformaciju (boost) kojom se prelazi u sustav CM. U IRS koji se giba duž z-osi brzinom V , prema (2.17), 4-momenti čestica u početnom stanju su

$$P_A' = (\gamma(E_A - \beta p), 0, 0, \gamma(p - \beta E_A)) \quad \text{i} \quad P_B' = (\gamma m_B, 0, 0, -\gamma \beta m_B) .$$

U sustavu CM, po definiciji, ukupan impuls je nula, pa mora biti: $p_A'^3 + p_B'^3 = 0$, što daje:

$$\beta_V = \frac{p}{E_A + m_B} , \text{ tj. brzina CM duž z-osi je}$$

$$V = \frac{pc^2}{E_A + m_B c^2} . \quad (2.38)$$

Prema (2.17), u sustavu CM 4-impuls čestice C je onda

$$P_C' = (\gamma(E_C - \beta p_C \cos \theta), p_C \sin \theta, 0, \gamma(p_C \cos \theta - \beta E_C)) , \quad (2.39)$$

$$\text{gdje je } \gamma \equiv \gamma_V = \frac{E_A + m_B}{\sqrt{(E_A + m_B)^2 - p^2}} .$$

Uvedemo li oznake

$$P_C' = (E_C', \vec{q}) \quad \text{uz} \quad \vec{q} = (q \sin \theta_{CM}, 0, q \cos \theta_{CM}) , \quad (2.40)$$

gdje je θ_{CM} kut između z-osi i vektora \vec{q} , iz (2.39) odmah slijedi veza kuteva raspršenja u dva sustava

$$\text{tg} \theta_{CM} = \frac{1}{\gamma_V} \frac{p_C \sin \theta}{p_C \cos \theta - \beta_V E_C} . \quad (2.41)$$

Inverzna relacija (inverzna Lorentzova transformacija) je onda

$$\text{tg} \theta = \frac{1}{\gamma_V} \frac{q \sin \theta_{CM}}{q \cos \theta_{CM} + \beta_V E_C'} , \quad (2.42)$$

i pokazuje da je uvijek $\theta \leq \theta_{CM}$.

Pri visokim energijama kad je: $E_A \approx p \gg m_A, m_B$, tj. kad su sve čestice relativističke, razvojem u red je $\beta_V \approx 1 - \frac{m_B}{p}$, kao i $\gamma_V = (1 - \beta_V^2)^{-\frac{1}{2}} \approx \left(\frac{p}{2m_B} \right)^{-\frac{1}{2}}$.

Označimo li brzinu čestice C u sustavu CM sa v' , tada je $E_C' = \gamma_{v'} m_C c^2$ i $q = |\vec{q}| = \gamma_{v'} v' m_C c$, pa iz (2.42) slijedi veza kuteva raspršenja ultrarelativističkih čestica u dva sustava

$$\operatorname{tg}\theta \approx \left(\frac{2m_B}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{v' \sin\theta_{\text{CM}}}{v' \cos\theta_{\text{CM}} + c} . \quad (2.43)$$

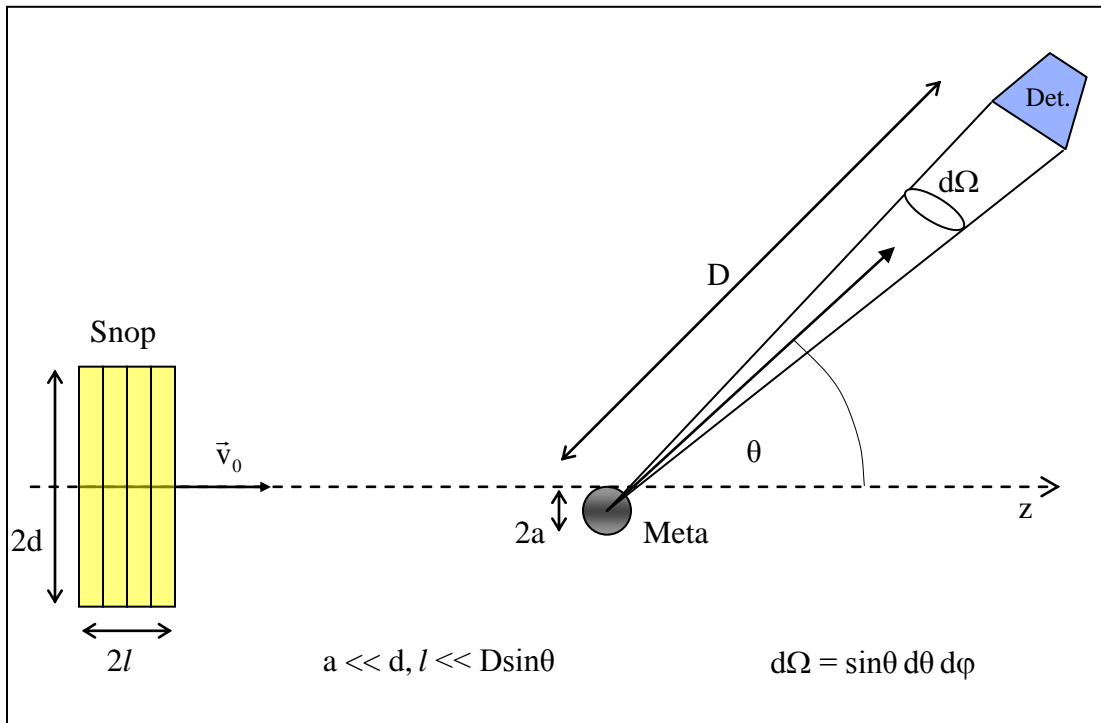
Zbog faktora $p \gg m_B$ u nazivniku, kut θ je uvijek vrlo mali – raspršenje se uvijek događa u vrlo uskom konusu oko pravca upadnog snopa.

Situacija je slična i u slučaju raspada ultrarelativističke čestice – produkti raspada izlijeću pod vrlo malim kutom u odnosu na pravac originalne čestice – Zadatak 2.9.

2.5 Elementi teorije raspršenja

U mikrosvijetu se ne mogu direktno mjeriti sile na pojedinu česticu, pa su mjerenja svojstava interagirajućih čestica ograničena na eksperimente raspršenja. Tipičan primjer je Rutherfordov eksperiment raspršenja α -čestica na jezgrima atoma zlata. U eksperimentima raspršenja slobodne čestice međusobno interaguju vrlo kratkotrajno u minijaturnom regionu interakcije. U eksperimentalnoj fizici elementarnih čestica procesi raspršenja su sudari snopova čestica u akceleratorima ili raspadi nestabilnih čestica tijekom gibanja. Formalizam koji opisuje ovakve procese je kvantna teorija raspršenja ili kratko teorija S-matrice.

U idealiziranom eksperimentu raspršenja jedna izolirana čestica – projektil energije E i početne brzine \vec{v}_0 duž z -osi dolazi iz velike udaljenosti i sudara se sa jednim minijaturnim centrom raspršenja (čestica meta) koji se nalazi u ishodištu. Efekti centra raspršenja – mete na gibanje projektila opisuju se potencijalnom energijom $V(\vec{r})$ koja je primjetno različita od nule samo unutar konačnog regiona prostora radijusa a oko mete, koji se naziva region interakcije. Za raspršenje elementarnih čestica visokih energija radijus regiona interakcije (doseg sile među česticama) je tipično puno manji od dimenzija atoma 10^{-10} m. Širina inicijalnog snopa projektila d određena kolimatorima je makroskopski vrlo mala (tipično $\sim 10\text{-}100$ μm), ali svejedno ogromna u odnosu na dimenzije regiona interakcije a . Poslije raspršenja, čestice se detektiraju na velikoj udaljenosti D (tipično ~ 1 m) od regiona interakcije, gdje se njihova međusobna interakcija opet može zanemariti. Shema eksperimenta prikazana je na Slici 2.2.



Slika 2.2

Dobro dizajniran eksperiment teži što boljoj statistici, tj. što većem broju raspršenih čestica u jedinici vremena. Zato je poželjno imati snopove čestica što većeg intenziteta, tj. što većeg luminoziteta L . Ali, gustoća projektila u inicijalnom snopu mora ostati dovoljno mala da se čestice u snopu mogu smatrati slobodnima. Detalji eksperimentalnog uređaja kvantitativno su opisani fluksom I_0 inicijalnih čestica koji je broj projektila u jedinici vremena koji prođu kroz jedinicu površine okomite na z -os. Fluks inicijalnih čestica je $I_0 = v_0 n_p$, gdje je n_p koncentracija projektila u inicijalnom snopu (broj projektila u jedinici volumena), a v_0 njihova početna brzina.

Pomoću tragova koje čestice ostave, detektor registrira broj čestica $dn = I(\theta, \varphi) d\Omega$ raspršenih u jedinici vremena u element prostornog kuta $d\Omega$. Ako su energije inicijalnih čestica u uskom intervalu $E \pm \Delta E$, broj registriranih čestica dn u jedinici vremena proporcionalan je produktu fluksa projektila I_0 i diferencijala udarnog presjeka $d\sigma$ interakcije $dn = I_0 d\sigma$. Prvi faktor I_0 zavisi od detalja eksperimentalnog uređaja, dok udarni presjek σ zavisi samo od fizike interakcija (sila) između čestica. Definicija diferencijalnog udarnog presjeka (cross section) je onda

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{I(\theta, \varphi)}{I_0}. \quad (2.44)$$

Raspršenje klasičnih čestica (na primjer, Rutherfordovo raspršenje) pretpostavlja da su sve čestice različite i da svaka ima jedinstvenu putanju, tako da raspršenje zavisi od inicijalne mikroskopske udaljenosti b projektila od z -osi koja se naziva parametar sudara. Ako pretpostavimo da su sile između projektila i mete centralne, azimutalna simetrija zahtjeva da vrijedi

$$d\sigma = b db d\varphi = b \left| \frac{db}{d(\cos \theta)} \right| d(\cos \theta) d\varphi = b \left| \frac{db}{d(\cos \theta)} \right| d\Omega.$$

Diferencijalni udarni presjek je onda

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|, \quad (2.45)$$

i može se izračunati ako se iskoristi jednadžba gibanja (II Newtonov zakon) da se nađe veza parametra sudara b i kuta raspršenja θ za datu energiju E projektila (precizno, energiju relativnog gibanja u sustavu CM). Za raspršenje klasičnih čestica naboja q_1 i q_2 koje međudjeluju električnom silom opisanom Coulombovim potencijalom $V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi |\vec{r}|}$

rezultat je Rutherfordova formula

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q_1^2 q_2^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (2.46)$$

Realne elementarne čestice su kvantne relativističke čestice. U eksperimentima raspršenja takve čestice se opisuju valnim paketima određene širine koji su superpozicija valnih funkcija slobodnih čestica (ravnih valova). Ako su dimenzije valnih paketa d i l inicijalnih čestica puno veće od dimenzija regiona interakcije a , tada i u kvantnoj teoriji raspršenja udarni presjeci interakcija σ i širine raspada Γ nestabilnih čestica ne zavise od detalja valnih paketa inicijalnih čestica. Ovaj uvjet je praktično uvijek zadovoljen jer je region interakcije elementarnih čestice visoke energije zaista minijaturan ($a \leq 10^{-14}$ m).

Pretpostavimo da se ukupni Hamiltonian sustava čestica koje sudjeluju u raspršenju može napisati u obliku $H = H_0 + V$, gdje H_0 opisuje vremensku evoluciju valnih paketa čestica puno prije i poslije raspršenja, tj. H_0 opisuje gibanje čestica u regionu prostora-vremena gdje se interakcije među česticama mogu zanemariti. U najjednostavnijem slučaju H_0 može biti samo kinetička energija slobodnih čestica, a V je potencijalna energija svih interakcija među česticama,

$$H = H_0 + V = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V, \quad (2.47)$$

gdje je μ reducirana masa sustava projektil-meta. Moguće je odabrati i da H_0 uključuje dio interakcija čestica, recimo, jake i/ili elektromagnetske interakcije, a V je onda samo potencijalna energija slabih interakcija. Jedini uvjet je poznavanje rješenja svojstvenog problema operatora H_0

$$H_0 \psi_n^{(0)} = E_n^{(0)} \psi_n^{(0)}, \quad (2.48)$$

gdje ortonormirana svojstvena stanja $\psi_n^{(0)} = N \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$ – ravni valovi, tvore kompletan skup, tj. bazu Hilbertova prostora. Pretpostavimo li da je u početnom trenutku $t = 0$ projektil opisan valnim paketom koji je superpozicija takvih ravnih valova

$$\psi(\vec{x}, 0) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3k g(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}, \quad (2.49)$$

čiji je impulsni spektar $g(\vec{k})$ funkcija vrlo uske širine $\Delta\vec{k}$ sa centrom u \vec{k}_0 . Valni paket (2.49) opisuje kvantnu česticu koja se nalazi u okolini točke \vec{x}_0 , i ima dobro definiran (malo $\Delta\vec{k}$) impuls \vec{k}_0 koji odabiremo da bude u pravcu $-\vec{x}_0$. Takav valni paket se u odsustvu sila giba ka ishodištu (meti). Takođe se pretpostavlja da je \vec{x}_0 toliko daleko (i lijevo) od ishodišta, da je u ishodištu $\psi(0) \approx 0$, što osigurava da puno prije raspršenja nema interakcija između projektila i mete. Ravni valovi $\psi_n^{(0)} = N \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t)$, koje smo uveli kao rješenja nerelativističke Schrodingerove jednačbe (2.48), opisuju slobodne nerelativističke kvantne čestice. Kao što je već spomenuto na kraju poglavlja **2.1**, isti ravni valovi [rješenja Klein-Gordove jednačbe (2.10)] opisuju i inicijalne slobodne relativističke čestice spina 0 – projekte, uz uvjet $\omega^2 = \vec{k}^2 + m^2$ koji osigurava da vrijedi veza energije i impulsa (2.5) relativističkih čestica.

Osnovni problem teorije raspršenja je pitanje: kako izgleda inicijalni valni paket (2.49), mnogo kasnije, daleko i desno od ishodišta u regionu gdje se nalazi detektor, nakon disperzije koju doživi u sudaru sa centrom raspršenja? Kad bi znali riješiti svojstveni problem ukupnog Hamiltoniana H

$$H\psi_n(\vec{x}) = E_n\psi_n(\vec{x}), \quad (2.50)$$

razvili bi inicijalni valni paket (2.49) u red $\psi(\vec{x},0) = \sum_n c_n \psi_n(\vec{x})$, pa bi valni paket raspršene čestice u trenutku t bio jednostavno

$$\psi(\vec{x},t) = \sum_n c_n \psi_n(\vec{x}) e^{-i\omega_n t}.$$

Na žalost, zbog kompleksnosti problema ne znamo rješenja kompletne teorije (2.50), pa moramo koristiti teoriju perturbacija da nađemo aproksimativna rješenja.

Za ograničene potencijale V centralnih sila (potencijale koji dovoljno brzo opadaju sa povećanjem udaljenosti između čestica) pokazuje se da ukupni Hamiltonian H uvijek ima kompletan skup svojstvenih stanja $\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}$ (postoje i odgovarajuća $\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}$ stanja)

$$H\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(\vec{x}) = E\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(\vec{x}), \quad (2.51)$$

koja su asimptotski za veliko $D \sim |\vec{x}|$ (daleko od regiona interakcije) vrlo slična ravnim valovima jer su oblika

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\vec{x}) \sim \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + f_{\mathbf{k}}(\hat{x}) \frac{e^{i|\vec{k}|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \right), \quad (D \sim |\vec{x}| \text{ veliko}). \quad (2.52)$$

Prvi član u gornjem izrazu je inicijalni ravni val. Daleko od ishodišta drugi član u (2.52) predstavlja „odlazeći“ (outgoing) sferni val koji je rezultat raspršenja. Svojstvena stanja $\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}$ nazivaju se i „out“/„in“ (outgoing/incoming) stanja. Osnovni teorem kvantne teorije raspršenja tvrdi da za inicijalni valni paket (2.49) vrijedi razvoj

$$\psi(\vec{x},0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{k} g(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_0} \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\vec{x}), \quad (2.53)$$

što znači da „odlazeći“ sferni val iz (2.52) uopće ne utječe na valni paket koji opisuje inicijalne čestice u raspršenju. Poredeći (2.49) i (2.53) vidimo da inicijalni valni paket ima identične koeficijente u razvoju po svojstvenim stanjima slobodnog H_0 i „out“ stanjima ukupnog Hamiltoniana H. To znači da u asimptotskom regionu prostor-vremena (daleko od mjesta i puno prije/poslije raspršenja) svojstvena in/out stanja ukupnog Hamiltoniana H evoluiraju u vremenu na isti način kao i svojstvena stanja slobodnog Hamiltoniana H_0 .

Napomena: Spektrar stanja ukupnog Hamiltonijana H može, ako je V potencijalna energija privlačne sile, sadržavati i dodatna vezana stanja kakvih nema u spektru slobodnog Hamiltonijana H_0 . Hilbertov prostor stanja čestica koje sudjeluju u raspršenju sastoji se u općem slučaju od dva disjunktna dijela – Hilbertovog prostora slobodnih i Hilbertovog prostora vezanih stanja

$$H = S \otimes B,$$

gdje je $S = H_0$ Hilbertov prostor stanja čiju vremensku evoluciju opisuje Hamiltonian H_0 (stanja slobodnih čestica), a B je Hilbertov prostor vezanih stanja (bound states). Na primjer, u raspršenju elektrona i protona, B je Hilbertov prostor stanja atoma vodika. Takođe, ukoliko postoji uski interval početnih energija i impulsa unutar kojih udarni presjek σ jako varira, što je fizikalno važan slučaj pojave rezonanci u spektru raspršenih čestica, uobičajene aproksimacije u razvoju u Taylorov red možda nisu dovoljno točne. Slučaj vezanih stanja i rezonanci se zato posebno razmatra.

Dokaz je formalan i bazira se na egzistenciji Greenove funkcije G^\pm operatora H_0 . Ukratko ga razmotrimo u najjednostavnijem nerelativiskom slučaju. Tražimo rješenje Schrodingerove jednačbe

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V \right) \psi = E \psi \Leftrightarrow (\nabla^2 + k^2) \psi = \tilde{V} \psi, \quad (2.54)$$

gdje je $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$ i $\tilde{V} = \frac{2\mu V}{\hbar^2}$. Greenova funkcija za Poissonovu jednačbu (2.54)

$$(\nabla^2 + k^2) G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.55)$$

daje formalno rješenje

$$\psi_{\mathbf{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \frac{1}{4\pi} \int d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \tilde{V}(\vec{x}') \psi_{\mathbf{k}}(\vec{x}'), \quad (2.56)$$

što se lako provjeri uvrštavanjem u (2.54). Izraz (2.56) nije stvarno rješenje jednačbe (2.54), jer na desnoj strani i dalje postoji nepoznata svojstvena funkcija $\psi_{\mathbf{k}}(\vec{x})$. Samo smo diferencijalnu jednačbu (2.54) zamjenili integralnom (2.56) koja je zgodnija za perturbativno (iterativno) rješavanje. Fourierovim transformacijom i integracijom u kompleksnoj ravnini nalaze se retardirana/advansirana Greenova funkcija G^\pm

$$G^\pm(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \quad (2.57)$$

Kako je volumni integral u (2.56) ograničen na region interakcije $|\vec{x}'| < a$ oko ishodišta, uvrštavanjem (2.57) i razvojem u red

$$k|\vec{x} - \vec{x}'| = k\sqrt{x^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' + x'^2} = kx - k\hat{x} \cdot \vec{x}' + \frac{k(\hat{x} \times \vec{x}')^2}{2x} + \dots,$$

za $|\vec{x}| \sim D$ dovoljno daleko tako da je $\frac{ka^2}{|\vec{x}|} \ll 1$ (zanemarujući kvadratni član), dobijaju se out/in stanja Hamiltoniana H

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(\vec{x}) \sim \frac{1}{(2\pi)^3} \left(e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + f_{\mathbf{k}}^{\pm}(\hat{x}) \frac{e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{x} \right), \quad (2.58)$$

gdje je amplituda raspršenog sfernog vala ili jednostavno amplituda raspršenja

$$f_{\mathbf{k}}^{\pm}(\hat{x}) = -\frac{\sqrt{2\pi}\mu}{\hbar^2} \int d^3x' e^{\mp i\vec{k} \cdot \vec{x}'} V(\vec{x}') \Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(\vec{x}'). \quad (2.59)$$

Detalji dokaza zavise od aproksimacija i procedura limesa koji se prave u prijelazu od (2.56) na (2.58).

Kako je (2.53) razvoj po svojstvenim stanjima $\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}$ Hamiltoniana H, u trenutku t poslije raspršenja valni paket je

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} g(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_0 - i\omega t} \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\vec{x}), \quad (2.60)$$

što, ako nema značajnog širenja valnog paketa na putu duljine D do detektora, znači da je

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x} - \vec{v}_0 t, 0) e^{-i\omega_0 t} + \frac{f_{\mathbf{k}_0}(\hat{x})}{|\vec{x}|} \psi(|\vec{x}| \hat{\mathbf{k}}_0 - \vec{v}_0 t, 0) e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.61)$$

gdje je

$$\vec{v}_0 = \frac{\hbar \vec{k}_0}{\mu} = \frac{\vec{p}_0}{\mu}, \quad \hbar\omega_0 = E_0 = \frac{1}{2}\mu \vec{v}_0^2. \quad (2.62)$$

Prvi član u izrazu (2.61) je inicijalni valni paket koji se i poslije raspršenja nastavlja gibati na isti način – bez promjene oblika se iz okoline točke \vec{x}_0 u početnom trenutku $t = 0$, premjesti u okolinu točke $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t$ na drugoj strani ishodišta u trenutku t poslije raspršenja.

Inicijalni valni paket giba se jednoliko bez ikakvog raspršenja, kao da uopće nema interakcije V . Svi efekti sila među česticama opisani drugim članom u (2.62) koji je raspršeni sferni val.

Ako detektor nije na pravcu inicijalnih čestica, vjerojatnoća (kvadrat amplitude) opserviranja raspršenih čestice data je diferencijalnim udarnim presjekom koji je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\mathbf{k}_0}(\hat{\mathbf{x}})|^2. \quad (2.63)$$

U prvoj aproksimaciji, koja se naziva Born aproksimacija, u amplitudi raspršenja (2.59) za „out“ stanje uzme se samo prvi član iz (2.58) – ravni val, što daje

$$f_{\mathbf{k}}^+(\hat{\mathbf{k}}') \approx -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} V(\vec{x}') e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}'}. \quad (2.64)$$

Amplituda raspršenja u Born aproksimaciji je matični element potencijala raspršenja između ravnih valova impulsa \vec{k} i \vec{k}' koji reprezentiraju slobodnu česticu prije i poslije raspršenja. Kao primjer uzmimo Yukawa potencijal

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha r}, \quad (2.65)$$

gdje je $r = |\vec{x}|$, dosega $a = \frac{1}{\alpha}$. Iz (2.64) se poslije integracija po kutevima u sfernim koordinatama dobija

$$f_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \approx \frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 \int r'^2 dr' \frac{e^{-\alpha r'}}{\alpha r'} \frac{\sin|\vec{k} - \vec{k}'| r'}{|\vec{k} - \vec{k}'| r'} = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha} \frac{1}{(\vec{k} - \vec{k}')^2 + \alpha^2}.$$

Kako je za elastično raspršenje $k = |\vec{k}| = |\vec{k}'| = k'$, označimo li $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' = \cos\theta$, prema (2.63) diferencijalni udarni presjek je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(-\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha} \frac{1}{4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \alpha^2} \right)^2. \quad (2.66)$$

U limesu kad $V_0 \rightarrow 0$ i $\alpha \rightarrow 0$, ali tako da je $\frac{V_0}{\alpha} = q_1 q_2$, (2.65) postaje potencijalna energija dva točkasta naboja, a (2.66) daje Rutherfordovu formulu (2.46)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q_1^2 q_2^2}{16E_0^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

koja je točna i u kvantnoj i u klasičnoj teoriji raspršenja.

Za opis raspršenja visoko energijskih elementarnih čestica pogodnija je formalna (operatorska) teorija raspršenja u Fockovom prostoru ili kratko teorija S-matrice.

2.5.1 Perturbativni razvoj S-matrice

U eksperimentima raspršenja ili raspada čestica visoke energije sve interakcije među česticama događaju se u mikroskopskom regionu interakcije duljine Δz za kratkotrajno vrijeme proleta čestica Δt . Sva mjerenja se vrše na snopovima skoro slobodnih čestica puno prije/poslije čestičnih interakcija. Puno prije/poslije označava vremena $|t| \gg \Delta t$, tj. limes $t \rightarrow \pm \infty$, i u regionu prostora na makroskopskim udaljenostima od regiona interakcije gdje je $|z| \gg \Delta z$. Na primjer, LHC će sudarati pakete od 10^{11} protona energija 7 TeV sabijene u cilindar dijametra 100 μm i visine 15 cm. Paketi protona se gibaju praktično brzinom svjetlosti unutar akceleratora. Dva takva paketa koji kruže u suprotnim smjerovima će se dovesti do sudara u točki čiji se položaj određuje sa točnošću boljom od $\Delta z \sim 50 \mu\text{m}$. Vrijeme prolaska jednog paketa kroz drugi je $\Delta t = 1 \text{ ns}$.

Eksperimenti se pripremaju tako da su u inicijalnom stanju čestice na makroskopskom rastojanju, ali im se da brzina koja će ih dovesti u međusobni „kontakt“ u regionu interakcije. U kvantnoj fizici takva stanja, lokalizirana i u prostoru i po brzinama čestica, ne mogu biti egzaktne svojstvena stanja ni impulsa, ni energije čestica. Na primjer, svojstvena stanja impulsa čestica (ravni valovi) nisu uopće lokalizirana u prostoru. Zato su inicijalna (i finalna) stanja čestica u eksperimentima raspršenja ustvari valni paketi (vrlo uski) koji omogućuju mjerenja položaja i brzina (energija) čestica sa određenom točnošću koja je uvijek daleko iznad maksimalne dozvoljene relacijama neodređenosti.

Svaki proces je prelazak sustava iz nekog inicijalnog (puno prije interakcije) u neko finalno stanje (puno poslije raspršenja) sustava čestica. Ako pretpostavimo da nema nikakve korelacije između valnih funkcija različitih čestica u inicijalnom stanju, tada se vjerojatnost bilo kojeg procesa faktorizira na produkt dva faktora. Prvi je vjerojatnost da se inicijalne čestice sretnu u regionu interakcije, a drugi je vjerojatnost da te čestice interaguju na određeni način. Prvi faktor zavisi od valnih paketa koji opisuju čestice u inicijalnom stanju i to je faktor koji zavisi od detalja eksperimenta. Drugi faktor ne zavisi od detalja eksperimenta nego samo od fizike interakcija (sila) među česticama i naziva se udarni presjek (cross section) ili efikasni presjek raspršenja σ . Kako se udarni presjeci definiraju tako da ne zavise od detalja inicijalnih stanja čestica, moguće ih je izračunati i u limesu kad su valne funkcije čestica u inicijalnom i finalnom stanju svojstvena stanja impulsa i energija slobodnih čestica (ravni valovi), iako se stvarni eksperimenti ne rade sa takvim najjednostavnijim jednočestičnim stanjima.

Inicijalni snopovi čestica u eksperimentima se moraju pažljivo pripremiti da budu što je moguće većeg luminoziteta (intenziteta) sa makroskopski vrlo dobro prostorno i impulsno lokaliziranim inicijalnim česticama, koje opisujemo uskim valnim paketima svojstvenih stanja energije i impulsa (i svih drugih relevantnih kvantnih brojeva) slobodnog Hamiltoniana H_0 odgovarajućih polja.

Teorija raspršenja omogućuje da se udarni presjeci (i širine raspada) raznih reakcija sa elementarnim česticama izraze pomoću Lagrangiana interakcije kvantne teorije polja.

Pretpostavimo da i ukupni Hamiltonian sustava polja $H = H_0 + H_{\text{int}}$ i slobodni Hamiltonian H_0 imaju kontinuirani spektar istog tipa.

U eksperimentima sa elementarnim česticama, puno prije interakcije, kad $t \rightarrow -\infty$, čestice su slobodne, tj. možemo uzeti da su inicijalna stanja $|i\rangle$ u procesu svojstvena stanja 4-impulsa slobodnog Hamiltoniana H_0 teorije. Analogno, puno poslije interakcija čestica, finalno stanje u procesu je opet stanje slobodnih čestica $|f\rangle$.

Problem teorije raspršenja je da odredi takozvano „out“ stanje $[i, t)$ u koje, kad $t \rightarrow \infty$, evoluirala inicijalno stanje $|i\rangle$. Vjerojatnost procesa $i \rightarrow f$ određena je onda kvadratom apsolutne vrijednosti matričnog elementa $\langle f | [i, t \rightarrow \infty) \rangle^2$.

Vremenska evolucija sustava određena je ukupnim Hamiltonijanom H . Ali, ukupni Hamiltonian je zbroj $H = H_0 + H_{\text{int}}$, gdje H_0 određuje inicijalna i finalna stanja slobodnih čestica, a samo Hamiltonian interakcije H_{int} uzrokuje prijelaze između njih tijekom raspršenja. U teoriji polja to znači da polja iz članova u H_{int} djeluju kao izvori (verteksi) koji generiraju prijelaze između jednočestičnih stanja slobodnih polja (elementarnih čestica) koja su svojstvena stanja Hamiltoniana H_0 . Zato je za proračun vjerojatnosti procesa najučinkovitije koristiti interakcionu reprezentaciju kvantne teorije. Vremenska evolucija stanja u Hilbertovom prostoru određena je jednačjom

$$i \frac{\partial}{\partial t} [i, t)_S = H [i, t)_S. \quad (2.67)$$

gdje indeks S označava da se radi o stanju u Schrodinger reprezentaciji u kojoj stanja sustava zavise od vremena, a operatori fizikalnih observabli su vremenski nezavisni. U interakcionoj reprezentaciji vremensku evoluciju i stanja i operatora određuje H_0 , tj. stanja se definiraju kao

$$[i, t) = e^{iH_0 t} [i, t)_S, \quad (2.68)$$

i

$$O = e^{iH_0 t} O_S e^{-iH_0 t}. \quad (2.69)$$

Deriviranjem po vremenu relacije (2.69) za vremensku evoluciju operatora teorije vrijedi

$$\frac{d}{dt} O = i [H_0, O], \quad (2.70)$$

dok derivacija (2.68) daje

$$i \frac{\partial}{\partial t} [i, t) = H_{\text{int.}}(t) [i, t), \quad (2.71)$$

što znači da je vremenska evolucija stanja određena Hamiltonijanom interakcije $H_{\text{int.}}$. Ovu jednačju moguće je riješiti ako definiramo operator vremenske evolucije $U(t, t_0)$ tako da je

$$[i, t) = U(t, t_0)[i, t_0), \quad (2.72)$$

koji zadovoljava početni uvjet $U(t_0, t_0) = 1$, te jednadžbu

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_{\text{int.}}(t) U(t, t_0). \quad (2.73)$$

Diferencijalna jednadžba (2.73) i početni uvjet $U(t_0, t_0) = 1$, ekvivalentni su integralnoj jednadžbi

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{\text{int.}}(t_1) U(t_1, t_0), \quad (2.74)$$

koju je lako riješiti sukcesivnim iteracijama

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{\text{int.}}(t_1) \left[1 - i \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{\text{int.}}(t_2) U(t_2, t_0) \right] = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{\text{int.}}(t_1) + \\ &+ (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{\text{int.}}(t_1) H_{\text{int.}}(t_2) + \dots + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{\text{int.}}(t_1) H_{\text{int.}}(t_2) \dots H_{\text{int.}}(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (2.75)$$

Limes operatora vremenske evolucije $U(t, t_0)$ kad $t_0 \rightarrow -\infty$ i $t \rightarrow +\infty$ naziva se S-matrica i vrijedi

$$S = U(+\infty, -\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_{\text{int.}}(t_1) H_{\text{int.}}(t_2) \dots H_{\text{int.}}(t_n), \quad (2.76)$$

gdje je $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$.

Izraz za S-matricu (2.76) može se u teoriji polja učiniti Lorentz kovarijantnim ako se definira vremenski uređen produkt T lokalnih operatora tako da najraniji bude prvi na desnoj strani, tj.

$$\begin{aligned} T[O(t_1)O(t_2)\dots O(t_n)] &\equiv O(t_{\text{najkasnije}})\dots O(t_{\text{najranije}}) = \\ &= \sum_P O(t_{p_1}) \dots O(t_{p_n}) \theta(t_{p_1} - t_{p_2}) \dots \theta(t_{p_{n-1}} - t_{p_n}), \end{aligned} \quad (2.77)$$

gdje \sum_P označava sumu po permutacijama n indeksa $1, 2, \dots, n$, a $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, osigurava da vrijeme raste s desna ulijevo. Kako vrijedi

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dt_{p_1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_{p_n} T[O(t_1)O(t_2)\dots O(t_n)] = \\
& = \sum_p \int_{-\infty}^{\infty} dt_{p_1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_{p_n} O(t_{p_1}) \dots O(t_{p_n}) \theta(t_{p_1} - t_{p_2}) \dots \theta(t_{p_{n-1}} - t_{p_n}) = \\
& = n! \int_{-\infty}^{\infty} dt_{p_1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_{p_n} O(t_1)O(t_2)\dots O(t_n),
\end{aligned}$$

integracija u (2.76) se može simetrizirati, tako da izraz za S-matricu postaje

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n T[H_{\text{int.}}(t_1)H_{\text{int.}}(t_2)\dots H_{\text{int.}}(t_n)], \quad (2.78)$$

ili jednostavno (ako Hamiltoniani interakcije u različitim trenucima komutiraju)

$$S = T \left(\exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_{\text{int.}}(t) \right] \right). \quad (2.79)$$

Razvoj S-matrice postaje očigledno Lorentz kovarijantan u lokalnim kvantnim teorijama polja, jer kako je napomenuto u **Uvodu**, lokalnost teorije polja zahtijeva da je Hamiltonian $H = \int d^3x \mathcal{H}$ volumni integral gustoće Hamiltoniana \mathcal{H} , tako da je

$$H_{\text{int.}}(t) = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{x}, t), \quad (2.80)$$

pa perturbativni razvoj S-matrice postaje

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots d^4x_n T[\mathcal{H}_{\text{int}}(x_1) \dots \mathcal{H}_{\text{int}}(x_n)]. \quad (2.81)$$

U teorijama polja je $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}}$ (precizno, ovo važi ako \mathcal{L}_{int} ne sadrži derivacije), pa je S-matrica

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots d^4x_n T[\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \dots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n)], \quad (2.82)$$

tj.

$$S = T \left(\exp \left[i \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{int.}}(x) \right] \right), \quad (2.83)$$

što je Lorentz invarijantno jer Lagrangian mora biti skalar.

Napomena: Iako prisustvo $\theta(t_i - t_j)$ faktora u T produktu izgleda Lorentz neinvarijantno, zahtjev mikrokauzalnosti osigurava da lokalni operatori u prostorno separiranim točkama komutiraju. T produkt onda djeluje samo na lokalne operatore u vremenski ili svjetlosno separiranim točkama, a za takve operatore T produkt ima istu vrijednost u svim IRS.

Veličina koja daje amplituda raspršenja procesa $f \rightarrow i$ je S-matrični element $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle$. Kako želimo računati sa svojstvenim stanjima energije i impulsa (ravnim valovima) slobodnog Hamiltoniana H_0 korisno je eksplicitno izdvojiti prvi član u razvoju S-matrice (2.82) koji je jedinični operator. Za bilo koji lokalni operator $O(x)$ vrijedi

$$\langle f | O(x) | i \rangle = \langle f | e^{-i p \cdot x} O(x=0) e^{i p \cdot x} | i \rangle = e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \langle f | O(x=0) | i \rangle, \quad (2.84)$$

pa se u izrazu za S-matricu može izdvojiti δ -funkcija koja osigurava očuvanje 4-impulsa cijelog procesa, tako da se definira matrični element tog procesa M_{fi}

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) M_{fi}, \quad (2.85)$$

koji se naziva matričnim elementom prijelaza iz stanja $|i\rangle$ u stanje $|f\rangle$. U (2.85) p_i/p_f su ukupni 4-impulsi svih čestica u inicijalnom/finalnom stanju. Za svaki proces korisno je definirati i T-matrični element T_{fi} u kome se izdvaja samo δ -funkcija očuvanja energije, tj.

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi) \delta(p_f^0 - p_i^0) T_{fi}. \quad (2.86)$$

Sva fizika čestičnih interakcija sadržana je u matričnom elementu M_{fi} procesa (to je jedini član koji zavisi od $\mathcal{L}_{\text{int.}}$) koji ne ovisi o eksperimentalnim detaljima inicijalnog/finalnog snopa čestica. Perturbativni razvoj S-matrice (2.82) znači da i za matrični element M_{fi} svakog procesa vrijedi perturbativni razvoj

$$M_{fi} = M_{fi}^{(1)} + M_{fi}^{(2)} + \dots, \quad (2.87)$$

gdje je

$$-i M_{fi}^{(1)} = i \langle f | \mathcal{L}_{\text{int.}}(x=0) | i \rangle, \quad (2.88)$$

te

$$-iM_{fi}^{(2)} = \frac{(i)^2}{2!} \int d^4x \langle f | T [\mathcal{L}_{int}(x) \mathcal{L}_{int}(x=0)] | i \rangle, \quad (2.89)$$

itd., što dozvoljava da se matrični element M_{fi} svakog procesa aproksimativno izračuna sa određenom točnošću prekidanjem reda (2.87).

U svakoj kvantnoj teoriji polja postoje pravila, Feynmanova pravila, koja omogućuju da se korištenjem Feynmanovih dijagrama izračuna matrični element M_{fi} bilo kojeg procesa u bilo kojem redu perturbativnog razvoja. Feynmanova pravila razmatraćemo kasnije u Poglavljima 4. i 6.

Potrebno je još matrične elemente M_{fi} raznih procesa povezati sa fizikalno mjerljivim veličinama koje ne ovise o detaljima pojedinih eksperimenata, te daju informacije o fizici interakcija elementarnih čestica koje sudjeluju u procesu.

2.5.2 Udarni presjeci i širine raspada

Kao što je već napomenuto, stanja elementarnih čestica u stvarnim eksperimentima raspršenja su valni paketi lokalizirani i u prostor-vremenu i u prostoru energija-impulsa čestica. Da se izbjegnu računске komplikacije definiranja energija, brzina, impulsa takvih valnih paketa za računanje fizikalnih veličina želimo koristiti svojstvena stanja 4-impulsa slobodnih čestica (ravne valove). Ali, onda će svaki element S-matrice sadržavati δ -funkciju koja osigurava očuvanje energije (i impulsa) u procesu, kao u (2.85) i (2.86). Element S-matrice je amplituda vjerojatnosti procesa. Vjerojatnosti procesa (kvadrati apsolutnih vrijednosti amplituda) su onda nužno beskonačni jer su proporcionalni sa $\delta(0)$. Potrebno je analizirati vezu fizikalnih veličina koje opisuju procese – širina raspada Γ nestabilnih čestica i udarnih presjeka raspršenja σ , da se eliminiraju takve računске divergencije.

Ako su inicijalne čestice opisane valnim paketom $[\phi_g]_{in} = \int d\alpha g(\alpha) [\alpha]_{in}$ vjerojatnost da je krajnje stanje β je

$$P_g(\beta) = \left| \int_{out} \beta \int_{in} [\phi_g]_{in} \right|^2 = \int d\alpha d\alpha' g^*(\alpha') g(\alpha) \int_{out} \beta \int_{in} [\alpha]_{in} [\alpha']_{out}. \quad (2.90)$$

Funkcija $g(\alpha)$ (na primjer, Gaussova funkcija) određuje oblik inicijalnog valnog paketa i ima jako izražen maksimum oko neke vrijednosti α . Širina valnog paketa je klasična, ali ne toliko velika da se vrijednost matričnog elementa $S_{\beta\alpha}$ bitno mijenja unutar širine valnog paketa. Na primjer, dobro pripremljen eksperiment koristi čestice opisane valnim paketima čija je energijska širina ΔE toliko mala da se promjena udarnog presjeka $\frac{d\sigma}{dE} \Delta E$ pri promjeni energije za ΔE može zanemariti, pa se može uzeti da je $\sigma(E \pm \Delta E) \approx \sigma(E)$. Ako pretpostavimo da je $\beta \neq \alpha$, S-matrični element za taj proces je iz (2.86)

$$S_{\beta\alpha} = -iT_{\beta\alpha}(2\pi)\delta(E_\beta - E_\alpha). \quad (2.91)$$

Ako $T_{\beta\alpha}$ slabo ovisi o α i β , usporedba (2.90) i (2.91) pokazuje da mora biti

$$P_g(\beta) \approx |T_{\beta\alpha}|^2 \int d\tilde{\alpha} d\tilde{\alpha}' g^*(\alpha')g(\alpha), \quad (2.92)$$

gdje je δ -funkcija iz (2.86) apsorbirana u integraciju po komponentama valnog paketa $d\tilde{\alpha} = (2\pi)\delta(E_\beta - E_\alpha)d\alpha$. U izrazu (2.92) sve veličine su konačne i ne pojavljuju se problematične δ -funkcije po energiji koje su posljedica nefizikalne pretpostavke da u eksperimentu možemo imati čestice točno određene energije za koje je $\Delta E = 0$. Vidimo da je vjerojatnost $P_g(\beta)$ prijelaza $\alpha \rightarrow \beta$ zaista produkt dva faktora, od kojih $|T_{\beta\alpha}|^2$ ne zavisi od detalja valnih paketa koji opisuju inicijalne čestice, već samo od fizike interakcija čestica. Cjelokupna ovisnost o detaljima eksperimenta je u integralu po valnim paketima inicijalnih i finalnih čestica.

Radi jednostavnosti elemente S-matrice $S_{\beta\alpha}$ želimo računati koristeći svojstvena stanja energije-impulsa slobodnih čestica za bazu Hilbertovog prostora. U neograničenom prostoru operatori energije i impulsa slobodnih čestica imaju kontinuiran spektar (4-momenti čestica su realni brojevi), pa njihova svojstvena stanja (ravni valovi) imaju beskonačnu normu, što opet u izraze za udarne presjke uvodi divergencije. Ove računске poteškoće se najčešće izbjegavaju korištenjem trika konačnog volumena. Kvantizacija sustava se ne vrši u beskonačnom prostoru, nego u proizvoljno velikom, ali ograničenom regionu prostora čije su dimenzije duljine L , pa se tek na kraju uzme limes $L \rightarrow \infty$. Čestice zatvorene u konačnu kutiju volumena $V \sim L^3$ imaju diskretne vrijednosti energije i impulsa i opisane su valnim funkcijama konačne norme. Za računanje matričnih elemenata operatora fizikalnih veličina može se onda koristiti baza koju čini kompletan skup takvih stanja konačne norme. Sve fizikalne veličine se pažljivo definiraju tako da se u konačnim izrazima potpuno pokrate dimenzije kutije, što onda osigurava da formule vrijede bez obzira na bazu Hilbertova prostora u kojima su izračunate.

Udarni presjek σ reakcije mora se definirati tako da ne zavisi od detalja eksperimenta. Na primjer, pri raspršenju projektila na meti kao u Rutherfordovom eksperimentu broj raspršenih čestica u jedinici vremena dn sigurno je proporcionalan inicijalnom fluksu projektila $I_i = n_p v_p$ (broj projektila koji u jedinici vremena prođu kroz jedinicu površine) i koncentraciji čestica mete n_m (broj čestica mete u jedinici volumena). Zato se udarni presjek σ defira kao

$$dn = (n_p v_p) n_m d\sigma, \quad (2.93)$$

gdje je v_p brzina projektila u odnosu na metu (relativna brzina čestica prije raspršenja), a σ je udarni presjek raspršenja koji ne zavisi od broja čestica projektila i mete.

Matrični element S_{fi} iz (2.85) može se napisati kao

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) M_{fi} \prod_{f,i} \frac{1}{\sqrt{2E_{f,i}}}, \quad (2.94)$$

gdje f,i označava čestice u finalnom/inicijalnom stanju. Zadnji faktor u (2.94) fiksira normu matičnog elementa M_{fi} i uvodi se u skladu sa kontinuum normalizacijom svojstvenih stanja 4-impulsa slobodnih čestica.

U definiciji udarnog presjeka σ u teoriji elementarnih čestica uvijek treba broj raspršenih čestica u jedinici vremena podjeliti fluksom inicijalnih I_i i pomnožiti koncentracijom finalnih čestica n_f . Razlog zašto se množi koncentracijom finalnih čestica je tehnički. Vjerojatnost prijelaza u jedno od neprebrojivo mnogo finalnih svojstvenih stanja energije i impulsa uvijek je nula, pa se mora promatrati raspršenje u uski interval finalnih stanja impulsa $\frac{V}{(2\pi)^3} d^3p$ (gustoća stanja u impulsnom prostoru je $\frac{V}{(2\pi)^3}$, gdje je $V = L^3$ konačni volumen regiona prostora) po kojima se na kraju integrira.

Napomena: Normirano svojstveno stanje impulsa čestice u jednodimenzionom regionu $0 \leq x \leq L$ je $\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ipx}$. Periodični rubni uvjeti zahtijevaju da su svojstvene

vrijednosti impulsa kvantizirane $p = \left(\frac{2\pi}{L}\right)n$. Broj stanja čestice u intervalu $(E, E + dE)$ je

$dn = \rho(E)dE$, gdje je $\rho(E) = \frac{dn}{dE} = \left(\frac{L}{2\pi}\right) \frac{dp}{dE}$ gustoća stanja. U tri dimenzije je

$\rho(E) = \frac{dn}{dE} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{d}{dE} \int d^3p = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 p^2 \frac{dp}{dE} \int d\Omega$, gdje je $d\Omega$ diferencijal prostornog kuta.

Volumen faznog prostora $\int d^3p$ nije Lorentz invarijantan, pa se promjeni normalizacija

stanja tako da se koristi Lorentz invarijantni element faznog prostora $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} =$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0).$$

Kvadrat matičnog elementa S_{fi} iz (2.94) onda za vjerojatnost (kvadrat apsolutne vrijednosti amplitude) prijelaza $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ u jedinici vremena daje

$$dW_{fi} = V (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \overline{|M_{fi}|^2} \prod_{f,i} \frac{1}{2E_{f,i}} \prod_f \frac{V d^3p_f}{(2\pi)^3}, \quad (2.95)$$

gdje je $\overline{|M_{fi}|^2}$ odgovarajući zbroj ili srednja vrijednost invarijantnih amplituda M_{fi} po stupnjevima slobode finalnih/inicijalnih čestica koji se ne opserviraju u eksperimentu (na primjer, komponente spina čestica ili boje kvarkova).

Za tipični $2 \rightarrow 2$ proces u kome inicijalne čestice A i B, prelaze u finalne čestice C i D: $A + B \rightarrow C + D$, diferencijal stanja finalnih čestica je $dn_f = \frac{d^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D}$.

Fluks inicijalnih čestica A u sustavu mirovanja čestice B je $n_A v_A = \frac{1}{V} \frac{|\vec{p}_A|}{E_A}$. Brzina čestice A u sustavu mirovanja čestice B, zbog: $E_A^2 = \vec{p}_A^2 + m_A^2$ i $E_B = m_B$, može se prema (2.13) napisati u obliku $v_A = \frac{|\vec{p}_A|}{E_A} = \frac{1}{E_A m_B} \sqrt{(\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$. Iz (2.95)

Lorentz invarijantni izraz (isti u svim IRS-ima) za diferencijalni udarni presjek $d\sigma$ procesa $A + B \rightarrow C + D$ je onda

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{p}_C + \mathbf{p}_D - \mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B)}{4 \sqrt{(\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B)^2 - m_A^2 m_B^2}} |\overline{M}|^2 \frac{d^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D}. \quad (2.96)$$

Volumen V regiona prostora se pokrati u konačnom izrazu.

Sva fizika interakcija čestica sadržana je u invarijantnoj amplitudi procesa M. Faktori $\frac{d^3p}{2E}$ koji se pojavljuju u gornjem izrazu su Lorentz invarijantni jer je za svaku česticu

pozitivne energije $\delta(E^2 - \vec{p}^2 - m^2) d^4p = \frac{d^3p}{2E}$, što je očigledno invarijantno. Zaista,

$$\begin{aligned} \delta(E^2 - \vec{p}^2 - m^2) d^4p &= \delta\left[\left(E - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\right)\left(E + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\right)\right] d^3p dE = \\ &= d^3p dE \delta\left(E - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\right) \frac{\theta(E)}{E + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} = \frac{d^3p}{2E}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Udarni presjek $d\sigma$ najlakše se računa u sustavu CM čestica A i B u kome je $\vec{p}_A + \vec{p}_B = 0$, pa zbog očuvanja impulsa i $\vec{p}_C + \vec{p}_D = 0$, a Mandestamova invarijanta je $s = (E_A + E_B)^2$ kao u (2.24). Zakon očuvanja 4-impulsa izražen δ -funkcijom u faznom faktoru u (2.96) dozvoljava da se izvrši integracija po impulsu jedne od finalnih čestica, recimo po d^3p_D .

U CM sustavu je

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{p}_C + \mathbf{p}_D - \mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B) \frac{d^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D} &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{d^3p_C}{2E_C} \frac{1}{2E_D} \delta(E_C + E_D - \sqrt{s}) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f^2 dp_f d\Omega}{4E_C E_D} \delta(\sqrt{s} - E_C - E_D), \end{aligned}$$

gdje je za finalnu česticu C u sfernom sustavu $d^3p_f = p_f^2 dp_f d\Omega = p_f^2 dp_f \sin\theta d\theta d\varphi$.

Kako je

$$\sqrt{s} = E_C + E_D = \left(p_f^2 + m_C^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(p_f^2 + m_D^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

vrijedi i

$$\frac{d(\sqrt{s})}{dp_f} = p_f \frac{E_C + E_D}{E_C E_D}, \text{ te } \frac{dp_f}{E_C E_D} = \frac{d(\sqrt{s})}{p_f \sqrt{s}},$$

i fazni faktor u (2.96) je

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{p_f}{\sqrt{s}} d\Omega. \quad (2.98)$$

Kinematički factor iz (2.96) u CM sustavu je jednostavno $4\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2} = \frac{1}{4p_i \sqrt{s}}$, gdje je $p_i = |\vec{p}_A| = |\vec{p}_B|$, a $p_f = |\vec{p}_C| = |\vec{p}_D|$. Konačni izraz za diferencijalni udarni presjek $2 \rightarrow 2$ procesa u sustavu CM je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \overline{|M|^2}. \quad (2.99)$$

Da se nađe ukupni udarni presjek σ treba još integrirati po prostornom kutu $d\Omega$ finalne čestice c, što se može izvršiti tek kad se nađe angularna zavisnost matičnog elementa M procesa.

Za raspad nestabilne čestice $A \rightarrow B + C$ diferencijal širine raspada (vjerojatnost raspada u jedinici vremena) je u skladu sa (2.95) i (2.96)

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_B + p_C - p_A)}{2E_A} \overline{|M|^2} \frac{d^3p_B}{(2\pi)^3 2E_B} \frac{d^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C}. \quad (2.100)$$

Zakon očuvanja 4-impulsa omogućuje integraciju po d^3p_B i po energiji čestice C. Kako je $\delta^4(p_B + p_C - p_A) = \delta^3(\vec{p}_B + \vec{p}_C - \vec{p}_A) \delta(E_B + E_C - E_A)$, u sustavu mirovanja čestice A je $E_B = \sqrt{\vec{p}^2 + m_B^2} = \sqrt{E_C^2 - m_C^2 + m_B^2}$. Zbog $E_C^2 = \vec{p}_C^2 + m_C^2$, diferenciranjem se odmah dobija da vrijedi i $|\vec{p}_C| d|\vec{p}_C| = E_C dE_C$.

Energijska δ -funkcija je $\delta(E_B + E_C - E_A) = \left[\left| \frac{\partial}{\partial E_C} (E_B + E_C - E_A) \right| \right]_{E_C = E_A - E_B}^{-1} \delta(E_C - E_A) = \frac{E_B}{E_A} \delta(E_C - E_A)$, pa se za diferencijalnu širinu raspada dobija

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\vec{p}_f|}{E_A^2} |M|^2 d\Omega, \quad (2.101)$$

gdje je $\vec{p}_f = \vec{p}_C$. Integracija po $d\Omega$ zahtijeva poznavanje angularne zavisnosti od $|M|^2$.

Ukupna širina raspada Γ_A nestabilne čestice A je zbroj po svim mogućim kanalima raspada $\Gamma_A = \sum_f \Gamma_f$, čije su relativne zastupljenosti (branching ratios) $B_f = \frac{\Gamma_f}{\Gamma_A}$ i predstavlja vjerojatnost raspada u jedinici vremena

$$\Gamma_A = -\frac{1}{N_A} \frac{dN_A}{dt}, \quad (2.102)$$

pa slijedi da broj N_A čestica A eksponencijalno opada u vremenu,

$$N_A(t) = N_A(0) e^{-\Gamma_A t}. \quad (2.103)$$

Vrijeme $\tau_A = \Gamma_A^{-1}$ u p.s. jedinica ($\hbar = 1$) naziva se vrijeme života čestice A.

Prostorna rezolucija najboljih današnjih detektora tragova čestica visoke energije je oko $\Delta x \sim 10 \mu\text{m}$. Ako je relativistički faktor dilatacije vremena nestabilne čestice A u akceleratoru $\gamma_A \sim 100$, tj. $E_A = \gamma_A m_A c^2$, moguće je direktno detektirati kratko živuće čestice samo ako je njihovo vrijeme života $\tau_A \geq 10^{-16} \text{s}$, tj. ako je $\Gamma_A = \frac{\hbar}{\tau_A} \leq 6.6 \text{ eV}$, jer je $\hbar = 6.6 \times 10^{-16} \text{ eVs}$.

2.5.3 Produkcija rezonanci

Ako je stanje čestice A energije E u početnom trenutku $\psi(0)$, njeno stanje u trenutku t je onda $\psi(t) = \psi(0)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$. Ako je E realno onda je uvijek $|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2$ i čestica je stabilna. Za nestabilnu česticu A, po analogiji sa zakonom radioaktivnog raspada očekujemo da je

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.104)$$

što znači da je vjerojatnost da se čestica nije raspala poslije jednog vremena života $t = \tau$ jednaka $\frac{1}{e}$.

Ako energiji dodamo imaginarni član $E = E_0 - i\frac{\Gamma}{2}$, stanje čestice A u trenutku t postaje

$$\psi(t) = \psi(0)e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t}, \quad (2.105)$$

što daje zakon raspada (2.104). Da se vidi fizikalni smisao imaginarnog člana u energiji Γ treba napraviti Fourier transformaciju stanja čestice A

$$\tilde{\psi}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\frac{E}{\hbar}t} \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \psi(0) e^{i\frac{E-E_0}{\hbar}t} e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t} = \frac{i\hbar\psi(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(E-E_0) + i\frac{\Gamma}{2}},$$

pa je vjerojatnost da nestabilna čestica A ima energiju E

$$|\tilde{\psi}(E)|^2 = \frac{\hbar^2 |\psi(0)|^2}{2\pi} \frac{1}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (2.106)$$

Nestabilno stanje nema fiksnu energiju, nego uvijek ima energije E u rasponu poluširine Γ oko energije E_0 , što je naravno još jedna manifestacija relacija neodređenosti. Ovo je naročito važno za procese koji idu preko kreacije nestabilne kratko živuće rezonance R, na primjer procese oblika $A + B \rightarrow R \rightarrow C + D$. Najvažniji procesi ovog tipa u SM imaju inicijalne čestice e^+e^- ili par kvarkova, a rezonance R su gauge W^\pm , Z ili Higgs bozon h koje se raspadaju u par fermiona.

Amplituda raspršenja (2.63) skalarnih (spina 0) čestica se može razviti u red u red po Legendreovim polinomima

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos\theta), \quad (2.107)$$

gdje je valni broj k intenzitet impulsa u sustavu CM. Ovaj izraz se naziva razvoj po parcijalnim valovima, a δ_l se naziva fazni pomak (phase shift) l -tog parcijalnog vala. Kvadriranjem i integracijom po kutovima dobija se ukupni udarni presjek

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |e^{2i\delta_l} - 1|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (2.108)$$

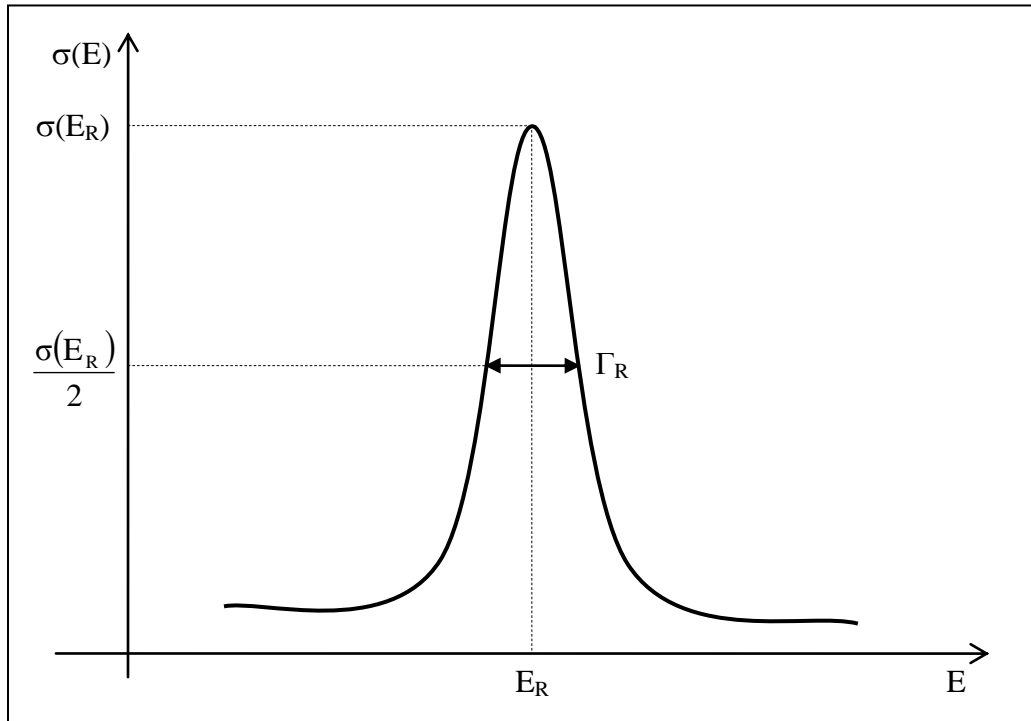
Ukoliko je $\delta_l = \frac{\pi}{2}$ za neko l , udarni presjek za taj parcijalni val je maksimalan i kaže se da u raspršenju postoji rezonanca koja je čestica spina l . Tada rezonanca kompletno dominira amplitudu raspršenja, tj.

$$f(\theta) \approx \frac{(2l+1)P_l(\cos\theta)}{k} \frac{\Gamma/2}{E_R - E - i\Gamma/2}, \quad (2.109)$$

pa je ukupni udarni presjek

$$\sigma(E) \cong \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}, \quad (2.110)$$

oblika kao (2.106). Krivulja oblika $\frac{\Gamma/2}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$ naziva se Breit-Wigner rezonanca.



Slika 2.3

Udarni presjek (2.110) ima uzak maksimum kad je energija inicijalnih čestica $E = E_R$, a σ opadne na polovicu maksimalne vrijednosti kad je energija $E_R \pm \frac{\Gamma}{2}$. Slika 2.3 pokazuje kako izgleda udarni presjek $\sigma(E)$ u okolini rezonance energije E_R . Γ je širina krivulje rezonance na polovici visine.

Kako je $s = E^2$, $s_R = E_R^2 = m_R^2$ i $E + E_R \cong 2\sqrt{s_R} = 2m_R$ Breit-Wignerova amplituda se može napisati pomoću Lorentz invarijantnih skalarnih veličina

$$\frac{\Gamma/2}{E_R - E - i\Gamma/2} \cong \frac{m_R \Gamma}{(s_R - s) - im_R \Gamma}. \quad (2.111)$$

Ovakav uski maksimum iznad kontinuirane krivulje udarnog presjeka $\sigma(E)$ za neku energiju $E_R = m_R$ je eksperimentalni znak postojanja kratko živuće $\tau_R = (\Gamma_R)^{-1}$ rezonance u procesu raspršenja $A + B \rightarrow R \rightarrow C + D$.

Upravo na ovaj način će se možda u eksperimentima na LHC otkriti postojanje Higgs bozona u procesu raspršenja $t + \bar{t} \rightarrow h \rightarrow \gamma + \gamma$.

Izraz (2.110) za udarni presjek treba generalizirati na slučaj raspršenja kvarkova i leptona koji imaju spin i boju. U eksperimentima se najčešće ne detektiraju stanja spina [a, stanja boje se ni ne mogu detektirati (zatočenje boje)] inicijalnih i finalnih čestica (izuzetak su eksperimenti sa polariziranim česticama), pa u konačnom izrazu treba izvršiti usrednjavanje po $(2l_A + 1)(2l_B + 1)$ spin i/ili $c_A c_B$ boja stanjima inicijalnih čestica koja su sva podjednako vjerojatna i zbrojiti po komponentama spina/boje finalnih čestica. Kvarkovi i leptoni su fermioni i za njih je $2l + 1 = 2$. Iako fotoni i gluoni imaju spin 1, za njih je $2l + 1 = 2$, pošto imaju samo dva transverzalna stupnja polarizacije jer su čestice bez mase. Za masivne elektroslabe gauge bozone je $2l + 1 = 3$. Kako Higgs bozon ima spin 0 za njegova stanja je $2l + 1 = 1$. Multiplikativni faktor boje je $c = 3$ za kvarkove, za gluone je $c = 8$ i $c = 1$ za sva kolor siglet stanja.

Tako se za udarni presjek čestica iz SM za proces $A + B \rightarrow R \rightarrow C + D + \dots$ dobija

$$\sigma(k) \approx \frac{\pi}{k^2} \left[\frac{(2s_R + 1)c_R}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)c_A c_B} \right] \frac{\Gamma_{AB}^R \Gamma_f^R}{(E - E_R)^2 + \Gamma_R^2/4}, \quad (2.112)$$

gdje je Γ_R ukupna širina rezonance R (zbroj po svim kanalima raspada), a Γ_{AB}^R i Γ_f^R su parcijalne širine za inicijalnu kreaciju u kanalu $A + B \rightarrow R$ i finalni $R \rightarrow C + D + \dots \equiv f$ raspad rezonance R, i gdje još treba sumirati po svim spin/boja stanjima finalnih čestica C, D, ...

Često se umjesto (2.112) koristi aproksimativna formula koja daje zavisnost udarnog presjeka od Mandelstamove varijable $s = (p_A + p_B)^2$ koja je u sustavu CM upravo ukupna energija $s = (E_A + E_B)^2 = E^2$ i $s_R = m_R^2$, te prema (2.28)

$$k^2 = |\vec{k}|^2 = \frac{1}{4s} \left[s - (m_A + m_B)^2 \right] \left[s - (m_A - m_B)^2 \right]. \quad (2.113)$$

Udarni presjek $\sigma(s)$ je vrlo mali osim kad je $E = E_R$, što znači da se svuda smije zamijeniti $E_R \approx E$ osim u Breit-Wigner nazivniku, pa množeći sa

$$\frac{(E + E_R)^2}{(E - E_R)^2} \cong \frac{4s}{(E + E_R)^2},$$

dobijamo

$$\sigma(s) \approx \frac{4\pi s}{k^2} \left[\frac{(2s_R + 1)c_R}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)c_A c_B} \right] \frac{\Gamma_{AB}^R \Gamma_f^R}{(s - m_R^2)^2 + m_R^2 \Gamma_R^2}, \quad (2.114)$$

gdje je k^2 dato u (2.113).

Zadaci:

Zadatak 2.1. Eksplicitno provjeriti da je skalarni produkt dva 4-vektora Lorentz invarijantan, tj. da važi: $a \cdot b = a' \cdot b'$.

Zadatak 2.2. Pokazati da je točna formula za slaganje brzina (2.14).

Zadatak 2.3. Izvesti opću formulu za slaganje brzina u relativističkoj fizici. Neka u pokretnom sustavu S' , koji se giba brzinom \vec{V} u odnosu na sustav S , imamo česticu brzine \vec{v}' . Kolika je brzina te čestice u nepokretnom sustavu S ?

Rješenje:

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v}'_{\parallel} + \vec{V}}{1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}} ; \quad \vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{v}'_{\perp}}{\gamma_v \left(1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}\right)}, \quad (2.115)$$

gdje je $\gamma_v \equiv \gamma(V) = \left[1 - \frac{V^2}{c^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$, a komponente brzine čestice, paralelne \vec{v}_{\parallel} i okomite \vec{v}_{\perp} na vektor brzine sustava \vec{V} , su: $\vec{v}_{\parallel} = \frac{1}{V^2}(\vec{v} \cdot \vec{V})\vec{V}$ i $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$.

Zadatak 2.4. Pokazati ispravnost formule (2.15).

Zadatak 2.5. Pokazati ispravnost formula (2.16) i (2.17).

Zadatak 2.6. Pokazati ispravnost formule (2.23).

Zadatak 2.7. Pokazati ispravnost formula (2.27)-(2.30).

Zadatak 2.8. Pokazati ispravnost formule (2.43).

Zadatak 2.9. U raspadu ultrarelativističke čestice: $A(E_A, 0, 0, p) \rightarrow B(E_B, \vec{q}) + \dots$ kut raspada definiran je kao: $\vec{p} \cdot \vec{q} = pq \cos \theta$. Pokazati da važi:

$$\operatorname{tg}\theta \approx \frac{m_A}{E_A} \frac{v \sin \theta_{\text{CM}}}{v \cos \theta_{\text{CM}} + c}, \quad (2.116)$$

gdje je v brzina čestice B u laboratorijskom sustavu, a θ_{CM} je kut raspada u sustavu mirovanja čestice A.

Zadatak 2.10. Pokazati da je izraz (2.66) diferencijalni udarni presjek u potencijalu (2.65) u Born aproksimaciji.

Zadatak 2.11. Pokazati da je u sustavu mirovanja čestice B fluks inicijalnih čestica I_0

$$= \frac{1}{|\vec{v}_A - \vec{v}_B|} \text{ u procesu } A + B \rightarrow C + D \text{ dat sa } v_A = \frac{|\vec{p}_A|}{E_A} = \frac{1}{E_A m_B} \sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}.$$

3. Lagrangiani i jednađbe gibanja u fizici elementarnih čestica

U klasičnoj mehanici sustav čestica se opisuje Lagrangianom $L = L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - U$, gdje su sile derivacije potencijalne energije U . Na primjer, konzervativna generalizirana sila Q_i pridružena i -toj generaliziranoj koordinati q_i je: $Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$.

Hamiltonov princip (princip minimalnog djelovanja) daje jednađbe gibanja sustava – Lagrangeove jednađbe

$$\delta I = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

gdje je djelovanje sustava: $I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, a n je broj stupnjeva slobode gibanja.

Mogućnost kreiranja i anihiliranja čestica u svakoj točki prostor-vremena zahtijeva da elementarne čestice opisujemo kao eksitacije (titraje) relativističkih kvantno mehaničkih polja ϕ_a koja su kontinuirane funkcije točke u prostor-vremenu $\phi_a = \phi_a(x^\mu)$. Sustav se opisuje Lagrangeovom gustoćom $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a, x^\mu)$. Uvjet stabilnosti teorije zahtijeva da je ukupni Lagrangian $L = \int d^3x \mathcal{L}$, a djelovanje sustava je onda $I = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}$. Poencare invarijantnost (translatorska invarijantnost) zahtijeva da gustoća Lagrangiana ne zavisi eksplicitno od x^μ .

Hamiltonov princip daje jednađbe gibanja – Lagrangeove jednađbe za polja ϕ_a koje su

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi_a}{\partial x^\mu} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0. \quad (3.1)$$

Iako je (3.1) samo generalizacija rezultata iz klasične mehanike, ponovimo ukratko derivaciju Lagrangeovih jednađbi gibanja.

Neka je varijacija polja $\phi_a(x) \rightarrow \phi_a'(x) = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x)$. Varijacija djelovanja je onda

$$\delta I = \int d^4x \delta \mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta (\partial_\mu \phi_a) \right].$$

Koristeći: $\delta(\partial_\mu \phi_a) = \partial_\mu (\delta\phi_a)$ i parcijalno integrirajući drugi član prema

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta(\partial_\mu \phi_a) = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta\phi_a \right] - (\delta\phi_a) \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right],$$

uz uvjet da površinski integral prvog člana na desnoj strani iščezava jer polja dovoljno brzo trnu u beskonačnosti, varijacija djelovanja postaje

$$\delta I = \int d^4 x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right] \delta\phi_a.$$

Zbog linearne nezavisnosti varijacija polja $\delta\phi_a(x)$, uvjet stacionarnosti djelovanja $\delta I = 0$ odmah daje Lagrangeove jednadžbe gibanja (3.1).

Svaka elementarna čestica opisana je odgovarajućim poljem. Indeks a označava različita polja, a ne različite stupnjeve slobode gibanja (svaka teorija polja uvijek ima neprebrojivo mnogo stupnjeva slobode).

Iz konteksta je uvijek jasno da li se misli na Lagrangian ili na Lagrangeovu gustoću – u teoriji elementarnih čestica uobičajeno je uvijek govoriti o Lagrangianu, čak i kad se ustvari misli na Lagrangeovu gustoću odgovarajućih polja.

Lagrangeova gustoća \mathcal{L} za svako polje ϕ_a je zbroj Lagrangeove gustoće slobodnog polja \mathcal{L}_{sl} , koja je kvadratna funkcija polja ϕ_a , i gustoće Lagrangiana interakcije \mathcal{L}_{int} , sa drugim poljima, koja je bar trećeg reda po poljima $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{sl} + \mathcal{L}_{int}$. Oblik Lagrangiana slobodnih polja zavisi samo od spina čestica koje opisuju (\mathcal{L}_{sl} je kao kinetička energija sustava u klasičnoj mehanici), te postoji pet različitih Lagrangiana slobodnih polja za čestice spina $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ i 2 .

Za čestice spina većeg od 2 ne postoji konzistentna teorija polja jer njihove jednadžbe gibanja uključuju derivacije reda većeg od dva i/ili Hamiltonijan nije ograničen sa donje strane.

Polja različitog spina nazivamo:

Spin 0 – skalarno polje; Spin $\frac{1}{2}$ – spinorsko polje; Spin 1 – vektorsko polje;

Spin $\frac{3}{2}$ – polje gravitina; Spin 2 – tenzorsko polje (polje gravitona).

Dosad nije otkrivena nijedna čestica spina $\frac{3}{2}$, ali postoji teorija elementarnih čestica koja predviđa njihovo postojanje – Supersimetrija (SUSY). Supersimetrija je maksimalna kontinuirana simetrija fizikalnog sustava suglasna sa kvantnom mehanikom i specijalnom teorijom relativnosti.

SUSY teorija predviđa da za svaku poznatu elementarnu česticu postoji supersimetrični partner – dosad neotkrivena elementarna čestica spina umanjenog za $\frac{1}{2}$. SUSY je simetrija koja svakom bozonu pridružuje fermion i obrnuto. SUSY partner gravitona je gravitino spina $\frac{3}{2}$, SUSY partner gauge bozona je gaugino spina $\frac{1}{2}$, itd.

Ako uopće postoje, fizičari se nadaju da će se u eksperimentima raspršenja protona na protonu na LHC-u otkriti supersimetrične čestice koje su najbolji teorijski kandidati za čestice „tamne tvari“.

Svaka kvantna teorija polja ima svoj prostor stanja (Hilbertov prostor) u kome djeluju operatori teorije. Bazu prostora stanja čini skup jednočestičnih stanja slobodnih čestica (svojevrsna stanja Hamiltoniana) koja imaju određen 4-impuls p^μ i spin, kao i moguće dodatne kvantne brojeve. Polje koje pretstavlja takvo stanje slobodne čestice je ravni val oblika

$$\phi(x^\mu) = \chi(p_\mu) e^{-ip \cdot x} = \chi(p_\mu) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (3.2)$$

gdje je $\chi(p_\mu)$ spinska valna funkcija koja ne zavisi od x^μ , ali može zavisi od impulsa p_μ čestice. Čestice mogu imati i dodatne kvantne brojeve, na primjer, kvarkovi imaju boju, pa će njihova jednočestična stanja sadržavati dodatni faktor – valnu funkciju boje, kao u (1.3). Slobodna stanja svake čestice iz SM (kvarkova, leptona, gauge i Higgs bozona) imaju istu zavisnost od prostorno-vremenskih koordinata x^μ i razlikuju se samo po valnoj funkciji spina čestice koja je – skalar za čestice spina 0, vektor za čestice spina 1 i spinor za čestice spina $\frac{1}{2}$. Koristeći jednočestična stanja oblika (3.2) za svako polje u teoriji omogućuje nam da u proračunu vjerojatnosti bilo kojeg fizikalnog procesa razdvojimo faktor koji zavisi od prostorno-vremenskih koordinata x^μ i rezultira δ -funkcijama koje osiguravaju očuvanje ukupnog 4-impulsa čestica u procesu, od faktora koji zavise samo od spina (i drugih relevantnih kvantnih brojeva) čestica koje sudjeluju u procesu. Ovo omogućuje definiranje Feynmanovih pravila teorije u impulsnom prostoru i znatno pojednostavljuje proračun vjerojatnosti procesa. Feynmanova pravila ćemo razmotriti u Poglavlju 4.

Stanja realnih elementarnih čestica unutar snopova visoke energije koje sudjeluju u stvarnim eksperimentima naravno nisu svojevrsna stanja impulsa čestica, tj. nisu ravni valovi, već valni paketi ograničene širine i po koordinatama i po impulsima. No, kako je pojašnjeno u Poglavlju 2.5 proračun S-matričnih elemenata procesa može se vršiti u bilo kojoj bazi Hilbertova prostora stanja teorije jer rezultat ne smije zavisi od izbora baze. Zato ćemo u svemu što slijedi uvijek koristiti jednočestična stanja oblika (3.2) za svaku česticu iz SM.

3.1 Lagrangian vektorskog polja

U fizici elementarnih čestica teorija se formulira pomoću Lagrangiana, koji mora biti skalar u svakom relevantnom prostoru, i iz koga se po pravilima kvantne teorije polja mogu izračunati sve fizikalne opservable. Lagrangian potpuno definira teoriju: \mathcal{L}_{sl} određuje koja kvantna polja (elementarne čestice) sadrži sustav i određuje njihovu kinetičku energiju, a \mathcal{L}_{int} specificira interakcije tih polja (sile među česticama). \mathcal{L}_{int} je kao potencijalna energija u klasičnoj mehanici. Teorija polja se u klasičnoj fizici prvi put pojavljuje u elektrodinamici.

Klasična elektrodinamika je relativistička (Lorentz invarijantna) teorija koja je prototip za svaku teoriju polja. Elektromagnetska polja \vec{E} i \vec{B} su rješenja Maxwellovih jednažbi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \rho & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \vec{B} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

(jednostavnosti radi odabrali smo sustav jedinica u kome je $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$), čiji su izvori gustoće naboja i struja ρ i $\vec{j} = \rho \vec{v}$, koje zadovoljavaju lokalni zakon očuvanja naboja (jednažbu kontinuiteta)

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.4)$$

Elektromagnetska polja mogu se izraziti preko elektromagnetskih potencijala ϕ i \vec{A} relacijama

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (3.5)$$

Elektromagnetski potencijali nisu jednoznačno određeni i fizika (jednažbe gibanja) ostaje nepromjenjena napravimo li baždarnu (gauge) transformaciju

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \nabla \Lambda, \quad (3.6)$$

gdje je Λ proizvoljno skalarno polje. Da specificiramo potencijale moramo po volji odabrati uvjet baždarenja (odabrati gauge), što ustvari znači da moramo zadati vrijednost $\nabla \cdot \vec{A}$. Odaberemo li Lorentzov gauge uvjet

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (3.7)$$

Maxwellove jednađbe za elektromagnetske potencijale postaju nehomogene valne jednađbe

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

U relativističkoj notaciji definiramo gustoću 4-struje j^μ i elektromagnetske potencijale A^μ kao vektorska polja sa komponentama

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}), \quad A^\mu = (\phi, \vec{A}). \quad (3.9)$$

Prema (2.6) je: $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \nabla)$, pa su zakon očuvanja naboja (3.4) i Lorentzov gauge uvjet (3.7) ustvari tvrdnje da su 4-divergencije vektorskih polja j^μ i A^μ nula, tj.

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.10)$$

Definiramo li tenzor elektromagnetskog polja $F^{\mu\nu}$ kao

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (3.11)$$

lako se uvjeriti da su njegove komponente stvarno komponente elektromagnetskih polja

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -E^i, \quad F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\epsilon^{ijk} B^k. \quad (3.12)$$

Kako je $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial_0, -\nabla)$, infinitezimalna gauge transformacija (3.6) je

$$\delta A^\mu = A'^\mu - A^\mu = \partial^\mu \Lambda, \quad (3.13)$$

i tenzor $F^{\mu\nu}$ je gauge invarijantan jer je $(\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu) \Lambda = 0$. Nehomogena valna jednađba (3.8) za elektromagnetske potencijale prema (2.8) postaje

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = j^\mu. \quad (3.14)$$

Konačno, lako se uvjeriti da dvije Maxwellove jednađbe (3.3) u kojima se pojavljuju izvori u relativističkoj notaciji postaju

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (3.15)$$

dok su dvije preostale Maxwelllove jednadžbe

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.16)$$

gdje je dualni elektromagnetski tenzor definiran pomoću antisimetričnog tenzora $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (3.17)$$

Lagrangian (gustoća Lagrangiana) elektromagnetskog polja je

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{sl.} + \mathcal{L}_{int.} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu, \quad (3.18)$$

koji variranjem po A^μ prema (3.1) odmah daje Maxwelllove jednadžbe (3.15). Druge dvije Maxwelllove jednadžbe (3.16) su direktna posljedica antisimetričnosti tenzora elektromagnetskog polja $F^{\mu\nu}$.

Zbog tenzorske strukture Lagrangian (3.18) je Lorentz invarijantan. Lagrangian (3.18) je i gauge invarijantan, jer je pri transformaciji (3.13) Maxwellov Lagrangian $\mathcal{L}_{sl.}$ nepromjenjen, a gustoća Lagrangiana interakcije se zbog zakona očuvanja naboja (3.10), mijenja samo za 4-divergenciju koja iščezava poslije volumne interakcije zbog rubnih uvjeta

$$\delta\mathcal{L}_{int.} = -j_\mu \partial^\mu \Lambda = -\partial^\mu (j_\mu \Lambda) + \Lambda (\partial^\mu j_\mu) = -\partial^\mu (j_\mu \Lambda), \quad (3.19)$$

što znači da ukupno djelovanje, pa prema tome i jednadžbe gibanja (Maxwellove jednadžbe), ostaje nepromjenjeno.

Ovo je primjer Noether teorema: invarijantnost Lagrangiana (precizno djelovanja) sustava pri djelovanju kontinuirane grupe gauge transformacija osigurava važenje zakona očuvanja naboja.

U kvantnoj fizici vektorsko polje $A^\mu(x)$ postaje polje fotona, čestice spina 1, čiji je slobodni Lagrangian upravo Maxwellov Lagrangian

$$\mathcal{L}_{sl.}^{(1)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \text{ gdje je } F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (3.20)$$

Klasična elektrodinamika pokazuje i kako izgleda Lorentz invarijantna interakcija između vektorskih polja A^μ (tj. čestica spina 1, recimo fotona) i drugih polja

$$\mathcal{L}_{int} = -j_\mu A^\mu. \quad (3.21)$$

Foton je čestica bez mase. Čestica spina 1 i mase m bit će opisana vektorskim poljem $A^\mu(x)$ čiji slobodni Lagrangian, koji se naziva Proca Lagrangian, uz (3.20) ima i dodatni maseni član $\frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$

$$\mathcal{L}_{sl.}^{(1)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu. \quad (3.22)$$

Maseni član očigledno nije gauge invarijantan – elektrodinamika je gauge invarijantna teorija, ako i samo ako, je masa fotona nula.

Euler-Lagrangeove jednačbe koje slijede iz Proca Lagrangiana uz \mathcal{L}_{int} koji je zadan u (3.21) su

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = j^\nu. \quad (3.23)$$

Zakon očuvanja naboja (3.10), tj. zahtjev: $\partial_\nu j^\nu = 0$, osigurava važenje Lorentzovog gauge uvjeta: $\partial_\nu A^\nu = 0$, što daje jednačbu gibanja masivnog vektorskog polja A^μ

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu + m^2 A^\mu = j^\mu. \quad (3.24)$$

Nije teško razumjeti fizikalni smisao ove jednačbe. Najjednostavnija rješenja jednačbe (3.24) su statička polja za koja gornja jednačba postaje

$$\left(\nabla^2 - m^2\right) A^\mu(\vec{x}) = -j^\mu(\vec{x}). \quad (3.25)$$

Odaberemo li najjednostavniji mogući izvor – jedan točkasti naboj q koji miruje u ishodištu čija 4-struja je $j^\mu(x) = q g^{\mu 0} \delta(\vec{x})$, pa je rješenje $A^i = 0$, a nulta komponenta $A^0 = \phi$ zadovoljava

$$\left(\nabla^2 - m^2\right) \phi = -q \delta(\vec{x}). \quad (3.26)$$

Jedino sferno simetrično rješenje jednačbe (3.26) koje iščezava u beskonačnosti (Zadatak 3.3.) je Yukawa-in potencijal

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}, \quad (3.27)$$

gdje je $r = |\vec{x}|$. Efekt mase medijatora interakcije vidi se iz statičkog potencijala (3.27) vektorske čestice mase m i naboja q . Masa fotona uzrokovala bi eksponencijalno opadanje polja za faktor $\frac{1}{e}$ na rastojanju $\frac{1}{m}$ od izvora. Za takav potencijal kaže se da ima doseg $\frac{1}{m}$.

Brojne eksperimentalne provjere Coulombovog zakona sa točnošću sve do $\approx 10^{-22}$ postavljaju vrlo malu gornju granicu moguće mase fotona. U slučaju elektrodinamike, tj. ako je $m = 0$ potencijal (3.27) je uobičajeni Coulombov potencijal beskonačnog doseg.

Svako rješenje jednadžbi gibanja koje slijede iz Lagrangiana (3.18) ili (3.22) može se prikazati kao superpozicija ravnih valova oblika (3.2) koji predstavljaju slobodna jednočestična stanja određenog impulsa i spina. Za masivnu česticu spina 1 (vektorsku česticu) spinska funkcija $\chi(p_\mu)$ je određena jediničnim 4-vektorom polarizacije ε_μ koji je prostornog tipa $\hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varepsilon} = -1$ i zadovoljava Lorentz invarijantni uvjet $\varepsilon \cdot p = \varepsilon_\mu p^\mu = 0$ i pri prostornim rotacijama za kut θ oko z-osi se transformira kao $e^{-iS_z\theta}$ spina $s = 1$ (Zadatak 3.4), što znači da postoje tri moguće vrijednosti z-komponente spina čestice: $-1, 0$ i $+1$. Jednočestično stanje masivnog vektorskog polja je onda $A_\mu(x) = N \varepsilon_\mu e^{-ip \cdot x}$ kao u (3.2), gdje je N normalizacioni faktor. U sustavu mirovanja čestice mase m najjednostavniji mogući izbor za prostorne komponente vektora polarizacije bila bi tri jedinična vektora prostornih koordinatnih osi, tj.

$$p_\mu = (m, 0, 0, 0), \quad \hat{\varepsilon}_x = (0, 1, 0, 0), \quad \hat{\varepsilon}_y = (0, 0, 1, 0), \quad \hat{\varepsilon}_z = (0, 0, 0, 1). \quad (3.28)$$

Lako se provjerava da ova tri vektora polarizacije ($\varepsilon_0 = 0$) masivne čestice spina 1 zadovoljavaju sve potrebne uvjete – to su prostorni jedinični vektori i okomiti na 4-vektor impulsa čestice što zahtijeva uvjet gauge invarijantnosti $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$.

Ako čestica ima impuls \vec{p} duž z-osi možemo iskoristiti Lorentz potiske, (2.11) tj. (2.17), da prelaskom iz sustava mirovanja u laboratorijski sustav dobijemo vektore polarizacije

$$\hat{\varepsilon}_x = (0, 1, 0, 0), \quad \hat{\varepsilon}_y = (0, 0, 1, 0), \quad \hat{\varepsilon}_z = (\beta\gamma, 0, 0, \gamma) = \frac{E}{m}(\beta, 0, 0, 1), \quad (3.29)$$

jer je $p_\mu = (\gamma m, 0, 0, \gamma) = \frac{E}{m}(1, 0, 0, \beta)$, gdje je $\vec{p}^2 = \beta^2 E^2$ i $E = \gamma m$.

Često se koristi i druga baza stanja spina – stanja heliciteta. To su svojstvena stanja angularnog momenta koja imaju fiksnu projekciju na pravac impulsa čestice \vec{p} . Ako je impuls duž z-osi, prostorne komponente tri vektora polarizacije sa $s_z = \pm 1, 0$ su u sustavu mirovanja čestice

$$\hat{\varepsilon}_\pm = \mp \left(\frac{\hat{\varepsilon}_x \pm i\hat{\varepsilon}_y}{\sqrt{2}} \right), \quad \hat{\varepsilon}_0 = \hat{\varepsilon}_z, \quad (3.30)$$

gdje su $\hat{\varepsilon}_i$ jedinični vektori prostornih koordinatnih osi. Lako je provjeriti da su vektori (3.30) zaista svojstvene stanja operatora treće komponente spina S_3 (Zadatak 3.4) svojstvenih vrijednosti ± 1 i 0 . Lorentz potiskom u lab sustav za vektore polarizacije fiksnog heliciteta čestice koja se giba duž z-osi lako se dobija

$$\hat{\varepsilon}_\mu(\lambda = \pm 1) = \mp \left(0, \frac{\hat{\varepsilon}_x \pm i \hat{\varepsilon}_y}{\sqrt{2}} \right), \quad \hat{\varepsilon}_\mu(\lambda = 0) = \frac{1}{m} (|\vec{p}|, 0, 0, E) = \frac{E}{m} (\beta, 0, 0, 1). \quad (3.31)$$

Da bi se potpuno poznavalo jednočestično stanje bilo koje čestice u SM treba specificirati njen impuls \vec{p} i helicitet λ , plus ostale interne relevantne kvantne brojeve (naboj, boju, ...).

Za fotone, tj. vektorske čestice bez mase, postoje samo dva linearno nezavisna vektora polarizacije, umjesto tri za masivnu česticu. Fotoni su transverzalno polarizirani, tj. nemaju longitudinalni stupanj slobode polarizacije [kad $m \rightarrow 0$, $\frac{E}{m}(\beta, 0, 0, 1)$ ne može biti vektor polarizacije fotona]. Ovo svojstvo je direktna posljedica gauge simetrije (3.13) elektrodinamike što nije teško pokazati. Neka je

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (3.32)$$

i pretpostavimo da oba polja zadovoljavaju Lorentz gauge uvjet $\partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu$. Tada $\Lambda(x)$ mora zadovoljavati Klein-Gordonovu jednadžbu $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\Lambda = 0$, čije je jedno rješenje $\Lambda(x) = N e^{-i p \cdot x}$, gdje je N proizvoljna konstanta. Napišemo li oba polja fotona u obliku $A_\mu = \varepsilon_\mu e^{-i p \cdot x}$ i $A'_\mu = \varepsilon'_\mu e^{-i p \cdot x}$, relacija (3.32) zahtijeva da za vektore polarizacije vrijedi

$$\varepsilon'_\mu = \varepsilon_\mu + (\text{konstanta}) \times p_\mu. \quad (3.33)$$

Oba polja, A_μ i A'_μ , opisuju istu fiziku, pa isto vrijedi i za vektore polarizacije ε'_μ i ε_μ .

Uvjet (3.33) uvijek možemo iskoristiti da eliminiramo vremensku komponentu novog vektora polarizacije fotona ε'_μ , koji će onda zadovoljavati Lorentz gauge uvjet u pojednostavljenoj formi kao uvjet transverzalnosti fotona

$$0 = \varepsilon'_\mu p^\mu = \hat{\varepsilon}' \cdot \vec{p}. \quad (3.34)$$

Kako u transverzalnoj ravnini postoje samo dva stupnja slobode, foton ima samo dva transverzalna stupnja polarizacije.

Analogija sa klasičnom elektrodinamikom omogućava da se nađe Lagrangian slobodnog vektorskog polja A^μ (spina 1)

$$\mathcal{L}_{\text{sl.}}^{(1)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \text{za } m = 0, \quad (3.35)$$

tj.

$$\mathcal{L}_{sl.}^{(1)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu, \text{ za } m \neq 0, \quad (3.36)$$

pri čemu vektorsko polje interagira sa vektorskom strujom, tj. Lagrangian interakcije mora biti oblika

$$\mathcal{L}_{int} = -j_\mu A^\mu. \quad (3.37)$$

SM elementarnih čestica zahtijeva generalizaciju na slučaj kad postoji više vektorskih gauge polja A_a^μ , koja se međusobno razlikuju po indeksu a . U SM je $a = 1, 2, 3, 4$ za elektro-slabe interakcije i $a = 1, 2, \dots, 8$ za jake interakcije, tako da polja A_a^μ opisuju 4 gauge bozona medijatora elektro-slabih interakcija (foton i W^\pm i Z bozoni) i 8 gluona – gauge bozona koji su medijatori jakih interakcija. U tom slučaju kompliciranije su i gauge transformacije i uključuju međusobno mješanje vektorska polja A_a^μ koje tvore grupu unutarnjih gauge simetrija teorije. Takve teorije nazivaju se Yang-Mills teorije [C.N. Yang, R. Mills, Phys. Rev. 96 (1954) 191] ili ne-Abelove gauge teorije (precizno, lokalno invarijantne ne-Abelove gauge teorije). Gauge teorije nužno uključuju interakcije različitih polja i razmatrat ćemo ih u slijedećem poglavlju poslije pregleda Lagrangiana slobodnih polja.

3.2 Lagrangian skalarnog polja

Najjednostavnije polje je realno skalarno (spina 0) polje $\phi(x)$ koje opisuje čestice mase m bez spina. Lagrangian takvog polja je

$$\mathcal{L}_{sl.}^{(0)} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2] . \quad (3.38)$$

Prema (3.1), jednačba gibanja realnog skalarnog polja koja se naziva Klein-Gordonova jednačba je

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 . \quad (3.39)$$

Za relativističku česticu mase m vrijedi $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. U koordinatnoj reprezentaciji kvantne mehanike za svaku kvantnu česticu je $E = i\partial_0$ i $\vec{p} = -i\nabla$, pa vrijedi $\partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2 = -(i\partial_0)^2 + (-i\nabla)^2 = -E^2 + \vec{p}^2 = -m^2$, što znači da polje $\phi(x)$ koje opisuje relativističku kvantnu česticu spina 0 mora zadovoljavati Klein-Gordonovu jednačbu.

Relativistička Schrodingerova jednačba

Slobodna nerelativistička kvantna čestica opisana je valnom funkcijom $\Psi(\vec{x}, t)$ koja zadovoljava Schrodingerovu jednačbu (u SI sustavu jedinica)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi , \text{ gdje je kvantni Hamiltonian } \hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} = \frac{(-i\hbar\nabla)^2}{2m} , \quad (3.40)$$

čije je rješenje ravni val

$$\Psi(\vec{x}, t) = N \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{x} - Et) \right] , \quad (3.41)$$

frekvencije $\nu = \frac{E}{h}$ i valne duljine $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|} = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$, a N je normalizaciona konstanta. Za relativističku česticu spina 0 i mase m je

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + c^4 m^2 , \quad (3.42)$$

pa je relativistička jednačba za valnu funkciju slobodne skalarnе čestice Klein-Gordonova jednačba

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Psi + m^2 c^4 \Psi , \quad (3.43)$$

čije je jedno rješenje ravni val (3.41).

Prvi član u Lagrangianu (3.38) je kinetički član (jer nastaje uslijed \vec{p}^2), a drugi je maseni član.

Izvori i struje u kvantnoj mehanici

Schrodingerova jednačba za valnu funkciju ψ slobodne kvantne čestice mase m je

$$2mi \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla^2 \psi = 0. \quad (3.44)$$

Po definici gustoća vjerojatnosti položaja čestice je: $\rho = |\psi(x)|^2$, a gustoća struje je

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (3.45)$$

Množeći Schrodingerovu jednačbu (3.44) sa $i\psi^*$ i zbrajajući sa kompleksno konjugiranom jednačbom pomnoženom sa $-i\psi$, lako je pokazati da važi zakon očuvanja vjerojatnosti (jednačba kontinuiteta)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0. \quad (3.46)$$

Za jednu slobodnu česticu valna funkcija je $\psi(x) = N \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t)$, pa je

$$\rho = |N|^2, \quad (3.47)$$

i

$$\vec{j} = \rho \frac{\vec{k}}{m} = \frac{\vec{p}}{\hbar m} \rho. \quad (3.48)$$

U nerelativističkoj kvantnoj mehanici ove veličine nisu specijalno korisne, za razliku od relativističke kvantne teorije polja u kojoj struja kvantnih čestica $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ ulazi u Lagrangian interakcije kvantnih polja kao u elektrodinamici (3.21).

Kako u relativističkoj fizici želimo da ρ i \vec{j} budu komponente jednog 4-vektora j^μ kao u (3.9), zgodnije je promjeniti normalizaciju valne funkcije (jednočestičnog stanja) čestice mase m koja zadovoljava Klein-Gordonovu jednačbu (3.39) definirajući gustoću 4-struja kao

$$j^\mu = i(\psi \partial^\mu \psi^* - \psi^* \partial^\mu \psi), \quad (3.49)$$

umjesto (3.45). Lako se vidi da 4-divergencija struje iščezava $\partial_\mu j^\mu = 0$, tj. za slobodnu česticu vrijedi zakon očuvanja naboja kao (3.10) ili (3.46). Za jednočestično stanje (3.2) gornja definicija daje

$$j^\mu = 2p^\mu |N|^2, \text{ tj. } j^0 \equiv \rho = 2E|N|^2 \text{ i } \vec{j} = 2\vec{p}|N|^2, \quad (3.50)$$

gdje je $|N|^2 = |\psi(x^\mu)|^2$ normalizaciona konstanta.

Ako želimo imati samo jednu slobodnu česticu jediničnog naboja u regionu prostora volumena $V = L^3$ kao u Poglavlju 2.5.2 konstanta normalizacije treba biti $N = (2EV)^{-\frac{1}{2}}$, jer je tada gustoća naboja $\rho = V^{-1}$ i normirana jednočestična stanja u regionu konačnog volumena su

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \chi(p_\mu) e^{-ip \cdot x}. \quad (3.51)$$

Pri prelasku na beskonačni volumen prostora mijenja se karakter spektra stanja impulsa – diskretni spektar prelazi u kontinuirani. Svojstvene vrijednosti impulsa čestice od diskretnih (prebrojivih) postaju kontinuirane (neprebrojive), pa se mora promjeniti i normalizacija stanja. Uvjet kompletnosti zahtijeva da skup jednočestičnih stanja tvori bazu Hilbertova prostora, što znači da od sumacije po komponentama impulsa čestice treba preći na integral prema pravilu

$$\sum_{\vec{p}} f(\vec{p}) \rightarrow V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(\vec{p}), \quad (3.52)$$

gdje je $f(\vec{p})$ proizvoljna funkcija impulsa, a faktor $(2\pi)^3$ dolazi od gustoće stanja u impulsnom prostoru kao što je već napomenuto u Poglavlju 2.5.2. Jednočestična stanja polja bilo kojeg spina u slučaju kontinuum normalizacije su

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2E}} \chi(p_\mu) e^{-ip \cdot x}. \quad (3.53)$$

Bez formalnog dokaza i pomoću plauzibilnih argumenata, nije teško razumjeti osnovne ideje formalizma kvantne teorije polja (drugu kvantizaciju) koji daje vezu kvantnih polja i čestica koje ta polja opisuju.

Kao što je već napomenuto, slobodna relativistička čestica energije w i impulsa \vec{k} , koja je kvant polja ϕ , opisana je valnom funkcijom (ravni val)

$$\phi = N \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t), \quad (3.54)$$

koja je rješenje Klein-Gordonove jednačbe (3.39) uz uvjet da je zadovoljena relativistička veza energije i impulsa čestice: $\omega^2 = k^2 + m^2$, gdje je N normalizacijska konstanta.

Gustoća Hamiltoniana (energije) pridruženog Lagrangianu (3.38) je $\mathcal{H} = \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L}$, pa

je ukupna energija $E = \int d^3x \mathcal{H}$. Kako je $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$, Hamiltonian je

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2], \quad (3.55)$$

tj. energija polja je

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x [\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2]. \quad (3.56)$$

Uvrštavajući (3.54) u (3.56) dobijamo

$$E = \frac{1}{2} N^2 \int d^3x [(\omega^2 + k^2) \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) + m^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)].$$

Zamjenjujući integrale kvadrata trigonometrijskih funkcija njihovim srednjim vrijednostima $\frac{1}{2}$, zbog $\omega^2 = k^2 + m^2$ imamo

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} N^2 \left[\frac{1}{2} (\omega^2 + k^2) + \frac{1}{2} m^2 \right] = \frac{1}{2} N^2 \omega_k^2. \quad (3.57)$$

Želimo normirano polje jednog kvanta energije $E_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}$, ($\hbar = 1$), pa za normalizacijski faktor moramo uzeti $N = \sqrt{\frac{2}{\omega_{\mathbf{k}}}}$, tako da je

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right]. \quad (3.58)$$

U zadnjem izrazu normalizacijski faktor je prepolovljen, jer smo uključili i dodatna stanja negativne energije sveprisutna u relativističkoj fizici zbog kvadratne veze energije i impulsa čestice $E_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{k^2 + m^2}$. Čestična stanja negativne energije potom se fizikalno reinterpetiraju kao stanja anti-čestica pozitivne energije.

U kvantnoj teoriji želimo da operator polja $\hat{\phi}$ može kreirati i anihilirati kvante polja – relativističke čestice mase m . Ako je $|n_k\rangle$ stanje sa n_k čestica istog impulsa \vec{k} i energije w u trenutku t , očekujemo da to stanje oscilira kao

$$|n_k\rangle \propto e^{inwt}, \quad (3.59)$$

te će po analogiji, stanje sa jednom česticom manje titrati kao

$$|n_k - 1\rangle \propto e^{i(n-1)wt}. \quad (3.60)$$

Svaki operator polja može se u kvantnoj teoriji polja razviti u Fourierov red (razvoj po ravnim valovima). Koeficijenti u tom redu su anihilacioni i kreacioni operatori kvantnih čestica – kvanata polja. Očekujemo da destruktivni operator \hat{a} koji anihilira kvant polja ϕ – česticu impulsa \vec{k} i energije w , tj. prevodi stanje $|n_k\rangle$ u stanje $|n_k - 1\rangle$, u Fourierovom razvoju operatora polja $\hat{\phi}$ ima koeficijent koji je prvi član u (3.58), tj. da za operator svakog kvantnog polja vrijedi razvoj

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_k}} \left[\hat{a}_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-wt)} + \hat{a}_k^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-wt)} \right]. \quad (3.61)$$

Operator \hat{a}_k^\dagger je kreacioni operator čestice impulsa \vec{k} i energije w koji je Hermitski konjugiran anihilacionom operatoru \hat{a}_k , koji anihilira takvu česticu. Po definiciji Hermitska konjugacija je $\hat{a}^\dagger \equiv (\hat{a}^T)^*$, gdje T označava operaciju transponiranja, a simbol $(...)^*$ označava kompleksnu konjugaciju.

Iako se izrazi (3.59) i (3.60) odnose samo na vremensku varijaciju, relativistička invarijantnost teorije zahtijeva da se sve četiri komponente radijus vektora točaka u prostor-vremenu u svim izrazima tretiraju na isti način, a takođe i sve četiri komponente k^μ impulsa čestica. Zato se u Fourierovom razvoju operatora kvantnog polja $\hat{\phi}$ ne smiju pojavljivati samo vremenske komponente $k_0 x_0 = wt$, već ukupni Lorentz invarijantni skalarni produkt dva 4-vektora $k_\mu x^\mu = wt - \vec{k} \cdot \vec{x}$ kao u (3.61).

U izrazu (3.61), kreacioni operator \hat{a}_k^\dagger kreira, a anihilacioni operator \hat{a}_k anihilira skalarnu česticu mase m , proizvoljnog impulsa \vec{k} i energije w . Kvantno polje $\hat{\phi}(x)$ može kreirati i anihilirati proizvoljan broj takvih čestica – kvanata polja. Stabilnost zahtijeva da u teoriji postoji stanje najniže energije – vakuum. Sukcesivnim djelovanjem n kreacionih operatora na vakuum $|0\rangle$, koji je stanje minimuma energije, znači bez ijedne čestice, dobija se proizvoljno n -čestično stanje.

Zaključujemo da operator kvantnog polja $\hat{\phi}$ može kreirati i/ili anihilirati identične čestice spina 0, mase m , proizvoljnog impulsa \vec{k} i energije $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{k^2 + m^2}$. Pri tome, svakom djelovanju anihilacionih i/ili kreacionih operatora treba pridružiti faktor $\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} e^{\pm i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ koji je valna funkcija anihilirane/kreirane čestice ili antičestice.

Preciznije i formalnije, ali bez dokaza, Hilbertov prostor H (prostor stanja sustava) kvantne teorije polja je tenzorski produkt H_n Hilbertovih podprostora n -čestičnih stanja ($n = 0, 1, 2, \dots$), tj.

$$H = H_0 \otimes H_1 \otimes H_2 \otimes \dots, \quad (3.62)$$

gdje je

$$H_0 = \{|0\rangle\} \quad (3.63)$$

jedno-dimenzioni podprostor sa 0-čestica, tj. vakuum $|0\rangle$. Baza jedno-čestičnog podprostora H_1 čine stanja $|\vec{p}, i\rangle$ čestica impulsa \vec{p} i drugih kvantnih brojeva "i",

$$H_1 = \{|\vec{p}, i\rangle\}. \quad (3.64)$$

n -čestična stanja su produkt n jedno-čestičnih stanja. Na primjer, podprostor H_2 dvo-čestičnih stanja je

$$H_2 = \{|\vec{p}_1, i; \vec{p}_2, j\rangle\} = \pm \{|\vec{p}_2, j; \vec{p}_1, i\rangle\}, \quad (3.65)$$

gdje je $+$ znak za bozone, a $-$ znak za fermione, jer bozonski operatori komutiraju, a fermionski antikomutiraju, pa permutacija dva fermiona zahtijeva množenje sa -1 .

Ovako konstruirani Hilbertov prostor H naziva se Fockov prostor. Svi operatori fizikalnih opservabli u Fockovom prostoru mogu se na jednoznačan način izraziti preko bazičnih kreacionih i anihilacionih operatora za svaku vrstu čestice (polja) u teoriji. Anihilacioni operator $a_{\vec{p}, i}$ uklanja iz više-čestičnog stanja česticu kvantnih brojeva \vec{p} i "i". Ako u više-čestičnom stanju nema čestice kvantnih brojeva \vec{p} i "i" onda djelovanje anihilacionog operatora $a_{\vec{p}, i}$ na takvo stanje daje nulu, tj.

$$a_{\vec{p}, i} |0\rangle = 0,$$

$$a_{\vec{p}, i} |\vec{q}, j\rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{ij} |0\rangle, \quad (3.66)$$

$$a_{\vec{p}, i} |\vec{p}_1, j; \vec{p}_2, m\rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}_1) \delta_{ij} |\vec{p}_2, m\rangle \pm 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}_2) \delta_{im} |\vec{p}_1, j\rangle,$$

i tako dalje. E_p je energija čestice mase m i 3-impulsa \vec{p} , tj. $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Djelovanje kreacionog operatora $a_{\vec{p}i}^\dagger$ na vakuum daje jednočestično stanje čestica istog tipa $|\vec{p}, i\rangle$. Za kreacione operatore onda vrijedi

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}i}^\dagger |0\rangle &= |\vec{p}, i\rangle, \\ a_{\vec{p}i}^\dagger |\vec{q}, j\rangle &= |\vec{p}, i; \vec{q}, j\rangle \end{aligned} \quad (3.67)$$

itd.

Ove definicije i relativistička normalizaciona konvencija za jedno-čestična stanja

$$\langle \vec{p}, i | \vec{q}, j \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{ij}, \quad (3.68)$$

impliciraju slijedeća komutaciona pravila

Bozoni (spin: 0,1)	Fermioni (spin: 1/2)
$ \vec{p}_1, i; \vec{p}_2, j\rangle = \vec{p}_2, j; \vec{p}_1, i\rangle$	$ \vec{p}_1, i; \vec{p}_2, j\rangle = - \vec{p}_2, j; \vec{p}_1, i\rangle$
$[a_{\vec{p}i}, a_{\vec{q}j}] = [a_{\vec{p}i}^\dagger, a_{\vec{q}j}^\dagger] = 0$	$\{a_{\vec{p}i}, a_{\vec{q}j}\} = \{a_{\vec{p}i}^\dagger, a_{\vec{q}j}^\dagger\} = 0$
$[a_{\vec{p}i}, a_{\vec{q}j}^\dagger] = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{ij}$	$\{a_{\vec{p}i}, a_{\vec{q}j}^\dagger\} = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{ij}$

(3.69)

gdje je komutator $[A, B] = AB - BA$, a antikomutator $\{A, B\} = AB + BA$.

Odabrana normalizaciona konvencija osigurava simetrično pojavljivanje 2π faktora, jer:

- svaka integracija po impulsima i energiji uvijek uključuje $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$ i $\int \frac{dE}{2\pi}$,
- δ -funkcije se uvijek pojavljuju u obliku: $(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$ ili $(2\pi) \delta(E_1 - E_2)$,

i lako se vidi da je Lorentz invarijantna zbog identiteta

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0). \quad (3.70)$$

Napomena: Na prvi pogled $\theta(p_0)$ ne izgleda Lorentz invarijantno jer uključuje samo vremensku komponentu $p_0 = E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Ali δ -funkcija $\delta(p^2 - m^2)$ osigurava da je 4-vektor p_μ "time-like" za $m^2 > 0$, a "light-like" za $m^2 = 0$, što ostaje invarijantno pri "ortohronim" Lorentz transformacijama, kao u (2.96).

Kao primjer razvoja opservabli po kreacionim/anihilacionim operatorima nađimo Hamiltonian sustava slobodnih čestica. Hamiltonian slobodnih polja je kvadratan po poljima, pa zbog razvoja (3.61), Hamiltonian sustava slobodnih čestica mora biti bilinearan i po operatorima $a_{\vec{p}i}^\dagger$ i $a_{\vec{p}i}$, tj. vrijedi

$$H_0 = E_0 + \sum_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \varepsilon(\vec{p}, i) a_{\vec{p}i}^\dagger a_{\vec{p}i}. \quad (3.71)$$

Da se odrede koeficijenti E_0 i ε treba izračunati djelovanje H_0 na više-čestična stanja. Koristeći (3.66) dobija se

$$H_0|0\rangle = E_0|0\rangle; \quad H_0|\vec{q}, j\rangle = [E_0 + \varepsilon(\vec{q}, j)]|\vec{q}, j\rangle;$$

$$H_0|\vec{q}_1, j_1; \dots; \vec{q}_n, j_n\rangle = \left[E_0 + \sum_{k=1}^n \varepsilon(\vec{q}_k, j_k) \right] |\vec{q}_1, j_1; \dots; \vec{q}_n, j_n\rangle.$$

Prvi izraz znači da je E_0 energija vakuuma (zero-point energy), drugi pokazuje da je jednočestično stanje $|\vec{q}, j\rangle$ impulsa ujedno i svojstveno stanje Hamiltoniana energije $E_0 + \varepsilon(\vec{q}, j)$, što znači da je energija jedne čestice za $\varepsilon(\vec{q}, j)$ viša od energije vakuuma. Zadnji izraz znači da je n -čestično stanje $|\vec{q}_1, j_1; \dots; \vec{q}_n, j_n\rangle$ impulsa ujedno i sopstveno stanje Hamiltoniana sa energijom $E_n = E_0 + \sum_{k=1}^n \varepsilon(\vec{q}_k, j_k)$. Za $n = 1$ energija čestice je $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, pa je $\varepsilon(\vec{p}, i) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = E_p$, što znači da je Hamiltonian sustava slobodnih čestica

$$H_0 = E_0 + \sum_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} E_p a_{\vec{p}i}^\dagger a_{\vec{p}i} = E_0 + \sum_i \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3} a_{\vec{p}i}^\dagger a_{\vec{p}i}. \quad (3.72)$$

Energija n -čestičnog stanja je zbroj energija pojedinih čestica $E_n = E_0 + \sum_{k=1}^n E_p$, kao što i

treba biti za sustav slobodnih (neinteragujućih) čestica. Za sustav interagujućih čestica energija n -čestičnog stanja nikada nije jednaka zbroju energija jednočestičnih stanja zbog postojanja potencijalne energije međudjelovanja čestica.

Pojednostavljeno govoreći, kvantna teorija polja poslije druge kvantizacije u biti je kvantna mehanika kreacionih i anihilacionih operatora koji djeluju u Fockovu prostoru više-čestičnih stanja. Ova procedura se naziva „druga kvantizacija“ jer se operatori polja (i pridruženi momenti), koji su već kvantizirani u skladu s kanonskom procedurom $[\phi_i, \pi_j] = i\hbar\delta_{ij}$, razvijaju u Fourierov red po anihilacionim i kreacionim operatorima koji zadovoljavaju kvantne komutacione relacije date u (3.69).

U teoriji postoje dva ekvivalentna načina da se kvantizira klasična teorija polja – kanonska kvantizacija koju smo ukratko razmotrili i funkcionalna kvantizacija pomoću integrala po trajektorijama čestica. Obe procedure su pune tehnički zahtijevnih detalja koji prevazilaze okvire ovog izlaganja.

Ako zamislimo da imamo kompliciraniju teoriju u kojoj postoji više različitih skalarnih polja pojavljuju se vrlo interesantna nova fizika – baždarna (gauge) simetrija teorije.

3.3 Lagrangian kompleksnog skalarnog polja

Zamislamo najjednostavniju moguću teoriju sa više skalarnih polja – dva realna skalarna polja $\phi_1(x)$ i $\phi_2(x)$ iste mase m . Prema (3.38) Lagrangian je

$$\mathcal{L}_{\text{sl.}}^{(0)} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2] + \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2^2]. \quad (3.73)$$

Fizikalne veličine u klasičnoj fizici su realne, bar dva puta derivabilne funkcije. U kvantnoj fizici valne funkcije i polja mogu biti kompleksne funkcije (operatori), a zahtjev da fizikalno mjerljive veličine moraju biti realne odnosi se samo na svojstvene vrijednosti Hermitskih operatora pridruženih fizikalnim opservablama.

Kombinirajmo onda polja $\phi_1(x)$ i $\phi_2(x)$ u jedno kompleksno skalarno polje. Definirajmo

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2), \quad \text{tj.} \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2), \quad (3.74)$$

gdje normalizacioni faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ osigurava da su ϕ i ϕ^* jedinično normirani, ako su ϕ_1 i ϕ_2 bili tako normirani. Uvrštavanjem u (3.73) Lagrangian kompleksnog skalarnog polja mase m je

$$\mathcal{L}_{\text{sl.}}^{(0)} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi. \quad (3.75)$$

Očigledno je da Lagrangiani (3.75) i (3.73), tj. kompleksno polje ϕ i dva realna polja ϕ_1 i ϕ_2 , opisuju istu fiziku – skalarne čestice mase m , na različite načine.

Lako je vidjeti da Lagrangian (3.75) posjeduje svojstvo simetrije (gauge simetrije). Ništa ne određuje «pravac» polja ϕ_1 i ϕ_2 (izbor pravaca $\text{Re } \phi$ i $\text{Im } \phi$ u kompleksnoj ϕ -ravnini), pa ako napravimo rotaciju za kut α (oko treće osi), tj. definiramo transformirana polja ϕ'_1 i ϕ'_2

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \cos \alpha + \phi_2 \sin \alpha \\ -\phi_1 \sin \alpha + \phi_2 \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

dobit ćemo transformirano (rotirano) kompleksno polje ϕ

$$\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 \cos \alpha + \phi_2 \sin \alpha - i\phi_1 \sin \alpha + i\phi_2 \cos \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\alpha} \phi_1 + i e^{-i\alpha} \phi_2) = e^{-i\alpha} \phi,$$

tj.

$$\phi' = e^{-i\alpha} \phi, \quad \text{te} \quad \phi'^* = e^{i\alpha} \phi^*. \quad (3.77)$$

Lagrangian (3.75), pa prema tome i fizika tog sustava, tj. jednadžbe gibanja koje slijede iz Lagrangiana, je invarijantan pri transformacijama (3.77) za svako $\alpha \in \mathbb{R}$, jer zavisi samo od $\phi^* \phi$. Transformacije (3.77) nazivaju se gauge ili baždarne transformacije.

Različite transformacije $\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\alpha} \phi = U(\alpha)\phi$ određene su konstantnim parametrom α . Lako se vidi da ove gauge transformacije tvore grupu:

– grupoidnost: ako je $\phi' = e^{-i\alpha} \phi$ i $\phi'' = e^{-i\beta} \phi' \Rightarrow \phi'' = e^{-i(\alpha+\beta)} \phi$, tj. $U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha+\beta)$,

– asocijativnost slijedi iz asocijativnosti zbrajanja realnih brojeva: $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, tj.

$$[U(\alpha)U(\beta)]U(\gamma) = U(\alpha)[U(\beta)U(\gamma)] ,$$

– neutralni element: za $\alpha = 0$ transformacija (3.62) je identična transformacija: $U(0) = 1$,

– inverzni element: za svako $U(\alpha)$ postoji inverzna transformacija $U^{-1}(\alpha) = U(-\alpha)$, tako da je:

$$U^{-1}(\alpha)U(\alpha) = U(-\alpha)U(\alpha) = e^{i\alpha} e^{-i\alpha} = 1 = U(0) .$$

Grupa gauge transformacija (3.77), naziva se $U(1)$ grupa. To je grupa unitarnih jednodimenzionih matrica, $U(\alpha) = e^{-i\alpha} \in U(1)$. $U(1)$ je Abelova grupa jer dvije transformacije (3.77) komutiraju. Za Lagrangian (3.75) se kaže da posjeduje $U(1)$ gauge simetriju, tj. precizno, da ima globalnu $U(1)$ gauge simetriju. Simetrija je globalna ako je parametar gauge transformacije α konstantan (isti u svim točkama prostor-vremena), a lokalna ako parametar gauge transformacije zavisi od x^μ . Grupa $U(1)$ je najjednostavnija gauge grupa.

Grupe gauge transformacija u SM su: $SU(3)$ – grupa specijalnih (jedinične determinante) unitarnih 3×3 matrica, koja je grupa gauge transformacija Lagrangiana kromodinamike (dijela SM koji opisuje jake interakcije), dok je grupa gauge transformacija Lagrangiana elektro-slabih interakcija $SU(2) \times U(1)$. Ukupna grupa gauge transformacija Lagrangiana SM elementarnih čestica je tenzorski produkt tih dviju grupa: $SU(3)_c \times SU(2) \times U(1)$, gdje indeks c označava naboj jakih interakcija – boju (color).

Napomena: Matrica U je unitarna ako važi: $U^{-1} = U^\dagger$. Unitarne transformacije i unitarni operatori koji ih generiraju (kao i unitarne matrice koje su reprezentacije takvih unitarnih operatora) važne su u kvantnoj fizici jer ostavljaju nepromjenjenim vjerojatnost fizikalnih procesa.

Kad god je Lagrangian sustava invarijantan pri kontinuiranim transformacijama koje tvore grupu, slijede važne fizikalne posljedice – zakoni očuvanja.

Svaka simetrija Lagrangiana fizikalnog sustava (precizno djelovanja, koje je integral Lagrangiana) znači postojanje jedne očuvane fizikalne veličine. Veza kontinuiranih simetrija i zakona očuvanja naziva se Noether teorem (Emmi Noether 1918.) i razmotrićemo je u poglavlju 3.4. Veza simetrija i zakona očuvanja u fizici poznata je još iz klasične i kvantne mehanike.

Najjednostavniji primjer je diskretna simetrija, kao parnost, konjugacija naboja, inverzija vremena, leptonski broj, itd. Na primjer, ako Hamiltonian $H = H(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$ fizikalnog sustava ima simetriju (ostaje invarijantan) pri zamjeni $\phi_a(x) \rightarrow -\phi_a(x)$, tj. važi

$$H(-\phi_a, -\partial_\mu \phi_a) = H(\phi_a, \partial_\mu \phi_a),$$

postoji unitarni operator O takav da je

$$O\phi_a(x)O^\dagger = -\phi_a(x),$$

pa prema (3.71) mora biti i

$$O a_{\bar{p}i} O^\dagger = -a_{\bar{p}i} \quad \text{ili} \quad O a_{\bar{p}i} = -a_{\bar{p}i} O,$$

što znači da operator O nužno komutira sa Hamiltonianom: $OH = HO$, tj. $[O, H] = 0$.

Kako važi i

$$O[O\phi_a(x)O^\dagger]O^\dagger = -O\phi_a(x)O^\dagger = \phi_a(x),$$

znači da je $O^2 = \pm \mathbf{1}$, pa je operator $O = O^\dagger$ ujedno i Hermitski (ili anti-Hermitski).

Svaki Hermitski operator O koji komutira sa Hamiltonianom definira zakon očuvanja.

Tada svako svojstveno stanje Hamiltoniana (energije) nosi i očuvani kvantni broj operatora O , $+1$ ili -1 , recimo $|E_n, +\rangle$ ili $|E_m, -\rangle$, jer ga vremenska evolucija sustava ne može promijeniti $O|E_n, +; t\rangle = O e^{-iHt} |E_n, +\rangle = e^{-iHt} O|E_n, +\rangle = +|E_n, +\rangle$. Ovo nam daje puno informacija o spektru stanja sustava čak i ako ne znamo riješiti svojstveni problem Hamiltoniana. Na primjer, ova simetrija znači da su apsolutno zabranjeni prelazi između ”+“ i ”-“ stanja energije, te da je najniže ”-“ stanje apsolutno stabilno.

U fizici elementarnih čestica Noether teorem često se koristi i u suprotnom smjeru: opažanja i eksperimenti daju nam informacije o očuvanim fizikalnim veličinama, što znatno pomaže rješavanju osnovnog problema – nalaženju nepoznatog Lagrangiana sustava jer određuje simetrije tog Lagrangiana. Da bi postojali svi zakoni očuvanja za koje znamo (sa određenom točnošću) da važe u fizici elementarnih čestica, Lagrangian sustava elementarnih čestica mora biti jako, jako simetričan – ukupna grupa simetrija sastoji se od grupe prostorno-vremenskih simetrija (Poincareova grupa) i grupe unutarnjih gauge simetrija (gauge grupe).

Zahtjevi simetrije teorije su toliko strogi, da praktično jednoznačno određuju Lagrangian SM elementarnih čestica.

Primjer koji dobro ilustrira kako simetrija određuje oblik Lagrangiana je kvantna elektrodinamika.

Elektromagnetska polja su vektorska polja, a opći Lagrangian slobodnog vektorskog polja je Proca Lagrangian (3.36). No, ako želimo gauge invarijantnu teoriju, moramo odabrati Lagrangian invarijantan pri gauge transformacijama (3.13), što znači da moramo odbaciti maseni član ($m = 0$) i za slobodni Lagrangian odabrati Maxwellov Lagrangian (3.35).

Gauge simetrija određuje i oblik Lagrangiana interakcije, a ne samo slobodnog polja. Svi eksperimentalni podaci potvrđuju da zakon očuvanja električnog naboja važi uvijek i svuda. Ako želimo teoriju polja u kojoj zakon očuvanja naboja $\partial_\mu j^\mu = 0$ vrijedi lokalno (u svakoj točki prostor-vremena), moramo tražiti Lagrangian koji je lokalno gauge invarijantan – parametar gauge transformacije $\alpha(x^\mu)$ zavisi od x^μ . To su Yang-Mills teorije čiji je najjednostavniji primjer [Abelova U(1) lokalna gauge grupa] upravo kvantna elektrodinamika.

3.4 Noether teorem i očuvane struje

Pretpostavimo da je Lagrangian translatorno invarijantan, tj. da zavisi samo od polja ϕ_a i $\partial^\mu \phi_a$, ali ne zavisi eksplicitno od x^μ , tj. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a, \partial^\mu \phi_a)$. Vezu simetrija i zakona očuvanja daje Noether teorem.

Noether teorem

Za svaku grupu kontinuiranih transformacija koja ostavlja invarijantnim gustoću Lagrangiana \mathcal{L} postoji očuvana struja J_μ ,

$$\delta\mathcal{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^\mu J_\mu = 0, \quad (3.78)$$

takva da je ukupni "naboj" Q , tj. volumni integral vremenske komponente struje J_0

$$Q(t) = \int d^3x J_0(x), \quad (3.79)$$

konstanta gibanja

$$\frac{\partial}{\partial t} Q = 0. \quad (3.80)$$

Najopćenitija formulacija Noether teorema odnosi se na invarijantnost djelovanja sustava, koja je ekvivalentna gornjoj formulaciji ako dozvolimo da promjena Lagrangiana bude totalna derivacija. Jednostavnosti radi za dokaz uzmimo slučaj kompleksnog skalarnog polja (3.75) – derivacija ostaje nepromjenjena u slučaju kada postoji više polja. Dovoljno je razmatrati samo infinitezimalne gauge transformacije (3.77), jer grupoidnost jamči da teorem onda važi i za proizvoljne konačne transformacije. Kako je $\phi' \approx (1 - i\alpha)\phi = \phi - i\alpha\phi = \phi + \delta\phi$, imamo

$$\delta\phi = -i\alpha\phi, \quad \delta\phi^* = i\alpha\phi^*. \quad (3.81)$$

Promjena Lagrangiana pri infinitezimalnoj gauge transformaciji (3.81) je

$$0 = \delta\mathcal{L} = \delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} + \left[\delta \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \right) \right] \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \right)} + (\phi \rightarrow \phi^*). \quad (3.82)$$

Drugi član na desnoj strani može se transformirati

$$\left[\delta \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \right) \right] \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \right)} = \partial^\mu \left[\delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \right)} \right] - \delta\phi \left[\partial^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \right)} \right],$$

pa uvrštavanjem u (3.82) dobijamo

$$0 = \delta\mathcal{L} = \delta\phi \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} \right] + (\phi \rightarrow \phi^*) + \partial^\mu \left[\delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} + \delta\phi^* \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)} \right]. \quad (3.83)$$

Prva dva člana na desnoj strani su nula zbog Lagrangeovih jednačbi (3.1) za polja ϕ i ϕ^* , pa uvjet invarijantnosti Lagrangiana odmah daje

$$0 = \delta\mathcal{L} = \partial^\mu \left[\delta\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} + \delta\phi^* \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)} \right] = \partial^\mu S_\mu. \quad (3.84)$$

U našem slučaju prema (3.81) i (3.75) je $0 = \delta\mathcal{L} = \partial^\mu S_\mu = \alpha \partial^\mu J_\mu$, gdje smo redefinirali S_μ jer želimo očuvanu (bez divergencije) struju J_μ definirati da ne zavisi od proizvoljnog parametra gauge transformacija α , tj.

$$J_\mu = i [(\partial_\mu \phi^*) \phi - \phi^* (\partial_\mu \phi)]. \quad (3.85)$$

Kako je $\partial^\mu J_\mu = 0$, integracijom po d^3x je

$$0 = \int d^3x \partial^\mu J_\mu = \int d^3x \partial^0 J_0 + \int d^3x \partial^i J_i. \quad (3.86)$$

Prema Gaussovom teoremu zadnji član u (3.86) je nula

$$\int d^3x \partial^i J_i = \oint_{S_\infty} d\vec{s} \cdot \vec{J} = 0,$$

zbog rubnih uvjeta u beskonačnosti kad $\phi, \partial^\mu\phi \rightarrow 0$, pa odmah slijedi zakon očuvanja

$$\partial^0 Q = 0, \quad (3.87)$$

gdje je očuvani «naboj»

$$Q = \int d^3x J_0(x) = i \int d^3x [(\partial_0 \phi^*) \phi - \phi^* (\partial_0 \phi)]. \quad (3.88)$$

Nekoliko važnih napomena i posljedica:

- Noether teorem je potpuno općenit. Iako smo dokaz proveli za primjer Lagrangiana slobodnog kompleksnog skalarnog polja invarijantnog pri gauge transformacijama (3.77), teorem važi za Lagrangian bilo kakvih polja i bilo kakvu grupu kontinuiranih transformacija koje ga ostavljaju invarijantnim.

- U kvantnoj teoriji polja svaki zakon očuvanja je posljedica invarijantnosti Lagrangiana sustava (preciznije, djelovanja sustava) u odnosu na neku grupu kontinuiranih transformacija koja se naziva grupom simetrija tog Lagrangiana (fizikalnog sustava). Za prostorno-vremenske simetrije je:

invarijantnost pri vremenskim translacijama \Leftrightarrow zakon očuvanja energije,
 invarijantnost pri prostornim translacijama \Leftrightarrow zakon očuvanja impulsa,
 invarijantnost pri prostornim rotacijama \Leftrightarrow zakon očuvanja ukupnog
 angularnog momenta.

- Zamjena $\phi \leftrightarrow \phi^*$ mijenja znak očuvane struje J^μ u (3.85) – ako polje ϕ opisuje česticu naboja $+e$, onda polje ϕ^* opisuje česticu naboja $-e$, tj. antičesticu, a J^μ je gustoća struje tih čestica. Relativistička teorija uvijek uz «čestice» sadrži i «antičestice» koje imaju istu masu, ali suprotan naboj.
- Ništa u gornjoj derivaciji ne zahtijeva da «naboj» Q bude električni naboj. Čestice imaju različite naboje, pored električnog koji je posljedica invarijantnosti Lagrangiana SM u odnosu na $U(1)_{ED}$ grupu simetrija. Na primjer, «boja» je «naboj» čestica koje imaju jake interakcije, tj. kvantni broj jako interagujućih čestica čije očuvanje je posljedica invarijantnosti Lagrangiana SM u odnosu na $SU(3)_c$ grupu simetrija. Takozvani slabi naboj je „naboj“ čestica u SM u odnosu na $SU(2)$ gauge grupu slabih interakcija.
- **CPT teorem:** Svaka lokalna i unitarna (čiji Hamiltonian je Hermitski operator) kvantna teorija polja (u kojoj važi uobičajena spin-statistika veza – bozonska polja se kvantiziraju pomoću komutatora, a fermionska pomoću antikomutatora), nužno je invarijantna pri produktu CPT transformacija. C označava konjugaciju naboja (zamjenu čestica \leftrightarrow antičestica), P je transformacija parnosti (inverzija prostornih koordinata $\vec{x} \leftrightarrow -\vec{x}$), a T je inverzija vremena $t \leftrightarrow -t$. Najvažnija posljedica CPT teorema je jednakost vjerojatnosti ekvivalentnih procesa sa česticama i antičesticama (na primjer, jednakost masa i duljina života).
- Gornja derivacija odnosi se na klasičnu teoriju polja. U kvantnoj teoriji može se provesti ista analiza i dobiti, u pravilu, isti rezultat. Važan izuzetak je prisustvo anomalija – radijativne kvantne korekcije višeg reda (triangle anomaly) mogu dati ne-nulti rezultat za divergenciju kvantne struje $\partial^\mu J_\mu \sim$ «anomalija» $\neq 0$, čak i kada je klasična struja očuvana, tj. važi $\partial^\mu J_\mu = 0$. Ako želimo da simetrija bude očuvana i u kvantnom slučaju, moramo zahtijevati da zbroj anomalija struja svih polja u teoriji bude nula – upravo to se događa sa fermionskim poljima u SM.

Kao još jedan primjer Noether teorema razmotrimo zakone očuvanja koji slijede iz translatorne invarijantnosti Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$. Pri infinitezimalnom pomaku

$$x'_\mu = x_\mu + \epsilon_\mu, \quad (3.89)$$

promjena Lagrangiana je

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \varepsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}. \quad (3.90)$$

S druge strane, promjena Lagrangiana koji ne zavisi eksplicitno od x_μ je

$$\delta\mathcal{L} = \sum_a \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} \delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_a)} \delta(\partial^\mu\phi_a) \right], \quad (3.91)$$

gdje je

$$\delta\phi_a = \phi(x + \varepsilon) - \phi(x) = \varepsilon_\mu \partial^\mu \phi_a(x). \quad (3.92)$$

Koristeći Lagrangeove jednađbe (3.1) i izjednačavajući gornje izraze za $\delta\mathcal{L}$ dobija se

$$\varepsilon_\mu \partial^\mu \mathcal{L} = \partial^\mu \left[\sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_a)} \varepsilon_\nu \partial^\nu \phi_a \right]. \quad (3.93)$$

Jedini način da (3.93) vrijedi za proizvoljno ε_μ je ako vrijedi diferencijalni oblik zakona očuvanja energije-impulsa

$$\partial^\mu \mathfrak{T}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.94)$$

gdje je tenzor gustoće energije-impulsa polja ϕ_a

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_a)} \partial_\nu \phi_a. \quad (3.95)$$

Integracijom po prostornim koordinatama dobijaju se zakoni očuvanja energije-impulsa (četvoro-momenta P_μ) sustava polja ϕ_a

$$\frac{\partial}{\partial t} P_\mu = 0, \quad (3.96)$$

gdje je

$$P_\mu = \int d^3x \mathfrak{T}_{0\mu} = \int d^3x \left[\sum_a \pi_a \partial_\mu \phi_a - g_{0\mu} \mathcal{L} \right], \quad (3.97)$$

a, kanonski moment pridružen polju ϕ_a je

$$\pi_a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a(x)} . \quad (3.98)$$

Lako se vidi da je 00-komponenta \mathfrak{T}_{00} tenzora gustoće energije-impulsa upravo gustoća Hamiltoniana sustava polja ϕ_a , tj.

$$\mathfrak{T}_{00} = \mathcal{H} = \sum_a \pi_a \dot{\phi}_a - \mathcal{L} , \quad (3.99)$$

pa je ukupna energija, tj. Hamiltonian sustava polja ϕ_a

$$H = \int d^3x \mathfrak{T}_{00} . \quad (3.100)$$

Prostorne komponente P_i u (3.97) pokazuju da je gustoća impulsa polja ϕ_a upravo \mathfrak{T}_{0i} .

Invarijantnost Lagrangiana pri prostorno-vremenskim translacijama (3.89) ima za posljedicu zakon očuvanja 4-impulsa sustava. Svaki Lagrangian u teoriji polja koji ne zavisi eksplicitno od x_μ ima to svojstvo.

Razmatranje invarijantnosti teorije polja pri prostornim rotacijama i Lorentzovim transformacijama ostavimo za Lagrangian fermionskih polja.

3.5 Lagrangian spinorskog polja

Osnovne čestice materije u SM su fermioni, kvarkovi i leptoni, koji su čestice spina $\frac{1}{2}$. Za njihov opis potrebna je relativistička generalizacija Schrodingerove jednačbe. Takvu relativističku valnu jednačbu za čestice spina $\frac{1}{2}$ formulirao je 1928. Dirac i nazivamo je Diracovom jednačbom.

3.5.1 Diracova jednačba

Najjednostavniji fizikalni sustav je jedna slobodna čestica mase m , čiji je klasični nerelativistički Hamiltonian

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m}. \quad (3.101)$$

Kvantizacija sustava vrši se transkripcijom

$$H \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla, \quad (3.102)$$

što daje nerelativističku Schrodingerovu jednačbu

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad \text{tj.} \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi, \quad (3.103)$$

gdje je $\psi(x)$ valna funkcija čestice.

Želimo li opisati slobodnu relativističku česticu za koju je klasični Hamiltonian

$$H = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (3.104)$$

gornja preskripcija daje

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \psi, \quad (3.105)$$

jednačbu koja nije Lorentz invarijantna. Lijeva strana sadrži prvu vremensku derivaciju, a desna druge derivacije po prostornim koordinatama, pa se pri Lorentzovim transformacijama lijeva i desna strana jednačbe različito transformiraju. Relativistička invarijantnost zahtijeva da se sve komponente nekog 4-vektora u jednačbi pojavljuju na istu potenciju. Može se pokazati da zahtjev pozitivne definitnosti gustoće vjerojatnosti znači da jednačba sadrži maksimalno prvu vremensku derivaciju.

Znači, traži se jednačba linearna i po ∂^0 i po ∂^i . Dirac je razmatrao najopćenitiju takvu jednačbu koja je oblika

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-i \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \beta m \right] \psi \equiv H \psi , \quad (3.106)$$

gdje su α_i i β neodređeni koeficijenti (koristimo p.s. jedinica $\hbar = c = 1$), koje treba naći iz fizikalnog uvjeta $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, tj. kvantno mehaničkog analoga

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2) \psi . \quad (3.107)$$

Prema (3.106) je $i \frac{\partial}{\partial t} = -i \alpha_i \partial^i + \beta m$, pa opetovanom primjenom ovog operatora na jednačbu (3.106) i poređenjem s (3.107) dobijamo tri uvjeta koje moraju zadovoljavati neodređeni koeficijenti

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 , \quad (3.108)$$

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad (i \neq j) , \quad (3.109)$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 . \quad (3.110)$$

Zadnja dva uvjeta mogu zadovoljiti samo matrice, i to nekomutirajuće matrice.

U jednostavnijem slučaju fermiona bez mase $m = 0$, nema koeficijenta β , i rješenje je jednostavno – tražimo matrice koje zadovoljavaju antikomutacijski uvjet

$$\{ \alpha_i , \alpha_j \} = \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2 \delta_{ij} . \quad (3.111)$$

Najjednostavnije takve matrice su tri Paulijeve (2×2) matrice σ_i

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.112)$$

za koje još važe komutacione relacije kao za komponente angularnog momenta

$$[\sigma_i , \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k , \quad (3.113)$$

te antikomutacione relacije

$$\{ \sigma_i , \sigma_j \} = 2 \delta_{ij} . \quad (3.114)$$

Za fermion bez mase operator spina je upravo

$$S_i = \frac{1}{2} \sigma_i, \quad \text{uz:} \quad S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = l(l+1) \mathbf{I}, \quad (3.115)$$

što znači da spin fermiona čestice zaista $\frac{1}{2}$.

Za rješenje onda možemo odabrati: $\alpha_i = -\sigma_i$ pa je Diracova jednadžba za čestice spina $\frac{1}{2}$ bez mase:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \Psi, \quad (3.116)$$

gdje je $\psi(x)$ dvo-komponentni spinor $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$.

U općem slučaju čestice spina $\frac{1}{2}$ i mase $m \neq 0$, minimalno rješenje je pomoću (4×4) matrica, na primjer

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.117)$$

jer se lako vidi da su jedine (2×2) linearno nezavisne matrice Paulieve matrice i jedinična matrica, a uvjet (3.110) osigurava da β nije jedinična matrica.

Izbor matrica α_i i β nije jednoznačan. Specijalno pogodan izbor su (4×4) Diracove γ -matrice definirane kao

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta \alpha_i, \quad (3.118)$$

što je u reprezentaciji pomoću Paulijevih (2×2) matrica

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.119)$$

Za Paulieve matrice ne pravimo razliku između gornjih i donjih indeksa, tj. $\sigma_i = \sigma^i$, dok se za γ -matrice razlikuju kontravarijantne i kovarijantne komponente, tako da je: $\gamma_i = -\gamma^i$.

Iz definicije je jasno da je γ^0 hermitska, a γ^i su antihermitske matrice, tj. $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$. Korisno je definirati i dodatnu hermitsku matricu γ^5

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Ove matrice mogu se prikazati u obliku 4-vektora

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i), \quad (3.120)$$

i zadovoljavaju osnovni uvjet antikomutiranja

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (3.121)$$

što znači da je

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1. \quad (3.122)$$

Pomoću γ -matrica lako se konstruira 16 linearno nezavisnih (4×4) matrica $\Gamma_{\alpha\beta}^n$, ($n = 1, 2, \dots, 16$), tako da se bilo koja (4×4) matrica može na jednoznačan način izraziti kao linearna kombinacija matrica Γ^n . Po definiciji je

$$\begin{aligned} \Gamma^S &= 1, & \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu, & \Gamma_{\mu\nu}^T &= \sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \\ \Gamma^P &= \gamma^5 = \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & \Gamma_\mu^A &= \gamma_5\gamma_\mu, \end{aligned} \quad (3.123)$$

gdje gornji indeksi označavaju

S = skalar; V = vektor; T = tenzor; P = pseudoskalar; A = aksijalni vektor.

U reprezentaciji (3.119) pomoću (2×2) hermitskih Pauli matrica σ_i je $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Koristeći γ -matrice Diracova jednadžba za česticu spina $\frac{1}{2}$ i mase m može se napisati u jednostavnoj kovarijantnoj formi

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (3.124)$$

gdje je valna funkcija čestice, na primjer elektrona, četvero-komponentni spinor

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}.$$

Diracova jednadžba je ustvari kao kvadratni koren Klein-Gordonove jednadžbe (3.39) jer je $(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m) = -(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)$.

Pokažimo sad da je spin slobodnog fermiona čija valna funkcija zadovoljava Diracovu jednadžbu $\frac{\hbar}{2}$. Prema (3.106) i (3.118) Hamiltonian Dirakove čestice je

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m = \gamma_0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \gamma_0 m, \quad (3.125)$$

gdje je $\vec{\gamma} \cdot \vec{p} = \gamma_i p_i$. Komutator operatora angularnog momenta $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ i Hamiltoniana je

$$[\vec{L}, H] = i\gamma_0 \vec{\gamma} \times \vec{p}. \quad (3.126)$$

Zaista,

$$[\vec{L}, H] = \gamma_0 \gamma_m \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i [x_j, p_m] p_k = i\gamma_0 \vec{\gamma} \times \vec{p},$$

jer je komutator $[x_j, p_m] = i\delta_{jm}$, što znači da angularni moment čestice \vec{L} nije očuvana veličina. Ali, definirajmo ukupni angularni moment fermiona kao $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, gdje je \vec{S} spin (sopstveni angularni moment) čestice. Važenje zakona očuvanja ukupnog angularnog momenta \vec{J} osigurava uvjet $[\vec{J}, H] = 0$, koji je ispunjen ako operator spina Diracove čestice definiramo kao

$$\vec{S} = \frac{i}{4} \vec{\gamma} \times \vec{\gamma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.127)$$

jer vrijedi $[\vec{S}, H] = -i\gamma_0 \vec{\gamma} \times \vec{p}$.

Lako se uvjeriti da je $\vec{S} \cdot \vec{p}$ očuvana veličina jer komutira sa Hamiltonianom, $[\vec{S} \cdot \vec{p}, H] = 0$. Kako je za česticu takođe

$$(\vec{S} \cdot \vec{p})^2 = \frac{1}{4} \vec{p}^2, \quad (3.128)$$

svojsvene vrijednosti operatora $\vec{S} \cdot \vec{p}$ su upravo $\pm \frac{1}{2} |\vec{p}|$, tj. za svaki fermion važi

$$\vec{S} \cdot \vec{p} = \pm \frac{1}{2} |\vec{p}|, \quad (3.129)$$

što znači da je spin fermiona paralelan ili antiparalelan impulsu čestice i ima svojsvene vrijednosti $\pm \frac{1}{2}$.

Diracova jednađba omogućila je proračun relativističke popravke energijskih stanja atoma uslijed spin-orbit $\vec{L}-\vec{S}$ interakcije u potpunom suglasju sa eksperimentima, te takođe i definiranje magnetskog momenta $\vec{\mu}$ čestice spina $\frac{1}{2}$, mase m i naboja q

$$\vec{\mu} = \frac{q}{m} \vec{S}, \quad (3.130)$$

koji služi kao test točkaste prirode čestice. Za magnetski moment točkastih fermiona, elektrona e i muona μ , izmjereno je

$$\vec{\mu}_e = 1.00115965 \frac{e}{m_e} \vec{S} \quad \text{i} \quad \vec{\mu}_\mu = 1.00116592 \frac{e}{m_\mu} \vec{S},$$

dok su izmjerene vrijednosti za proton p i neutron n

$$\vec{\mu}_p = 2.79284735 \frac{e}{m_p} \vec{S} \quad \text{i} \quad \vec{\mu}_n = -1.9130427 \frac{e}{m_n} \vec{S},$$

očigledna indikacija da proton i neutron nisu točkaste elementarne čestice bez strukture.

Diracova jednađba (3.124) zadovoljava traženi uvjet da se sve prostorno-vremenske derivacije pojavljuju linearno. No, to je samo potreban, ali ne i dovoljan, uvjet Lorentz invarijantnosti. Kompletan dokaz relativističke invarijantnosti je tehnički kompliciran i svodi se na dokaz da ako Diracova jednađba (3.124) važi u jednom IRS-u S , tada u bilo kojem drugom IRS-u S' u koji se prelazi Lorentzovom transformacijom

$$(x^\mu)' = a^\mu_\nu x^\nu, \quad (3.131)$$

važi kovarijantna (form-invarijantna) jednađba

$$(i \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu' - m) \psi'(x') = 0, \quad (3.132)$$

ako zahtijevamo da se valna funkcija $\psi(x)$ transformira kao spinor, tj. da važi

$$\psi'(x') = \psi'(a x) = \Lambda(\beta) \psi(x). \quad (3.133)$$

U gornjem izrazu $\Lambda(\beta)$ je (4×4) matrica koja zavisi od (4×4) matrice reprezentacije $A(\beta)$

Lorentzove transformacije (3.131) određene brzinom $\beta = \left| \vec{\beta} \right| = \left| \frac{\vec{V}}{c} \right|$, gdje je \vec{V} brzina

sustava S' u odnosu na sustav S . Diracove matrice $\gamma^{\mu\nu}$ se samo do na unitarnu transformaciju sličnosti razlikuju od matrica γ^μ , tj. $\gamma^{\mu\nu} = U^\dagger \gamma^\mu U$, što znači da se uvijek mogu odabrati da budu identične matricama γ^μ , jer uvijek moraju zadovoljavati isti uvjet antikomutativnosti (3.121).

Na primjer, za specijalnu Lorentzovu transformaciju (boost) duž x-osi brzinom V matrična reprezentacija je

$$\Lambda(\beta) = (a^{\mu}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.134)$$

gdje je $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, pa je transformaciona matrica spinora

$$\Lambda(\beta) = \exp \left[-\frac{i}{2} \omega \sigma_{01} \right], \quad (3.135)$$

gdje je $\th \omega = \beta$, tj. $\ch \omega = \gamma$. Eksplicitno, transformacija valne funkcije čestice spina $\frac{1}{2}$ (spinora) pri prijelazu u IRS koji se giba duž x-osi brzinom $\beta = \frac{V}{c}$ je

$$\psi'(x') = e^{-\frac{i}{2}(\text{arth } \beta)\sigma_{01}} \psi(x), \quad (3.136)$$

gdje je $x' = A(\beta)x$.

Slični izrazi određuju transformaciju spinora $\psi(x)$ pri bilo kojoj transformaciji iz Poencareove grupe, tj pri prostorno-vremenskim translacijama, prostornim rotacijama i specijalnim Lorentzovim transformacijama, kao i prostorno-vremenskim inverzijama.

Na primjer, pri rotaciji oko z-osi za kut φ Diracov spinor $\psi(x)$ se transformira prema

$$\psi'(x') = e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma^{12}} \psi(x), \quad (3.137)$$

gdje je generator rotacija oko treće osi

$$\sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Linearno nezavisne matrice Γ^n omogućuju konstruiranje 16 linearno nezavisnih Lorentz kovarijanti, skalarnih u spinskom prostoru i bilinearnih po fermionskim poljima (spinorima), $\bar{\psi}(x) \Gamma^n \psi(x)$ koje se nazivaju:

- $\bar{\psi}(x) \psi(x)$ – skalar,
- $\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x)$ – pseudoskalar,
- $\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$ – vektor,
- $\bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma^\mu \psi(x)$ – pseudovektor,
- $\bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x)$ – antisimetrični tenzor drugog reda.

U gornjim formulama umjesto hermitske konjugacije ψ^\dagger zgodnije je definirati Diracov konjugirani spinor prema

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad (3.138)$$

da se izbegne stalno pojavljivanje γ^0 faktora.

Razmotrimo najvažnija svojstva Diracove jednačbe i njena najjednostavnija rješenja.

3.5.2 Rješenja Diracove jednačbe za slobodne čestice

Nađimo prvo struju Diracovih čestica po analogiji sa strujom (3.45) za nerelativističku česticu koja zadovoljava Schrodingerovom jednačbom. Hermitski konjugirana Diracova jednačba (3.124) može se napisati u obliku

$$\bar{\psi} (i \gamma^\mu \bar{\partial}_\mu + m) = 0, \quad (3.139)$$

gdje $\bar{\partial}_\mu$ označava djelovanje operatora derivacije na lijevo, tj. $\bar{\psi} \bar{\partial}_\mu \equiv (\partial_\mu \bar{\psi})$.

Množeći (3.124) s lijeva sa $\bar{\psi}$, a (3.139) s desna sa ψ i zbrajajući dobijamo zakon očuvanja struje Diracovog polja

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (3.140)$$

gdje je struja (gustoća struje, precizno)

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (3.141)$$

Ako želimo da $\psi(x)$ bude polje električno nabijene čestice spina $1/2$, elektrona naboja $-e$ na primjer, struju (3.141) moramo pomnožiti sa nabojem, pa je struja elektrona

$$j^\mu_{e^-}(x) = -e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x). \quad (3.142)$$

Množenjem izraza (3.141) sa odgovarajućim nabojem dobija se bilo kakva vektorska struja fermionskih čestica – na primjer, kromodinamička struja kvarkova ili slaba struja leptona ili kvarkova.

Struja (3.141) je vektorska struja kao što pokazuju Lorentzov indeks μ . Ako iz nekog razloga, želimo pseudovektorsku struju (kao u slučaju slabih interakcija), jasno je da fermionska aksijalna struja mora biti

$$j_{\mu}^A = \bar{\Psi} \gamma_5 \gamma_{\mu} \Psi . \quad (3.143)$$

Fizikalni smisao struje (3.141) ili (3.142) najlakše je vidjeti iz zakona očuvanja (3.140), koji daje jednadžbu kontinuiteta kao (3.46)

$$\partial_0 (\bar{\Psi} \gamma^0 \Psi) + \nabla \cdot (\bar{\Psi} \vec{\gamma} \Psi) = 0 .$$

U skladu sa izrazom za gustoću vjerojatnosti položaja čestice u nerelativističkoj kvantnoj mehanici, za Diracovo polje identificiramo $\rho(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma^0 \Psi(x) = \bar{\Psi}(x) \dagger \Psi(x) = j^0(x)$ kao gustoću vjerojatnosti, pa je struja gustoće vjerojatnosti Diracova polja onda: $j^i(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma^i \Psi(x)$.

Da se nađu rješenja Diracove jednadžbe može se prvo razmatrati najjednostavniji slučaj elektrona koji miruje.

Kako zbog relacija neodređenosti, mirni elektron može biti bilo gdje u prostoru sa podjednakom vjerojatnošću, njegova valna funkcija ne smije zavisiti od prostornih koordinata, pa je prema (3.106) i (3.117) rješenje jednadžbe

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \beta mc^2 \Psi , \quad (3.144)$$

ili eksplicitno

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = mc^2 \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ -\Psi_3 \\ -\Psi_4 \end{pmatrix} , \quad (3.145)$$

što znači da se separiraju jednadžbe za pojedine komponente spinora $\Psi(x)$. Lako se nalaze četiri linearno nezavisna rješenja

$$\psi^{(1)} = e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \psi^{(2)} = e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \psi^{(3)} = e^{+\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \psi^{(4)} = e^{+\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.146)$$

prva dva pozitivne energije i spina gore/dolje, a druga dva negativne energije i spina dolje/gore.

Pojava rješenja negativne energije nužna je posljedica relativističke veze energije i impulsa čestice

$$H = E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

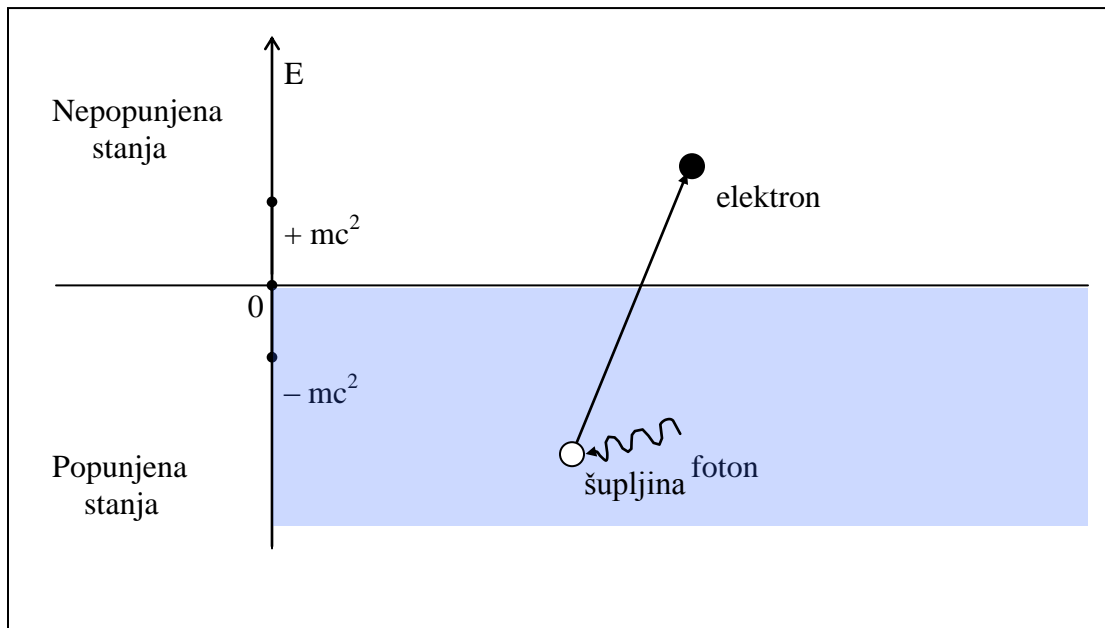
Rješenje ovog problema (Dirac 1930.) predviđanjem postojanja antičestica – čestična stanja negativne energije reinterpetiraju se kao stanja antičestica pozitivne energije, veliki je trijumf Diracove teorije elektrona, eksperimentalno potvrđen otkrićem pozitrona (Anderson 1933.).

U svojoj «teoriji šupljina» (hole theory) Dirac redefinira vakuum kvantne teorije kao stanje u kome su sva negativna energetska stanja elektrona popunjena sa po dva elektrona – jednog sa spinom «gore» i drugog sa spinom «dole», a sva pozitivna energetska stanja prazna. Svi aditivni kvantni brojevi koji karakteriziraju stanje fizikalnog sustava – energija, impuls, spin i naboj, za vakuum su nula. Dodatni elektroni mogu popunjavati samo nepopunjena stanja pozitivne energije, jer Pauliev princip zabranjuje više od jednog fermiona u istom kvantnom stanju, kao na Slici 3.1.

Ako elektron u popunjenom negativnom energetsom stanju apsorbira energiju fotona dovoljne energije, može biti eksitiran u pozitivno energetska stanje što predstavlja kreaciju elektrona naboja $-e$ i energije $+E$, i šupljine u «Diracovom moru». Šupljina je odsustvo elektrona naboja $-e$ i energije $-E$, ali promatrač je u odnosu na vakuum registrira kao prisustvo čestice naboja $+e$ i energije $+E$ – antičestice elektrona, tj. pozitrona, jer uklanjanje (oduzimanje) elektrona sa energijom $-E < 0$, impulsom $-\vec{p}$, spinom $-\vec{S}$ i nabojem $-e$ iz vakuuma ostavlja stanje sa energijom $E > 0$, impulsom $+\vec{p}$, spinom $+\vec{S}$ i nabojem $+e$. Ukupni efekt jednog ovakvog procesa je kreacija elektron-pozitron para na račun energije absorbiranog fotona.

Moguć je naravno i inverzni proces – padanje elektrona pozitivne energije u šupljinu u «Diracovom moru» uz emisiju razlike energije u obliku radijacije. To je proces anihilacije elektron-pozitron para uz emisiju fotona.

Mogućnost kreacije/anihilacije čestica (kvanata Diracova polja) pokazuje da broj čestica nije očuvana veličina u kvantnoj teoriji polja.



Slika 3.1

Postojanje stanja negativne energije u relativističkoj kvantnoj mehanici zahtijeva postojanje antičestica. Za svaku česticu, postoji čestično stanje iste mase, ali sa svim drugim kvantnim brojevima suprotnog znaka – to je antičestica. Čestice i antičestice se najlakše razlikuju po znaku naboja e^- je elektron, a e^+ pozitron. Za neutralne čestice postoje dvije mogućnosti: čestica je identična svojoj antičestici, kao foton $\bar{\gamma} \equiv \gamma$ na primjer, ili su čestica i antičestica različite, kao neutrino $\bar{\nu}_e \neq \nu_e$ na primjer. Cijena koja se mora platiti za ovo jednostavno, intuitivno objašnjenje stanja negativne energije je činjenica da broj čestica sustava više nije očuvana veličina kao u nerelativističkoj kvantnoj teoriji, jer se čestice i antičestice uvijek mogu kreirati i anihilirati.

U kvantnoj teoriji polja, metodama druge kvantizacije, vakuum – koji je stanje minimuma Hamiltoniana (energije) $|0\rangle$, redefinira se kao stanje sa «sa nula čestica i nula antičestica», tako da se potpuno izbjegne pojavljivanje stanja negativne energije i «Diracova mora». Na taj način se čestice i antičestice tretiraju na potpuno isti način. Štoviše, za svaki proces (Feynmanov dijagram) promjenom znaka svih naboja i 4-momenata svih čestica (antičestica), dobija se ekvivalentni proces (Feynmanov dijagram) sa antičesticama (česticama). Zato pojam «čestice» u pravilu podrazumijeva i čestice i antičestice.

Četri linearno nezavisna rješenja (3.46) Diracove jednadžbe onda točno reprezentiraju dva stanja fermiona spina $+\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{2}$, te dva stanja antifermiona sa spinom $+\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{2}$. Primjenom opće Lorentzove transformacije na rješenja (3.146) mogu se naći 4 linearno nezavisna rješenja Diracove jednadžbe za slobodni fermion (ravni val) momenta p_μ koja su oblika

$$\psi^r(x) = u^r(p) e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_r p_\mu x^\mu}, \quad \text{gdje je: } \varepsilon_r = \begin{cases} +1, & r = 1, 2 \\ -1; & r = 3, 4 \end{cases}, \quad (3.147)$$

a $u^r(p)$ su konstantni spinori koji zadovoljavaju jednadžbe

$$(\gamma^\mu p_\mu - \varepsilon_r m) u^r(p) = 0, \quad \text{tj.} \quad \bar{u}^r(p) (\gamma^\mu p_\mu - \varepsilon_r m) = 0. \quad (3.148)$$

Zavisnost od prostorno-vremenskih koordinata pojavljuje se samo u eksponentu i ista je za svako rješenje, do na \pm znak, pa je dovoljno razmatrati samo spinore $u^r(p)$. Različita rješenja su ortogonalna i zadovoljavaju uvjet normiranja

$$\bar{u}^r(p) u^{r'}(p) = 2m \varepsilon_r \delta_{rr'}. \quad (3.149)$$

Umjesto normiranja na jedinicu, fizikalno ima više smisla odabrati rješenja normirana prema (3.149) jer omogućuju lakšu procjenu veličine amplituda fizikalnih procesa – za svaki fermion faktor \bar{u} u proporcionalan je masi tog fermiona. Spinor u označava inicijalni fermion ili finalni antifermion, a \bar{u} inicijalni antifermion ili finalni fermion.

Smjenom $i\partial_\mu \rightarrow p_\mu$ Diracova jednadžba (3.124) može se napisati u obliku

$$(\not{p} - m)\psi = (\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0, \quad (3.150)$$

gdje je skraćena notacija $\not{A} \equiv A_\mu \gamma^\mu$. Da se nađu rješenja treba specificirati reprezentaciju γ -matrica. Ako koristimo reprezentaciju

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{tako da je: } \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.151)$$

(Zadatak 3.18.) pomoću (2×2) matrica rješenja tražimo pomoću dvo-komponentnih spinora. Često se spinori u^r za $r = 3, 4$ koji reprezentiraju antičestice označavaju sa v^r gdje je $r = 1, 2$, tako da vrijedi

$$u(p) = (\not{p} + m)u(0), \quad v(p) = (\not{p} - m)v(0), \quad (3.152)$$

gdje su $u(0)$ i $v(0)$ rješenja (3.146) u sustavu mirovanja čestice normirana prema (3.149), tj.

$$u(0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \text{gdje je } \chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ili } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.153)$$

Primjenom operatora $\frac{1}{2m}(\pm \not{p} + m)$ na $u(0)$ i $v(0)$, respektivno, dobijaju se četiri linearno nezavisna spinora koji su rješenja Diracove jednadžbe za fermion (antifermion) impulsa p

$$u(\mathbf{p}) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi}{E+m} \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi}{E+m} \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (3.154)$$

Da se dobije kompletno rješenje Diracove jednačbe za slobodnu česticu treba još spinorske faktore (3.154) pomnožiti sa $e^{-ip \cdot x}$ za $u(\mathbf{p})$, a sa $e^{+ip \cdot x}$ za stanja antičestica $v(\mathbf{p})$.

Kad su jednom nađeni, Diracovi spinori $u(\mathbf{p})$ i $v(\mathbf{p})$ iz (3.149) ili (3.154) koji određuju valne funkcije spina slobodnih fermiona i anti-fermiona (elektrona i pozitrona, recimo), zajedno sa uvjetima normalizacije i kompletnosti jednočestičnih stanja, omogućuju da se svi proračuni rade u kovarijantnom obliku – nikada ne moramo eksplicitno pisati komponente (4×4) matrica ili spinora, što je značajno tehničko pojednostavljenje proračuna vjerojatnosti svakog procesa.

Ako definiramo dvo-komponentne spinore ψ_R i ψ_L ,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}, \quad (3.155)$$

Diracova jednačba je onda

$$\begin{pmatrix} -m & p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = 0,$$

tj.

$$\begin{aligned} (p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_L &= m \psi_R, \\ (p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_R &= m \psi_L, \end{aligned} \quad (3.156)$$

sa rješenjima

$$\begin{aligned} \psi_R &= \frac{p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} \psi_L, \\ \psi_L &= \frac{p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} \psi_R. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Iz (3.156) i (3.157) vidi se da:

- Rješenja postoje kako za pozitivno, tako i za negativno p_0 i mogu se zamjeniti supstitucijom $\psi_L \rightarrow -\psi_R$.

- Ako je $m = 0$, jednađbe se separiraju. Operator $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ mjeri komponentu spina čestice duž pravca gibanja. ψ_R je «velika» komponenta, a ψ_L «mala» za $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} > 0$ i $p_0 > 0$ ili za $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} < 0$ i $p_0 < 0$, dok je ψ_R «mala», a ψ_L «velika» komponenta spinora u slučaju kad je $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} > 0$ i $p_0 < 0$ ili kad je $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} < 0$ i $p_0 > 0$. Veličina $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$ je helicitet čestice. Za čestice bez mase ili relativističke čestice za koje je $p_0 \gg m$ aproksimativno je $\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \cong \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p_0}$. Prema tome, indeksi L (left) i R (right) reprezentiraju helicitet čestica. $\psi_L \gg \psi_R$ je rješenje Diracove jednađbe za relativističku česticu (ili česticu bez mase) pozitivne energije i lijevog heliciteta ($\vec{\sigma} \cdot \vec{p} < 0$, $p_0 > 0$), a $\psi_R \gg \psi_L$ je valna funkcija relativističke čestice pozitivne energije i desnog heliciteta ($\vec{\sigma} \cdot \vec{p} > 0$, $p_0 > 0$).
- Ako je $m \neq 0$ jednađbe (3.157) se ne separiraju. U SM svaki fermion koji u Lagrangianu sadrži interakciju između ψ_L i ψ_R , tj. članove oblika $\bar{\psi}_L \psi_R$ ili $\bar{\psi}_R \psi_L$, imat će masu.

Za čestice bez mase, čija brzina je c , helicitet je očuvana veličina, pa prema tome dobar kvantni broj za klasifikaciju čestica. Za fermione s masom helicitet nije očuvana veličina jer prestignemo li lijevi fermion, on izgleda kao desni.

U SM fermioni se ipak opisuju upravo pomoću $\psi_L(x)$ i $\psi_R(x)$ polja (stanja), jer fermioni različitih heliciteta imaju različite slabe interakcije uslijed narušenja parnosti u slabim interakcijama. Lako je vidjeti da to zaista mora biti tako.

Pri operaciji parnosti (transformaciji inverzije prostora) je $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$, $\vec{t} \rightarrow t$, ali aksijalni vektori, kao angularni moment $\vec{x} \times \vec{p}$ ili spin (sopstveni angularni moment čestice), ne mijenjaju znak $\vec{\sigma} \rightarrow \vec{\sigma}$, pa jednađbe (3.157) mijenjaju znak jer \vec{p} mijenja znak, što znači da $\psi_L \rightarrow -\psi_R$. Kad bi parnost bila simetrija fizike elementarnih čestica oba rješenja bila bi ekvivalentna. Ali, parnost nije simetrija svemira jer slabe interakcije narušavaju parnost, što znači da ψ_L i ψ_R imaju različite slabe interakcije.

Reprezentacija γ_5 -matrice (3.151) dozvoljava da se definiraju projekcioni operatori heliciteta za fermionska lijeva i desna stanja

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.158)$$

Lako je vidjeti da su P_L i P_R projektori, tj. da zadovoljavaju relacije

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R; \quad P_L P_R = 0, \quad P_L + P_R = 1. \quad (3.159)$$

Za svako rješenje Diracove jednadžbe u vrijedi $u = (P_L + P_R)u = u_L + u_R$, gdje su lijevo i desno stanje fermiona

$$u_L = P_L u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_L \end{pmatrix}, \quad u_R = P_R u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.160)$$

Zbog komutacionih relacija $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$ i $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$ za struju Diracovog polja (3.141) je

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} (P_L + P_R) \gamma^\mu (P_L + P_R) \psi = \bar{\psi} P_R \gamma^\mu P_L \psi + \bar{\psi} P_L \gamma^\mu P_R \psi,$$

i kako je

$$\bar{\psi}_L = (P_L \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_L \gamma^0 = \bar{\psi} P_R, \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L,$$

vrijedi

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R, \quad (3.161)$$

što znači da je helicitet fermiona očuvan ako je interakcija oblika fermionske struje (3.141).

U Lagrangianu SM srecijalno su važni maseni članovi fermionskih polja oblika $m \bar{\psi} \psi$. Izražen pomoću lijevih i desnih polja, fermionski maseni član je

$$\bar{\psi} \psi = \bar{\psi} (P_L^2 + P_R^2) \psi = \bar{\psi} (P_L P_L + P_R P_R) \psi = \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R. \quad (3.162)$$

Ako želimo fermion bez mase dovoljno je uzeti $\psi_R = 0$.

Elektromagnetske interakcije, koje očuvavaju parnost, zavise od fermionske struje (3.141), tj. (3.161), koja sadrži i LL i RR članove sa jednakom vjerojatnošću.

Ali, ako želimo da se pojavljuju samo LL članovi u struji (struja slabih interakcija) imaćemo

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L = \frac{1}{4} \bar{\psi} (1 + \gamma^5) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi. \quad (3.163)$$

Struja oblika (3.163) naziva se V – A interakcija, jer je razlika vektorskog V i aksijalno-vektorskog A člana. Jasno je da pored lijeve, može postojati i vektorska struja desnih fermionskih stanja oblika

$$\frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \psi = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$$

koja se naziva se V + A interakcija.

Da bi interakcija bila V – A tipa, dovoljno je da u izrazu (3.163) samo jedno spinorsko polje bude L stanje, na primjer $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi_L$. To je zaista tako jer je za svako Diracovo polje $\bar{\psi} = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R$, a $\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_L = 0$, zbog $P_R P_L = 0$. Interakcija bilo kojeg fermionskog polja sa lijevim ψ_L ili desnim ψ_R fermionskim poljem uvijek mora biti V – A ili V + A oblika.

Na kraju možemo napisati Diracov Lagrangian – slobodni Lagrangian spinorskog polja

$$\mathcal{L}_{sl.}^{(1/2)} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (3.164)$$

gdje se $\bar{\psi}$ i ψ smatraju nezavisnim poljima. Lako se uvjeriti da je Lagrangeova jednačba koja slijedi iz gornjeg Lagrangiana variranjem po $\bar{\psi}$ upravo Diracova jednačba (3.124), dok variranje po ψ daje hermitski konjugiranu Diracovu jednačbu (3.139) za polje $\bar{\psi}$.

Ako je masa fermiona $m = 0$ preostaje samo kinetički član i Lagrangian postaje

$$\mathcal{L}_{sl.}^{(1/2)} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi. \quad (3.165)$$

U SM svi fermioni se opisuju Diracovim poljima bez mase zbog zahtjeva lokalne gauge simetrije i svojstava slabih interakcija (narušenja parnosti), a kvarkovi i leptoni dobijaju mase (članove oblika $m \bar{\psi} \psi$ u Lagrangianu) uslijed interakcija sa poljem Higgs bozona poslije spontanog narušenja elektro-slabe simetrije.

Svi kvarkovi i leptoni u SM su fermioni spina $1/2$ i njihov slobodni Lagrangian je zbroj Lagrangiana (3.165) za polje svake čestice.

U slijedećem poglavlju o lokalnim gauge teorijama vidjet ćemo da se sve interakcije takvih bezmasenih fermionskih polja dobijaju iz njihovih slobodnih Lagrangiana $\mathcal{L}_{sl.}^{(1/2)}$ (3.165) jednostavnom zamjenom $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$, gdje je D_μ kovarijantna derivacija određena grupom lokalnih gauge simetrija interakcija tih fermiona.

3.6 Lagrangiani polja spina $\frac{3}{2}$ (gravitina) i spina 2 (gravitona)

Iako ih u SM nema, kompletnosti radi, navedimo slobodne Lagrangiane za polja spina $\frac{3}{2}$ i spina 2. Dosada nije otkrivena nijedna čestica spina $\frac{3}{2}$, ali postoje vrlo interesantne teorije elementarnih čestica koje pretpostavljaju postojanje takvih čestica – supersimetrija (SUSY) i supergravitacija. Te teorije predviđaju postojanje dodatne simetrije (supersimetrije) između bozona i fermiona, tako da za svaku poznatu česticu (particle) predviđaju postojanje još neotkrivene super-čestice partnera (sparticle) spina umanjenog za $\frac{1}{2}$. Čestica spina $\frac{3}{2}$ naziva se gravitino i ona je fermionski super-partner kvantu gravitacijskog polja – gravitonu, koji je bozon spina 2.

Do danas su gravitoni samo indirektno detektirani. Svi fizičari vjeruju da će gravitoni uskoro biti otkriveni i direktno u zemaljskim ili satelitskim eksperimentima, a moguće je da će eksperimenti na LHC-u uskoro otkriti i super-čestice.

Lagrangian slobodnog polja spina $\frac{3}{2}$ bez mase je (Rarita – Schwinger, 1941.)

$$\mathcal{L}_{sl.}^{(3/2)} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\Psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \Psi_\sigma, \quad (3.166)$$

gdje je $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ potpuno antisimetrični tenzor, a $(\Psi_\mu)_\alpha$ je vektorski spinor – za svaki vektorski Lorentz indeks $\mu = 0,1,2,3$ po jedan spinor (4-komponentni vektor) čije su komponente $\alpha = 1,2,3,4$. Za masivni gravitino je

$$\mathcal{L}_{sl.}^{(3/2)} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\Psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \Psi_\sigma - \frac{1}{2} m \bar{\Psi}_\mu \sigma^{\mu\nu} \Psi_\nu. \quad (3.167)$$

Može se pokazati da se polja gravitina Ψ_μ u (3.167) mogu redefinirati tako da se u jednadžbama gibanja pojavljuju samo dijagonalni maseni članovi.

Iz Lagrangiana (3.167) variranjem po $\bar{\Psi}_\mu$ lako se dobije jednadžba gibanja masivnog gravitina

$$\left(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho + m \sigma^{\mu\sigma} \right) \Psi_\sigma(x) = 0. \quad (3.168)$$

Einsteinov (ili Einstein-Hilbertov) Lagrangian iz Opće teorije relativnosti za tenzorsko polje $g_{\mu\nu}(x)$ spina 2 koji opisuje slobodno gravitacijsko polje je

$$\mathcal{L}_{sl.}^{(2)} = \frac{1}{2\kappa c} \sqrt{-g} R, \quad (3.169)$$

gdje je gravitacijska konstanta $\kappa = \frac{8\pi G_N}{c^4} = 2.07 \times 10^{-43} \frac{s}{kg}$, $\det g_{\mu\nu} = -g$, a R je skalarni Riemannov tenzor definiran kao

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad \text{gdje je: } R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu}. \quad (3.170)$$

Riemannov tenzor zakrivljenosti je

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha} R^{\alpha}_{\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha} (\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} \Gamma^{\alpha}_{\rho\beta} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho} \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma}), \quad (3.171)$$

gdje su Christoffelovi simboli funkcije gravitacijskog polja (metričkog tenzora) $g_{\mu\nu}(x)$ i njegovih prvih parcijalnih derivacija

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\sigma\nu;\mu} + g_{\sigma\mu;\nu} - g_{\mu\nu;\sigma}). \quad (3.172)$$

Indeks iza točke-zareza označava parcijalnu derivaciju po odgovarajućoj koordinati, tj.

$$\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} g_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma;\mu}.$$

Tenzorsko polje $g_{\mu\nu}(x)$ određuje geometrijska svojstva prostor-vremena – to je metrički tenzor Riemannova prostora koji određuje udaljenost dvije bliske točke

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (3.173)$$

što je veza geometrije prostora i gravitacijske sile u Općoj teoriji relativnosti – prisustvo gravitacijskog polja ekvivalentno je zakrivljenosti prostor-vremena. Faktor $\sqrt{-g}$ je Jacobian neophodan da osigura da djelovanje sustava $I^{(2)} = \frac{1}{2\kappa c} \int d^4x \sqrt{-g} R$ bude skalar poslije d^4x integracije.

U Općoj teoriji relativnosti, ako uz gravitacijsko polje $g_{\mu\nu}(x)$ imamo još i neka polja tvari $\phi_a(x)$ čestica spina različitog od 2 koje su opisane Lagrangianom $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(\phi_a, \partial_{\mu}\phi_a)$, ukupan Lagrangian sustava je zbroj Lagrangiana gravitacijskog polja i Lagrangiana materije: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{sl.}^{(2)} + \sqrt{-g} \mathcal{L}_m$. Variranjem po $g_{\mu\nu}$ dobijaju se Einsteinove jednadžbe Opće teorije relativnosti (Einstein 1915.)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa \mathfrak{T}_{\mu\nu}. \quad (3.174)$$

Na lijevoj strani je Riemannov tenzor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ koji određuje geometrijska svojstva prostor-vremena, a na desnoj strani je tenzor energije-impulsa $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ polja materije

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M + \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial^\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a, \quad (3.95)$$

koja je izvor zakrivljenosti prostor-vremena, tj. gravitacijskog polja.

Einsteinove jednačbe (3.174) mogu se napisati i u obliku

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(\mathfrak{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathfrak{T} \right), \quad (3.175)$$

gdje je $\mathfrak{T} = g^{\mu\nu} \mathfrak{T}_{\mu\nu}$, tako da je još očiglednije da tenzor energije-impulsa materije $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ određuje tenzor zakrivljenosti $R_{\mu\nu}$ prostor-vremena.

Pokušaj kvantizacije gravitacijskog polja $g_{\mu\nu}(x)$ zahtijeva uvođenje polja gravitona $h_{\mu\nu}(x)$, čestica bez mase koje su kvanti gravitacijskog polja spina 2, prema

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x), \quad (3.176)$$

gdje je $\eta_{\mu\nu}$ konstantni metrički tenzor ravnog Minkowskog prostora

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.177)$$

Bozonska polja, pa tako i polje gravitona $h_{\mu\nu}$, su dimenzije 1, tj. mase¹ $\sim E$, [precizno, (duljina)⁻¹, tako da Lagrangeova gustoća ima dimenziju (duljina)⁻⁴, što osigurava da je djelovanje skalar] – što se lako vidi po masenom članu $m^2 \phi^2$, na primjer. Dimenzija polja gravitona $h_{\mu\nu}$ zato nužno zahtijeva prisustvo dimenzione konstante κ u (3.176) i to je osnovni problem u pokušajima nalaženja kvantne teorije gravitacijskog polja – teorija nije renormalizabilna jer Feynmanovi dijagrami sa različitim potencijama $h_{\mu\nu}$ imaju različite dimenzije i nikako se ne mogu međusobno kratiti.

U SM postoje čestice spina 0, 1 i ½ (SM ne uključuje gravitone). Na kraju možemo napraviti preglednu listu Lagrangiana slobodnih polja koja se pojavljuju u SM i jednačbi gibanja koje iz njih slijede.

1) Slobodno realno polje spina 0 i mase m (skalarno ili pseudoskalarno)

$$\mathcal{L}_{\text{sl.}}^{(0)} = \frac{1}{2} [\partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - m^2 \phi^2], \quad (3.178)$$

zadovoljava Klein-Gordonovu jednadžbu:

$$(\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m^2) \phi = 0. \quad (3.179)$$

2) Kompleksno skalarno ili pseudoskalarno polje mase m (dva realna polja iste mase)

$$\mathcal{L}_{\text{sl.}}^{(0)} = \frac{1}{2} [\partial_{\mu} \phi_1 \partial^{\mu} \phi_1 - m^2 \phi_1^2] + \frac{1}{2} [\partial_{\mu} \phi_2 \partial^{\mu} \phi_2 - m^2 \phi_2^2] = \partial_{\mu} \phi^* \partial^{\mu} \phi - m^2 \phi^* \phi, \quad (3.180)$$

gdje je

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2), \quad \text{tj.} \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2), \quad (3.181)$$

zadovoljava

$$(\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m^2) \phi = (\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m^2) \phi^* = 0. \quad (3.182)$$

3) Slobodno Abelovo vektorsko (spina 1) polje mase m

$$\mathcal{L}_{\text{sl.}}^{(1)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_{\mu} A^{\mu}. \quad (3.183)$$

gdje je

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}, \quad (3.184)$$

zadovoljava Maxwelllove jednadžbe za masivni vektorski gauge bozon (bez izvora)

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} + m^2 A^{\nu} = 0. \quad (3.185)$$

Ako je, kao u elektrodinamici, $m = 0$, Maxwellov Lagrangian slobodnog vektorskog polja je samo prvi član iz (3.183)

$$\mathcal{L}_{\text{sl.}}^{(1)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.186)$$

jer nema masenog člana.

4) Slobodno fermionsko polje (spina $\frac{1}{2}$) i mase m

$$\mathcal{L}_{sl.}^{(\frac{1}{2})} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi , \quad (3.187)$$

zadovoljava Diracovu jednadžbu

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad \text{ili} \quad \bar{\psi}(i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu + m) = 0 . \quad (3.188)$$

Da bi mogli napisati kompletan Lagrangian SM elementarnih čestica, koji sadrži polja kvarkova i leptona, te gauge bozona i Higgs bozona, nedostaje nam još generalizacija za slučaj više vektorskih polja (gauge bozona) koja međusobno ne komutiraju (Lagrangian ne-Abelovskih vektorskih polja). No, da bi se došlo do Lagrangiana takvih Yang-Mills teorija mora se prvo umjesto slobodnih, razmotriti teorija interagujućih polja i iskoristiti simetrija teorije (gauge simetrija) da se dođe do Lagrangiana interakcije gauge teorija.

Zadaci:

Zadatak 3.1. Pokazati da su Lagrangeove jednačbe koje slijede iz (3.18) upravo Maxwellove jednačbe.

Zadatak 3.2. Pokazati da Proca Lagrangian daje jednačbe gibanja masivnog vektorskog polja (3.23), tj, (3.24).

Zadatak 3.3. Pokazati da je Yukawa-in potencijal (3.27) rješenje jednačbe (3.26) koje iščezava u beskonačnosti.

Rješenje:

Treba pokazati da je: $\nabla^2 \phi = m^2 \phi - q \delta(\vec{r})$, gdje je: $\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r} \frac{e^{-mr}}{r} = \frac{\Psi(r)}{r}$, pri čemu je očito da $\phi(\vec{r}) \rightarrow 0$ kad $r \rightarrow \infty$. Kako je: $\nabla^2 \frac{\Psi(r)}{r} = \nabla \cdot \left(\nabla \frac{\Psi}{r} \right) = \nabla \cdot \left(\Psi \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \nabla \Psi \right)$, te: $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$, $\nabla \Psi = -m\Psi \hat{r}$ i $\nabla \cdot \hat{r} = \frac{2}{r}$ lako se dobija: $\nabla^2 \frac{\Psi}{r} = m^2 \frac{\Psi}{r} + \Psi \nabla^2 \frac{1}{r}$, odakle odmah slijedi traženi rezultat zbog: $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r})$.

Zadatak 3.4. Pokazati da su tri operatora $(S_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}$, na primjer

$$S_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

zadovoljavaju komutacione relacije $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k$ i da vrijedi $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 2I$, što znači da su reprezentacija operatora angularnog momenta za spin 1.

Zadatak 3.5. Pokazati da iz Schrodingerove jednačbe (3.44) slijedi zakon očuvanja vjerojatnosti (3.46).

Zadatak 3.6. Pokazati da normalizacioni faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ u (3.74) osigurava normiranost polja ϕ i ϕ^* , ako su polja ϕ_1 i ϕ_2 bila normirana.

Zadatak 3.7. Pokazati da vjerojatnost bilo kojeg procesa ostaje nepromjenjena ako stanja fizikalnog sustava $|\Psi\rangle$ transformiramo unitarnim operatorom U .

Zadatak 3.8. Koristeći izraze (3.89)–(3.92) pokazati da važi zakon očuvanja 4-impulsa (3.94), gdje je tenzor energije-momenta definiran u (3.95).

Zadatak 3.9. Polazeći od izraza (3.106) pokazati da su uvjeti koje moraju ispunjavati matrice α_i i β upravo (3.108)–(3.110).

Zadatak 3.10. Pokazati da uvjete (3.108)–(3.110) minimalno mogu zadovoljiti matrice reda (4×4) .

Zadatak 3.11. Pokazati da (4×4) matrice (3.117) zadovoljavaju uvjete (3.108)–(3.110).

Zadatak 3.12. Koristeći uvjet antikomutiranja γ -matrica (3.121), dokazati linearnu nezavisnost matrica $\Gamma_{\mu\nu}^n$, ($n = 1, 2, \dots, 16$), nizom slijedećih argumenata:

- 1) Za svako Γ^n , je: $(\Gamma^n)^2 = \pm 1$.
- 2) Za svako Γ^n , osim Γ^S , postoji Γ^m takvo da je: $\Gamma^n \Gamma^m = -\Gamma^m \Gamma^n$.
- 3) Za svako Γ^n važi: $\text{Tr} \Gamma^n = 0$.
- 4) Za svaka dva Γ^m i Γ^n , $m \neq n$, postoji $\Gamma^a \neq \Gamma^S$, takvo da je: $\Gamma^m \Gamma^n = \Gamma^a$.
- 5) Ako postoje brojevi a_n takvi da je: $\sum_n a_n \Gamma^n = 0$, množeći s $\Gamma^m \neq \Gamma^S$, uzimajući trag i koristeći (3), pokazati da mora biti: $a_m = 0$. Ako je $\Gamma^m = \Gamma^S$, slijedi još i $a_S = 0$, što znači da su svi koeficijenti $a_n = 0$.

Zadatak 3.13. Pokazati da su komponente od $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ u reprezentaciji γ -matrica (3.119) upravo: $\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$, gdje su $i, j, k = 1, 2, 3$ ciklični indeksi, a: $\sigma^{0i} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$.

Zadatak 3.14. Pokazati da matrice $\sigma^{\mu\nu}$ zadovoljavaju komutacione relacije:

$$[\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\rho\sigma}] = g^{\mu\sigma} \sigma^{\nu\rho} + g^{\nu\rho} \sigma^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} \sigma^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} \sigma^{\mu\rho} .$$

Zadatak 3.15. Pokazati da je $[\vec{S}, H] = -i\gamma_0 \vec{\gamma} \times \vec{p}$, gdje je operator spina definiran u (3.127), a H je Hamiltonian Diracove čestice (3.125). Pri dokazu može pomoći da se prvo dokaže komutaciona relacija:

$$[\sigma^{ij}, \gamma^k] = 2i(\gamma^i g^{jk} - \gamma^j g^{ik}) .$$

Zadatak 3.16. Pokazati da je $[\vec{S} \cdot \vec{p}, H] = 0$, gdje je H je Hamiltonian Diracove čestice (3.125).

Zadatak 3.17. Pokazati ispravnost relacije (3.128).

Zadatak 3.18. Pokazati da je (3.139) hermitski konjugirana Diracova jednačba (3.124).

Zadatak 3.19. Pokazati da γ -matrice u reprezentaciji (3.151) zadovoljavaju uvjete anti-komutativnosti (3.121).

Zadatak 3.20. Pokazati da su spinori (3.154) zaista rješenja Diracove jednačbe (3.150).

Zadatak 3.21. Pokazati da za projekcione operatore P_L i P_R važe relacije (3.159).

Zadatak 3.22. Izraziti $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$ pomoću dvo-komponentnih kiralnih (chiral) spinora ψ_L i ψ_R .

Zadatak 3.23. Eksplicitno pokazati da Diracove jednačbe za $\bar{\psi}$ i ψ slijede iz Lagrangiana (3.164).

4. Baždarne (gauge) teorije

Gauge teorije sadrže polja čestica materije (kvarkova i leptona) i gauge bozona koji su medijatori interakcija među njima. Takve teorije su nužno teorije interagujućih (ne slobodnih) polja u kojima su interakcije među poljima (tj. sile među česticama) oblika određenog gauge simetrijom teorije. Razmotrimo prvo kako se uvodi interakcija u teoriju polja.

4.1 Interakcije u kvantnoj teoriji polja i Feynmanovi dijagrami

Interakciju među poljima razmotrimo na jednostavnom primjeru slobodnog realnog skalarnog polja čiji je Lagrangian (3.38)

$$\mathcal{L}_{\text{sl.}}^{(0)} = \frac{1}{2} [\partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - m^2 \phi^2] . \quad (4.1)$$

Ako slobodnom Lagrangianu (4.1) dodamo Lagrangian interakcije oblika

$$\mathcal{L}_{\text{int.}}^{(0)} = - \phi(x) \rho(x) , \quad (4.2)$$

ukupni Lagrangian je

$$\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}_{\text{sl.}}^{(0)} + \mathcal{L}_{\text{int.}}^{(0)} = \frac{1}{2} [\partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - m^2 \phi^2] - \phi \rho , \quad (4.3)$$

i Lagrangeova jednadžba za polje ϕ postaje

$$(\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m^2) \phi = \rho . \quad (4.4)$$

Po analogiji sa elektrodinamikom $\rho(x)$ interpretiramo kao gustoću izvora polja $\phi(x)$.

Ponašanje sustava analizirajmo za najjednostavniji slučaj, vremenski nezavisnog točkastog izvora jakosti (naboja) g koji miruje u ishodištu

$$\rho(x) = g \delta(\vec{x}) , \quad (4.5)$$

tako da jednadžba (4.4) postaje

$$(-\nabla^2 + m^2) \phi(\vec{x}) = g \delta(\vec{x}) , \quad (4.6)$$

i može se riješiti Fourierovim transformom

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{k}) . \quad (4.7)$$

Kako je eksponencijalna reprezentacija δ -funkcije: $\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, za Fourierov transform $\phi(\vec{k})$ se dobija

$$\phi(\vec{k}) = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2} , \quad (4.8)$$

sa rješenjem

$$\phi(\vec{x}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\vec{k}^2 + m^2} . \quad (4.9)$$

Napomena: U općem slučaju, kad izvor nije vremenski nezavisan, nazivnik u (4.9) mora biti: $k^2 - m^2$, gdje je $k^2 = k_\mu k^\mu = k_0^2 - \vec{k}^2$, tj. propagator skalarnе čestice je: $\frac{1}{k^2 - m^2}$.

Izaberemo li koordinatni sustav tako da je vektor \vec{x} duž z-osi, u sfernim koordinatama imamo $\vec{k} \cdot \vec{x} = kr \cos \theta$, pa je

$$\int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k^2 + m^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} e^{i kr \cos \theta} d(\cos \theta) = \frac{2\pi}{i r} \int_0^\infty \frac{k dk}{k^2 + m^2} (e^{i kr} - e^{-i kr}) = \frac{2\pi}{i r} \int_{-\infty}^\infty \frac{k dk}{k^2 + m^2} e^{i kr} .$$

Kompleksnom integracijom u skladu s Jordanovim teoremom, birajući $\text{Im } k > 0$, zatvarujući konturu u gornjem dijelu kompleksne k-ravnine i koristeći reziduum $\frac{1}{2} e^{-mr}$ za $k = im$, rješenje je Yukawa potencijal

$$\phi(\vec{x}) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} , \text{ gdje je: } r = |\vec{x}| . \quad (4.10)$$

Gornji izraz je polje točkastog izvora jakosti (naboja) g u ishodištu dosega $r \sim \frac{1}{m}$. Ako zamislimo još jednu česticu (izvor) gustoće $\rho_2(\vec{x})$, Hamiltonian interakcije (energija interakcije) između ta dva izvora, tj. precizno, izvora $\rho_2(\vec{x})$ i potencijala (4.10) prvog izvora, je: $H = \int d^3x \phi_1(\vec{x}) \rho_2(\vec{x})$, analogno izrazu za elektrostatsku potencijalnu energiju u klasičnoj elektrodinamici.

Da izraz učinimo simetričnim po oba izvora, izrazimo polje prvog izvora (4.10) kao integral

$$\phi_1(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho_1(\vec{x}') \frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \quad (4.11)$$

Zamjena $\rho_1(\vec{x}') = g\delta(\vec{x}')$ u (4.11) odmah daje (4.10). Hamiltonian interakcije između dvije čestice (izvora) se onda može napisati u obliku koji je potpuno simetričan po koordinatama obe čestice

$$H_{12} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x_1 d^3x_2 \rho(\vec{x}_1) \rho(\vec{x}_2) \frac{e^{-m|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}. \quad (4.12)$$

Izraz (4.12) pokazuje da je potencijalna energija dviju čestica na udaljenosti r

$$V(r) = -\frac{g_1 g_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}, \quad (4.13)$$

što u limesu $m \rightarrow 0$ daje Coulombov potencijalnu energiju dva točkasta naboja (konstante interakcije – naboji g_1 i g_2 su iz izvora prebačene u potencijalnu energiju).

U klasičnoj elektrodinamici silu između dva naboja na makroskopskim rastojanjima prenose njihova elektromagnetska polja. Na mikroskopskim rastojanjima ova interpretacija više ne zadovoljava, zbog kvantizacije djelovanja. Zato se u kvantnoj teoriji polja interakcija, tj. sila među česticama, interpretira kao razmjena (emisija i apsorpcija) kvantata polja, što se bazira upravo na izrazu (4.12), a precizno formulira drugom kvantizacijom teorije polja.

1949. Feynman je razvio grafičku tehniku (Feynmanovi dijagrami) za računanje vjerojatnosti procesa u kvantnoj teoriji polja. Matrični elementi fizikalnih procesa radi jednostavnosti najčešće se računaju u impulsnom prostoru. U skladu sa (4.9) razmjena jednog kvanta skalarnog polja – čestice spina 0, mase m i impulsa k^μ reprezentira se u kvantnoj amplitudi procesa propagatorom

$$\frac{1}{k^2 - m^2}, \quad (4.14)$$

ili precizno: u Feynmanovom dijagramu svakoj unutarnjoj liniji bozona spina 0, mase m i impulsa k^μ pridružuje se propagator

$$i \Delta_F(k) = \frac{i}{k^2 - m^2}. \quad (4.15)$$

Ovo je prvi primjer pravila po kojima se u kvantnoj teoriji polja bilo kojem Feynmanovom dijagramu koji reprezentira neki fizikalni proces pridružuje kvantno-mehanička amplituda tog dijagrama.

Svaki Feynmanov dijagram sastoji se od spoljašnjih linija koje reprezentiraju čestice (bozone ili fermione) u inicijalnom i finalnom stanju, unutarnjih linija čestica u «međustanju» i verteksa («čvorova») dijagrama gdje se sreću tri ili više linija koji reprezentiraju emisiju ili apsorpciju čestica medijatora interakcije. Lagrangian teorije omogućuje da se nađu pravila pridruživanja multiplikativnih faktora svakoj vrsti linija (čestica) i svakom tipu verteksa u Feynmanovom dijagramu. Na taj način se može napisati amplituda svakog dijagrama. Spoljašnjim linijama pridružuju se valne funkcije tih čestica, unutarnjim linijama pridružuju se propagatori tih čestica, a «čvorovima» se pridružuju verteks faktori.

Vjerojatnost nekog fizikalnog procesa je kvadrat apsolutne vrijednosti zbroja amplituda svih Feynmanovih dijagrama koji odgovaraju tom procesu.

Bilo koji fizikalni proces, raspad ili raspršenje elementarnih čestica na primjer, je prijelaz iz nekog početnog i u neko krajnje stanje f . U prvoj aproksimaciji, koja se naziva Born aproksimacija, matični element M_{fi} procesa $i \rightarrow f$ je: $M_{fi} \cong \langle f | V | i \rangle$, gdje je potencijal V upravo Lagrangian interakcije $V = \mathcal{L}_{int}$. odgovarajuće kvantne teorije polja kao u Poglavlju 2.

Prototip kvantne teorije polja je kvantna elektrodinamika – teorija fermionskog polja $\psi(x)$, tj. čestica spina $\frac{1}{2}$, mase m i naboja $q = -e$, elektrona i vektorskog polja $A^\mu(x)$, tj. čestica spina 1, bez mase – fotona. Za kvantnu elektrodinamiku (QED) Lagrangian interakcije je u skladu sa (3.21)

$$\mathcal{L}_{int.} = -j_\mu A^\mu = e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu, \quad (4.16)$$

gdje je $j_\mu(x)$ vektorska struja elektrona (3.142) u kojoj su $\bar{\psi}$ i ψ polja finalnih i inicijalnih elektrona e , a A^μ je polje fotona γ . Lagrangian interakcije sadrži tri polja i predstavlja eey verteks teorije.

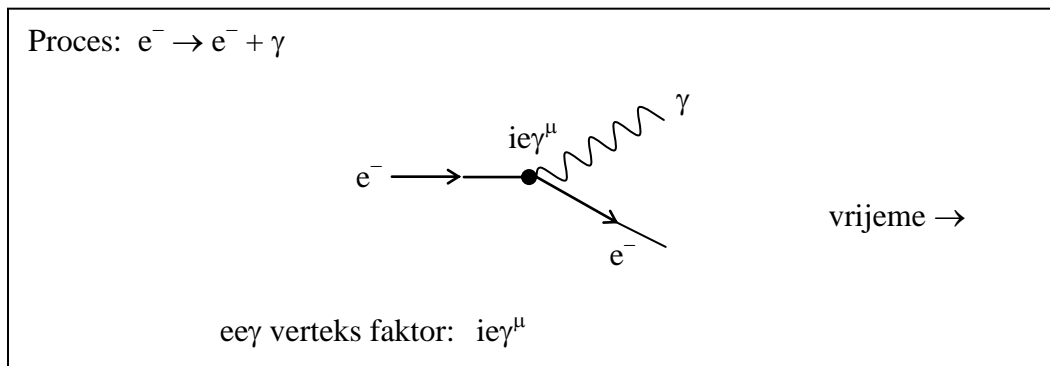
Prema tome, ukupni Lagrangian kvantne elektrodinamike je zbroj Diracovog Lagrangiana (3.164) za polje elektrona, Maxwellovog Lagrangiana (3.20) za polje fotona i Lagrangiana interakcije (4.16)

$$\mathcal{L}^{QED} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu, \quad (4.17)$$

gdje je

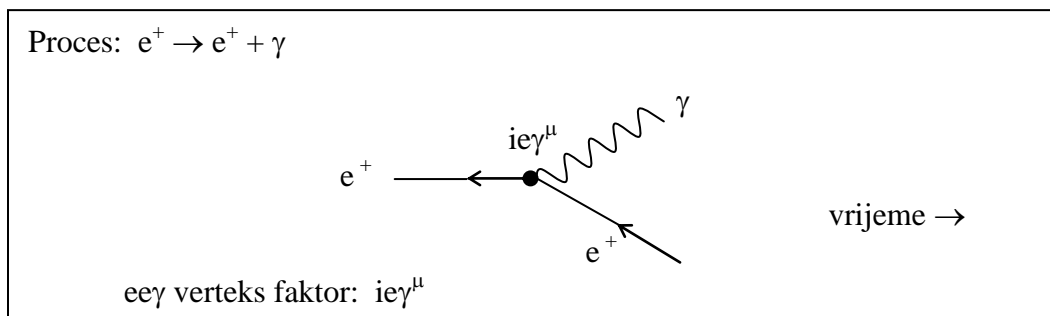
$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (4.18)$$

Elementarni proces kvantne elektrodinamike je $e^- \rightarrow e^- + \gamma$, u kome inicijalni elektron impulsa p , emitira foton impulsa k i nastavi gibanje (skrene) kao finalni elektron sa impulsom p' , tako da je: $p'_\mu = p_\mu + k_\mu$. Taj proces reprezentira se dijagramom u kome u verteks ulazi linija inicijalnog elektrona impulsa p_μ , a iz verteksa izlaze linije finalnog elektrona impulsa p'_μ i linija fotona impulsa k_μ . U skladu sa (3.147), valna funkcija inicijalnog elektrona je $\psi = u(p)e^{-ip \cdot x}$, a za finalni elektron valna funkcija je $\bar{\psi} = \bar{u}(p')e^{+ip' \cdot x}$. Valna funkcija fotona je: $A_\mu = \varepsilon_\mu e^{+ik \cdot x}$, gdje je ε_μ vektor polarizacije fotona. Slika 4.1 prikazuje Feynmanov dijagram ovog elementarnog procesa. Faktor koji se pridružuje $e\gamma$ verteksu je $ie\gamma^\mu$ što je upravo \mathcal{L}_{int} bez valnih funkcija čestica. Tako je u svakoj teoriji polja: interakcioni Lagrangian direktno daje elementarne procese teorije koji se reprezentiraju osnovnim verteksima teorije. Dijagrami višeg reda (sa više verteksa) koji reprezentiraju kompliciranije procese dobijaju se spajanjem više elementarnih dijagrama.



Slika 4.1

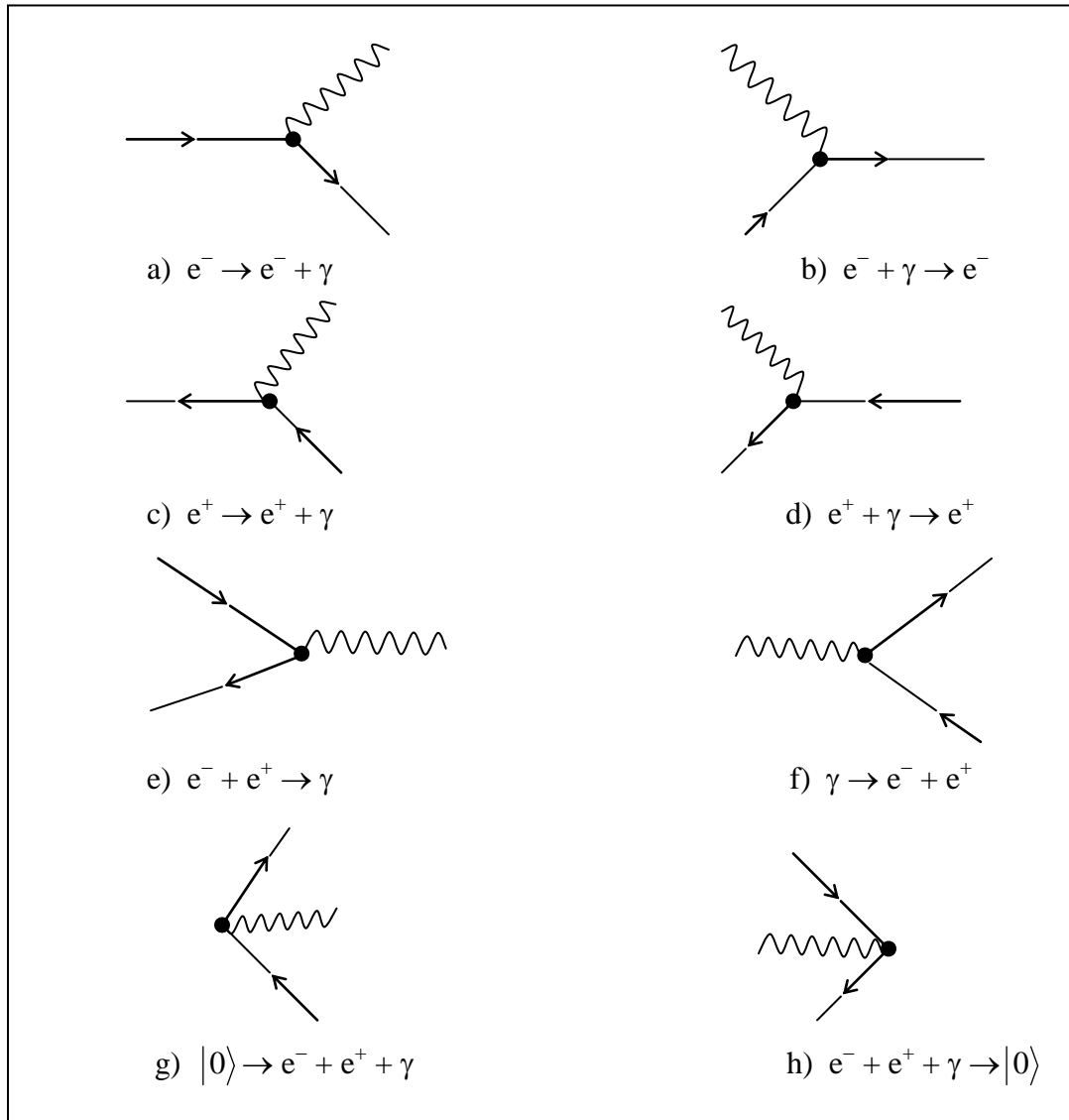
Analogni elementarni proces sa antičesticama – emisija fotona od strane pozitrona, prikazan je na Slici 4.2. Jedina razlika je da se pozitron prikazuje kao elektron koji se giba unazad u vremenu, tj. opisuje valnom funkcijom $v(p)e^{+ip \cdot x}$, ili $\bar{v}(p)e^{-ip \cdot x}$.



Slika 4.2

Svi elementarni procesi prvog reda (sa samo jednim verteksom), tj. oni Feynmanovi dijagrami čije amplitude su prvog reda po konstanti interakcije (naboju) e , u kvantnoj elektrodinamici prikazani su na Slici 4.3. Gibanje jedne čestice određenog impulsa prikazuje se odgovarajućom linijom – valovitom za foton, a ravnom za elektron.

Tim linijama se pridružuje propagator koji je inverzni operator kinetičkog (kvadratnog) člana Lagrangiana odgovarajućeg polja za svaku unutarnju liniju, a valna funkcija čestice za svaku spoljašnju liniju u dijagramu.



Slika 4.3

Elementarni procesi sa Slike 4.3 su redom:

- a) emisija fotona od strane elektrona,
- b) apsorpcija fotona od strane elektrona,
- c) emisija fotona od strane pozitrona,
- d) apsorpcija fotona od strane pozitrona,
- e) anihilacija elektron-pozitron para uz emisiju fotona,
- f) kreacija elektron-pozitron para od strane fotona,
- g) kreacija elektron-pozitron para i fotona iz vakuuma,
- h) anihilacija elektron-pozitron para i fotona u vakuum.

U prvoj aproksimaciji [ako zanemarimo fazne faktore ($\pm i, \pm 1$), spinske faktore u brojniku propagatora, pravila integracije po zatvorenim konturama u kompliciranijim dijagramima sa zatvorenim petljama, itd.], amplituda M_{fi} bilo kojeg Feynmanovog dijagrama sastoji se od slijedećih multiplikativnih faktora:

- Za svaki verteks odgovarajući verteks faktor (npr. $ie\gamma^\mu$ za QED),
- Za svaku unutarnju liniju 4-impulsa q i mase m propagator $\frac{1}{q^2 - m^2}$,
- Spinor \bar{u} za svaki fermion u konačnom stanju, a spinor u za svaki fermion u početnom stanju (i takođe, \bar{v} za svaki inicijalni antifermion, a v za svaki finalni antifermion); 1 za svaku skalarnu česticu bilo u početnom ili u konačnom stanju; ϵ_μ za svaki vektorski bozon bilo u početnom ili u konačnom stanju. Ovi faktori su valne funkcije odgovarajućih čestica bez dijela koji daje prostorno-vremensku zavisnost (ravni val).

Napomena: Gornja aproksimativna pravila za Feynmanove dijagrame na isti način tretiraju sve vrste čestica 4-impulsa q u unutarnjim linijama dijagrama – svakoj pridružuju propagator $(q^2 - m^2)^{-1}$. Brojnici propagatora zavise od spina čestice, tako da su propagatori ustvari:

- Za svaku unutarnju liniju bozona spina 0, mase m i impulsa q

$$i\Delta_F(q) = \frac{i}{q^2 - m^2}, \quad (4.19)$$

- Za svaku unutarnju fermionsku liniju spina $1/2$, mase m i impulsa q

$$iS_F(q) = \frac{i}{\gamma^\mu q_\mu - m} = \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}, \quad (4.20)$$

- Za svaku unutarnju liniju fotona (spina 1 i mase $m = 0$) impulsa q

$$iD_F(q)_{\mu\nu} = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}, \quad (4.21)$$

- Za svaku unutarnju liniju bozona spina 1, mase m i impulsa q

$$iD_F(q)_{\mu\nu} = -i \frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}}{q^2 - m^2}. \quad (4.22)$$

Kako je izloženo u Poglavlju 2.5.1, pomoću amplituda Feynmanovih dijagrama sistematski se mogu računati vrijednosti fizikalnih opservabli – širine raspada (decay widths) Γ i udarnih presjeka raspršenja (cross sections) σ raznih procesa sa elementarnim česticama, koje se onda mogu uspješivati sa rezultatima eksperimenata.

Svi elementarni procesi sa Slike 4.3 nisu realni, nego virtualni procesi, jer svaki narušava zakon očuvanja energije. Na primjer, u procesu a) inicijalni elektron impulsa p_μ emitira foton impulsa k_μ i prelazi u finalni elektron impulsa p'_μ . Zbog zakona očuvanja 3-impulsa u sustavu mirovanja inicijalnog elektrona taj proces je

$$e^-(E, \vec{0}) \rightarrow e^-(E', -\vec{k}) + \gamma(k, \vec{k}), \quad (4.23)$$

gdje je $k = |\vec{k}|$. Za realne elektrone je: $E = m$ i $E' = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ i zakon očuvanja energije ne važi u verteksu procesa a) jer je $m \neq \sqrt{k^2 + m^2} + k$, za svako $k \neq 0$. U kvantnoj fizici zbog relacija neodređenosti $(\Delta t)(\Delta E) \geq \frac{\hbar}{2}$ moguće je u kratkom intervalu vremena narušiti zakon očuvanja energije. Takvi procesi nazivaju se virtuelnim.

Kombinacijom bar dva virtuelna procesa – jednog koji u kratkom vremenu narušava zakon očuvanja energije za ΔE i drugog koji ga narušava za $-\Delta E$, može se napraviti realan proces u kojem važi zakon očuvanja energije za početno i konačno stanje. Moguća je i malo drugačija interpretacija, primjerenija kvantnoj teoriji polja, po kojoj zakon očuvanja energije uvijek važi za realne (opservabilne, tj. fizikalno mjerljive) čestice, ali ne-mjerljive virtuelne čestice u unutarnjim linijama dijagrama nisu na masenoj ljusci (mass shell), tj. za njih ne važi: $E^2 = \vec{k}^2 + m^2$. U takvoj interpretaciji svaka realna, fizikalna čestica je samo jako dugo (beskonačno) živuća virtualna čestica.

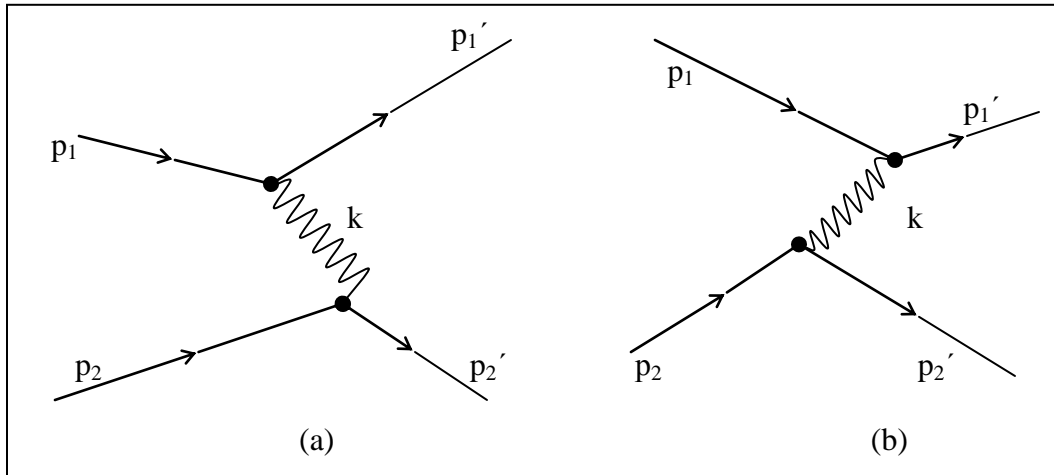
Za realne procese u fizici elementarnih čestica inicijalna i finalna stanja aproksimativno uvijek odgovaraju trenucima $t_i \rightarrow -\infty$ i $t_f \rightarrow +\infty$, kao u svakom eksperimentu raspršenja. Zato je $\Delta t \rightarrow +\infty$, pa je $\Delta E \rightarrow 0$, što znači da u realnim procesima mora važiti zakon očuvanja energije. Isti zaključak slijedi razmatramo li stvarna inicijalna i finalna stanja sustava čestica koja se koriste u eksperimentima. Najčešće su to upravo svojstvena stanja slobodnog Hamiltoniana koja imaju precizno definiranu energiju, tako da je neodređenost energije $\Delta E = 0$, što opet znači da važi zakon očuvanja energije.

U kvantnoj elektrodinamici Feynmanov dijagram svakog realnog procesa sadrži bar dva elementarna dijagrama – bar dva verteksa, sa Slike 4.3. Za primjer, uzmimo realni proces elastičnog raspršenja elektrona na elektronu

$$e^- + e^- = e^- + e^-. \quad (4.24)$$

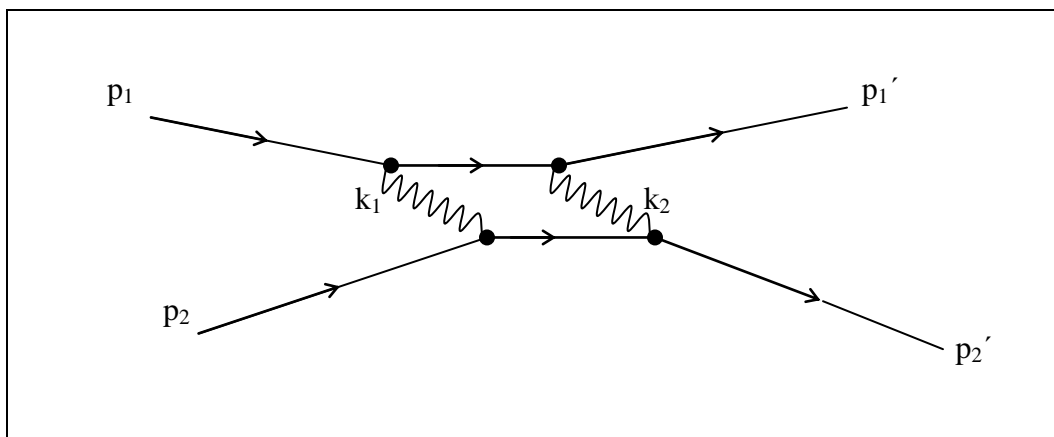
Dva inicijalna elektrona u procesu raspršenja mogu razmeniti jedan foton – jedan elektron emitira foton koji drugi apsorbira. Za taj proces važi zakon očuvanja energije-impulsa: $p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$. Proces predstavljaju dva Feynmanova dijagrama prikazana na Slici 4.4 (a) i (b), koji se razlikuju samo po tome koji elektron emitira razmjenjeni foton, tako da je

$$(a) \quad k = p_1 - p_1' = p_2' - p_2, \quad (b) \quad k = p_2 - p_2' = p_1' - p_1.$$



Slika 4.4

Proces elastičnog raspršenja elektrona na elektronu (4.24) opisuju ne samo dva dijagrama sa Slike 4.4, već i beskonačno mnogo drugih Feynmanovih dijagrama, jer elektroni mogu međusobno razmjeniti ne samo jedan, već proizvoljan broj fotona. Na Slici 4.5 prikazan je jedan od dijagrama dvo-fotonske razmjene.



Slika 4.5

Da se nađe udarni presjek σ nekog realnog procesa, recimo (4.24), treba naći amplitude svih Feynmanovih dijagrama koji opisuju taj proces, zbrojiti ih i naći kvadrat apsolutne vrijednosti tog zbroja. Kako svakom realnom procesu uvijek odgovara beskonačno mnogo Feynmanovih dijagrama, traženje sume reda koji se tako dobija je u pravilu dosta komplicirano.

Na sreću, u renormalizabilnim teorijama možemo koristiti teoriju perturbacija koja dozvoljava da se dobiju aproksimativno točni rezultati uzimajući u obzir samo prvih nekoliko članova reda – Feynmanove dijagrame najnižih redova. Dijagrame rangiramo po potencijama konstante vezanja (naboja), tj. po broju verteksa, jer se svakom verteksu pridružuje faktor $(-e)$ koji mjeri jakost interakcije između polja elektrona $\psi(x)$ i polja fotona $A^\mu(x)$. Dijagrami sa Slike 4.4 su najnižeg reda za proces (4.24), reda dva, što znači da je njihova amplituda proporcionalna sa e^2 . Dijagrami dvo-fotonske izmjene, kao primjer sa Slike 4.5, su reda četiri i imaju amplitudu proporcionalnu sa e^4 . Dijagrami tro-fotonske razmjene su reda šest, tj. e^6 , itd.

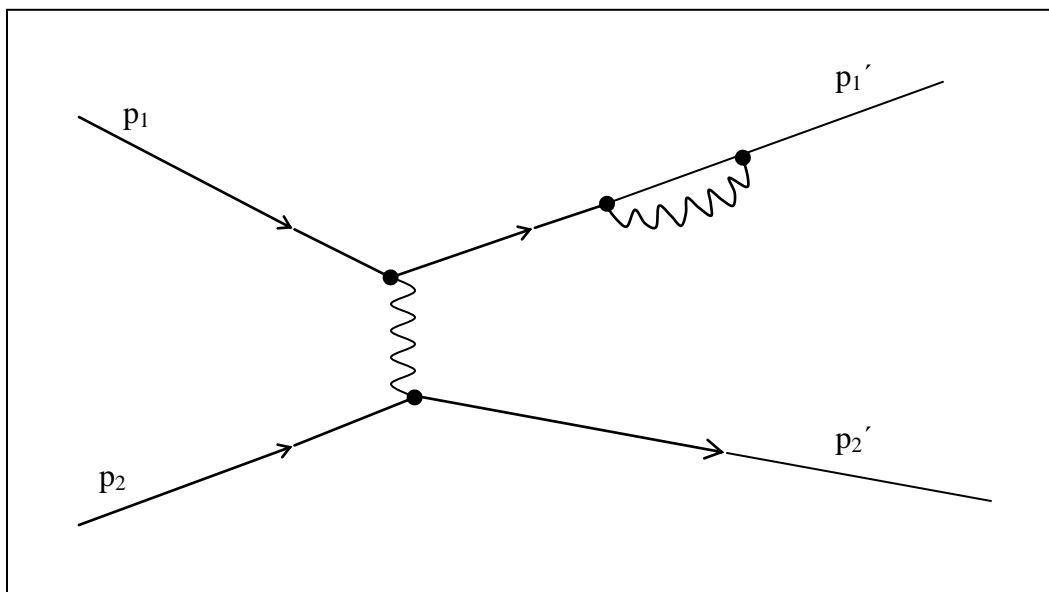
Za kvantnu elektrodinamiku konstanta vezanja je ustvari konstanta fine strukture

$$\alpha \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137},$$

što znači da dijagrami dvo-fotonske razmjene imaju amplitude 137 puta manje od dijagrama jedno-fotonske razmjene. Sa porastom reda dijagrama raste broj individualnih Feynmanovih dijagrama, ali u renormalizabilnim teorijama je, za svaki proces, ukupna kontribucija dijagrama reda $n + 1$, po apsolutnoj vrijednosti, manja od ukupne kontribucije dijagrama reda n . Na primjer, za proces (4.24) postoje dva dijagrama 1-fotonske izmjene, četiri dijagrama 2-fotonske izmjene, osam dijagrama 3-fotonske izmjene, itd. To znači da je doprinos dijagrama 2-fotonske razmjene ukupnoj amplitudi procesa (4.24), najviše $\frac{2}{137} \leq 1.46\%$ amplitude dijagrama 1-fotonske razmjene. U teoriji postoji još dijagrama četvrtog reda e^4 za proces (4.24), tzv. radijativne korekcije – na primjer, dijagram na Slici 4.6, ali je ukupna amplituda svih dijagrama reda e^4 po apsolutnoj vrijednosti znatno manja od kontribucije procesa drugog reda e^2 .

Očigledno je da bez obzira na točnost koju želimo postići, u obzir treba uzeti samo konačno mnogo Feynmanovih dijagrama najnižih redova. Ako želimo točnost do na red veličine u pravilu je dovoljno uzeti samo dijagrame najnižeg reda i zanemariti sve dijagrame viših redova.

U slučaju elektrodinamike praktično na svakom koraku generalizacije od klasične Newtonove mehanike sustava čestica do kvantne teorije polja, fizičari su se mogli rukovoditi znanjem i analogijama iz klasične, relativističke i kvantne fizike. Osnovni razlog je dugi (beskonačni) doseg elektromagnetskih sila koje imaju bezbroj, dobro istraženih manifestacija u makroskopskom svijetu i nerelativističkoj kvantnoj mehanici.



Slika 4.6

Problem sa slabom i jakom interakcijom bio je puno kompliciraniji jer, zbog iznimno kratkog doseg $\leq 10^{-15}$ m, te sile skoro da i nemaju makroskopskih efekata i zato nam nedostaje intuitivno razumjevanje njihovih svojstava. Kako se ne može direktno mjeriti sila na pojedinu kvantnu česticu, fizičari elementarnih čestica uvijek se moraju oslanjati na relativno mali broj vrlo složenih eksperimenata raspršenja ili raspada čestica, koji se uspoređuju sa teorijskim proračunima svojstava mogućih modela.

Teorijska proučavanja simetrija, kako prostorno-vremenskih, tako i unutarnjih gauge simetrija kvantnih teorija polja, dovela su početkom 1970-tih godina do otkrića SM elementarnih čestica. Ideja vodilja koja je omogućila da se teorija formulira i prije nekih od najvažnijih eksperimentalnih otkrića je princip lokalne gauge simetrije.

Osnovnim zahtjevima iz Poglavlja 1., uključujući i renormalizabilnost teorije, mogući oblik Lagrangiana interakcija kvantnih teorija polja spina 0, $\frac{1}{2}$ i 1 veoma je ograničen uvjetom da svaki član u Lagrangianu bude operator dimenzije $d \leq 4$ po masi (energiji). Lagrangian teorije mora biti skalar, što znači da Lagrangeova gustoća mora imati dimenzije $l^{-4} \sim E^4 \sim m^4$ u prirodnom sustavu jedinica. Kanonske dimenzije skalarnih, spinorskih i vektorskih polja su 1, $\frac{3}{2}$ i 1 što je lako iščitati iz njihovih slobodnih (kvadratnih po poljima) Lagrangiana (3.178), (3.187) i (3.183): $\phi \sim m$; $\psi \sim m^{\frac{3}{2}}$; $A_\mu \sim m$, te $F_{\mu\nu} \sim m^2$.

Kako gustoća Lagrangiana interakcije mora sadržavati bar tri polja najopćeniti Lagrangiani renormalizabilnih teorija za čestice spina 0 i $\frac{1}{2}$ su

- Skalarno polje (N polja spina 0)

$$\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}_{\text{sl.}}^{(0)} - V(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi^a - \frac{1}{2} m_a^2 \phi_a \phi^a - \frac{1}{3!} c_{abc} \phi^a \phi^b \phi^c - \frac{1}{4!} \lambda_{abcd} \phi^a \phi^b \phi^c \phi^d. \quad (4.25)$$

Ovaj Lagrangian reprezentira N skalarnih čestica opisanih poljima ϕ_a ($a = 1, 2, \dots, N$), masa m_a , koje imaju ϕ^3 i ϕ^4 međusobne interakcije jakosti određene konstantama interakcije c_{abc} i λ_{abcd} . Konstanta c_{abc} ima dimenziju jedan, a λ_{abcd} je dimenzije nula.

- Spinorsko polje (M polja spina $\frac{1}{2}$)

$$\mathcal{L}^{(\frac{1}{2})} = \mathcal{L}_{\text{sl.}}^{(\frac{1}{2})} + \mathcal{L}_{\text{int}}^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_a \gamma^\mu \partial_\mu \Psi^a - \frac{1}{2} m_a \bar{\Psi}_a \Psi^a - g_{abc} \bar{\Psi}^a \Psi^b \phi^c - h_{abc} \bar{\Psi}^a \gamma_5 \Psi^b \phi^c. \quad (4.26)$$

Ovaj Lagrangian pretstavlja M fermiona spina $\frac{1}{2}$ opisanih poljima ψ_a ($a = 1, 2, \dots, M$), masa m_a , koje imaju takozvane Yukawa interakcije: $\bar{\Psi} \psi \phi$ i $\bar{\Psi} \gamma_5 \psi \phi$, sa skalarnim česticama jakosti određene konstantama interakcije g_{abc} i h_{abc} dimenzija nula.

U SM se ukupni renormalizabilni Lagrangian spinorskih i skalarnih polja, (4.25) i (4.26), najčešće naziva Lagrangian "tvari" (matter Lagrangian) \mathcal{L}_m

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}^{(0)}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) + \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}(\Psi, \partial_\mu \Psi), \quad (4.27)$$

i čine ga Lagrangiani kvarkova i leptona (fermiona) i Higgs bozona.

Jedine renormalizabilne interakcije (operatori dimenzije $d \leq 4$) spin 0 i spin $\frac{1}{2}$ čestica su interakcije ϕ^3 i ϕ^4 skalarnih polja i Yukawa interakcije fermionskih i skalarnih polja.

Sa vektorskim poljima situacija je složenija. Čak i slobodni Lagrangian masivnog vektorskog polja (3.183) nije renormalizabilan! Razlog je tehnički kompliciran, ali u biti se svodi na sukob dvije simetrije – Lorentz i gauge simetrije. Članovi u Lagrangianu (3.183) koji opisuju vektorska polja pomoću tenzora polja $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ su Lorentz invarijantni i renormalizabilni, jer je $F^{\mu\nu}$ stvarno Lorentzov antisimetrični tenzor drugog reda.

Ali, maseni član koji zavisi od polja A^μ nije Lorentz invarijantan, pa ni renormalizabilan, jer polje $A^\mu(x)$ nije pravi Lorentzov 4-vektor. Pri Lorentzovim transformacijama $A^\mu(x)$ se transformira kao 4-vektor samo do na gauge transformaciju $\partial^\mu \Lambda(x)$, gdje je $\Lambda(x)$ proizvoljno skalarno polje, kao u (3.13). To je posledica činjenice da polje $A^\mu(x)$ može opisivati i vektorsku česticu spina 1, ali i skalarnu česticu spina 0, u slučaju kad je $A^\mu(x) = \partial^\mu \phi(x)$ gradijent nekog skalarnog polja. Vektorsko polje $A^\mu(x)$ minus gradijent skalarnog polja, jeste pravi Lorentz 4-vektor.

Da bi članovi u Lagrangianu vektorskog polja koji sadrže A^μ bili Lorentz invarijantni (pa onda, možda i renormalizabilni) moraju biti gauge invarijantni. Maseni član $m^2 A^\mu A_\mu$ vektorskog polja očigledno nije gauge invarijantan, pa ni renormalizabilan.

Zato, u renormalizabilnoj kvantnoj teoriji polja mogu postojati vektorska polja, koja opisuju čestice spina 1 – vektorske bozone, samo ako imaju masu nula – kao foton!

Slobodni Lagrangian vektorskog polja bez mase je Maxwellov Lagrangian (3.186) u kojem se vektorski bozon opisuje tenzorom $F^{\mu\nu}$ čija je dimenzija dva. Pokušamo li napisati interakciju vektorskog bozona i čestica spina 0 ili $\frac{1}{2}$ pomoću tenzora polja $F^{\mu\nu}$, čak i najjednostavniji član tipa $\bar{\psi}\gamma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$ je dimenzije pet, te nije renormalizabilan. Prinudeni smo interakcije vektorskog polja s drugim česticama opisivati poljem $A^\mu(x)$, čak i ako je odgovarajući vektorski bozon bez mase. Ovo je tehnički razlog zašto se u teoriji polja foton opisuje vektorskim poljem. No, postoje i mnogo važniji fizikalni razlozi za to. U slijedećem poglavlju ćemo ukratko razmotriti Aharonov-Bohm efekt koji zahtjeva da se u kvantnoj fizici foton opisuju vektorskim poljem (tj. elektromagnetskim potencijalom) $A^\mu(x)$.

Napomena: I postojanje Coulombove elektrostatske interakcije između dva naboja je isto tako fizikalno mnogo važniji razlog zašto u kvantnoj teoriji polja foton moramo opisivati poljem elektromagnetskog potencijala $A^\mu(x)$, a ne tenzorom polja fotona $F^{\mu\nu}(x)$, jer u limesu kad moment fotona teži nuli ($F^{\mu\nu}$ teži nuli) interakcija elektron-foton ne smije težiti nuli. Više o tome u Poglavlju 7.

Kako vektorsko polje A^μ nije pravi 4-vektor, jedini način da $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(1)}$ Lagrangian interakcije vektorskog polja bude Lorentz invarijantan je da bude i gauge invarijantan – ovo je osnovni rezultat koji je omogućio razvoj lokalno gauge invarijantnih teorija polja, kakav je i SM. Lagrangian interakcije $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(1)}$ vektorskih polja gauge bozona – čestica koje su medijatori jakih i elektro-slabih interakcija u SM, praktično je kompletno određen zahtjevima Lorentz i gauge invarijantnosti, te renormalizabilnosti.

Osnovnu ideju kako osigurati gauge invarijantnost $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(1)}$ nije teško razumjeti. Ako za gustoću Lagrangiana interakcije polja vektorskog bozona $A^\mu(x)$ sa nekim poljem tvari ϕ odaberemo kao u elektrodinamici (3.18)

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{(1)} = - A^\mu(x) J_\mu(\phi), \quad (4.28)$$

gdje je $J_\mu(\phi)$ vektorska struja polja tvari ϕ . Pri gauge transformaciji polja vektorskog bozona (3.13)

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x), \quad (4.29)$$

$\mathcal{L}_{\text{int}}^{(1)}$ se promjeni za

$$\delta \mathcal{L}_{\text{int}}^{(1)} = - J^\mu(\phi) \partial_\mu \Lambda(x), \quad (4.30)$$

ako je promjena polja tvari $\delta\phi = 0$. Kako je Maxwellov Lagrangian slobodnog vektorskog polja (3.186) već gauge invarijantan, da bi i gustoća Lagrangiana interakcije vektorskog polja $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(1)}$ bila gauge invarijantna, treba pokratiti član (4.30). Jedini način da se to učini je da se "proširi" gauge transformacija da djeluje i na polja tvari $\phi(x)$, tako da je jedina promjena cijelog Lagrangiana tvari upravo $\delta\mathcal{L}_m = -\delta\mathcal{L}_{\text{int}}^{(1)}$. Način na koji se to može osigurati najlakše je demonstrirati malo po-općenim dokazom Noether teorema.

Neka Lagrangian tvari $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(\phi_a, \partial_\mu\phi_a)$ ima globalnu gauge simetriju pri kojoj je promjena polja $\phi_a(x)$

$$\delta\phi^a(x) = \varepsilon^i F_i^a(\phi, \partial_\mu\phi), \quad (4.31)$$

gdje je $F_a^i(\phi, \partial_\mu\phi)$ neka lokalna funkcija polja tvari, a ε^i ($i=1,2,\dots,N$) je skup konstantnih infinitezimalnih parametara koji određuju globalnu gauge transformaciju. Izraz (4.31) je generalizacija infinitezimalne gauge transformacije (3.81) za kompleksno skalarno polje. Invarijantnost djelovanja je osigurana jer važi

$$\begin{aligned} 0 \equiv \delta\mathcal{L}_m &= \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a(x)} \varepsilon^i F_i^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a(x))} \varepsilon^i \partial_\mu F_i^a = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a(x))} \right) \right] \varepsilon^i F_i^a + \varepsilon^i \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a(x))} F_i^a \right] \end{aligned}$$

Prvi član na desnoj strani iščezava zbog jednadžbi gibanja polja ϕ_a , a drugi član znači da invarijantnost Lagrangiana (precizno djelovanja) tvari \mathcal{L}_m pri globalnim gauge transformacijama (4.31) osigurava očuvanje 4-vektora Noether struje $\partial_\mu j_i^\mu(x) = 0$. Očuvana struja je

$$j_i^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a(x))} F_i^a, \quad \text{za svako } i = 1,2,\dots,N. \quad (4.32)$$

Volumni integral $j_i^0(x)$ daje onda po jednu očuvanu veličinu (naboj) za svako i .

Zamislimo sad da je gauge transformacija polja $\phi_a(x)$ "proširena" na lokalnu, umjesto globalne, tj. da umjesto (4.31) imamo

$$\delta\phi^a(x) = \varepsilon^i(x) F_i^a(\phi, \partial_\mu\phi), \quad (4.33)$$

gdje parametri gauge transformacije zavise od x^μ .

Tada Lagrangian \mathcal{L}_m nije lokalno gauge invarijantan jedino zbog $\partial_\mu\varepsilon^i(x)$ člana pri parcijalnoj integraciji, pa je varijacija Lagrangiana tvari

$$\delta\mathcal{L}_m = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a(x))} F_i^a \partial_\mu \varepsilon^i(x) = j_i^\mu(x) \partial_\mu \varepsilon^i(x). \quad (4.34)$$

Poredeći (4.30) i (4.34) jasno je da se varijacije Lagrangiana interakcije vektorskog polja i Lagrangiana tvari mogu pokratiti ako:

- Polje vektorskog bozona interagira sa očuvanom Noether strujom $j_i^\mu(x)$ Lagrangiana materije

$$J_i^\mu(\phi) = j_i^\mu(x), \quad (4.35)$$

- se gauge simetrija ”proširi“ na lokalne gauge transformacije svih polja u teoriji, i polja tvari i polja gauge bozona, tako da je

$$\delta A^\mu(x) = \partial^\mu \Lambda(x), \quad (4.36)$$

$$\delta\phi^a(x) = \Lambda(x) F^a(\phi, \partial_\mu\phi). \quad (4.37)$$

Takvo ”proširenje“ globalne gauge simetrije polja materije spina $\frac{1}{2}$ i 0 na lokalnu gauge simetriju naziva se ”gauging of symmetry“. U takvoj teoriji za svaki generator lokalne gauge simetrije Lagrangiana tvari \mathcal{L}_m (svako i) mora se u teoriju uvesti po jedno vektorsko polje $A^\mu(x)$ bez mase (gauge bozon), čije su lokalne gauge transformacije određene izrazom (4.36). Lagrangian interakcije $\mathcal{L}_{int}^{(1)}$ novouvedenog polja gauge bozona sa drugim poljima tvari precizno je određen izrazima (4.28) i (4.35).

U općem slučaju ne-Abelove gauge simetrije, kad ima više ($i > 1$) vektorskih polja $A_\mu^i(x)$, lokalna gauge transformacija će biti kompliciranija nego (4.36) i ”rotiraće“ polje jednog gauge bozona $A_\mu^i(x)$ u drugo $A_\mu^j(x)$ [$\delta\mathcal{L}_{int}^{(1)}$ u (4.30) će zavisiti ne samo od $\partial_\mu\Lambda(x)$ već i od $A_\mu^i(x)$], tako da će i očuvana struja $j_i^\mu(x)$ zavisiti od $A_\mu^i(x)$. Prema (4.28) onda će se u teoriji, pored spin $\frac{1}{2}$ – spin1 i spin0 – spin1 interakcija, pojavljivati i međusobne interakcije samih polja vektorskih bozona, tj. spin1 – spin1 interakcije. Renormalizabilna ne-Abelova teorija će sadržavati trostruka i četvorostruka gauge bozon vezanja (triple and quartic gauge boson couplings). Precizni detalji su tehnički zahtijevni i ostavit ćemo ih za kasnije. Za sada, već možemo nazrijeti kako izgleda Lagrangian SM – mora sadržavati lokalno gauge invarijantni \mathcal{L}_m čestica spina $\frac{1}{2}$ i 0, te Lagrangian odgovarajućih vektorskih polja gauge bozona, $\mathcal{L}_g = \mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}_0^{(1)} + \mathcal{L}_{int}^{(1)}$.

Možemo zaključiti:

Poznavanje Lagrangiana slobodnih polja, koji su određeni kvantnom mehanikom i specijalnom teorijom relativnosti, i znane ili pretpostavljene, unutarnje simetrije Lagrangiana tvari \mathcal{L}_m (elementarnih čestica spina $\frac{1}{2}$ i 0) koja je neka grupa gauge simetrija, određuje Lagrangiane interakcije $\mathcal{L}_{int}^{(1)}$ polja vektorskih gauge bozona (čestica koje su medijatori sila među elementarnim česticama) i tako specificira renormalizabilnu kvantnu teoriju svih tih polja.

Historiski fizičari su oblik interakcija (sila) među česticama direktno eksperimentalno izmjerili, kao u slučaju Coulombovih sila, ili ga u teorijskim razmatranjima naprosto pogodili, te u kasnijim eksperimentima potvrdili, kao u slučaju Newtonovog zakona gravitacije ili Einsteinovog-Hilbertovog Lagrangiana Opće teorije relativnosti.

U gauge teorijama oblik interakcija je potpuno određen grupom lokalnih gauge transformacija koje su unutarnja simetrija među poljima teorije. U osnovi, cjelokupni SM elementarnih čestica može se kompletno opisati samo jednom rečenicom:

«SM je spontano narušena lokalno $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ gauge invarijantna teorija polja»!

Prvo ćemo detaljnije razmotriti baždarne (gauge) simetrije fizikalne teorije, a potom mehanizam njihova spontanog narušenja.

4.2 Gauge invarijantnost

U Poglavlju 3.1 spomenuli smo da klasična elektrodinamika posjeduje lokalnu gauge simetriju koja znači da teorija ostaje invarijantna pri gauge transformacijama (3.6) elektromagnetskih potencijala $A^\mu = (\phi, \vec{A})$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial t}, \quad \vec{A}(x) \rightarrow \vec{A}'(x) = \vec{A}(x) - \nabla \Lambda(x), \quad (4.38)$$

ili u relativističkoj notaciji (3.13)

$$A^\mu(x) \rightarrow A^{\mu'}(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x), \quad (4.39)$$

gdje je $\Lambda(x)$ proizvoljno skalarno polje.

Lako se vidi da gauge transformacije (4.38) ne mijenjaju ni elektromagnetska polja (3.5), ni Maxwellove jednadžbe (3.3). Klasična elektrodinamika može se formulirati bez uvođenja elektromagnetskih potencijala $A^\mu(x)$, samo pomoću elektromagnetskih polja \vec{E} i \vec{B} od kojih zavise električna i magnetska sila – Lorentzova sila. Indikaciju da su elektromagnetski potencijali možda neophodni za opis elektromagnetskih polja daje kanonska Hamiltonova formulacija teorije. U klasičnoj mehanici Hamiltonian čestice naboja $q = -e$ u spoljašnjem elektromagnetskom polju najlakše se dobija minimalnom supstitucijom $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A} = \vec{p} + e\vec{A}$ u Hamiltonianu slobodne nenabijene čestice, tako da je

$$H = T + U = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m} - e\phi. \quad (4.40)$$

Hamiltonove jednadžbe su

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i + eA_i}{m}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\left(\frac{p_j + eA_j}{m}\right)e \frac{\partial A_j}{\partial x_i} + e \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\dot{x}_j e \frac{\partial A_j}{\partial x_i} + e \frac{\partial \phi}{\partial x_i},$$

pa deriviranjem prve po vremenu zbog $e\dot{A}_i = e \frac{\partial A_i}{\partial t} + e \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j$, dobijamo

$$m\ddot{x}_i = -e \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - e \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} (\nabla \times \vec{A})_k,$$

ili u vektorskoj notaciji

$$m\ddot{\vec{x}} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.41)$$

Kako elektromagnetski potencijali u klasičnoj elektrodinamici nisu opservabilne veličine, polja $A^\mu(x)$ mogu se smatrati pomoćnim matematičkim funkcijama koje samo olakšavaju rješavanje jednažbi gibanja elektrodinamike. To je osnovni razlog zašto je svojstvo lokalne gauge invarijantnosti elektrodinamike, iako poznato još u XIX stoljeću, smatrano običnim kuriozitetom sve do 60-tih godina prošlog stoljeća.

U kvantnoj teoriji situacija je drukčija. Vektorski potencijal ima neke opservabilne efekte kako pokazuje Aharonov-Bohm efekt i mora se uključiti u kvantnu teoriju čestica koje imaju električni naboj. To znači da je polje $A^\mu(x)$ neophodno i predstavlja polje fotona – čestice spina 1 bez mase, koja je medijator elektromagnetske interakcije. Prije detaljnijeg razmatranja gauge simetrija razmotrimo ukratko Aharonov-Bohm efekt.

Hamiltonian klasične čestice mase m čija je potencijalna energija $U(\vec{x})$ je

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U. \quad (4.42)$$

Pri kvantizaciji $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$ i $E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, pa se iz (3.40) smjenom $\Psi(\vec{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\vec{x})$ dobija vremenski nezavisna Schrodingerova jednažba kvantne čestice u potencijalu $U(\vec{x})$

$$H\psi(\vec{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}). \quad (4.43)$$

Za slobodnu česticu $U = 0$, rješenje je ravni val

$$\psi(\vec{x}) = N e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \text{ gdje je: } \vec{k}^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (4.44)$$

Ako čestica ima električni naboj $q = -e$ (elektron), njen klasični Hamiltonian, umjesto (4.42), je

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi + U. \quad (4.45)$$

Odaberimo najjednostavniji slučaj $U = \phi = 0$. Schrodingerova jednažba, umjesto (4.43), postaje

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}), \quad (4.46)$$

sa rješenjem

$$\psi(\vec{x}) = N \exp \left[i \vec{k} \cdot \vec{x} - i \frac{e}{\hbar c} \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{x}' \cdot \vec{A}(\vec{x}') \right], \text{ uz } \vec{k}^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad (4.47)$$

jer je

$$\nabla \cdot \psi(\vec{x}) = i \left[\vec{k} - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(\vec{x}) \right] \psi(\vec{x}).$$

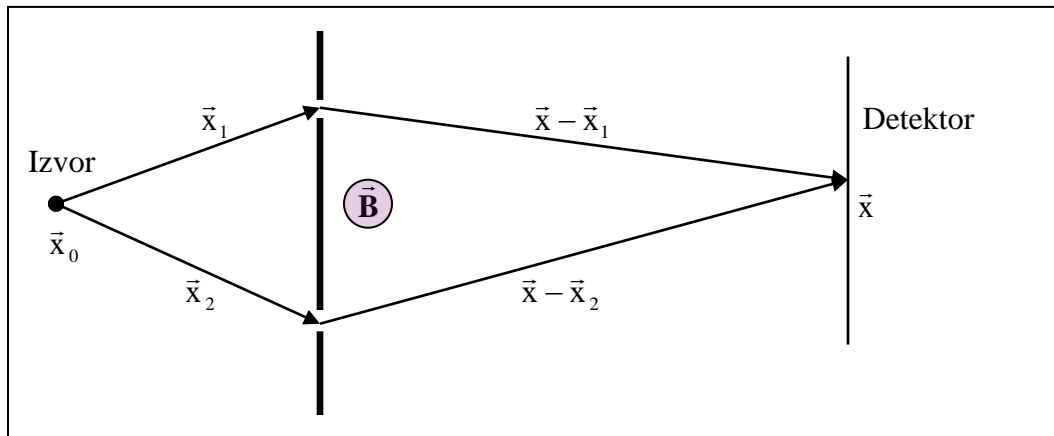
Drugi član u valnoj funkciji (4.47) je linijski integral vektorskog potencijala $\vec{A}(\vec{x})$ po nekoj krivulji od početne točke čiji je radijus vektor \vec{x}_0 do proizvoljne krajnje točke \vec{x} .

Usporedimo li valne funkcije (4.44) i (4.47), vidimo da je efekt vektorskog potencijala $\vec{A}(\vec{x})$ da pomnoži valnu funkciju slobodne čestice prostorno zavisnim faznim faktorom

$$\exp \left[i \frac{e}{\hbar c} \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{x}' \cdot \vec{A}(\vec{x}') \right] = \exp(i\alpha(\vec{x})). \quad (4.48)$$

Lako se vidi da ovaj fazni faktor uopće ne mijenja gustoću naboja $\rho(\vec{x}) = -e\psi(\vec{x})^* \psi(\vec{x})$, niti gustoću struje čestice $\vec{j}(\vec{x}) = -\frac{i\hbar}{2m} \left\{ \psi^* \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right) \psi - \left[\left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right) \psi \right]^* \psi \right\}$. Ipak, fazni faktor (4.48) je fizikalno relevantan i ima opservabilne efekte kako su 1959. godine pokazali Aharonov i Bohm, a prvi eksperimentalno izmjerio Chambers 1960.

Zamislimo jedan klasični eksperiment interferencije elektrona na dvije pukotine. Koherentni snop elektrona se u točki \vec{x}_0 razdvoji na dva snopa koji poslije prolaska kroz dva sitna otvora na zaslonu stvaraju interferentne pruge u točki \vec{x} , kao na Slici 4.7.



Slika 4.7

Interferencija u točki \vec{x} zavisi samo od razlike u fazi između dva snopa na putu od izvora do detektora. Označimo li udaljenost pukotina vektorom $\Delta\vec{x}$, tako da je

$$\vec{x} - \vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{x}_1 + \Delta\vec{x},$$

intenzitet $I(\vec{x})$ vala u točki \vec{x} proporcionalan sa

$$I(\vec{x}) \sim |I_1 + I_2| \sim \left| e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_1)} + e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)} \right| = \left| e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_1)} \left(1 + e^{i\vec{k}\cdot\Delta\vec{x}} \right) \right| = \left| 1 + e^{i\vec{k}\cdot\Delta\vec{x}} \right|. \quad (4.49)$$

Pretpostavimo sad da bar u jednoj točki prostora u regionu iza pukotina (osjenčeni region) kroz koji ne prolaze elektroni postoji magnetsko polje \vec{B} , proizvoljno tanki permanenentni magnet, recimo. Tada postoji i vektorski potencijal $\vec{A}(\vec{x})$, tako da je $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ svuda u prostoru. Valna funkcija elektrona je onda (4.47) jer postoji spoljašnje elektromagnetsko polje, a intenzitet interferentnih pruga $I_A(\vec{x})$ na zaslonu, umjesto sa (4.49), određen je sa (Zadatak 4.3.)

$$I_A(\vec{x}) \sim \left| e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_1) - \frac{ie}{\hbar c} \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{x}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')} + e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_1) + i\vec{k}\cdot\Delta\vec{x} - \frac{ie}{\hbar c} \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{x}'' \cdot \vec{A}(\vec{x}'')} \right| = \left| 1 + e^{i\vec{k}\cdot\Delta\vec{x} - i\alpha_c} \right|. \quad (4.50)$$

U (4.50) fazni faktor α_c je

$$\alpha_c = \frac{e}{\hbar c} \oint_C d\vec{x}' \cdot \vec{A}(\vec{x}'), \quad (4.51)$$

linijski integral vektorskog potencijala po zatvorenoj konturi C . Rezultati (4.49) i (4.51) pokazuju da je intenzitet interferentnih linija proporcionalan sa

$$\vec{A} = 0 \Rightarrow I \sim \left| 1 + e^{i\vec{k}\cdot\Delta\vec{x}} \right| \sim 1 + \cos(k\Delta x),$$

$$\vec{A} \neq 0 \Rightarrow I_A \sim \left| 1 + e^{i\vec{k}\cdot\Delta\vec{x} - i\alpha_c} \right| \sim 1 + \cos(k\Delta x - \alpha_c),$$

što znači da su uvjeti maksimuma interferencije

$$\vec{A} = 0 \Rightarrow k\Delta x = 2\pi n, \quad (4.52)$$

$$\vec{A} \neq 0 \Rightarrow k\Delta x - \alpha_c = 2\pi n.$$

Pomjeranje interferentnih linija u slučaju kad postoji vektorski potencijal $\vec{A}(\vec{x})$ određeno faznim faktorom α_c iz (4.51) naziva se Aharonov-Bohm efekt i pokazuje da linijski integral vektorskog potencijala po zatvorenoj konturi ima mjerljive fizikalne posljedice.

U klasičnoj fizici elektromagnetski potencijali ϕ i \vec{A} nisu mjerljive veličine i teorija se može formulirati samo pomoću opservabilnih elektromagnetskih polja \vec{E} i \vec{B} . U kvantnoj fizici, nužna posljedica Aharonov-Bohm efekta je opservabilnost linijskog integrala vektorskog potencijala po zatvorenoj konturi (do na aditivni faktor $2\pi\frac{\hbar c}{e}$), što znači da se kvantna teorija nabijenih čestica mora formulirati pomoću elektromagnetskih potencijala $\phi(\vec{x}, t)$ i $\vec{A}(\vec{x}, t)$, tj. pomoću polja fotona $A^\mu(x)$.

Vratimo se sad razmatranju gauge simetrija. U kvantnoj teoriji fizičari su počeli razmatrati gauge transformacije kao transformacije faze valnih funkcija. Ako je valna funkcija nekog stanja ψ , a kako sve fizikalne opservable zavise samo od $|\psi(x)|^2$, teorija je invarijantna pri gauge transformacijama

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha} \psi(x), \quad (4.53)$$

gdje je parametar transformacije α konstanta, kao u (3.77). To ustvari znači da je faza valne funkcije bilo kojeg fizikalnog sustava nemjerljiva veličina. Ovakva transformacija naziva se globalna gauge transformacija jer fazu valne funkcije (ili polja) mijenja na isti način za svaku točku x^μ . U relativističkoj fizici takva transformacija je problematična. Ako promijenimo fazu valne funkcije «ovdje», kako «ona zna» da se treba istovremeno promijeniti u svim točkama prostora. Svaki promatrač bi trebao moći odabrati fazu valne funkcije u svakoj točki prostora nezavisno od njene vrijednosti u drugim točkama prostor-vremena. Ako faza valne funkcije nije mjerljiva veličina, onda ona to nije „svugdje i uvijek“.

Proizvoljni odabir faze valne funkcije u bilo kojoj točki prostor-vremena prirodno vodi do zahtjeva invarijantnosti teorije pri lokalnim U(1) gauge transformacijama

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\Lambda(x)} \psi(x), \quad (4.54)$$

u kojima parametar gauge transformacije $\Lambda(x)$ zavisi od x^μ .

Nerelativistička kvantna mehanika nije invarijantna pri lokalnim gauge transformacijama jer jednačba gibanja teorije – Schrodingerova jednačba, nije invarijantna. Zaista, na primjer za slobodnu česticu, je

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(x), \quad (4.55)$$

pa transformirana valna funkcija $\psi'(x)$ iz (4.54) ne zadovoljava jednadžbu (4.55) jer se članovi sa derivacijama parametra $\Lambda(x)$ ne krata.

Izuzetak je upravo slučaj nabijene čestice u elektromagnetskom polju za koju se prema (4.40) Schrodingerova jednadžba $i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$ može napisati u obliku

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)\psi = \frac{1}{2m}\left(-i\nabla + e\vec{A}\right)^2\psi. \quad (4.56)$$

Lako se vidi da je jednadžba (4.56) lokalno gauge invarijantna, jer pri transformaciji

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\Lambda(x)}\psi(x) \\ \vec{A}(x) &\rightarrow \vec{A}'(x) = \vec{A}(x) + \frac{1}{e}\nabla\Lambda(x), \\ \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = \phi(x) - \frac{1}{e}\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.57)$$

gdje je proizvoljno skalarno polje $\Lambda(x)$ iz (4.39) zamjenjeno u gornjem izrazu sa $-\frac{1}{e}\Lambda(x)$. Lijeva strana jednadžbe (4.56) onda postaje

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi'\right)\psi' = \left(i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)e^{-i\Lambda}\psi = e^{-i\Lambda}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)\psi = e^{-i\Lambda}\left(i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)\psi$$

Dodatni članovi $\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$ koji zavise od parametra lokalne gauge transformacije $\Lambda(x)$ eksplicitno se međusobno pokrate u transformaciji valne funkcije nabijene čestice $\psi(x)$ i skalarnog elektromagnetskog potencijala $\phi(x)$, tako da se transformacija lijeve strane Schrodingerove jednadžbe svodi na množenje faznim faktorom $e^{-i\Lambda}$. Malo je kompliciranije pokazati da se i desna strana u (4.57) transformira na isti način. Prvo treba pokazati da je

$$\left(-i\nabla + e\vec{A}'\right)^2\psi' = -\nabla\cdot(\nabla\psi') - 2ie\vec{A}'\cdot\nabla\psi' - ie(\nabla\cdot\vec{A}')\psi' + e^2\vec{A}'^2\psi', \quad (4.58)$$

kao i

$$\nabla\psi' = -ie^{-i\Lambda}(\nabla\Lambda)\psi + e^{-i\Lambda}\nabla\psi, \quad (4.59)$$

$$-\nabla\cdot(\nabla\psi') = e^{-i\Lambda}\left[(\nabla\Lambda)^2 + 2i(\nabla\Lambda)\cdot\nabla + i(\nabla^2\Lambda) - \nabla^2\right]\psi, \quad (4.60)$$

tako da se zajedno sa preostalim članovima na desnoj strani (4.58) konačno dobija (Zadatak 4.1.)

$$\left(-i\nabla + e\vec{A}'\right)^2 \psi' = e^{-i\Lambda} \left(-i\nabla + e\vec{A}\right)^2 \psi.$$

I na desnoj strani Schrodingerove jednadžbe (4.56), međusobno se pokrate svi članovi (osim multiplikativnog faktora $e^{-i\Lambda}$) koji zavise od parametra gauge transformacije $\Lambda(x)$ zbog načina na koji se transformiraju polja $\psi(x)$ i $\phi(x)$ u (4.57).

Schrodingerova jednadžba za slobodnu česticu mase m , naboja $-e$, nije invarijantna pri lokalnim faznim transformacijama (4.54), ali Schrodingerova jednadžba (4.56) za tu istu česticu u spoljašnjem elektromagnetskom polju opisanom elektomagnetskim potencilima $A^\mu = (\phi, \vec{A})$, jeste invarijantna pri lokalnim gauge transformacijama (4.57). Ovaj iskaz se može reinterpretirati kao tvrdnja:

Invarijantnost teorije pri lokalnim faznim (gauge) transformacijama **zahtijeva** prisustvo dodatnog vektorskog polja $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ sa točno određenim lokalnim gauge transformacijama!

Na ovom jednostavnom primjeru ilustrirali smo osnovni teorem gauge teorija (C.N. Yang i R. Mills, 1954.): ako želimo da jednadžbe gibanja teorije budu invarijantne pri lokalnim gauge (faznim) transformacijama fermionskih polja tipa (4.54), u teoriji moraju postojati dodatna vektorska (spina 1) polja, koja se nazivaju polja gauge bozona, sa točno određenim lokalnim gauge transformacijama, neophodna da pokrate neželjene članove koji zavise od parametara transformacija $\Lambda(x)$. U slučaju Yang-Millsovih teorija radi se o kompliciranijim lokalno gauge invarijantnim teorijama (sa više fermionskih, pa prema tome, i više polja gauge bozona) u kojima različite lokalne gauge transformacije međusobno ne komutiraju (znači, reprezentirane su nekomutirajućim matricama). Zato se Yang-Millsove teorije nazivaju i lokalno invarijantne ne-Abelove gauge teorije.

Upravo to se dešava u SM – čestice tvari, kvarkovi i leptoni, reprezentiraju se fermionskim poljima aranžiranim u multiplete koji se transformiraju kao reprezentacije grupa gauge simetrija interakcija tih čestica – SU(3) za jake i SU(2) \times U(1) za elektro-slabe interakcije. Zahtjev lokalne gauge invarijantnosti znači da u teoriji moraju postojati medijatori tih interakcija – gauge bozoni i to 8 gluona za jake interakcije i 4 elektro-slaba gauge bozona.

Gornji primjer je iz nerelativistike kvantne mehanike. Ali, $\psi(x)$ možemo smatrati i Diracovim poljem, a $A^\mu(x)$ vektorskim poljem. Pri drugoj kvantizaciji ta polja će imati Fourierov razvoj po ravnim valovima analogan relaciji (3.61) za skalarno polje, pa će članovi u tom redu biti interpretirani kao operatori kreacije i anihilacije kvantata polja: čestica mase m , spina $1/2$ i naboja $q = -e$, tj. elektrona za polje $\psi(x)$, a čestica spina 1, bez mase – fotona za polje $A^\mu(x)$ u Fockovom prostoru teorije. Sve što važi za elektron, važiće i za bilo koju drugu fermionsku česticu koja ima električni naboj – svi električno nabijeni fermioni imaju isti oblik interakcija sa fotonom. Zahtjev lokalne gauge invarijantnosti teorije određuje oblik elektromagnetskih interakcija – danih Lagrangianom interakcije u (4.16), ali ne određuje njihovu jakost koja je određena nabojem čestice e .

Definiranjem kovarijantne derivacije

$$D^0 = \frac{\partial}{\partial t} - ie\phi , \quad \bar{D} = -\nabla - ie\bar{A} , \quad (4.61)$$

tj.

$$D^\mu = (D^0, \bar{D}) = \partial^\mu - ieA^\mu , \quad (4.62)$$

Schrodingerova jednačba (4.56) postaje

$$iD^0\psi = \frac{1}{2m}(i\bar{D})^2\psi . \quad (4.63)$$

Pri lokalnim gauge transformacijama (4.57) članovi $D^\mu\psi$ transformiraju se prema

$$\begin{aligned} -iD^0\psi' &= -i\left(\frac{\partial}{\partial t} - ie\phi + i\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)e^{-i\Lambda}\psi = -ie^{-i\Lambda}\left(\frac{\partial}{\partial t} - ie\phi\right)\psi = e^{-i\Lambda}(-iD^0\psi) , \\ -i\bar{D}\psi' &= -i\left[-\nabla - ie\bar{A} - i(\nabla\Lambda)\right]e^{-i\Lambda}\psi = e^{-i\Lambda}\left(-\nabla - ie\bar{A}\right)\psi = e^{-i\Lambda}(-i\bar{D}\psi) , \end{aligned} \quad (4.64)$$

tj. jednostavno

$$D^\mu\psi' = e^{-i\Lambda}D^\mu\psi . \quad (4.65)$$

Članovi $D^\mu\psi$, pa i $D_\mu(D^\mu\psi)$, transformiraju se pri lokalnim gauge transformacijama točno kao valna funkcija (polja) ψ . Teorija čije jednačbe gibanja sadrže samo članove oblika ψ i $D^\mu\psi$ sigurno je lokalno gauge invarijantna. Takvi članovi dolaze iz $\bar{\psi}\psi$ i $\bar{\psi}\gamma_\mu D^\mu\psi$ članova u Lagrangianu – točno onih koji se pojavljuju u Lagrangianu kvantne elektrodinamike (4.17). Priključimo li Lagrangian elektron-foton interakcije $\mathcal{L}_{\text{int.}}^{(1)}$ kinetičkom članu fermionskog polja, Lagrangian kvantne elektrodinamike (4.17) postaje

$$\mathcal{L}^{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} . \quad (4.66)$$

Lagrangian U(1) lokalno gauge invarijantne teorije bilo kojeg fermionskog polja $\psi(x)$ jednostavno se dobija iz slobodnog Diracovog Lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{sl.}}^{(2)}$ (3.146) zamjenom obične derivacije kovarijantnom $\partial^\mu \rightarrow D^\mu = \partial^\mu - ieA^\mu$ i dodavanjem $\mathcal{L}_{\text{sl.}}^{(1)}$ Lagrangiana (3.20) slobodnog vektorskog polja gauge bozona $A^\mu(x)$, kao u primjeru kvantne elektrodinamike (4.66). Kvantna elektrodinamika je U(1) (Abelova) lokalno gauge invarijantna teorija polja.

U slučaju elektrodinamike znali smo gauge transformacije fotonskog polja (polja gauge bozona), jer znamo klasičnu elektrodinamiku. Ali, ako želimo lokalno gauge invarijantne teorije fermionskih polja koja imaju neki drugi naboj, tj. neke druge gauge interakcije (osim elektromagnetskih), na primjer jake ili elektro-slabe, moramo pronaći transformacije polja gauge bozona. Yang i Mills su našli odgovor za bilo koju grupu lokalnih gauge transformacija.

Neka je lokalna gauge transformacija fermionskog polja

$$\psi' = U \psi, \quad (4.67)$$

gdje je U element neke gauge grupe. Tražimo kovarijantnu derivaciju

$$D^\mu = \partial^\mu + ig B^\mu, \quad (4.68)$$

gdje umjesto polja fotona A^μ pišemo polje odgovarajućeg gauge bozona B^μ i umjesto električnog naboja elektrona e pišemo proizvoljni naboj g , za koju želimo da se transformira kao fermionsko polje ψ , što znači $D'^\mu \psi' = U (D^\mu \psi)$, ili eksplicitno

$$(\partial^\mu + ig B'^\mu) U \psi = U (\partial^\mu + ig B^\mu) \psi. \quad (4.69)$$

Relacija (4.69) može se riješiti po B'^μ jer je

$$ig B'^\mu U \psi = -\partial^\mu (U \psi) + U \partial^\mu \psi + ig U B^\mu \psi = -(\partial^\mu U) \psi + ig U B^\mu \psi.$$

Kako gornji izraz važi za svaku vrijednost fermionskog polja, mora biti

$$ig B'^\mu U = -(\partial^\mu U) + ig U B^\mu,$$

pa množeći sa U^{-1} sa desne strane odmah dobijamo traženu lokalnu gauge transformaciju polja baždarnog bozona

$$B'^\mu = \frac{i}{g} (\partial^\mu U) U^{-1} + U B^\mu U^{-1}, \quad (4.70)$$

za svako U koje je element gauge grupe. Zbog moguće nekomutativnosti gauge transformacija redosljed faktora u (4.70) ne smije se mijenjati.

Simetrije imaju izuzetan značaj u fizici. Postojanje bilo kakvih transformacija koje ostavljaju nepromjenjenim fizikalni sustav, znači predstavljaju simetriju tog sustava, nužno vodi ka matematičkoj teoriji grupa. Za svaku transformaciju simetrije fizikalnog sustava očigledno mora postojati i inverzna, tako da njihovo sukcesivno djelovanje, tj. njihov produkt, mora biti identična transformacija. Skup svih transformacija simetrije nekog fizikalnog sustava tvori grupu simetrija tog sustava, kao $U(1)$ grupa transformacija (3.77) Lagrangiana kompleksnog skalarnog polja (3.75).

U kvantnoj fizici bilo koja transformacija simetrije fizikalnog sustava reprezentirana je operatorom U koji djeluje na fizikalna stanja $|\psi\rangle$ i operatore O (opservable) u teoriji

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle, \quad O \rightarrow O' = UOU^\dagger, \quad (4.71)$$

kao u (4.67) i (4.70), tako da «fizika» sustava ostaje nepromjenjena. To će biti osigurano ako amplituda prijelaza između dva stanja $i \rightarrow f$ ostaje nepromjenjena, do na kompleksnu fazu, tako da je

$$\langle \psi_f | \psi_i \rangle \rightarrow \langle \psi_f | U^\dagger U | \psi_i \rangle = \langle \psi_f | \psi_i \rangle, \quad (4.72)$$

što znači da U mora biti unitaran $U^\dagger = U^{-1}$ (ili antiunitaran $U^\dagger = -U^{-1}$) operator. Jasno je da zahtjev unitarnosti osigurava i očuvanje vrijednosti matricnih elemenata fizikalnih opservabli O

$$\langle \psi_f | O | \psi_i \rangle \rightarrow \langle \psi_f | U^\dagger O' U | \psi_i \rangle = \langle \psi_f | U^\dagger U O U^\dagger U | \psi_i \rangle = \langle \psi_f | O | \psi_i \rangle.$$

Svaka relevantna simetrija u fizici je unitarna (osim inverzije vremena koja je antiunitarna).

Neophodan uvjet da bi unitarni operator U bio simetrija neke teorije je da U komutira sa Lagrangianom (ili Hamiltonianom)

$$[\mathcal{L}, U] = 0, \quad (4.73)$$

pa se najčešće simetrije teorije mogu odrediti direktno iz izgleda Lagrangiana sustava $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$.

Interna (unutarnja) simetrija teorije je simetrija pri kojoj se lokalni – koji je funkcija polja teorije samo u jednoj točki x^μ , operator $O(x)$ transformira u lokalni operator $O'(x)$ u istoj točki prostor-vremena. Nasuprot tome, transformacije prostorno-vremenskih simetrija fizikalne teorije koje čine Poencare grupu – prostorne i vremenske translacije, prostorne rotacije i Lorentz potiske, povezuju vrijednosti operatora teorije u različitim točkama prostor-vremena.

U renormalizabilnim kvantnim teorijama polja operator O i njegov transform pri djelovanju unitarnog operatora U neke simetrije $O' = UOU^\dagger$, moraju biti iste dimenzije. Kako su sama polja operatori najmanje dimanzije u teoriji, neophodno je da se pri transformacijama interne simetrije Lagrangiana teorije, polja ϕ_a transformiraju u druga polja ϕ_b , tj. transformacija mora biti linearna i homogena

$$\phi_a \rightarrow \phi_a' = U \phi_a U^\dagger = M^{-1}_{ab} \phi_b, \quad (4.74)$$

gdje je $M^{-1}(U)$ unitarna matrica transformacije. Razlog zašto transformacija polja $\phi_a \rightarrow \phi'_a$ u (4.74) uključuje inverznu matricu transformacije je vrlo tehnički i ima veze sa procedurom normalnog uređenja anihilacionih i kreacionih operatora kvantne teorije polja, što u biti znači da polje ϕ_a anihilira česticu $\Pi\phi_a$, pa zato mora imati inverzna transformaciona svojstva u odnosu na jednočestično stanje teorije.

Ukupna grupa simetrija u fizici je tenzorski produkt Poencare grupe prostorno-vremenskih simetrija (povezanih sa principom relativnosti) i grupe internih simetrija teorije. Tenzorski produkt znači da je svaki element ukupne grupe simetrija Lagrangiana fizikalnog sustava produkt neke prostorno-vremenske transformacije iz Poencare grupe i neke transformacije iz grupe unutarnjih simetrija. To znači da nema mješanja elemenata, pa se svaka podgrupa transformacija simetrije može razmatrati neovisno.

Ukupna grupa internih (unutarnjih) simetrija u fizici elementarnih čestica je tenzorski produkt nekoliko malih diskretnih grupa (operacije promjene parnosti, promjene čestica-antičestica tj. konjugacije naboja, barionski broj, leptonski broj, ...) i neke kontinuirane Lie grupe (gauge grupe). Kontinuirana grupa internih gauge transformacija u pravilu je tenzorski produkt «simple» (prostih, tj. onih koji nemaju netrivialnih podgrupa) Lie grupa. Na primjer u SM kontinuirana grupa lokalnih gauge transformacija Lagrangiana je $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Prije razmatranja lokalnih gauge transformacija u SM pogledajmo prvo osnovne elemente teorije Lie grupa.

4.3 Elementi teorije Lie grupa

Simetrije imaju fundamentalni značaj u fizici. Hamiltonijani (Lagrangiani) fizikalnih sustava invarijantni su pri raznim transformacijama simetrije koje čine različite kontinuirane grupe. Priroda kao da «zna» teoriju grupa. Primjeri prostorno-vremenskih transformacija koje čine Poencareovu grupu poznati su iz klasične i relativističke fizike. Interne simetrije među poljima elementarnih čestica čine različite gauge grupe. SM je $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ lokalno gauge invarijantna kvantna teorija polja. Osnovne elemente teorije gauge grupa moguće je dobiti iz najjednostavnije ne-Abelove grupe $SU(2)$ koja je poznata iz kvantne teorije angularnog momenta, tj. spina čestica.

4.3.1 Spin i $SU(2)$ grupa

Operatori angularnog momenta (momenta impulsa) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ u kvantnoj teoriji zadovoljavaju komutacione relacije

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k . \quad (4.75)$$

Kako je $[L_i, L^2] = 0$, gdje je $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, operator L^2 i jedna komponenta L_i (obično L_z) mogu biti simultano dijagonalizirane.

Svojtvene funkcije angularnog momenta su ortonormirani sferni harmonici $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ tako da vrijedi

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm} , \quad L_z Y_{lm} = m Y_{lm} , \quad (4.76)$$

gdje je uvjet ortonormiranja

$$\langle l'm' | lm \rangle = \int d\Omega Y_{l'm'}(\theta, \varphi) * Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm} . \quad (4.77)$$

Sferni harmonici čine bazu Hilbertovog prostora stanja, pa za bilo koji Hermitski operator O možemo definirati njegovu reprezentaciju Hermitskom matricom

$$O_{l'm', lm} = \langle l'm' | O | lm \rangle . \quad (4.78)$$

Za zadano l i l' matrica (4.78) je $(2l'+1) \times (2l+1)$ reda.

Ako je O upravo operator angularnog momenta, zbog ortogonalnosti svojstvenih stanja (4.77), sve komponente njegove matrične reprezentacije su nula osim ako je $l' = l$. Za $l=0$ rezultat je samo jedan realni broj. Za $l=1$ moguće vrijednosti su $m', m = -1, 0, 1$, pa je prema (4.76) reprezentacija operatora angularnog momenta 3×3 matrica

$$\mathbf{L}^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.79)$$

Koristeći komutacione relacije (4.75) može se pokazati da je matična reprezentacija za preostale komponente

$$\mathbf{L}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.80)$$

Za $l=2$ dobili bi reprezentaciju pomoću 5×5 matrica, itd. Očigledno je da na ovaj način uvijek dobijamo reprezentacije operatora angularnog momenta koje su Hermitske matrice neparanog reda. Koristeći klasičnu analogiju $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ nikako se ne može dobiti reprezentacija pomoću 2×2 matrica. No, provjerom se lako uvjeriti da 2×2 matrice

$$\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.81)$$

zaista predstavljaju matičnu reprezentaciju operatora angularnog momenta za $l = \frac{1}{2}$ jer su hermitske su i zadovoljavaju komutacione relacije (4.75). Takav «dodatni» angularni moment nazivamo spin $\vec{\mathbf{S}}$ i u kvantnoj teoriji operator $\vec{\mathbf{J}}$ ukupnog angularnog momenta definiramo kao $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}$, jer nam eksperimenti pokazuju da kvantne čestice imaju spin – sopstveni angularni moment (Stern-Gerlach eksperiment, na primjer).

Hermitske matrice spina $\frac{1}{2}$ u relaciji (4.81) zgodno je izraziti pomoću Paulievih matrica σ_i

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \sigma_i, \quad (4.82)$$

koje zadovoljavaju komutacione i antikomutacione relacije (3.98) i (3.99). Njihova svojstvena stanja su dvokomponentni spinori $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Dva svojstvena stanja matrice σ_z su:

$|\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sa svojstvenom vrijednošću $+1$, i $|\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sa svojstvenom vrijednošću -1 , pa je proizvoljno stanje spina

$$|\psi\rangle = c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\downarrow\rangle, \quad (4.83)$$

uz uvjet normiranja

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1. \quad (4.84)$$

Valna funkcija kvantne čestice spina $\frac{1}{2}$ je dvokomponentni spinor $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$ koji zadovoljava Schrodingerovu jednadžbu

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad (4.85)$$

u kojoj je H operator (2×2 matrica) u prostoru spina. Želimo li osigurati očuvanje angularnog momenta čestice, Hamiltonian H mora komutirati sa operatorom $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ukupnog angularnog momenta $[\vec{J}, H] = 0$, kao za Diracovu česticu.

Ako čestica ima spin, koji je vektor u određenom smislu, interakcije čestice mogu zavisiti od pravca njenog spina. No, kako je pravac spina proizvoljan (slučajan), želimo osigurati da sile na česticu ne zavise od pravca njenog spina u nekom referentnom sustavu, tj. želimo da interakcije čestice budu invarijantne pri rotacijama u spinskom prostoru, što znači da u Hamiltonian (Lagrangian) treba uključiti samo invarijantne članove.

Opće stanje ψ spina čestice (4.83), zbog uvjeta normiranja (4.84), uvijek možemo parametrizirati i kompleksnim amplitudama oblika

$$c_1 = e^{i\delta} e^{-\frac{i}{2}\varphi} \cos \frac{\theta}{2}, \quad c_2 = e^{i\delta} e^{\frac{i}{2}\varphi} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (4.86)$$

Koristeći eksplicitni oblik Paulievih matrica lako se vidi da $\psi^\dagger \vec{\sigma} \psi$ možemo smatrati jediničnim vektorom u pravcu (θ, φ) u spinskom prostoru jer ima komponente:

$$\psi^\dagger \sigma_1 \psi = \sin\theta \cos\varphi, \quad \psi^\dagger \sigma_2 \psi = \sin\theta \sin\varphi, \quad \psi^\dagger \sigma_3 \psi = \cos\theta. \quad (4.87)$$

Izraz (4.87) omogućuje da lako, po analogiji sa prostornim rotacijama, konstruiramo članove u Hamiltonianu ili Lagrangianu koji su invarijantni pri rotacijama u spinskom prostoru.

Na primjer, ako u teoriji imamo jedan vektor \vec{p} , impuls čestice na primjer, možemo konstruirati operator $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ koji je skalar u spinskom prostoru. Ako imamo dva vektora \vec{p}_1 i \vec{p}_2 , skalar je $\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)$, itd. Primjer članova u Hamiltonianu (Lagrangianu) koji su invarijantni u internom prostoru teorije (spinskom prostoru) su onda $\psi^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \psi$ ili $\psi^\dagger \vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \psi$.

U Lagrangianu će se pojavljivati funkcije operatora ili matrica – najčešće eksponencijalne funkcije, koje su definirane svojim Taylorovim redom $e^{a\Lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \Lambda^n$, na primjer

$$\psi' = e^{i\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\sigma}} \psi, \quad (4.88)$$

gdje je vektor $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_1 \hat{i} + \varepsilon_2 \hat{j} + \varepsilon_3 \hat{k} = \varepsilon \hat{n}$.

Kako je zbog antikomutacijskih relacija Pauli matrica $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$,

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^2 = (\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3)^2 = 1, \quad (4.89)$$

gdje je $n_1 = \sin\theta \cos\varphi$; $n_2 = \sin\theta \sin\varphi$; $n_3 = \cos\theta$, lako je pokazati da vrijedi

$$e^{i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \varepsilon} = \mathbf{1} \cos \varepsilon + i \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin \varepsilon, \quad (4.90)$$

ili u matričnoj notaciji

$$e^{i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \varepsilon} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon + i n_3 \sin \varepsilon & (i n_1 + n_2) \sin \varepsilon \\ (i n_1 - n_2) \sin \varepsilon & \cos \varepsilon - i n_3 \sin \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

Bilo koja Hermitska 2×2 matrica može se na jednoznačan način prikazati kao linearna kombinacija Paulievih i jedinične matrice. U skladu sa (4.81) tri komponente spina $\frac{1}{2}$ čestice $S_i = \frac{1}{2} \sigma_i$, gdje su σ_i Pauli matrice, su generatori transformacija (4.91) parametriziranih vektorom $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \hat{n}$ koje transformiraju («rotiraju») jedno spinsko stanje u drugo kao u (4.88). Sve takve transformacije čine grupu kontinuiranih transformacija koja se naziva SU(2).

Na primjer, spinsko stanje $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ se pri transformaciji (4.87) za $\theta = \varphi = \frac{\pi}{2}$ «zarotira» za kut ε_2 oko y-osi u stanje

$$e^{i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \varepsilon_2} \psi = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon_2 & \sin \varepsilon_2 \\ -\sin \varepsilon_2 & \cos \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \cos \varepsilon_2 & \psi_2 \sin \varepsilon_2 \\ -\psi_1 \sin \varepsilon_2 & \psi_2 \cos \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (4.92)$$

jer je $n_1 = n_3 = 0$, $n_2 = 1$, a za $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$ transformira («zarotira») za kut ε_1 oko x-osi u stanje

$$e^{i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\varepsilon_1}\psi = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon_1 & i \sin \varepsilon_1 \\ i \sin \varepsilon_1 & \cos \varepsilon_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \cos \varepsilon_1 & i \psi_2 \sin \varepsilon_1 \\ i \psi_1 \sin \varepsilon_1 & \psi_2 \cos \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \quad (4.93)$$

jer je $n_1 = 1$, a $n_2 = n_3 = 0$.

Kako generatori $T_i = \frac{\sigma_i}{2}$ ne komutiraju, jer vrijedi $[T_i, T_j] = i \varepsilon_{ijk} T_k$, grupa $SU(2)$ nije Abelova, a kako su Pauli matrice Hermitske, $SU(2)$ transformacije (4.91) su unitarne.

Opća $SU(2)$ transformacija faze dubleta fermionskih polja $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$ je u skladu sa (4.88)

$$\psi'(x) = e^{i\vec{\varepsilon}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \psi(x). \quad (4.94)$$

Kao što ćemo vidjeti (4.94) je $SU(2)_L$ gauge transformacija slabe simetrije fermionskih dubleta (precizno, dubleta lijevih fermionskih polja) u SM . U SM transformacija je lokalna – parametar gauge transformacije $\varepsilon(x)$ zavisi od točke u prostor-vremenu x^μ .

4.3.2 $SO(n)$ i $SU(n)$ grupe

Najjednostavnija kontinuirana grupa internih simetrija (gauge simetrija) je grupa faznih transformacija $U(\theta) = e^{i\theta}$ polja $\psi'(x) = U(\theta)\psi(x)$, kao u (3.77). Različite gauge transformacije parametrizirane su kontinuiranim parametrom θ , koji je realni broj iz intervala $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Kako je $U(0) = 1$, zbog komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja realnih brojeva, lako je pokazati da transformacije $U(\theta)$ čine jednodimenzionalnu unitarnu Abelovu grupu, koja se naziva $U(1)$ grupa. Opći element grupe je kontinuirana funkcija parametra θ , pa se može definirati i diferencijal elementa grupe $U(1)$ kao

$$dU = U(\theta + d\theta) - U(\theta) = e^{i(\theta + d\theta)} - e^{i\theta} = e^{i\theta}(1 + id\theta) - e^{i\theta} = iUd\theta. \quad (4.95)$$

Kontinuirane grupe čiji elementi su diferencijabilne funkcije parametara nazivaju se Lie grupe. Zato se pri računanju sa elementima Lie grupa u fizici (i matematici) mogu koristiti analitičke metode. Iako svaka Lie grupa ima neprebrojivo mnogo elemenata, njihovo izučavanje nije puno kompliciranije od izučavanja konačnih grupa, jer se u biti svodi na ispitivanje svojstava konačne Lie algebre generatora grupe.

Matematičari su klasificirali sve moguće «simple» (one koje nemaju netrivialnih podgrupa) Lie grupe i dokazali da postoji svega pet klasa.

Za fiziku su najvažnije $SO(n)$ – specijalna ortogonalna grupa, koja je grupa rotacija u prostoru sa n dimenzija i $SU(n)$ – specijalna unitarna grupa.

Osnovni teorem teorije Lie grupa tvrdi da se bilo koji element g Lie grupe ranga r (čiji elementi su parametrizirani sa r realnih parametara θ_a) na jednoznačan način može prikazati u obliku

$$g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = \exp \left(i \sum_{a=1}^r \theta_a T_a \right), \quad (4.96)$$

gdje su T_a generatori te grupe. Svojstva generatora određena su sa dvije unutarnje operacije – zbrajanje i Lie produkt (komutator) generatora, tj. njihovom Lie algebrom.

Razmatrajući samo infinitezimalne elemente Lie grupe (konačni elementi su produkti infinitezimalnih), a bez potpune riguroznosti, može se uvidjeti zašto je ukupna struktura Lie grupe određena algebrom njenih generatora. U infinitezimalnoj okolini jediničnog elementa Lie grupa ranga r izgleda kao region prostora \mathbb{R}^r . Za takav region uvijek postoji baza koju čine „jedinični vektori“ koordinatnih osi $\{T_1, T_2, \dots, T_r\}$ koji se nazivaju generatorima Lie grupe T_a . Bilo koji element g Lie grupe u infinitezimalnoj okolini jediničnog elementa može se razviti po elementima baze

$$g = \mathbf{1} + i \theta_a T_a, \quad (4.97)$$

gdje su, u skladu sa (4.96), θ_a infinitezimalni parametri, a $\mathbf{1}$ je jedinični operator. U gornjem izrazu se po konvenciji dodaje « i », da bi za unitarne grupe generatori T_a bili Hermitski operatori (matrice). Za bilo koja dva elementa $g_1 = \mathbf{1} + i \theta_1^a T_a$ i $g_2 = \mathbf{1} + i \theta_2^a T_a$ Lie grupe iz okoline jediničnog elementa produkt je

$$g_1 g_2 = \mathbf{1} + i(\theta_1^a + \theta_2^a) T_a - \theta_1^a \theta_2^b T_a T_b + O(\theta_1^2) + O(\theta_2^2), \quad (4.98)$$

opet element iz okoline jedinice, kao i

$$g_2 g_1 = \mathbf{1} + i(\theta_1^a + \theta_2^a) T_a - \theta_1^a \theta_2^b T_b T_a + O(\theta_1^2) + O(\theta_2^2). \quad (4.99)$$

Kako je i $(g_1 g_2)(g_2 g_1)^{-1}$ element iz okoline jedinice, a prema (4.98) i (4.99) je

$$(g_1 g_2)(g_2 g_1)^{-1} = \mathbf{1} - \theta_1^a \theta_2^b [T_a, T_b] + O(\theta_1^2) + O(\theta_2^2), \quad (4.100)$$

neophodno je da i komutator (Lie produkt) generatora grupe bude linearna kombinacija generatora, tj.

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c. \quad (4.101)$$

Skup generatora Lie grupe je zatvoren u odnosu na Lie produkt, što znači da skup r generatora T_a Lie grupe tvori algebru u odnosu na operacije zbrajanja i Lie produkta generatora. Realni koeficijenti f_{abc} su potpuno antisimetrični ako elemente Lie algebre T_a odaberemo da budu ortonormirani i nazivaju se strukturne konstante Lie grupe. Prosta (simple) Lie grupa potpuno je određena svojim generatorima T_a i strukturnim konstantama f_{abc} . Ako je grupa Abelova sve strukturne konstante su nula.

Za fiziku su najvažnije unitarne reprezentacije grupe simetrija. Reprezentacija je skup linearnih operatora (matrica) koji imaju «ista» svojstva kao elementi grupe. To znači da je operacija produkta u grupi reprezentirana produktom matrica koje reprezentiraju elemente grupe. Precizno, ako su g_1 i g_2 elementi grupe reprezentirani matricama $U(g_1)$ i $U(g_2)$, tada je element grupe g_1g_2 reprezentiran matricom $U(g_1)U(g_2)$. Traženje unitarnih reprezentacija Lie grupa, svodi se na traženje reprezentacija algebre generatora T_a pomoću Hermitskih matrica $T_a^\dagger = T_a$, (da se pojednostavi notacija i generatori Lie grupe i njihove matrice reprezentacije pomoću Hermitskih matrica obilježavaju se istom oznakom T_a), jer je prema (4.96)

$$U(g)^\dagger = \left(e^{i\theta_a T_a} \right)^\dagger = e^{-i\theta_a T_a^\dagger} = e^{-i\theta_a T_a} = U(g)^{-1}. \quad (4.102)$$

Ako je matrice reprezentacija svih generatora T_a blok dijagonalna, reprezentacija se naziva reducibilnom i može se razložiti na zbroj ireducibilnih reprezentacija. Nikakvom promjenom baze ireducibilna reprezentacija se ne može dovesti u blok dijagonalnu formu. U teoriji Lie grupa dovoljno je onda razmatrati samo konačne ireducibilne unitarne reprezentacije.

Svaka grupa ima singletnu (trivijalnu) reprezentaciju u kojoj je $T_a = 0$, tj. $U(g) = 1$ za svaki element grupe g . Potreban uvjet (4.73) invarijantnosti Lagrangiana $[\mathcal{L}, U] = 0$ pri transformacijama $U(g)$ za svaki element Lie grupe g , znači da se Lagrangian teorije mora transformirati kao singletna reprezentacija grupe.

Lie algebra svake grupe ranga r ima i adjungiranu (adjoint) reprezentaciju koju čine r Hermitskih $r \times r$ matrica (realnih matrica pomnoženih sa i) čiji elementi su strukturne konstante grupe

$$T_{a(bc)} = -i f_{abc}, \quad (4.103)$$

gdje su indeksi b, c matrice indeksi. Na primjer, prema (4.81) za grupu $SU(2)$, tri generatora grupe koji su komponente operatora spina $\frac{1}{2}$ imaju komutacione relacije: $[S_i, S_j] = i \varepsilon_{ijk} S_k$, pa su prema (4.101) strukturne konstante $SU(2)$ grupe $f_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$. Adjungiranu reprezentaciju generatora $SU(2)$ grupe čine tri Hermitske 3×3 matrice:

$$T_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.104)$$

SO(n) grupe

Rotacije u n-dimenzionalnom Euklidskom prostoru \mathbb{R}^n tvore grupu $O(n)$. Intenzitet vektora je invarijantan pri rotacijama, pa elementi grupe $O(n)$ mogu biti reprezentirani realnim $n \times n$ ortogonalnim matricama $R^T = R^{-1}$ i grupa se naziva ortogonalnom grupom. Kako svaka $n \times n$ realna ortogonalna matrica rotacije, zbog zahtjeva $RR^T = \mathbf{1}$, mora zadovoljavati $n + \frac{1}{2}(n^2 - n)$ uvjeta [n dijagonalnih i $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ iznad glavne dijagonale], broj nezavisnih elemenata takve matrice je $n^2 - n - \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n(n-1) = r$, što znači da je rang $O(n)$ grupe $\frac{n(n-1)}{2}$. Determinanta realne ortogonalne matrice je ± 1 . Ako postavimo dodatni zahtjev da je $\det R = 1$ grupa se naziva specijalna ortogonalna grupa $SO(n)$ – grupa specijalnih ortogonalnih matrica reda n, koja je grupa pravih (proper) rotacija u \mathbb{R}^n . Realne ortogonalne matrice R za koje važi $\det R = -1$, reprezentiraju rotacije plus inverzije koordinatnih osi, tzv. «ne-prave» rotacije.

Najjednostavnija je $SO(2)$ grupa rotacija u dvije dimenzije, recimo u xy-ravnini

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (4.105)$$

gdje je matrica rotacije

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (4.106)$$

oko z-osi za kut φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$SO(2)$ grupa je ranga 1, te ima samo jedan Hermitski generator $T \equiv \sigma_y$ i treba nam samo jedan realni parametar da specificiramo bilo koji element grupe – kut φ , recimo. Kako je

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \sigma_y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1},$$

u skladu sa (4.96) vrijedi

$$e^{i\varphi\sigma_y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} \sigma_y^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k}}{(2k)!} \sigma_y^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k+1}}{(2k+1)!} \sigma_y^{2k+1} = \mathbf{1} \sum_{k=0}^{\infty} (i^2)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} + i\sigma_y \sum_{k=0}^{\infty} (i^2)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

to jest

$$R(\varphi) = e^{i\varphi\sigma_y} = \mathbf{1}\cos\varphi + i\sigma_y\sin\varphi, \quad (4.107)$$

što je u matricnoj notaciji upravo izraz (4.106).

Lako se vidi da je kvadrat intenziteta vektora $x^2 + y^2$ invarijantan pri SO(2) transformacijama.

Grupa rotacija u trodimenzionalnom prostoru SO(3) je ranga 3, što znači da su potrebna tri realna parametra da se opiše bilo koja rotacija. Jedan mogući izbor su tri Eulerova kuta α, β, γ triju sukcesivnih rotacija. Ortogonalna matrica koja reprezentira proizvoljnu rotaciju $R(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (4.108)$$

je onda produkt

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(0, 0, \alpha) R_y(0, \beta, 0) R_z(0, 0, \gamma), \quad (4.109)$$

gdje donji indeksi označavaju osi pojedinih rotacija. Redoslijed rotacija je važan jer SO(3) nije Abelova grupa. Matricu $R(\alpha, \beta, \gamma)$ lako je naći jer su rotacije oko druge i treće osi

$$R_y(0, \beta, 0) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \quad R_z(0, 0, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.110)$$

SO(3) rotacije ostavljaju invarijantnim kvadrat intenziteta vektora $x^2 + y^2 + z^2$.

Grupa rotacija u tri dimenzije SO(3) lokalno je izomorfna SU(2) grupi – obe grupe imaju identičnu Lie algebru, ali se razlikuju globalno.

Grupa rotacija u četvorodimenzionom Euklidskom prostoru je ranga 6, što znači da je SO(4) 6-parametarska grupa. Lorentzove transformacije u prostor-vremenu Minkowskog M^4 mogu se formalno smatrati rotacijama u R^4 ako se definira imaginarna vremenska koordinata: $x_4 = ict$, što znači da postoji 6 generatora Lorentzovih transformacija – tri za prostorne rotacije u 3 dimenzije i tri za Lorentz potiske (boost) u pokretni inercijalni referentni sustav brzinom \vec{V} .

SU(n) grupe

Za fiziku elementarnih čestica najvažnije su SU(n) – specijalne unitarne grupe u n dimenzija. Elementi SU(n) grupe su $n \times n$ unitarne matricame $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbf{1}$, jedinične determinante $\det U = 1$. Unitarna $U^\dagger = U^{-1}$, matrica ima $2n^2$ realnih elemenata (tj. n^2 kompleksnih), ali $UU^\dagger = \mathbf{1}$ postavlja $n + 2 \frac{n^2 - n}{2} = n^2$ uvjeta (elementi na i iznad glavne dijagonale), pa je broj nezavisnih parametara n^2 . Uvjet jedinične determinante reducira broj nezavisnih parametara na $n^2 - 1 = r$, što je rang SU(n) grupe.

U(1) grupa ima nula generatora i njeni elementi su 1×1 unitarne matrice, tj. unimodularni kompleksni brojevi $e^{i\Lambda}$ kao u (4.53) ili (3.77).

Ako je $H = H^\dagger$ Hermitska $n \times n$ matrica, tada je e^{iH} unitarna $n \times n$ matrica, jer je

$$(e^{iH})^\dagger (e^{iH}) = e^{-iH^\dagger} e^{iH} = e^{i(H-H^\dagger)} = \mathbf{1},$$

pošto matrice H^\dagger i H komutiraju. Prema (4.96), bilo koji element U(n) grupe reprezentira se unitarnom $n \times n$ matricom U oblika

$$U = \exp\left(i \sum_{j=1}^{n^2} \theta_j H_j\right), \quad (4.111)$$

gdje su θ_j realni parametri, a n^2 Hermitskih matrica H_j su reprezentacija generatora grupe U(n). Da se dobije reprezentacija SU(n) grupe pomoću unitarnih $n \times n$ matrica jedinične determinante Hermitske matrice H_j moraju zadovoljavati dodatni uvjet

$$\text{Tr } H_j = 0. \quad (4.112)$$

Uvjet (4.112) slijedi iz identiteta

$$\det e^A = e^{\text{Tr } A}, \quad (4.113)$$

koji važi za svaku Hermitsku matricu A.

Neka su $|a_j\rangle$ svojstveni vektori, a λ_j svojstvene vrijednosti $n \times n$ matrice A, tj. neka vrijedi

$$A|a_j\rangle = \lambda_j|a_j\rangle, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.114)$$

Uvijek je moguće dijagonalizirati matricu A nekom unitarnom matricom C na oblik

$$A_D = C^\dagger A C = \text{diag}.[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n],$$

pa je $\det A = \det A_D = \prod_{j=1}^n \lambda_j$. Kako zbog (4.114) vrijedi i $A^k |a_j\rangle = \lambda_j^k |a_j\rangle$, slijedi da vrijedi i $e^A |a_j\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k |a_j\rangle = e^{\lambda_j} |a_j\rangle$, što znači da su svojstvene vrijednosti matrice e^A upravo e^{λ_j} . Zato za matricu e^A onda doista vrijedi (4.113)

$$\det e^A = \det (e^A)_D = \prod_{j=1}^n e^{\lambda_j} = e^{\sum_{j=1}^n \lambda_j} = e^{\text{Tr} A},$$

pa zaključujemo:

Generatori T_a grupe $SU(n)$ su reprezentirani sa $n^2 - 1$ Hermitskih matrica T_a bez traga, a bilo koji element $g = g(\theta_a)$ grupe $SU(n)$ reprezentiran je unitarnom matricom $U(g)$

$$U(\theta_a) = \exp \left(i \sum_{a=1}^{n^2-1} \theta_a T_a \right), \quad (4.115)$$

gdje su θ_a ($a=1,2,\dots,n^2-1$) realni parametri koji specificiraju element grupe kao u (4.96).

Grupa $SU(2)$ ima rang 3 i elementi su reprezentirani 2×2 unitarnom matricom jedinične determinante. Jedna moguća parametrizacija proizvoljnog elementa $SU(2)$ grupe je

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad (4.116)$$

gdje su a i b proizvoljni kompleksni brojevi koji zadovoljavaju uvjet $|a|^2 + |b|^2 = 1$ koji osigurava da je $\det U = 1$, ili u obliku

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos \varphi & e^{i\gamma} \sin \varphi \\ -e^{-i\gamma} \sin \varphi & e^{-i\alpha} \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (4.117)$$

gdje su α, γ i φ realni brojevi.

Tri generatora grupe su tri Hermitske matrice: $T_i = \frac{1}{2} \sigma_i$, (identične komponentama S_i spina $\frac{1}{2}$)

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.118)$$

koje zadovoljavaju komutacione relacije $[T_i, T_j] = i \varepsilon_{ijk} T_k$, te su prema (4.101) strukturne konstante SU(2) grupe $f_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$. Rerezentacija nekog elementa SU(2) grupe unitarnom 2×2 matricom je

$$U(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \exp\left(i \sum_{i=1}^3 \theta_i \frac{\sigma_i}{2}\right) = \exp\left(i \vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right). \quad (4.119)$$

SU(2) grupa je lokalno izomorfna sa SO(3) grupom, ali se globalno razlikuju, jer SU(2) dvostruko prekriva grupu trodimenzionih rotacija SO(3). Na primjer, element $\varphi = 2\pi$, $\alpha = \pi$ u (4.117) iz SU(2) identificira se sa jediničnom matricom rotacije (u negativnom smjeru) za 360° u SO(3).

Grupa SU(3) ima rang 8 i njenih 8 generatora se obično označavaju $\frac{\lambda_a}{2}$, $a = 1, 2, \dots, 8$, gdje su λ_a Hermitske 3×3 matrice bez traga, koje zadovoljavaju uvjet $\text{Tr } \lambda_a \lambda_b = 2 \delta_{ab}$. Matrice λ_a nazivaju se Gell-Mann-ove matrice i predstavljaju generalizaciju Pauli matrica na SU(3) slučaj. Matrice λ_a su eksplicitno

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.120)$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

U skladu sa (4.96) bilo koji element SU(3) grupe reprezentiran je onda 3×3 unitarnom matricom

$$U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_8) = \exp\left(i \sum_{a=1}^8 \theta_a \frac{\lambda_a}{2}\right) = \exp\left(i \vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\lambda}}{2}\right). \quad (4.121)$$

Osnovna svojstva SU(3) grupe određena su komutatorom generatora (Gell-Mann matrica)

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}, \quad (4.122)$$

gdje su f_{abc} realne, potpuno antisimetrične strukturne konstante grupe. Od 512 strukturnih konstanti od nule su različite samo 54 komponente i to:

$$f_{123} = 1 ,$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} , \quad (4.123)$$

$$f_{147} = f_{516} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{637} = \frac{1}{2} ,$$

te komponente koje se dobijaju permutacijom indeksa.

Singletna reprezentacija svake $SU(n)$ grupe je najmanje dimenzije (reda matrica) 1. Adjungirana (adjoint) reprezentacija je dimenzije r , koja se dobije pomoću $r = n^2 - 1$ Hermitskih (realnih puta imaginarna jedinica) $r \times r$ matrica generatora grupe T_a .

Za svaku $SU(n)$ grupu postoji jedna reprezentacija dimenzije n (najmanje poslije trivijalne singletne), koja se naziva fundamentalna reprezentacija. To je upravo reprezentacija pomoću samih unitarnih $SU(n)$ matrica reda $n \times n$ kao (4.119) ili (4.121). U fundamentalnoj reprezentaciji generatori grupe T_a reprezentirani su sa $r = n^2 - 1$ Hermitskih $n \times n$ matrica T_a bez traga.

Svaka $SU(n)$ grupa ima beskonačno mnogo reducibilnih i ireducibilnih reprezentacija sve većih dimenzija. U fizici elementarnih čestica najvažnije su upravo reprezentacije $SU(n)$ gauge grupa najmanjih dimenzija – singletna, fundamentalna i adjungirana, specijalno fundamentalna.

Specijalne unitarne matrice koje tvore ireducibilnu reprezentaciju $SU(n)$ grupe djeluju na n -dimenzione vektore stupce – polja u teoriji. Precizno, trebali bi reći da se bazična polja u teoriji (vektori stupci) pri operacijama simetrije transformiraju kao određena ireducibilna reprezentacija $SU(n)$ grupe unutarnjih gauge simetrija Lagrangiana teorije. U SM (4.121) je $SU(3)_c$ lokalna gauge transformacija jakih interakcija koja djeluje na triplete kvarkovskih polja, a elektro-slaba $SU(2)_L \times U(1)_Y$ lokalna gauge transformacija koja je produkt $SU(2)$ člana (4.119) i $U(1)$ člana $U(\theta) = e^{i\theta}$, djeluje na fermionske dublete. Svojstva jakih interakcija zahtijevaju da se kvarkovska polja pri operacijama unutarnje simetrije transformiraju kao tripletna reprezentacija $SU(3)_c$ grupe. Potpuno analogno, svojstva elektro-slabih interakcija zahtijevaju da se fermionska polja transformiraju kao dubletna reprezentacija $SU(2)_L \times U(1)_Y$ gauge grupe.

Interakcije (sile) među elementarnim česticama imaju svojstva simetrije identična $SU(3)$ i $SU(2)$ i $U(1)$ grupama. To znači, da se polja (elementarne čestice) pri djelovanju jakih i/ili elektro-slabih interakcija pretvaraju u kombinaciju tih istih polja (elementarnih čestica), na isti način kao kad na ta polja (elementarne čestice) djeluje neka operacija unutarnje simetrije teorije. Te unutarnje simetrije teorije elementarnih čestica su lokalne gauge transformacije Lagrangiana SM, pa je svakom generatoru ukupne grupe unutarnjih simetrija $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ pridružen je po jedan baždarni (gauge) bozon spina 1 koji «generira», tj. koji je medijator, jakih i/ili elektro-slabih interakcija među poljima (elementarnim česticama) teorije.

Nikome nije jasno zašto priroda «zna» za (precizno, zašto su interne gauge simetrije elementarnih čestica) baš ove unitarne grupe, a ne neke druge recimo?

Interesantno je da se grupa $SU(2)$ pojavljuje u fizici elementarnih čestica dva puta – kao grupa transformacija stanja spina fermiona i kao grupa lokalnih gauge transformacija koje generiraju elektroslabe interakcije fermiona – kvarkova i leptonu. Je li to slučajnost ili rezultat nekog dubljeg principa fizike zasada nije poznato.

4.4 Yang-Mills (ne-Abelove) gauge teorije za kvarkove i leptone

Eksperimentalni podaci indiciraju da se elementarne čestice materije (kvarkovi i leptoni – fermioni spina $\frac{1}{2}$) grupiraju u multiplete ψ koji su fundamentalne reprezentacije grupe unutarnjih simetrija. Simetrija Lagrangiana elementarnih čestica mora biti Lie grupa lokalnih gauge transformacija, jer to osigurava mogućnost izbora faze fermionskih (kvarkova i leptona) polja u svakoj točki prostor-vremena. Interakcije (sile) među česticama se onda generiraju uvođenjem u teoriju gauge bozona bez mase koji su medijatori jakih i elektro-slabih interakcija. Slično, kao u primjeru kvantne elektrodinamike (4.66) koja je $U(1)_{ED}$ lokalno gauge invarijantna teorija, Lagrangian interakcije gauge bozona $\mathcal{L}_{int.}^{(1)}$ dobija se zamjenom obične derivacije kovarijantnom: $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$. U SM grupa lokalnih gauge transformacija teorije je $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

$U(1)_Y$ gauge grupa je Abelova i ranga 1, te ima samo jedan generator i zahtijeva samo jedno vektorsko polje $B^\mu(x)$ gauge bozona. Kovarijantna derivacija je $D^\mu = \partial^\mu + ig_1 B^\mu$ kao u (4.68). Gauge transformacije su

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\Lambda(x)}\psi(x), \quad B^\mu(x) \rightarrow B'^\mu(x) = B^\mu(x) + \frac{1}{g_1}\partial^\mu\Lambda(x), \quad (4.124)$$

kao (4.70), iste kao u kvantnoj elektrodinamici (4.57), ali napisane za proizvoljnu konstantu vezanja (naboj) g_1 .

Grupe gauge simetrija jakih i slabih interakcija su $SU(3)$ i $SU(2)$, tako da se faza fermionskih polja transformira ne-Abelovom lokalnom gauge transformacijom

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{a}(x)\cdot\frac{\vec{\lambda}}{2}}\psi(x); \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\vec{e}(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}}\bar{\psi}(x), \quad (4.125)$$

kao u (4.121) i (4.119). Generatori $SU(2)$ grupe su $T_i = \frac{\tau_i}{2}$, gdje su τ_i ($i = 1, 2, 3$) Pauli matrice (3.112). Generatori $SU(3)$ grupe $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$, ($a = 1, 2, \dots, 8$), su Gell-Mann matrice definirane u (4.120).

Da se definira kovarijantna derivacija za $SU(2)$ grupu treba u teoriju uvesti tri vektorska polja gauge bozona (za svaki generator grupe po jedan gauge bozon) $W_i^\mu(x)$, umjesto samo jednog za $U(1)$ grupu, tako da je

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_2 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}^\mu, \quad (4.126)$$

gdje je g_2 za sada proizvoljna konstanta vezanja slabih interakcija (slabi naboj), koja ima istu vrijednost za sva tri slaba gauge bozona W_i^μ .

U SM modelu želimo opisati i slabe i elektromagnetske interakcije fermiona – kvarkova i leptona. Grupa gauge simetrija elektro-slabih interakcija $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ima rang 4, pa zahtijeva 4 gauge bozona $W_i^\mu(x)$, ($i = 1,2,3$) za $SU(2)_L$ i $B^\mu(x)$ za $U(1)_Y$. Gauge grupa lokalnih transformacija faze fermionskih polja analogna sa (4.54) [kao gauge transformacija polja elektrona u QED] u SM označava se $U(1)_Y$ i naziva $U(1)$ grupa slabog hipernaboja (hypercharge). $U(1)_Y$ grupa je različita od $U(1)_{ED}$ grupe elektrodinamike. A priori, nemamo razloga vjerovati da $U(1)_Y$ simetrija fermiona u Lagrangianu SM točno odgovara $U(1)_{ED}$ simetriji elektrodinamike koju generiraju električni naboji Q čestica. Generator grupe $U(1)_Y$ je Y (Y je samo realan broj), a njegov kvantni broj Y naziva se slabi hipernaboj i može biti različit za polja različitih fermiona. Hipernaboj nije jednak električnom naboju čestice Q , ali je s njim povezan jednostavnom vezom $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$, gdje je $T_3 = \frac{\tau_3}{2}$ treća komponenta $SU(2)_L$ slabog naboja. Električni naboj je zbroj treće komponente slabog izospina i hipernaboja.

Realni gauge bozoni – čestice koje su medijatori elektro-slabih interakcija, W^\pm i Z^0 gauge bozoni za slabe i foton γ za elektro-magnetske interakcije, opisani su poljima koja su linearna kombinacija polja W_i^μ i B^μ , o čemu će se govoriti u Poglavlju 6.

$SU(2) \times U(1)$ kovarijantna derivacija je onda

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_i^\mu, \quad (4.127)$$

gdje su g_1 i g_2 , za sada proizvoljne, konstante vezanja $U(1)_Y$ i $SU(2)_L$ grupe koje određuju jakost elektro-slabih interakcija. Izraz (4.127) je Lorentz vektor kako se vidi po indeksu μ , a zadnji član je zbog Pauli matrica očito 2×2 matrica. Način kako je napisana kovarijantna derivacija (4.127) sugerira da će djelovati na fundamentalnu reprezentaciju $SU(2)$ grupe – fermione treba slagati u dublete (dvokomponentne spinore).

U principu kovarijantna derivacija može djelovati na fermionska polja ψ aranžirana u multiplet bilo koje reprezentacije dimenzije $(2s+1)$ grupe $SU(2)$ koje se nazivaju: $s = 0$ singlet, $s = \frac{1}{2}$ dublet, $s = 1$ vektor, itd. Tada se u kovarijantnoj derivaciji $SU(2)$ član pojavljuju kao skalarni produkt generatora $SU(2)$ grupe i polja gauge bozona $ig_2 T_i W_i^\mu = ig_2 \vec{T} \cdot \vec{W}^\mu$, gdje su T_i ($i = 1,2,3$) Hermitske matrice reda $(2s+1)$ koje su reprezentacija generatora grupe. Za singletnu reprezentaciju $s = 0$ generatori su $T_i = 0$; za fundamentalnu $s = \frac{1}{2}$ generatori su $\vec{T} = \frac{\vec{\tau}}{2}$; a za $s = 1$ adjungiranu reprezentaciju pomoću 3×3 matrica je $T_{a(bc)} = -i f_{abc} = -i \varepsilon_{abc}$, matrice generatora T_a su eksplicitno date u (4.102)

$$T_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.102)$$

Upravo to se i događja u SM – osnovna polja u Lagrangianu su različiti multiplieti grupa simetrija. Slabe interakcije narušavaju parnost, pa se L i R stanja fermiona drukčije transformiraju pod djelovanjem slabe SU(2) grupe. Zato su u Lagrangianu SM – lijeva ψ_L stanja svih fermiona SU(2) dubleti, a desna ψ_R stanja svih fermiona su SU(2) singleti – više o tome u Poglavlju 6.

Kako je ukupna grupa gauge simetrija Lagrangiana materije \mathcal{L}_m (kvarkova i leptona i Higgs bozona) u SM ustvari $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ (indeks L označava da samo lijevi fermioni nose taj kvantni broj), lako je u kompaktnom obliku napisati kompletnu kovarijantnu derivaciju dodajući SU(3) član

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_i^\mu + ig_3 \frac{\lambda_a}{2} G_a^\mu, \quad (4.128)$$

gdje su SU(2) indeksi $i = 1, 2, 3$, a SU(3) indeksi su $a = 1, 2, \dots, 8$. Prva dva člana u (4.128) su singleti u SU(2) i SU(3) prostoru. Treći član je 2×2 matrica u SU(2) prostoru i singlet u SU(3) prostoru, a zadnji član je 3×3 matrica u prostoru SU(3), a singlet u prostoru SU(2). Da bi se koristila ova kompaktna notacija mora se napraviti dodatna pretpostavka da SU(2) i SU(3) članovi iz (4.128) uvijek daju nulu kad djeluju na spinor „pogrešne dimenzije“ – kad treći član djeluje na 1×1 matricu (broj) ili 3×1 matricu daje nulu, kao i kad četvrti član djeluje na 1×1 matricu ili 2×1 matricu rezultat je nula.

Osam gluona, obojanih gauge bozona G_a^μ bez mase, su medijatori jakih interakcija među kvarkovima. Konstante interakcije g_1 , g_2 i g_3 su proizvoljne, ali ako ih odredimo iz eksperimenta za jednu reprezentaciju fermiona ostaju fiksirane za svaku reprezentaciju – na primjer, ako izmjerimo g_2 za elektron, znamo ga i za muon. Mjerenje jakosti interakcije gauge bozona s jednim fermionom, fiksira konstantu te interakcije sa svim preostalim fermionima i gauge bozonima.

Izraz (4.128) za kovarijantnu derivaciju “najvažnija” jednačba Standardnog Modela, jer na vrlo kompaktan način sublimira sva današnja teorijska i eksperimentalna saznanja o elementarnim česticama. (4.128) implicira da sve elementarne čestice imaju lokalnu U(1) gauge simetriju koja rezultira elektromagnetskim interakcijama; sve elementarne čestice imaju i lokalnu SU(2) gauge simetriju koja rezultira slabim interakcijama; sve elementarne čestice imaju i treću unutarnju simetriju pri lokalnim gauge transformacijama koje tvore SU(3) grupu i koja rezultira jakim interakcijama među tim česticama. Sve tri vrste interakcija (sila) među elementarnim česticama kompletno su opisane poljima odgovarajućih vektorskih (gauge) bozona pridruženih generatorima grupa tih internih lokalnih gauge simetrija – $B^\mu(x)$ za jedan generator U(1)_Y grupe, tri $W_i^\mu(x)$ za tri generatora SU(2)_L i osam gluona $G_a^\mu(x)$ za osam generatora SU(3)_c.

Izraz (4.126) je SU(2) generalizacija kovarijantne derivacije kvantne elektrodinamike (4.62), tj. (4.68). Ali u slučaju ne-Abelove SU(2) gauge grupe ne znamo lokalne gauge transformacije vektorskih polja $W_i^\mu(x)$. Da se one nađu treba ponoviti derivaciju (4.67)-(4.70). Dovoljno je promatrati samo infinitezimalne SU(2) gauge transformacije

$$W'_i{}^\mu(x) = W_i{}^\mu(x) + \delta W_i{}^\mu(x), \quad (4.129)$$

gdje je $\delta W_i{}^\mu(x)$ prvog reda po infinitezimalnom parametru gauge transformacije $\varepsilon_i(x)$.

Bazični zahtjev je, kao i u slučaju elektrodinamike (4.65), da se kovarijantna derivacija pri lokalnim gauge transformacijama mijenja na isti način kao i fermionska polja (4.125), tj. da i u slučaju SU(2) vrijedi

$$D'^\mu \psi'(x) = e^{i\bar{\varepsilon}(x) \cdot \frac{\tau}{2}} D^\mu \psi(x). \quad (4.130)$$

Uvrštavanjem (4.129) u (4.130) i zamjenjujući $e^{i\bar{\varepsilon}(x) \cdot \frac{\tau}{2}} \cong 1 + i\varepsilon_j(x) \frac{\tau_j}{2} + O(\varepsilon^2)$, s točnošću do na prvi red po infinitezimalnom parametru ε_i , lijeva strana jednadžbe (4.130) je

$$\begin{aligned} \text{LSJ} &= D'^\mu \psi' \cong \left(\partial^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_i{}^\mu \right) \left(1 + i\varepsilon_j \frac{\tau_j}{2} \right) \psi = \left(\partial^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_i{}^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} \delta W_i{}^\mu \right) \left(1 + i\varepsilon_j \frac{\tau_j}{2} \right) \psi = \\ &= \partial^\mu \psi + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_i{}^\mu \psi + ig_2 \frac{\tau_i}{2} \delta W_i{}^\mu \psi + i \frac{\tau_i}{2} \partial^\mu (\varepsilon_i \psi) - g_2 \frac{\tau_i \tau_j}{4} W_i{}^\mu \varepsilon_j \psi + i \frac{\tau_i}{2} \varepsilon_i \partial^\mu \psi = \\ &= \left[\partial^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_i{}^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} \delta W_i{}^\mu + i \frac{\tau_i}{2} (\partial^\mu \varepsilon) - g_2 \frac{\tau_i \tau_j}{4} W_i{}^\mu \varepsilon_j \right] \psi + i \frac{\tau_i}{2} \varepsilon_i (\partial^\mu \psi), \end{aligned}$$

gdje smo zanemarili član višeg reda $\varepsilon \delta W$.

Desna strana jednadžbe (4.130) je

$$\begin{aligned} \text{DSJ} &= e^{i\bar{\varepsilon}(x) \cdot \frac{\tau}{2}} D^\mu \psi(x) \cong \left(1 + i\varepsilon_i \frac{\tau_i}{2} \right) \left(\partial^\mu + ig_2 \frac{\tau_j}{2} W_j{}^\mu \right) \psi = \\ &= \left(\partial^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_i{}^\mu - g_2 \frac{\tau_i \tau_j}{4} \varepsilon_i W_j{}^\mu \right) \psi + i\varepsilon_i \frac{\tau_i}{2} (\partial^\mu \psi). \end{aligned}$$

Prvi, drugi i četvrti član na desnoj strani se pokrate s odgovarajućim članovima na lijevoj strani i kako jednakost mora važiti za svaku vrijednost polja $\psi(x)$, rješavajući po $\delta W_i{}^\mu(x)$ dobijamo

$$\tau_i \delta W_i{}^\mu = \frac{1}{g_2} (\partial^\mu \varepsilon) \tau_i + \frac{i}{2} \varepsilon_i W_j{}^\mu (\tau_i \tau_j - \tau_j \tau_i),$$

a kako je komutator Pauli matrica $[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk} \tau_k$, imamo

$$\tau_i \left(\delta W_i^\mu + \frac{1}{g_2} \partial^\mu \varepsilon_i + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_j W_k^\mu \right) = 0.$$

Zbog linearne nezavisnosti Pauli matrica, konačno je

$$\delta W_i^\mu(x) = -\frac{1}{g_2} \partial^\mu \varepsilon_i(x) - \varepsilon_{ijk} \varepsilon_j(x) W_k^\mu(x). \quad (4.131)$$

Izraz (4.131) pokazuje da se pri lokalnoj gauge transformaciji iz SU(2) grupe polja $W_i^\mu(x)$ gauge bozona "rotiraju" jedno u drugo, za razliku od slučaja Abelove U(1) gauge grupe (4.124) kad lokalna gauge transformacija polja $B^\mu(x)$ uključuje samo prvi član u (4.131). Jasno je da se dodatni član pojavljuje kad god komutator generatora grupe nije nula, tj. kad je gauge grupa ne-Abelova. Da se precizno razumije značenje drugog člana u (4.131) treba razmotriti kako se vektor polja gauge bozona \vec{W}^μ [vektor u SU(2) unuternom prostoru, tj. 3×1 matrica] transformira pri SU(2) gauge transformaciji

$$\vec{W}'^\mu = e^{i\vec{\varepsilon} \cdot \vec{T}} \vec{W}^\mu, \quad (4.132)$$

gdje je T_i odgovarajuća $s = 1$ adjungirana reprezentacija (4.104) generatora SU(2) za koju je

$$(T_i)_{jk} = -if_{ijk} = -i\varepsilon_{ijk}. \quad (4.133)$$

Za infinitezimalnu transformaciju vektora

$$W_i'^\mu \cong (1 + i\varepsilon_k T_k)_{ij} W_j^\mu = W_i^\mu + i\varepsilon_k (-i\varepsilon_{kij}) W_j^\mu = W_i^\mu - \varepsilon_{ijk} \varepsilon_j W_k^\mu = W_i^\mu + \delta W_i^\mu,$$

što odmah daje promjenu vektora \vec{W}^μ polja gauge bozona uslijed rotacije u SU(2) internom prostoru teorije

$$\delta W_i^\mu = -\varepsilon_{ijk} \varepsilon_j W_k^\mu,$$

upravo drugi član u (4.131).

Potpuno analogno sa (4.131), za SU(3) grupu infinitezimalna gauge transformaciju polja gluona određena parametrom $\omega_a(x)$ je

$$\delta G_a^\mu = -\frac{1}{g_3} \partial^\mu \omega_a - f_{abc} \omega_b G_c^\mu, \quad (4.134)$$

gdje su strukturne konstante SU(3) grupe date u (4.123).

Ne-Abelova struktura SU(3) i SU(2) grupa ima važne fizikalne posljedice.

Svojstva jakih i slabih interakcija, koja se ogledaju u nekomutativnosti SU(3) i SU(2) grupa, uzrokuju pojavu drugog člana u infinitezimalnim transformacijama (4.134) i (4.131), što znači da polja odgovarajućih gauge bozona nose jaki i slabi naboj. Zato gauge bozoni medijatori jakih i slabih interakcija i sami imaju te interakcije. U SM pojavljuje se vezanje tri i četiri gauge bozona (triple and quartic gauge boson couplings). To je bitna razlika u odnosu na kvantnu elektrodinamiku u kojoj foton nema električni naboj, pa u najnižem redu nema ni foton-foton interakcija.

Razmotrimo kako se u slučaju nekomutativne gauge grupe pojavljuju samointerakcije gauge bozona. Pri infinitezimalnoj lokalnoj ne-Abelovoj gauge transformaciji varijacija polja gauge bozona $W_i^\mu(x)$ je

$$\delta W_i^\mu(x) = -\frac{1}{g} \partial^\mu \varepsilon_i(x) - f_{ijk} \varepsilon_j(x) W_k^\mu(x), \quad (4.135)$$

napisana pomoću strukturnih konstanti f_{ijk} i jakosti vezanja gauge bozona g za bilo koju gauge grupu [SU(2) ili SU(3)]. Maxwellov Lagrangian $\mathcal{L}_0^{(1)}$ slobodnog vektorskog polja bez mase (3.20) nije više gauge invarijantan jer tenzor polja nije invarijantan. Lako se vidi da je pri transformaciji (4.135)

$$\delta(\partial^\mu W_i^\mu - \partial^\nu W_i^\nu) = -f_{ijk} \varepsilon_j (\partial^\mu W_k^\nu - \partial^\nu W_k^\mu) - f_{ijk} [(\partial^\mu \varepsilon_j) W_k^\nu - (\partial^\nu \varepsilon_j) W_k^\mu]. \quad (4.136)$$

U slučaju ne-Abelove gauge simetrije neophodno je redefinirati tenzor polja $W_i^{\mu\nu}(x)$ gauge bozona, tj. dodati neki član izrazu $\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu$ tako da se pokradi zadnji član u (4.136) koji zavisi od derivacija parametara $\partial^\mu \varepsilon_j(x)$ lokalnih gauge transformacija. Kako je prema (4.135)

$$gf_{ijk} \delta(W_j^\mu W_k^\nu) = -f_{ijk} [(\partial^\mu \varepsilon_j) W_k^\nu - (\partial^\nu \varepsilon_j) W_k^\mu] + gf_{ijk} f_{jlm} \varepsilon_l W_m^\mu W_k^\nu + gf_{ijk} f_{klm} \varepsilon_l W_j^\mu W_m^\nu, \quad (4.137)$$

prvi član u gornjem izrazu zaista pokradi neželjeni član u (4.136). Zadnja dva člana u (4.137) mogu se transformirati koristeći antisimetriju strukturnih konstanti grupe

$$-gf_{ijk} f_{jlm} \varepsilon_l W_m^\mu W_k^\nu - gf_{ijk} f_{klm} \varepsilon_l W_j^\mu W_m^\nu = -g(f_{imk} f_{lkj} - f_{lmk} f_{ikj}) \varepsilon_l W_j^\mu W_m^\nu.$$

Kako za adjungiranu reprezentaciju Lie grupe važi (4.103) tj. (4.133), zadnja dva člana iz (4.137) su

$$-g(f_{imk} f_{lkj} - f_{lmk} f_{ikj}) \varepsilon_l W_j^\mu W_m^\nu = g[(T_i)_{mk} (T_l)_{kj} - (T_l)_{mk} (T_i)_{kj}] \varepsilon_l W_j^\mu W_m^\nu = g[T_i, T_l]_{mj} \varepsilon_l W_j^\mu W_m^\nu$$

pa je prema (4.101)

$$-g(f_{imk} f_{lkj} - f_{lmk} f_{ikj}) \varepsilon_l W_j^\mu W_m^\nu = ig f_{ilk} (T_k)_{nj} \varepsilon_l W_j^\mu W_m^\nu = g f_{ilk} f_{knj} \varepsilon_l W_j^\mu W_m^\nu,$$

te konačno

$$gf_{ijk}\delta(W_j^\mu W_k^\nu) = -f_{ijk}\left[(\partial^\mu \varepsilon_j)W_k^\nu - (\partial^\nu \varepsilon_j)W_k^\mu\right] - gf_{ilk}\varepsilon_l f_{kjm}W_j^\mu W_m^\nu. \quad (4.138)$$

Definiramo li tenzor polja gauge bozona kao

$$W_i^{\mu\nu} = \partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu - gf_{ijk}W_j^\mu W_k^\nu, \quad (4.139)$$

njegova promjena pri infinitezimalnoj lokalnoj gauge transformaciji je jednostavno

$$\delta W_i^{\mu\nu}(x) = -f_{ijk}\varepsilon_j(x)W_k^{\mu\nu}(x). \quad (4.140)$$

Definiramo li još i Lagrangian polja gauge bozona $W_i^\mu(x)$ pomoću tenzora polja $W_i^{\mu\nu}(x)$ iz (4.127) kao

$$\mathcal{L}_g^{(1)} = -\frac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W_{i\mu\nu}, \quad (4.141)$$

lako se vidi da je Lagrangian $\mathcal{L}_g^{(1)}$ invarijantan pri lokalnim gauge transformacijama (4.135) zbog antisimetrije strukturnih konstanti grupe.

Kako u tenzoru polja gauge bozona (4.139) za Yang-Mills teorije postoji član kvadratan po poljima $W_i^\mu(x)$, a Lagrangian $\mathcal{L}_g^{(1)}$ je kvadratan po tenzoru polja $W_i^{\mu\nu}(x)$, jasno je da u $\mathcal{L}_g^{(1)}$ postoje članovi sa tri i četiri polja gauge bozona $W_i^\mu(x)$. Bitna razlika između elektrodinamike (Abelove gauge teorije) i teorija jakih i slabih interakcija (ne-Abelovih Yang-Mills teorija) je postojanje interakcije između samih gauge bozona. Kaže se da su gauge bozoni slabih i jakih interakcija „nabijeni“ – nose slabi i jaki naboj – boju.

Sve dosad rečeno se može rezimirati u recept: Kako konstruirati Yang-Mills teoriju?

Poći od renormalizabilnog Lagrangiana $\mathcal{L}_m^{(1/2)}(\psi_i, \partial^\mu \psi_i)$ tvari koji zavisi od elementarnih čestica (fermiona spina $1/2$) opisanih Diracovim poljima ψ_i (Lagrangian tvari može uključivati i čestice spina 0 opisane skalarnim poljima ϕ_i), bez mase. Pretpostavimo da je \mathcal{L}_m invarijantan pri nekim globalnim (parametar transformacije ε_a je konstanta koja ne ovisi o točki x^μ prostor-vremena) gauge transformacijama – koje su to gauge transformacije, tj. koju Lie grupu one sačinjavaju, mora nam reći eksperiment. Infinitezimalna globalna gauge transformacija polja tvari je oblika [kao u globalnoj verziji (4.124) ili (4.125)]

$$\delta \psi_i(x) = i\varepsilon_a (T_a)_{ij} \psi_j(x), \quad (4.142)$$

gdje su T_a generatori gauge grupe koji zadovoljavaju komutacione relacije Lie algebre

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad (4.143)$$

a f_{abc} su strukturne konstante grupe.

Najopćenitiji renormalizabilni način da se elementarne čestice iz \mathcal{L}_m vežu sa kolekcijom čestica spina 1 (baždarnim ili gauge bozonima) je slijedeći recept:

1. U teoriju se uvede po jedno vektorsko polje gauge bozona $W_a^\mu(x)$ za svaki generator T_a iz Lie algebre grupe gauge simetrija,
2. Svuda u \mathcal{L}_m zamjene se obične prostorno-vremenske derivacije ∂^μ kovarijantnim derivacijama D^μ

$$D^\mu \psi_i(x) \equiv \partial^\mu \psi_i(x) + ig W_a^\mu(x) (T_a)_{ij} \psi_j(x), \quad (4.144)$$

kao u (4.128), gdje je g konstanta jakosti gauge bozon interakcija.

3. Lagrangianu teorije se doda gauge bozon Lagrangian $\mathcal{L}_g^{(1)}$

$$\mathcal{L}_g^{(1)} = -\frac{1}{4} W_a^{\mu\nu} W_a^{\mu\nu}, \quad (4.145)$$

gdje je tenzor polja gauge bozona $W_a^{\mu\nu}(x)$ definiran kao u (4.139)

$$W_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu W_a^\nu(x) - \partial^\nu W_a^\mu(x) - gf_{abc} W_b^\mu(x) W_c^\nu(x), \quad (4.146)$$

4. Ukupni Lagrangian \mathcal{L}_{YM} tako dobijene Yang-Mills teorije

$$\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_m^{(1/2)}(\psi_i, D^\mu \psi_i) + \mathcal{L}_g^{(1)}(W_a^\mu, \partial^\nu W_a^\mu), \quad (4.147)$$

invarijantan je (ustvari, \mathcal{L}_m i \mathcal{L}_g su odvojeno invarijantni) pri lokalnim ili "gauge" poopćenjem globalnih transformacija (4.142), tj. pri transformacijama

$$\delta W_a^\mu(x) = -\frac{1}{g} \partial^\mu \varepsilon_a(x) - f_{abc} \varepsilon_b(x) W_c^\mu(x), \quad (4.148)$$

$$\delta \psi_i(x) = i\varepsilon_a(x) (T_a)_{ij} \psi_j(x), \quad (4.149)$$

kao u (4.135).

SM elementarnih čestica je ovakva ne-Abelove lokalno gauge invarijantna teorija čija je gauge grupa $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Takva teorija je u oštroj suprotnosti sa eksperimentima. Problem je u masama čestica – sve čestice u teoriji su bez mase, a eksperiment pokazuje da sve elementarne čestice (osim fotona i gluona) imaju masu! Problem je očigledan u slučaju slabih gauge bozona – svi gauge bozoni u ovakvoj teoriji su bez mase i generiraju sile dugog dosegaa kao elektromagnetska interakcija. Ali, u realnosti slabe interakcije su izuzetno kratkog dosegaa svega $\leq 10^{-17}$ m, što znači da su mase slabih gauge bozona velike 80.4 GeV za W^\pm i 91.2 GeV za Z .

Da bi Yang-Mills teorije mogle opisati ponašanje realnih elementarnih čestica mora se naći način da se u teoriju uvedu mase čestica, ali tako da se očuva lokalna gauge invarijantnost teorije koja osigurava renormalizabilnost.

U teoriji nedostaje još samo jedan ali fizikalno izuzetno važan, element Higgs bozon koji generira neophodne mase čestica!

Zadaci:

Zadatak 4.1. Pokazati da Lagrangian $L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - q\phi + q\vec{v} \cdot \vec{A}$, gdje su $\phi(\vec{x}, t)$ i $\vec{A}(\vec{x}, t)$ elektromagnetski potencijali, daje korektne jednadžbe gibanja čestice mase m i naboja q u spoljašnjem elektromagnetskom polju.

Zadatak 4.2. Koristeći Lagrangian iz prethodnog zadatka pokazati da je klasični Hamiltonian čestice naboja q u spoljašnjem elektromagnetskom polju

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi.$$

Zadatak 4.3. Pokazati da klasični Hamiltonian čestice naboja $q = -e$ u spoljašnjem elektromagnetskom polju (4.40) daje korektne jednadžbe gibanja (4.41).

Zadatak 4.4. Pokazati da u Aharonov-Bohm efektu valna funkcija elektrona u spoljašnjem elektromagnetskom polju (4.47) daje intenzitet pruga interferencije (4.50).

Zadatak 4.5. Pokazati da je Schrodingerova jednadžba (4.56) za česticu naboja $-e$ u spoljašnjem elektromagnetskom polju invarijantna pri lokalnim $U(1)$ gauge transformacijama (4.57). Korisno je prvo pokazati da važe relacije (4.58) – (4.60).

Zadatak 4.6. Koristeći komutacione relacije (4.75) pokazati da važi (4.80).

Zadatak 4.7. Koristeći reprezentaciju (4.86) pokazati da za opće stanje spina fermiona (4.83) važi (4.87).

Zadatak 4.8. Pokazati da važi (4.89), te (4.90).

Zadatak 4.9. Koristeći rezultat prethodnog zadatka pokazati da za $\theta = \varphi = \frac{\pi}{2}$ izraz (4.91) daje matricu rotacije oko y -osi za kut ε

$$e^{i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \varepsilon} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Zadatak 4.10. Koristeći komutacione relacije Pauli matrica pokazati da je komutator dviju SU(2) transformacije oblika (4.90):

$$R_1 = e^{i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}_1\varepsilon_1} = \cos \varepsilon_1 + i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}_1 \sin \varepsilon_1 \quad i \quad R_2 = e^{i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}_2\varepsilon_2} = \cos \varepsilon_2 + i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}_2 \sin \varepsilon_2 ,$$

$$[R_1, R_2] = -2i \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 \vec{\sigma}\cdot(\hat{n}_1 \times \hat{n}_2) .$$

Zadatak 4.11. Koristeći matričnu reprezentaciju (4.106), pokazati da $\vec{x}\cdot\vec{x} = x_1^2 + x_2^2$ ostaje invarijantno pri SO(2) transformacijama.

Zadatak 4.12. Naći matričnu reprezentaciju proizvoljnog SO(3) elementa, tj. rotacije u tri dimenzije, (4.109) parametriziranih Eulerovim kutovima α, β, γ koristeći matrice rotacija oko koordinatnih osi (4.110).

Zadatak 4.13. Pokazati da se proizvoljni element SU(2) grupe može prikazati u obliku (4.116) ili (4.117). Kakva je veza parametara te dvije reprezentacije.

Zadatak 4.14. Koristeći Gell-Mannove matrice (4.120) provjeriti vrijednost strukturnih konstanti SU(3) grupe (4.123).

Zadatak 4.15. a) Ako je \vec{v}^μ vektor u prostoru SU(2) sa komponentama $v_1^\mu, v_2^\mu, v_3^\mu$ napisati SU(2) kovarijantnu derivaciju

$$D^\mu = \partial^\mu + \vec{\sigma}\cdot\vec{v}^\mu$$

eksplinitno u matričnom obliku.

b) Ako je G_a^μ osam dimenzioni vektor ($a = 1, 2, \dots, 8$) napisati SU(3) kovarijantnu derivaciju

$$D^\mu = \partial^\mu + \vec{\lambda}\cdot\vec{G}^\mu$$

eksplinitno u matričnom obliku.

Zadatak 4.16. Koristeći (4.135) pokazati da vrijedi (4.136).

Zadatak 4.17. Pokazati da vrijedi (4.137).

Zadatak 4.18. Pokazati da vrijedi (4.138).

Zadatak 4.19. Pokazati da je promjena tenzora gauge polja $W_a^{\mu\nu}$ pri infinitezimalnoj lokalnoj gauge transformaciji (4.135) data sa (4.140).

Zadatak 4.20. Pokazati da je Lagrangian polja gauge bozona (4.141) invarijantan pri lokalnim gauge transformacijama (4.135).

5. Higgs mehanizam

Način na koji fermioni i gauge bozoni dobijaju masu u SM, a da se pritom ne naruše poželjna svojstva teorije – lokalna gauge simetrija i renormalizabilnost, naziva se Higgs mehanizam [P. W. Higgs, Phys. Rev. Letters 12 (1964), 132]. Osnovna ideja je da se gauge simetrija teorije naruši, što je neophodno za postojanje masa čestica, ali minimalno (soft breaking). To se postiže tako da Lagrangian teorije ostane gauge invarijantan, ali stanje najniže energije – vakuum narušava tu lokalnu gauge simetriju. Narušenje simetrije teorije uslijed neinvarijantnosti vakuuma (a, ne zbog neinvarijantnosti nekog člana u Lagrangianu) naziva se spontano narušenje simetrije (spontaneous symmetry breaking – SSB).

Pogledajmo prvo malo detaljnije vezu simetrija teorije i vakuuma.

5.1 Spektralne relacije

Već smo vidjeli u poglavlju 3.4 kako Noether teorem garantira da svaka kontinuirana simetrija djelovanja (Lagrangiana) fizikalnog sustava jamči postojanje očuvane struje $j^\mu(x)$ (3.78), te da je naboj Q – volumni integral njene vremenske komponente (3.79), očuvana veličina $\frac{\partial}{\partial t} Q = 0$ kao u (3.88), na primjer.

U kvantnoj fizici jednačba gibanja opservable Q_a (Hermitskog operatora u Hilbertovom prostoru stanja) koja ne zavisi eksplicitno od vremena je: $i\hbar \frac{dQ_a}{dt} = [Q_a, H]$. Znači da je $Q_a = \text{const.}$ je očuvana veličina, ako i samo ako, komutira sa Hamiltonianom sustava. Indeks a dozvoljava mogućnost postojanja više konstanti gibanja. Kako Q_a ne ovisi o vremenu, vrijednost te opservable jednaka je njenoj početnoj vrijednosti. Uvjet $[Q_a, H] = 0$ ujedno osigurava da očuvana veličina komutira i sa operatorom vremenske evolucije stanja sustava: $U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$. Zato ako za neko stanje $|\psi\rangle$ u jednom trenutku vremena važi: $Q_a|\psi\rangle = q_a|\psi\rangle$, opservabla Q_a zadržava svoju sopstvenu vrijednost q_a u svakom trenutku. Za takve svojstvene vrijednosti se kaže da su ”dobri kvantni brojevi“ i nazivamo ih „nabojima“ čestica.

Stanja kvantnog sustava koja su povezana operacijom simetrije Lagrangiana (pri kojima Lagrangian ostaje invarijantan) nužno moraju imati istu energiju, što je još jedna posljedica uvjeta: $Q_a|\psi\rangle = q_a|\psi\rangle$. Zaista, ako su $|\psi\rangle$ i $|\chi\rangle$ dva svojstvena stanja Hamiltoniana (energije sustava) povezana operacijom simetrije: $Q_a|\psi\rangle = |\chi\rangle$, onda je

$$H|\psi\rangle = HQ_a|\chi\rangle = Q_aH|\chi\rangle = E_\chi Q_a|\chi\rangle = E_\chi|\psi\rangle, \quad (5.1)$$

što znači da je $E_\psi = E_\chi$.

U općem slučaju, Hilbertov prostor stanja separira se u podprostore unitarnih reprezentacija grupe simetrije unutar kojih sva stanja imaju istu energiju i možemo ih označavati svojstvenim vrijednostima energije i očuvanog naboja Q_a , na primjer, $|E_\psi, q_a\rangle$.

Ovakva razmatranja želimo primjeniti i u kvantnoj teoriji polja na energiju jednočestičnih stanja da nađemo relacije među masama elementarnih čestica. Ali, kako je u teoriji polja simetrija Lagrangiana ustvari simetrija kvantnih polja koja reprezentiraju određene čestice, ne mora nužno slijediti da će to biti i simetrija Fochovog prostora stanja teorije. Jednostavnije rečeno – ako su dva kvantna polja povezana transformacijom simetrije, ne mora nužno slijediti da su i jednočestična stanja tih polja povezana istom transformacijom simetrije. Simetrija više-čestičnih stanja biti će identična simetriji kvantnih polja u Lagrangianu teorije, ako i samo ako, je ispunjen dodatni uvjet: vakuum – osnovno stanje teorije, je invarijantan pri transformacijama grupe simetrija Lagrangiana. U kvantnoj teoriji polja vakuum $|0\rangle$ može, ali ne mora biti, invarijantan pri operacijama simetrije.

Ako je transformacija simetrije reprezentirana unitarnim operatorom $U(\varepsilon_a) = e^{i\varepsilon_a Q_a}$, uvjet invarijantnosti vakuuma je

$$U(\varepsilon_a)|0\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow Q_a|0\rangle = 0. \quad (5.2)$$

Neka su dva kvantna polja iz Lagrangiana teorije $\phi_1(x)$ i $\phi_2(x)$ povezana operacijom neke simetrije koju generira očuvani Hermitski operator Q , tj. neka važi

$$\phi_1(x) = i[Q, \phi_2(x)]. \quad (5.3)$$

Radi jednostavnosti uzмимо da operacija simetrije ostavlja invarijantnim polje $\phi_1(x)$, tj. da je $\phi_1(x)' = U(\varepsilon) \phi_1(x) U(\varepsilon)^{-1} = \phi_1(x)$, što je osigurano ako važi $[Q, \phi_1] = 0$. Kako se pri unitarnoj transformaciji simetrije polje $\phi_2(x)$ promjeni u

$$\begin{aligned} \phi_2(x)' &= U(\varepsilon) \phi_2(x) U(\varepsilon)^{-1} = e^{i\varepsilon Q} \phi_2(x) e^{-i\varepsilon Q} = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i\varepsilon)^m}{m!} Q^m \right] \phi_2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\varepsilon)^n}{n!} Q^n \right] = \\ &= \phi_2 + i\varepsilon [Q, \phi_2] + \frac{(i\varepsilon)^2}{2!} [Q, [Q, \phi_2]] + \dots = \phi_2(x) + \varepsilon \phi_1(x), \end{aligned}$$

znači da je varijacija polja $\phi_2(x)$ pri ovoj transformaciji

$$\delta \phi_2(x) = \phi_2(x)' - \phi_2(x) = \varepsilon \phi_1(x). \quad (5.4)$$

Polja $\phi_1(x)$ i $\phi_2(x)$ imaju svoj razvoj u Fourierov red po ravnim valovima kao u (3.46), pa zbog (5.3), isti uvjet mora važiti za njihove anihilacione i kreacione operatore, tj.

$$a_1 = i[Q, a_2], \quad (5.5)$$

gdje indeksi "1" i "2" označavaju čestice opisane poljima $\phi_1(x)$ i $\phi_2(x)$. Za jedno-čestična stanja dvaju polja onda vrijedi

$$|1\rangle = a_1^\dagger |0\rangle = i[Q, a_2^\dagger] |0\rangle = iQ a_2^\dagger |0\rangle - i a_2^\dagger Q |0\rangle = iQ |2\rangle - i a_2^\dagger Q |0\rangle. \quad (5.5)$$

Za jedno-čestična stanja vrijedi $|1\rangle = iQ |2\rangle$, samo ako vrijedi $Q |0\rangle = |0\rangle$, tj. ako je stanje bez čestica invarijantno pri djelovanju operatora simetrije. Ako vakuum nije invarijantan, tj. ako je simetrija Lagrangiana teorije spontano narušena, tada u pravilu, za jedno-čestična stanja nema degeneracije – čestice različitih polja vezanih operacijama simetrije imaju različite mase, što je svojstvo koje mora imati teorija elementarnih čestica.

Kako je za dokaz Noether teorema neophodna samo invarijantnost djelovanja (Lagrangiana), u teoriji i dalje postoji očuvana struja $\partial_\mu j_a^\mu(x) = 0$ i očuvani naboj $\partial_0 Q_a = 0$.

To znači da je spontano narušenje vrlo "blago" narušenje simetrije (soft breaking) koje može očuvati sva poželjna svojstva potpuno simetrične teorije kao gauge invarijantnost i renormalizabilnost. Osnovna razlika između simetrične i spontano narušene kvantne teorije polja (precizno, čija je simetrija Lagrangiana spontano narušena) je što kvantni brojevi q_a generatora simetrije Q_a više nisu "dobri kvantni brojevi" u smislu da se ne mogu koristiti za klasificiranje spektra masa jedno-čestičnih stanja teorije.

Prema tome, sve dosad izneseno sugerira da spontano narušene ne-Abelove lokalno gauge invarijantne kvantne teorije polja mogu biti dobar model za opis ponašanja kvarkova, leptona i gauge bozona – stvarnih elementarnih čestica materije. Naravno, treba još pokazati da takva teorija zaista postoji i da se njena predviđanja slažu sa eksperimentalno mjerenim svojstvima elementarnih čestica.

Najvažniji test su upravo mase elementarnih čestica – treba pokazati da se može definirati teorija polja čija jedno-čestična stanja imaju mase koje odgovaraju masama realnih čestica. Vjerojatno najveći uspeh SM je predviđanje postojanja medijatora slabih interakcija, gauge bozona W^\pm i Z^0 , sa točno određenim masama i širinama raspada. Desetak godina nakon teorijskih predviđanja u CERN-u su eksperimentalno detektirane fundamentalne, točkaste čestice identičnih svojstava.

Osnovna pretpostavka koja se pravi u SM da se konstruirira renormalizabilna teorija polja čija jedno-čestična stanja nisu degenerirana po masi, je postojanje, pored polja materije spina $\frac{1}{2}$ (kvarkovi i leptovi) i polja spina 1 medijatora interakcija (gauge bozoni), još i dodatno kvantno polje – Higgsovo polje, spina 0. To polje postoji u cijelom prostoru (kao i svako kvantno polje), a njegovi kreacioni operatori iz vakuuma "stvaraju" čestice tog polja – Higgsove bozone.

Ovo nije "mala" pretpostavka jer skalarno polje ili elementarne čestice spina 0 nikad dosad nisu detektirane. Mogućnost otkrića Higgs bozona je osnovni razlog zašto se u CERN-u gradi novi akcelerator LHC. Higgs bozon je ustvari još jedina neotkrivena i eksperimentalno neispitana elementarna čestica koja postoji u SM.

Da se lakše razumije Higgs mehanizam u SM, prvo na nekoliko jednostavnijih primjera ispitajmo svojstva spontanog narušenja simetrije.

5.2 Spontano narušenje diskretne simetrije

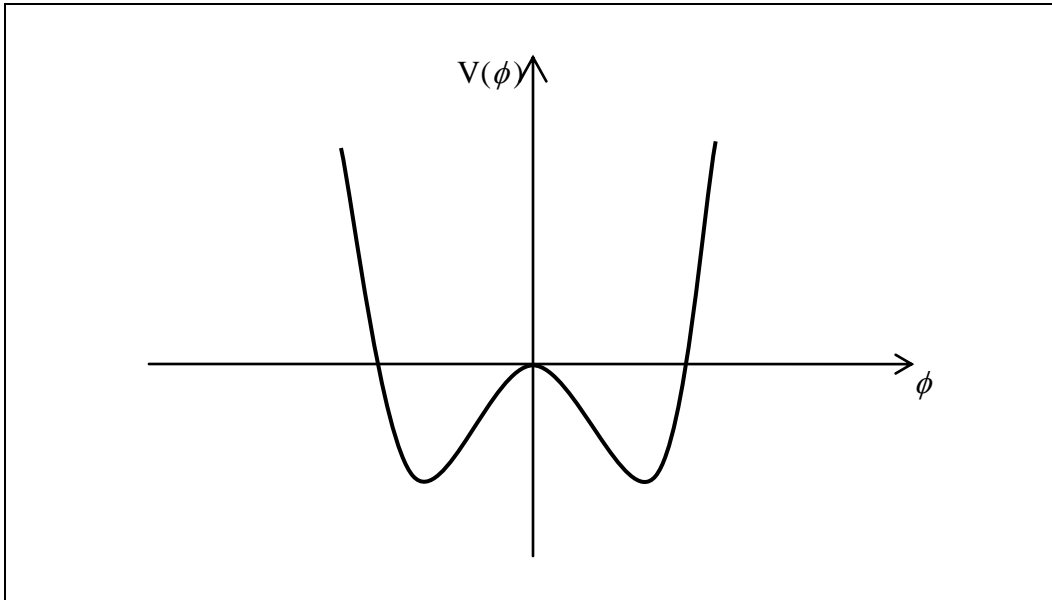
Razmotrimo prvo jednostavan slučaj klasične teorije polja da razumjemo fizikalne osnove. Renormalizabilni Lagrangian samo jednog skalarnog polja $\phi(x)$ je

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4}\lambda \phi^4. \quad (5.6)$$

Zasada su μ i λ samo realni parametri, uz uvjet da je konstanta jakosti ϕ^4 samo-interakcije pozitivna $\lambda > 0$, da bi potencijal, pa prema tome i Hamiltonian, bio ograničen odozdo za velike vrijednosti ϕ . Teorija ima diskretnu simetriju inverzije $\phi \rightarrow -\phi$. Da se nađe spektar teorije, treba prvo naći minimum potencijala koji je klasično osnovno stanje sustava (položaj stabilne ravnoteže). Da se ispituju male oscilacije (eksitacije) sustava, treba polje razviti u red oko osnovnog stanja i odrediti normalne modove titranja sustava. U teoriji polja osnovno stanje zovemo vakuum, a eksitacije normalnih modova sustava su čestice. Masa čestica je parametar uz član u Lagrangianu koji je kvadratan po poljima, kao u slučaju slobodnog skalarnog polja (3.28).

Pretpostavimo sad da je $\mu^2 > 0$. Tada je minimum potencijala – vakuum, $\phi = 0$ stanje, pa je μ^2 kvadrat mase skalarne čestice.

No, nema nijednog fizikalnog razloga zasto bi μ^2 moralo biti pozitivno. Ako je $\mu^2 < 0$, potencijal izgleda kao na Slici 5.1.



Slika 5.1

Minimum potencijala određen je sa

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi (\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0. \quad (5.7)$$

Stanje najniže energije je minimum i kinetičke i potencijalne energije. Minimum kinetičke energije je bilo koja konfiguracija polja $\phi(x) = \text{const}$. Stanje $\phi(x) = 0$ je lokalni maksimum, pa je vakuum teorije

$$\phi(x) = \pm \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm v. \quad (5.8)$$

v se naziva vakuumska očekivana vrijednost (vov) polja $\phi(x)$, jer je to vrijednost polja u osnovnom stanju sustava (ime naravno anticipira prijelaz u kvantnu teoriju gdje polje ϕ postaje operator koji ima očekivane vrijednosti u raznim kvantnim stanjima sustava).

Skalarno polje čiji vov je različit od nule naziva se Higgsovo polje. Odaberimo za vov Higgsova polja + znak u (5.8) – to je odabir koji spontano narušava diskretnu simetriju teorije (fizikalni sustav mora spontano odabrati jedno od dva moguća vakuum stanja). Za razvoj Lagrangiana oko vakuuma prvo redefiniramo polje

$$\phi(x) = v + \eta(x), \quad (5.9)$$

(u teoriji malih oscilacija ovo je ekvivalentno translaciji generaliziranih koordinata tako da je položaj stabilne ravnoteže u ishodištu). Zamjenom (5.9) u Lagrangian (5.6) lako se dobija Lagrangian polja $\eta(x)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta) (\partial_\mu \eta) - \frac{1}{2} 2\lambda v^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4. \quad (5.10)$$

Lagrangian (5.10) reprezentira normalnu klasičnu teoriju polja jer član kvadratan po polju $\eta(x)$ ima negativan znak, što znači da je masa Higgs bozona η

$$m_\eta^2 = 2\lambda v^2 = -2\mu^2 \quad (5.11)$$

Higgsovo polje ima η^3 i η^4 samointerakcije čije su konstante jakosti λv i $\frac{\lambda}{4}$. Kubična η^3 interakcija osigurava da Lagrangian (5.10) nema diskretnu simetriju originalne teorije.

Lagrangian teorije skalarnog polja (5.6) u slučaju spontanog narušenja simetrije $\mu^2 < 0$, ustvari je Lagrangian (5.10) skalarnog Higgs polja mase (5.11) – spontano narušenje simetrije dalo je masu skalarnom polju.

Ovakav efekt postoji u mnogim područjima fizike. Možda je najpoznatiji primjer permanentni magnet. Heisenbergov Lagrangian spin-spin interakcija valentnih elektrona u atomima feromagneta je rotaciono simetričan, ali bilo koje osnovno stanje permanentnog magneta očito nije – atomski spinovi poredani su u pravcu magnetskih polova.

5.3 Spontano narušenje kontinuirane simetrije

Razmotrimo u drugom koraku spontano narušenje kontinuirane globalne simetrije na primjeru kompleksnog skalarnog polja. Renormalizabilni Lagrangian (3.75) kompleksnog skalarna polja $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$, gdje su ϕ_1 i ϕ_2 realna klasična polja, koje ima ϕ^4 samo-interakcije, uz uvjet $\lambda > 0$, je

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi)^* - \mu^2 \phi \phi^* - \lambda (\phi \phi^*)^2. \quad (5.12)$$

Lagrangian teorije je invarijantan pri kontinuiranim globalnim U(1) gauge transformacijama rotacije u internom (ϕ_1, ϕ_2) prostoru teorije (rotacije oko z-osi za kut φ)

$$\phi' = e^{-i\varphi} \phi, \quad \phi'^* = e^{i\varphi} \phi^*, \quad (5.13)$$

kao u (3.77), ili pomoću realnih polja ϕ_1 i ϕ_2

$$\phi_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 \cos \varphi - \phi_2 \sin \varphi), \quad (5.14)$$

$$\phi_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 \sin \varphi + \phi_2 \cos \varphi).$$

Lagrangian teorije napisan pomoću realnih polja ϕ_1 i ϕ_2 mase μ je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2, \quad (5.15)$$

u kome su dva zadnja člana potencijalna energija. Za $\mu^2 > 0$ minimum potencijala je očigledno $\phi_1 = \phi_2 = 0$.

U slučaju spontanog narušenja simetrije za $\mu^2 < 0$ potencijal izgleda kao bi-kvadratna parabola sa Slike 5.1 zarotirana oko V-osi i ima beskonačno mnogo identičnih minimuma $V_0 = -\frac{\lambda}{4}v^4$ na kružnici radijusa

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda} = v^2. \quad (5.16)$$

Kao i u prethodnom primjeru, analiza teorije zahtijeva razvoj oko vakuuma. Za vakuum treba odabrati jedno između beskonačno mnogo osnovnih stanja iste energije – bilo koju točku na kružnici (5.16), tj. spontano narušiti U(1) simetriju teorije. Odaberimo proizvoljno točku $\phi_1 = v$ i $\phi_2 = 0$, pa napravimo zatim translaciju ishodišta

$$\phi_1(x) = \eta(x) + v, \quad \phi_2(x) = \chi(x), \quad (5.17)$$

uvodeći nova realna polja $\eta(x)$ i $\chi(x)$ oscilacija oko vakuuma.

Uvrštavanjem u (5.15) Lagrangian novih skalarnih polja $\eta(x)$ i $\chi(x)$ je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \frac{1}{2}(-2\mu^2)\eta^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \lambda v(\eta^3 + \eta\chi^2) - \frac{\lambda}{4}(\eta^4 + 2\eta^2\chi^2 + \chi^4) + \text{const.} \quad (5.18)$$

Konstantni član $\text{const.} = -V_0 = \frac{1}{4}\lambda v^4$ u Lagrangianu (5.18) ne utječe na jednadžbe gibanja i može se zanemariti.

Dobija se uobičajena renormalizabilna teorija dva interagujuća skalarna polja. Teorija sadrži Higgsovo polje $\eta(x)$ mase

$$m_\eta^2 = 2\lambda v^2 = -2\mu^2, \quad (5.19)$$

dok je drugo skalarno polje $\chi(x)$ bez mase. Oba realna polja imaju kvartične samointerakcije (η^4 i χ^4 članovi), a Higgsovo polje ima i kubne samointerakcije (η^3 član), te postoje kubne i kvartične međuinterakcije dva polja ($\eta\chi^2$ i $\eta^2\chi^2$ članovi). Nema člana s χ^2 , što znači da je polje $\chi(x)$ bez mase. U ovom primjeru vidimo da spontano narušenje globalne kontinuirane simetrije Lagrangiana dovodi do pojave polja bez mase.

Polje $\chi(x)$ je primjer Goldstoneova teorema: kad god se kontinuirana globalna simetrija Lagrangiana spontano naruši u teoriji se pojavljuje skalarna čestica bez mase koja se naziva Goldstoneov bozon. Lagrangian (5.18) više nema originalnu $U(1)$ simetriju koja je spontano narušena izborom jednog od beskonačno mnogo mogućih osnovnih stanja sa kružnice (5.16), tako da su vov originalnih polja

$$\langle 0|\phi_1|0\rangle = v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}; \quad \langle 0|\phi_2|0\rangle = 0, \quad (5.20)$$

dok je za nova polja koja reprezentiraju fluktuacije oko osnovnog stanja

$$\langle 0|\eta|0\rangle = \langle 0|\chi|0\rangle = 0. \quad (5.21)$$

Spektar teorije je fizikalno potpuno razumljiv – polje $\eta(x)$ predstavlja radijalne, a polje $\chi(x)$ tangencijalne oscilacije oko vakuuma. Kako bilo kakva promjena radijalne koordinate znači povećanje energije uslijed povećanja potencijala, polje $\eta(x)$ ima masu (5.19). Polje $\chi(x)$ reprezentira fluktuacije u azimutalnom φ -pravcu duž kružnice (5.16) degeneriranih osnovnih stanja. Kako φ -fluktuacije ne koštaju energije polje (i čestice koje to polje reprezentira) su bez mase.

5.4 Spontano narušenje lokalne gauge simetrije

Već smo vidjeli kako spontano narušenje diskretne simetrije može generirati masu bezmasenog kvantnog polja, a spontano narušenje kontinuirane simetrije može generirati kvantno polje bez mase. Kombinacija oba efekta je moguća pri spontanom narušenju lokalne gauge (baždarne) simetrije.

U Poglavlju 4. smo vidjeli da lokalna gauge invarijantnost Lagrangiana zahtijeva postojanje bezmasenog polja A_μ gauge bozona koje ulazi u kovarijantnu derivaciju $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$ kao u (4.68). Najjednostavnija takva teorija je skalarna elektrodinamika – teorija kompleksnog skalarnog polja ϕ (ili dva realna polja ϕ_1 i ϕ_2) mase μ i naboja g i polja fotona (gauge bozona) bez mase čiji je Lagrangian

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (5.22)$$

gdje je

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (5.23)$$

Može se pokazati da je teorija invarijantna pri lokalnim U(1) gauge transformacijama

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-i\Lambda(x)} \phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \Lambda(x), \quad (5.24)$$

kao u (4.57). Za $\mu^2 > 0$ Lagrangian (5.22) opisuje interakcije nabijene skalarne čestice mase μ i naboja g s elektromagnetskim poljem A_μ , tj. vektorskim česticama bez mase i naboja – fotonima. Ovakva teorija polja ima četiri stupnja slobode (u svakoj točki x_μ) – dva realna skalarna polja ϕ_1 i ϕ_2 i dva transverzalna stupnja slobode polarizacije polja fotona A_μ .

Da analiziramo SSB (spontaneous symmetry breaking) ove lokalno gauge invarijantne teorije za $\mu^2 < 0$ možemo prvo napisati kompleksno skalarno polje $\phi(x)$ u Eulerovom obliku pomoću dva realna polja $\eta(x)$ i $\chi(x)$, tj.

$$\phi(x) = \eta(x) e^{i\chi(x)}, \quad (5.25)$$

i iskoristiti lokalnu gauge (faznu) transformaciju polja $\phi(x)$ da odmah „odrotiramo“ iz teorije polje $\chi(x)$, jer uvijek u (5.24) možemo umjesto ϕ odabrati novo polje ϕ' za koje je $\Lambda(x) = \chi(x)$, tako da polje $\chi(x)$ potpuno nestane iz teorije. Takav odabir naziva se izbor unitarnog gauge uvjeta. U primjeru u 5.3 takav izbor nije bio moguć jer je gauge transformacija (5.13) samo globalna.

Kao i prije minimum Lagrangiana (5.22) nije u $\phi = 0$ već u minimumu potencijala V_0 za $|\phi| = v$ kao u (5.16).

Minimum klasične teorije biramo za vakuum kvantne teorije. Kvantizaciju u odnosu na vakuum vršimo parametrizirajući polja prema

$$\phi(x) = \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}}. \quad (5.26)$$

Lagrangian (5.22) teorije napisan pomoću novog realnog polja $h(x)$ je onda

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu h)(\partial_\mu h) + \frac{g^2 v^2}{2} A^\mu A_\mu - \lambda v^2 h^2 - \lambda v h^3 - \frac{\lambda}{4} h^4 + g^2 v h A^\mu A_\mu + \frac{1}{2} g^2 h^2 A^\mu A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (5.27)$$

Spektar teorije sastoji se od realnog skalarnog Higgs polja $h(x)$ mase $m_h = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$ i naboja g koje ima h^3 i h^4 samointerakcije, kao i hAA i h^2AA interakcije sa poljem masivnog gauge bozona $A^\mu(x)$ mase $m_A = gv$. Jasno je da masa gauge bozona dolazi iz kinetičkog člana polja ϕ u (5.22), precizno člana interakcije $g^2 \phi \phi^* A^\mu A_\mu$, koji poslije translacije polja (5.26) daje $\frac{1}{2} g^2 v^2 A^\mu A_\mu$ maseni član u Lagrangianu kao u (3.22).

Broj stupnjeva slobode teorije nije se promjenio – realno Higgs polje $h(x)$ ima jedan, ali masivno vektorsko polje $A^\mu(x)$ ima tri stupnja slobode koji odgovaraju trima mogućim vrijednostima z-komponente spina – 1, 0 i 1. Iz teorije je „nestalo“ jedno skalarno polje $\chi(x)$ koje je trebalo biti Goldstonov bozon narušene kontinuirane simetrije, ali je umjesto toga „postalo“ longitudinalni stupanj slobode polarizacije polja masivnog gauge bozona $A^\mu(x)$. Ovo se detaljnije vidi ako se SSB izvede koristeći parametrizaciju

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + h(x) + i\chi(x)], \quad (5.28)$$

kao u (5.17). Tada se dobije maseni član za gauge bozon, ali se pojavi i $A^\mu \partial_\mu \chi$ član koji se mora eliminirati dijagonalizacijom – kvadratni članovi u Lagrangianu moraju sadržavati samo po jedno polje (taj član naizgled dozvoljava promjenu $A_\mu \leftrightarrow \chi$ tijekom gibanja), koja se može ostvariti odabirom gauge transformacije koja iz teorije eliminira polje $\chi(x)$.

Spontano narušenje simetrije u lokalno gauge invarijantnoj teoriji polja može generirati masu gauge bozona! Takav način generiranje mase čestica naziva se Higgs mehanizam.

Originalna teorija (5.22) bila je lokalno gauge invarijantna, pa onda i renormalizabilna. SSB zahtjeva samo algebarske manipulacije (redefinicije polja), tako da je i spontano narušena teorija (5.27) lokalno gauge invarijantna, pa i renormalizabilna, iako sadrži masivno vektorsko polje. Lagrangian ostaje gauge invarijantan (pa važi Noether teorem), ali Higgs polje dobija vov različiti od nule, pa vakuum teorije narušava lokalnu gauge simetriju. Bezmaseni gauge bozon simetrične teorije pretvara se u masivni gauge bozon spontano narušene teorije.

Masa gauge bozona g_v određena je jakošću interakcije (nabojem) g i vakumskom očekivanom vrijednošću Higgs polja v , dok masa Higgs bozona h zavisi od v , ali i od konstante samointerakcije Higgs polja λ .

Higgs mehanizam daje nadu da je moguće konstruirati renormalizabilnu lokalno gauge invarijantnu teoriju elementarnih čestica u kojoj medijatori slabih interakcija – slabi gauge bozoni W^\pm i Z imaju mase koje se slažu s eksperimentom – upravo to je SM.

Sad konačno imamo sve elemente neophodne za formuliranje kompletne teorije jakih i elektro-slabih interakcija elementarnih čestica – Standardnog Modela.

Zadaci:

Zadatak 5.1. Pokazati da kvantizacijom u skladu s (5.17) iz (5.15) slijedi Lagrangian spontano narušene teorije (5.18).

Zadatak 5.2. Pretpostavljajući da je (5.15) Lagrangian kvantne teorije polja naći osnovne Feynmanove dijagrame teorije (propagatore i vertekse).

Zadatak 5.3. Pretpostavljajući da je (5.18) Lagrangian kvantne teorije polja naći osnovne Feynmanove dijagrame teorije (propagatore i vertekse).

Zadatak 5.4. Pokazati da se iz (5.15) poslije translacije polja (5.17) zaista dobija Lagrangian (5.18).

Zadatak 5.5. Pokazati invarijantanost Lagrangiana (5.22) pri lokalnim $U(1)$ gauge transformacijama (5.24).

Zadatak 5.6. Napisati Lagrangian skalarne elektrodinamike (5.22) pomoću kompleksnog skalarnog polja $\phi(x)$ u eksponencijalnom obliku (5.25).

Zadatak 5.7. Pokazati da se iz Lagrangiana (5.22) zamjenom (5.26) dobija Lagrangian (5.27).

Zadatak 5.8. Eksplicitno provesti SSB Lagrangiana (5.22) translacijom polja (5.28) i iskoristiti gauge transformacije da članovi kvadratni po poljima postanu dijagonalni.

6. Lagrangian Standardnog Modela elementarnih čestica

SM je teorija gibanja sustava elementarnih čestica. Elementarne čestice su kvarkovi, leptoni, gauge bozoni i Higgs bozon kako smo vidjeli u Poglavlju 1. To su čestice spina $\frac{1}{2}$, 1 i 0 opisane odgovarajućim kvantnim poljima. Slobodne Lagrangiane takvih polja smo razmatrali u Poglavlju 3. Sile među elementarnim česticama Standardnog Modela su jaka i elektro-slaba interakcija. Interakcije se u teoriju uvode na jedinstven način pomoću principa lokalne gauge invarijantnosti. Tako se svakom generatoru grupe gauge simetrija Lagrangiana materije \mathcal{L}_m pridruži polje odgovarajućeg gauge bozona koji je medijator te interakcije, kako je pokazano u Poglavlju 4.4. Grupa gauge simetrija Lagrangiana materije \mathcal{L}_m je $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Lagrangian materije je zbroj $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_S$. Prvi član \mathcal{L}_f je Lagrangian slobodnih fermiona (kvarkova i leptona) bez mase. \mathcal{L}_S je gauge simetrični Lagrangian skalarnog Higgs polja čije osnovno stanje narušava lokalnu elektro-slabu gauge simetriju. Jaka i elektro-slabe interakcije među česticama posljedica su interakcija sa gauge bozonima koji u teoriju ulaze kad se obična derivacija ∂^μ zamijeni kovarijantnom D^μ u \mathcal{L}_m . Tako dobijeni Lagrangian je onda invarijantan pri $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ lokalnim gauge transformacijama. Ukupni \mathcal{L}_{SM} Lagrangian SM sadrži još i Lagrangiane \mathcal{L}_g (4.141) za svako od 12 polja gauge bozona (4 elektro-slaba i 8 gluona). \mathcal{L}_g je takođe $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ lokalno gauge invarijantan.

Ukupni \mathcal{L}_{SM} simetrični Lagrangian SM je

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_f(\partial^\mu \rightarrow D^\mu) + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_g, \quad (6.1)$$

gdje u prvom članu ($\partial^\mu \rightarrow D^\mu$) znači da običnu derivaciju treba zamjeniti kovarijantnom. Kovarijantna derivacija (4.128) je

$$D^\mu = \partial^\mu + i g_1 \frac{Y}{2} B^\mu + i g_2 \frac{\tau_i}{2} W_i^\mu + i g_3 \frac{\lambda_a}{2} G_a^\mu, \quad (6.2)$$

gdje su konstante g_1 , g_2 i g_3 jakosti interakcija gauge grupa $U(1)_Y$, $SU(2)_L$ i $SU(3)_c$ za sada proizvoljni realni brojevi. Lagrangian \mathcal{L}_g elektro-slabih i jakih gauge bozona B_μ , W_μ^i i G_μ^a je

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a, \quad (6.3)$$

gdje su tenzori polja

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, & \text{za } U(1)_Y \\ W_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g_2 \varepsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, & \text{za } SU(2)_L \\ G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_3 f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c, & \text{za } SU(3)_c \end{aligned} \quad (6.4)$$

kao u (4.139). U gornjim izrazima SU(2) indeksi su $i,j,k = 1,2,3$, a SU(3) indeksi a,b,c uzimaju vrijednosti $1,2,\dots,8$. τ_i su Pauli matrice (3.97), a λ_a^μ su 8 Gell-Mann-ovih matrica (4.120) grupe SU(3) čije su strukturne konstante f_{abc} (4.123).

Da bi se takva simetrična teorija u kojoj su sve čestice bez mase slagala sa eksperimentima, mora se spontano narušiti elektro-slaba gauge simetrija. Narušenje gauge simetrije mora biti takvo da Higgs mehanizam generira mase svih čestica, kako smo djelimično vidjeli u Poglavlju 5. Sada treba razmotriti detalje te procedure.

Prvi korak je točna specifikacija globalno gauge simetričnog Lagrangiana kvarkova i leptona. Kako su sve interakcije fermiona 2. i 3. familije identične onima iz prve familije (razlika je samo u masi fermiona), dovoljno je razmatrati samo leptone i kvarkove prve familije: elektronski neutrino ν_e i elektron e^- , te u i d – kvark, pa na kraju Lagrangianu dodati iste članove za drugu (ν_μ, μ^-, c, s) i treću familiju (ν_τ, τ^-, t, b). Te dodatne članove nećemo ni pisati u interesu kompaktnije notacije.

Kvarkovi i leptoni su čestice spina $\frac{1}{2}$ i opisuju se Diracovim poljima. Ali, način na koji fermionska polja ulaze u Lagrangian SM je kompliciran jer zavisi od svojstava interakcija među česticama i spontanog narušenja simetrije. Polja leptona i kvarkova, pa time i fermionska jednočestična stanja, slažu se u multiplete gauge grupa $SU(2)_L \times U(1)_Y$ elektro-slabih i $SU(3)_c$ jakih interakcija.

Osnovni problem teorije su slabe interakcije koje narušavaju parnost, pa imaju $V - A$ strukturu (3.163), tj. razlikuju lijeva i desna fermionska stanja (3.160). Zato je svaki fermion u \mathcal{L}_{SM} opisan sa dva spinorska polja ψ_L i ψ_R . Na primjer, polje elektrona e^- se u SM opisuje pomoću dva stanja heliciteta – lijevog i desnog e^-_L i e^-_R

$$e^-_L = P_L \psi_{e^-} = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi_{e^-} \quad \text{i} \quad e^-_R = P_R \psi_{e^-} = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi_{e^-}, \quad (6.5)$$

gdje je polje $\psi_{e^-}(x)$ četvero-komponentni spinor koji je rješenje Diracove jednadžbe (3.124) za slobodni elektron. Isto važi za svako fermionsko polje – postoje lijeva L i desna D stanja svakog fermiona, osim neutrina. U SM postoje samo lijeva polja neutrina (i samo desna polja antineutrina), tj. ne postoji ν_{eR} stanje, što prema (3.162) garantira da neutriini u SM imaju masu nula. Notacija je dodatno komplicirana jer se za svako fermionsko polje $f(x)$ često koristi i Diracov spinor f i polja određenog heliciteta f_L i f_R . Osnovne formule za prijelaz sa jedne na drugu notaciju su

$$f_{L,R} = P_{L,R} f; \quad f = f_L + f_R; \quad \bar{f}_{L,R} = \bar{f} P_{R,L}; \quad \bar{f} f = \bar{f}_L f_R + \bar{f}_R f_L;$$

$$\bar{f} \gamma^\mu f = \bar{f}_L \gamma^\mu f_L + \bar{f}_R \gamma^\mu f_R; \quad \bar{f}_L \gamma^\mu f_L = \frac{1}{2} \bar{f} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) f; \quad \bar{f}_R \gamma^\mu f_R = \frac{1}{2} \bar{f} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) f,$$

kao što je pokazano u Poglavlju 3.5.

U SM sva lijeva fermionska polja su dubleti (dvokomponentni spinori, tj. 2×1 matrice), a desna singleti (1×1 matrice) u odnosu na $SU(2)_L$ grupu simetrija slabih interakcija. To znači da postoje tri leptonska stanja (u prvoj familiji)

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} - SU(2) \text{ dublet i } e_R^- - SU(2) \text{ singlet.} \quad (6.6)$$

Komponente operatora slabog naboja $\frac{\tau_i}{2}$ u kovarijantnoj derivaciji (6.2), koje su 2×2 Hermitske matrice, djeluju samo na lijeva fermionska stanja koja su $SU(2)$ dubleti, a po definiciji, kad djeluju na desna stanja – $SU(2)$ singlete, daju nulu. To znači da je kovarijantna derivacija (6.2) ustvari nekoliko različitih izraza – kad djeluju na leptonska lijeva L stanja (6.2) je $D^\mu = \partial^\mu + i g_1 \frac{Y_L}{2} B^\mu + i g_2 \frac{\tau_i}{2} W_i^\mu$, ali kad D^μ djeluje na R stanja leptona kovarijantna derivacija je samo $D^\mu = \partial^\mu + i g_1 \frac{Y_R}{2} B^\mu$. Vrijednost hipernaboja Y lijevih Y_L i desnih Y_R fermionskih stanja ne mora biti jednaka zbog narušenja $L \leftrightarrow R$ simetrije (narušenje parnosti) u slabim interakcijama.

Napomena: Danas znamo da neutrini imaju vrlo malu masu, ali još uvijek ne znamo točno koliku. Ukoliko se želi opis masivnih neutrina u teoriju treba dodati i njihova desna polja, kao i za sve ostale fermione. Radi jednostavnosti zanemarimo tu dodatnu komplikaciju.

Za razliku od leptona, kvarkovi imaju i jake interakcije, pa se kvarkovska polja slažu i u multiplete $SU(3)_c$ grupe jakih interakcija.

I lijeva i desna kvarkovska stanja su tripleti u odnosu na grupu $SU(3)_c$.

Na kvarkovska stanja – triplete [tro-komponentne spinore, tj. 3×1 matrice, kao u (1.3)] djeluju 3×3 Gell-Mann matrice λ_a generatora grupe koji su operatori boje. To znači da svako kvarkovsko stanje nosi kvantni broj $SU(3)_c$ grupe – boju: crvenu, zelenu ili plavu, što označavamo indeksom $\alpha = 1, 2, 3$.

Prema tome u SM postoji ukupno 12 stanja u i d kvarkova (ne računajući isto toliko antikvarkovskih stanja)

$$\begin{pmatrix} u_{\alpha L} \\ d_{\alpha L} \end{pmatrix} - SU(2) \text{ dublet i } SU(3) \text{ triplet i } u_{\alpha R}, d_{\alpha R} - SU(2) \text{ singlet i } SU(3) \text{ triplet.} \quad (6.7)$$

Sva leptonska stanja su singleti u odnosu na $SU(3)_c$.

Da bolje razumijemo ovu kompaktnu notaciju napišimo eksplicitno djelovanje SU(3) člana $i g_3 \left(\vec{G}_\mu \cdot \frac{\vec{\lambda}}{2} \right)$ iz kovarijantne derivacije (6.2) na kvarkovska stanja.

Jednočestično stanje q bilo kojeg kvarka u SM opisano je valnom funkcijom koja je produkt pet valnih funkcija (faktora)

$$q = \left(\begin{array}{c} \text{prostorno-} \\ \text{vremenski} \\ \text{faktor} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{spin} \\ \text{faktor} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{U(1)} \\ \text{faktor} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{SU(2)} \\ \text{faktor} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{SU(3)} \\ \text{faktor} \end{array} \right). \quad (6.8)$$

Za kvark momenta p^μ prostorno-vremenski faktor je ravni val $N \exp(\pm i p^\mu x_\mu)$; spin faktor je 4-komponentni spinor $u^r(p)$, tako da je produkt prva dva faktora $\psi^r(x)$ jedno od rješenja Diracove jednadžbe (3.147) za slobodni fermion pomnoženo projektom P_L (P_R) za lijeva (desna) stanja, kao u (3.155). U(1) faktor je samo realan broj Y – hipernaboj kvarka. SU(2) faktor je za lijeva stanja koja su dubleti, dvokomponentni spinor (lijeva kvarkovska stanja se slažu u 2×1 SU(2) matricu – stanja u-kvarka su gornji, a d-kvarka donji elementi), a desna su singleti (1×1 matrice). Na kraju, SU(3) faktor je jedno od tripletnih (tro-komponentni spinor) svojstvenih stanja boje iz (1.3). Svaki pojedini faktor (valna funkcija) je ortonormirana. Razni operatori u teoriji djeluju samo na svoja vlastita stanja. Operator derivacije djeluje na prvi faktor, operatori slabog spina τ^i djeluju samo na SU(2) faktore (precizno samo na dublete), a operatori boje λ^a samo na SU(3) faktore.

Na primjer, stanje u-kvarka $u_{\alpha L}$ koje je ustvari produkt gornjeg elementa SU(2)

dubleta u_L i SU(3) tripleta, tako da je: $u_{1L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u_L$; $u_{2L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u_L$ i $u_{3L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u_L$.

Pišući eksplicitno SU(3) indekse $a = 1, 2, \dots, 8$ i $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, djelovanje operatora boje na L stanje u-kvarka je

$$i g_3 G_\mu^a \left(\frac{\lambda_a}{2} \right)_{\alpha\beta} u_{\beta L} = i g_3 G_\mu^1 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_L + \dots = \frac{i}{2} g_3 G_\mu^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_L + \dots, \quad (6.8)$$

gdje točkice označavaju sumu preostala 23 člana, a u_L označava da treba još pomnožiti sa gornjim elementom SU(2) dubleta (6.7) koji je L stanje Diracovog spinora kao (3.160) i koji nismo eksplicitno pisali jer je, po definiciji, djelovanje SU(3) operatora na SU(2) stanja nula. Kao i u slučaju leptona, djelovanje kovarijantne derivacije (6.2) na desna R

kvarkovska stanja koja su SU(2)_L singleti, je $D^\mu = \partial^\mu + i g_1 \frac{Y_R}{2} B^\mu + i g_3 \frac{\lambda_a}{2} G_a^\mu$, dok na

kvarkovska L stanja djeluje kompletno $D^\mu = \partial^\mu + i g_1 \frac{Y_L}{2} B^\mu + i g_2 \frac{\tau_i}{2} W_i^\mu + i g_3 \frac{\lambda_a}{2} G_a^\mu$.

8 gluona G_μ^a medijatora jakih interakcija djeluju na kvarkove (i gluone) i mijenjaju njihovu boju. Gluoni ustvari nose dve boje: boju + antiboju (jednu boju kreiraju, a drugu anihiliraju). Iako takvih kombinacija boja/antiboja ima devet, postoji svega osam gluona, jer je kombinacija $c\bar{c} + z\bar{z} + p\bar{p}$ kolor singlet bez boje, kao simetrična valna funkcija mezona (1.4). To je lako provjeriti pomoću eksplicitne reprezentacije (4.120) operatora boje Gell-Mann matricama (Zadatak 6. 1.).

Na primjer, djelovanje operatora $\hat{C}_1 = \frac{\lambda_1}{2}$ na kvarkovska stanja (1.3) je

$$\begin{aligned} G_\mu^1 \frac{\lambda_1}{2} u_1 &= G_\mu^1 \frac{\lambda_1}{2} u_c = G_\mu^1 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = G_\mu^1 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} G_\mu^1 u_z = \frac{1}{2} G_\mu^1 u_2, \\ G_\mu^1 \frac{\lambda_1}{2} u_2 &= G_\mu^1 \frac{\lambda_1}{2} u_z = G_\mu^1 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = G_\mu^1 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} G_\mu^1 u_c = \frac{1}{2} G_\mu^1 u_1, \\ G_\mu^1 \frac{\lambda_1}{2} u_3 &= G_\mu^1 \frac{\lambda_1}{2} u_p = G_\mu^1 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Prvi od gornjih izraza razumijemo kao promjenu boje crvenog u-kvarka u zeleni u-kvark kao rezultat apsorpcije (emisije) gluona G_μ^1 .

Prema tome, prva familija fermiona (ν_e, e^-, u, d) u SM opisana je sa 15 Diracovih polja (stanja)

$$f = l_L, e_R, q_L, u_R, d_R, \quad (6.10)$$

gdje smo notaciju još više kondenzirali uvođenjem oznaka za lijeva leptonska l_L i kvarkovska q_L stanja

$$l_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad q_L = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ d_\alpha \end{pmatrix}_L, \quad u_R \equiv u_{\alpha R}, \quad d_R \equiv d_{\alpha R}. \quad (6.11)$$

Sva kvarkovska polja u (6.10) imaju tripletni $SU(3)_c$ indeks boje $\alpha = 1,2,3$.

Fermionski dio Lagrangiana SM dobijamo ako za svako od polja (6.10) napišemo kinetički član Diracovog Lagrangiana $\bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ u kome onda zamjenimo $\partial^\mu \rightarrow D^\mu$, tako da fermionski Lagrangian postaje

$$\mathcal{L}_f = \sum_f \bar{f} i \gamma^\mu D_\mu f, \quad (6.12)$$

gdje je kovarijantna derivacija (6.2), a zbraja se po svim fermionskim poljima (6.10). Kako su fermionska polja složena u odgovarajuće multiplete grupe $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ tako se dobija lokalno gauge invarijantan Lagrangian. Zbog prisustva polja gauge bozona u (6.2), jasno je da Lagrangian (6.12) uključuje članove interakcije fermion-gauge bozon oblika $\bar{f} B_\mu f$, $\bar{f} W_\mu^i f$ i $\bar{f} G_\mu^a f$.

Razmotriti ukratko pitanje masa čestica u Lagrangianu SM (6.1). Već smo vidjeli da lokalna gauge invarijantnost Lagrangiana zahtijeva da su mase svih gauge bozona nula kao u elektrodinamici. Na primjer, maseni član oblika $\frac{1}{2} m_B^2 B^\mu B_\mu$ očigledno nije invarijantan pri $U(1)_Y$ lokalnoj gauge transformaciji

$$B_\mu(x) \rightarrow B'_\mu(x) = B_\mu(x) + \frac{1}{g_1} \partial_\mu \Lambda(x),$$

gdje je $\Lambda(x)$ proizvoljno skalarno polje kao u (4.54). Zato Lagrangian gauge polja \mathcal{L}_g ne sadrži masene članove.

Slabe interakcije razlikuju lijeva i desna fermionska stanja koja su u SM različiti $SU(2)_L$ multipleti – L stanja su dubleti, a R stanja su singleti kao u (6.6) i (6.7), što je odraz narušenja parnosti u slabim interakcijama. Želimo li $SU(2)_L$ gauge invarijantni Lagrangian sa takvim fermionskim poljima, onda i svi fermioni u teoriji moraju biti bez mase. Prema (3.162) maseni član fermionskog polja je

$$m \bar{\psi} \psi = m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R), \quad (6.13)$$

što sigurno nije $SU(2)_L$ invarijantno, jer produkt dubleta i singleta nije $SU(2)_L$ singlet. Polja svih fermiona i gauge bozona u Lagrangianu (6.1) su bez mase.

Gauge simetrični \mathcal{L}_S Lagrangian skalarnog Higgs polja sadrži maseni član u kojem odabiremo $\mu^2 < 0$ što uzrokuje spontano narušenje gauge simetrije.

Ukupni SM Lagrangian za prvu familiju fermiona je onda

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{Yuk.} = \sum_f \bar{f} i \gamma^\mu D_\mu f - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{Yuk.}, \quad (6.14)$$

gdje su fermionska polja f data u (6.10), izraz (6.4) daje tenzore polja gauge bozona, a kovarijantna derivacija je definirana u (6.2). Lagrangian \mathcal{L}_S skalarnog Higgs polja i Yukawa Lagrangian $\mathcal{L}_{Yuk.}$ koji daje masu fermionima biti će definirani malo kasnije izrazima (6.48) i (6.77).

Kako leptoni ne nose boju (nemaju jake interakcije), SU(3) član (zadnji član) u kovarijantnoj derivaciji (6.2) djeluje samo na kvarkovska polja i to isti način i na L i na R polja. Ukupni Lagrangian \mathcal{L}_{SM} (6.14) može se prikazati kao zbroj SU(3) dijela \mathcal{L}_q^{QCD} Lagrangiana kvantne kromodinamike i $\mathcal{L}_{SU(2)\times U(1)}$ elektro-slabog dijela.

\mathcal{L}_q^{QCD} je ukupni Lagrangian jakih interakcija kvarkovskih polja i gluona

$$\mathcal{L}_q^{QCD} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \sum_{q=u,d} \bar{q}^\alpha i \gamma_\mu \left(\partial^\mu \delta_{\alpha\beta} + i \frac{g_3}{2} G_a^\mu \lambda_{\alpha\beta}^a \right) q^\beta, \quad (6.15)$$

gdje su q^α Diracovi spinori (spinorski indeksi nisu eksplicitno napisani) u i d kvarkovskih polja, $\alpha = 1,2,3$ je indeks boje, a tenzor polja gluona $G_a^{\mu\nu}$ je definiran u (6.4).

Elektro-slabe interakcije elementarnih čestica opisane su Lagrangianom

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SU(2)\times U(1)} &= \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_S = \\ &= \sum_f \bar{f} i \gamma^\mu \left(\partial^\mu + i g_1 \frac{Y}{2} B^\mu + i g_2 \frac{\tau_i}{2} W_i^\mu \right) f - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i + \mathcal{L}_S, \end{aligned} \quad (6.16)$$

gdje se zbraja po svim fermionskim (i leptonskim i kvarkovskim) poljima (6.10).

Yang-Mills teorem iz Poglavlja 4.4 osigurava da je SM Lagrangian (6.14) zaista $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ lokalno gauge invarijantan, što jamči renormalizabilnost teorije. Lokalna gauge invarijantnost ujedno znači da su sva polja u SM Lagrangianu bez mase. Jedini način da se u teoriju uvedu mase čestica, i gauge bozona i fermiona, je spontano narušenje simetrije, tj. Higgs mehanizam.

Preostaje da vidimo da se iz simetričnog SM Lagrangiana (6.14) spontanim narušenjem simetrije zaista dobija Lagrangian teorije elementarnih čestica koja se slaže sa eksperimentalnim rezultatima. Eksperimenti pokazuju da su jedine elementarne čestice bez mase su gluoni, foton i neutriini.

Za razliku od na primjer elektrona, elektronski neutrino nema masu samo zato što se u bazična polja u Lagrangianu (6.14) ne uključuje polje desnog elektronskog neutrina ν_{eR} . Kao što je prije napomenuto, ništa nas ne sprečava da u Lagrangian (6.14) uključimo i R stanja neutrina, što bi osiguralo da i neutriini dobiju mase na isti način kao i ostali fermioni spontanom narušenjem lokalne $SU(2)_L \times U(1)_Y$ elektro-slabe simetrije. Pored gluona koji su zatočeni unutar hadrona, tada u teoriji preostaje samo jedna čestica bez mase – foton, medijator jedine interakcije među elementarnim česticama dugog doseg – elektromagnetske interakcije.

Prvo treba provjeriti da iz Lagrangiana (6.14) stvarno slijede poznate elektro-slabe interakcije realnih elementarnih čestica.

6.1 Elektro-slabe interakcije

Razmotrimo prvo elektro-slabe interakcije leptona. Leptonski dio SM Lagrangiana (6.14) je

$$\mathcal{L}_l = \bar{l}_L i \gamma^\mu D_\mu l_L + \bar{e}_R i \gamma^\mu D_\mu e_R, \quad (6.17)$$

ili pomoću polja neutrina ν_e i elektrona e^-

$$\mathcal{L}_l = \overline{(\nu_e \ e^-)}_L i \gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L + \bar{e}_R i \gamma^\mu D_\mu e_R. \quad (6.18)$$

Članovi u gornjem Lagrangianu koji daju elektro-slabe lepton-gauge bozon interakcije su oblika $\bar{l} B_\mu l$ i $\bar{l} W_\mu^i l$ i dolaze iz odgovarajućih članova (drugog i trećeg) u kovarijantnoj derivaciji (6.2). Ti članovi su

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l^{\text{int.}} = & -g_1 \frac{Y_L}{2} (\bar{\nu}_{eL} \ \bar{e}_L^-) \gamma^\mu B_\mu \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} - \frac{g_2}{2} (\bar{\nu}_{eL} \ \bar{e}_L^-) \gamma^\mu \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - i W_\mu^2 \\ W_\mu^1 + i W_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \\ & - g_1 \frac{Y_R}{2} \bar{e}_R \gamma^\mu B_\mu e_R. \end{aligned}$$

Definiramo li polja fizikalnih nabijenih slabih gauge bozona W^\pm kao

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2), \quad (6.19)$$

Lagrangian interakcije leptona i $SU(2)_L \times U(1)_Y$ gauge bozona postaje

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l^{\text{int.}} = & -\frac{1}{2} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) (g_1 Y_L B_\mu + g_2 W_\mu^3) - \\ & -\frac{1}{2} [(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) (g_1 Y_L B_\mu - g_2 W_\mu^3) + (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) g_1 Y_R B_\mu] - \\ & -\frac{\sqrt{2}}{2} g_2 [(\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L) W_\mu^- + (\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L) W_\mu^+]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Iz ovog Lagrangiana prvo treba izdvojiti elektro-magnetske interakcije, tj. kvantnu elektrodinamiku elektrona i fotona. Prva dva člana na desnoj strani pokazuju da i neutrino i elektron interaguju sa oba neutralna gauge bozona B i W^3 . Električni naboj neutrina je $Q_{\nu_e} = 0$ (Q je električni naboj čestice u jedinicama naboja pozitrona, npr. za elektron je $Q_e = -1$), pa neutrino nema interakcija sa fotonom A_μ , već ima samo slabe interakcije. Treba naći linearnu kombinaciju gauge bozona B i W^3 koja pretstavlja fizikalne neutralne gauge bozone Z i A , tako da prvi član u (6.20) bude samo $\bar{\nu} Z \nu$ interakcija.

Opća linearna transformacija koja ortonormirana stanja (B, W^3) prevodi u ortonormirana stanja (A, Z) je rotacija oblika

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & \sin\theta_w \\ -\sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix},$$

tj.

$$B_\mu = A_\mu \cos\theta_w - Z_\mu \sin\theta_w; \quad W_\mu^3 = A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w. \quad (6.21)$$

Napisan pomoću polja fotona A i Z bozona prvi član u Lagrangianu interakcije (6.20) je

$$\mathcal{L}_v^{\text{int.}} = -\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) A_\mu (g_1 Y_L \cos\theta_w + g_2 \sin\theta_w) - \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) Z_\mu (-g_1 Y_L \sin\theta_w + g_2 \cos\theta_w),$$

pa zahtjev da ne postoji $\bar{\nu} A \nu$ interakcija daje uvjet

$$-g_1 Y_L \cos\theta_w = g_2 \sin\theta_w. \quad (6.22)$$

Drugi član iz (6.20) koji pretstavlja interakcije elektrona sa fotonom A i Z bozonom je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e^{\text{int.}} = & \frac{1}{2} [(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) A_\mu (-g_1 Y_L \cos\theta_w + g_2 \sin\theta_w) + (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) Z_\mu (g_1 Y_L \sin\theta_w + g_2 \cos\theta_w)] + \\ & + \frac{1}{2} (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) A_\mu (-g_1 Y_R \cos\theta_w) + \frac{1}{2} (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) Z_\mu (g_1 Y_R \sin\theta_w). \end{aligned}$$

Interakcije $\bar{e} A_\mu e$ iz gornjeg izraza moraju biti identične Lagrangianu interakcije (4.16) kvantne elektrodinamike (QED) koji je

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{int.}} = -e Q_e j_e^\mu A_\mu = (-e)(-1)(\bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e) A_\mu = e(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu e_R) A_\mu,$$

što zbog (6.22) znači da vrijedi

$$e = -g_1 Y_L \cos\theta_w = g_2 \sin\theta_w = -g_1 \frac{Y_R}{2} \cos\theta_w, \quad (6.23)$$

pa mora biti $Y_R = 2Y_L$.

Kako su hipernaboji Y (kvantni brojevi $U(1)_Y$ grupe) proizvoljni možemo odabrati (uvijek moguće redefinicijom proizvoljnih konstanti interakcija) najjednostavnije

$$Y_L = -1, \quad \text{tj.} \quad Y_R = -2, \quad (6.24)$$

što osigurava da veza električnog naboja Q, hipernaboja Y i treće komponente slabog naboja T_3

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \quad (6.25)$$

važi za svako leptonsko stanje.

Uvjet (6.23) onda daje vezu konstanti jakosti U(1) i SU(2) interakcija

$$e = g_1 \cos \theta_w = g_2 \sin \theta_w, \quad (6.26)$$

tj.

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad \text{i} \quad \frac{g_1}{g_2} = \tan \theta_w. \quad (6.27)$$

Kut θ_w se naziva slabi (weak) ili Weinbergov kut. Mjerenja u raznim eksperimentima daju numeričku vrijednost: $\sin^2 \theta_w = 0.23119(14)$.

Ako želimo da Lagrangian (6.14) opisuje poznate elektromagnetske interakcije elektrona i neutina u SM moraju vrijediti relacije (6.26) ili (6.27) između konstanti U(1)_Y i SU(2)_L gauge interakcija.

Iskoristimo li (6.24) i (6.25), slabe interakcije neutrina određene su Lagrangianom

$$\mathcal{L}_\nu^{\text{int}} = -\frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) Z_\mu = -\frac{e}{2 \sin \theta_w \cos \theta_w} \left[\bar{\nu} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \nu \right] Z_\mu, \quad (6.28)$$

gdje je oblik zadnjeg člana odabran tako da sadrži samo Diracovo polje neutrina $\nu(x)$.

Gornji Lagrangian je istog oblika $-g_Z j_Z^\mu Z_\mu$ kao i Lagrangian interakcije $-e j_Q^\mu A_\mu$ kvantne elektrokinamike, samo umjesto vektorske struje elektrona (3.127) imamo $V - A$ slabu neutralnu struju neutrina $\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L = \frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu$. Kako je $\sin^2 \theta_w = 0.2312$, konstanta jakosti Z_μ slabih interakcija $\frac{e}{2 \sin \theta_w \cos \theta_w} = \frac{1}{2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \frac{g_2}{\cos \theta_w}$ je oko 1.2 puta veća od konstante jakosti elektromagnetskih interakcija e .

Lagrangian elektro-slabih neutralnih interakcija elektrona sadrži interakcije i sa fotonom A i sa Z bozonom i može se napisati u simetričnom obliku

$$\mathcal{L}_e^{\text{int}} = -e j_{Q_e}^\mu A_\mu - g_Z j_{Z_e}^\mu Z_\mu, \quad (6.29)$$

gdje je konstanta elektromagnetskih interakcija e (naboj pozitrona), a konstanta interakcija sa Z bozonima

$$g_z = \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \frac{g_2}{\sin \theta_w}. \quad (6.30)$$

Odgovarajuće struje elektrona koje određuju oblik neutralnih elektro-slabih interakcija u (6.29) su

$$j_{Q_e}^\mu = \bar{e} \gamma^\mu Q_e e = -\bar{e} \gamma^\mu e, \quad (6.31)$$

$$j_{Z_e}^\mu = \bar{e} \gamma^\mu (C_V^e - C_A^e \gamma^5) e, \quad (6.32)$$

gdje su vektorski i aksijalno-vektorski faktori u struji

$$C_V^e = \frac{1}{2} (T_3^e - 2Q_e \sin^2 \theta_w) = -\frac{1}{4} + \sin^2 \theta_w; \quad C_A^e = \frac{T_3^e}{2} = -\frac{1}{4}. \quad (6.33)$$

Zbog $Q_v = 0$ i $T_3^v = +\frac{1}{2}$ odmah se vidi da Lagrangian interakcije (6.29) važi, kako za elektrone, tako i za slabe interakcije neutrina (6.28) $\mathcal{L}_v^{\text{int}} = -g_z j_{Z_v}^\mu Z_\mu$.

Zadnji član iz (6.20) daje interakcije leptona sa nabijenom W^+ i W^- gauge bozonima i reprezentira slabe procese $e^- \leftrightarrow \nu_e + W^-$ ili $\nu_e \leftrightarrow e^- + W^+$, tj. procese koji mijenjaju leptonske okuse

$$\mathcal{L}_{\nu-e}^{\text{int}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{e}{\sin \theta_w} \left[(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) W_\mu^- + (\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L) W_\mu^+ \right], \quad (6.34)$$

naročito važne zbog procesa raspada $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ i $W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$.

I ovaj Lagrangian slabe nabijene struje leptona može se napisati pomoću Diracovih polja leptona u obliku

$$\mathcal{L}_{CC}^l = -g_w \left(j_W^\mu W_\mu^- + j_W^{\mu \dagger} W_\mu^+ \right) = -g_w \left[\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu W_\mu^- + \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e W_\mu^+ \right], \quad (6.35)$$

gdje je konstanta jakosti slabih interakcija leptona sa W^\pm bozonima

$$g_w = \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_w} = \frac{g_2}{2\sqrt{2}}. \quad (6.36)$$

Indeks CC označava „charged current“, jer se (6.35) najčešće naziva Lagrangian slabe nabijene struje. Analogno, se (6.29) naziva Lagrangian slabe neutralne struje (NC – neutral current) leptona.

Znači, ukupne elektro-slabe interakcija leptona (prve familije) mogu se napisati kao zboj Lagrangiana slabih neutralnih (6.29) i nabijenih (6.35) struja leptona

$$\mathcal{L}_l^{\text{int}} [SU(2) \times U(1)] = \mathcal{L}_{\text{NC}}^l + \mathcal{L}_{\text{CC}}^l = -e j_{Q_l}^\mu A_\mu - g_{Z_l} j_{Z_l}^\mu Z_\mu - g_W (j_{W_l}^\mu W_\mu^- + \text{h.k.}), \quad (6.37)$$

gdje h.k. označava Hermitski konjugiran član.

Preostaje da vidimo kako izgledaju elektro-slabe gauge interakcije kvarkova. Članovi u Lagrangianu SM (6.14) koji sadrže $SU(2)_L \times U(1)_Y$ interakcije za leptone i kvarkove

$$\sum_l \bar{f} i \gamma^\mu D_\mu f \quad \text{i} \quad \sum_q \bar{f} i \gamma^\mu D_\mu f$$

su identični napravimo li zamjenu $\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$; $e_R \rightarrow d_R$ i dodamo u_R stanje, koje ima iste interakcije kao i e_R , osim trivijalnih razlika u električnom naboju kvarkova i leptona.

Odaberemo li hipernaboje kvarkovskih stanja u skladu sa (6.25),

$$Y_{q_L} = \frac{1}{3} \quad \text{i} \quad Y_{q_R} = 2Q_q, \quad (6.38)$$

ili eksplicitno

$$Y_{u_L} = Y_{d_L} = \frac{1}{3}; \quad Y_{u_R} = \frac{4}{3}; \quad Y_{d_R} = -\frac{2}{3}, \quad (6.39)$$

lako je provjeriti da se ukupne elektro-slabe interakcije kvarkova mogu napisati u istom obliku kao (6.37) uz zamjenu $l \rightarrow q$.

Po analogiji onda možemo odmah napisati Lagrangian elektro-slabih gauge interakcija za svaki fermion prve familije $f = (\nu_e, e, u, d)$

$$\mathcal{L}_f^{\text{int}} [SU(2) \times U(1)] = -e j_Q^\mu A_\mu - \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} j_Z^\mu Z_\mu - \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} (j_W^\mu W_\mu^- + j_W^{\mu \dagger} W_\mu^+), \quad (6.40)$$

gdje su sve konstante interakcija napisane pomoću naboja pozitrona e radi lakše usporedbe. Prvi član je uobičajena QED interakcija elektromagnetske struje fermiona j_Q^μ (Q je električni naboj u jedinicama e) sa fotonima, drugi daje interakcije fermionske slabe struje j_Z^μ sa neutralnim Z_μ gauge bozonima, a treći član je interakcija fermionske struje j_W^μ sa električno nabijenim W^\pm gauge bozonima. Odgovarajuće fermionske struje su

$$j_Q^\mu = -\bar{e}\gamma^\mu e + \frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d = \sum_f Q_f \bar{f}\gamma^\mu f, \quad (6.41)$$

$$j_Z^\mu = \bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \bar{u}_L\gamma^\mu u_L - \bar{d}_L\gamma^\mu d_L - 2\sin^2\theta_w j_Q^\mu = \sum_f \bar{f}\gamma^\mu (C_V^f - C_A^f\gamma^5)f, \quad (6.42)$$

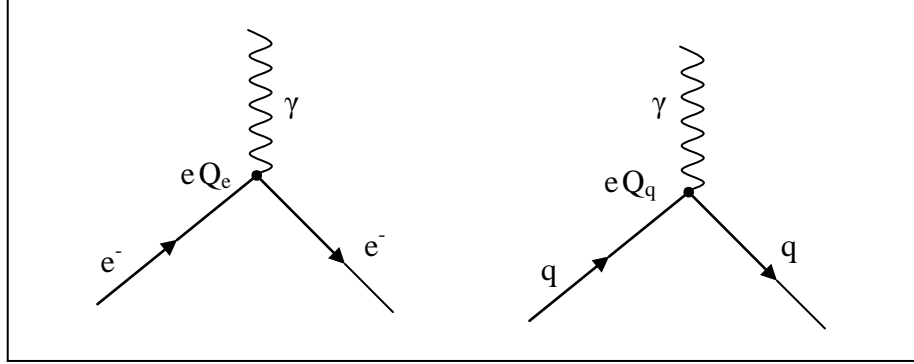
$$j_W^{\mu\dagger} = \bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma^5)e + \bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma^5)d, \quad (6.43)$$

a vektorski i aksijalno-vektorski faktori u slaboj neutralnoj struji fermiona su

$$C_V^f = \frac{1}{2}T_3^f - Q_f \sin^2\theta_w; \quad C_A^f = \frac{1}{2}T_3^f. \quad (6.44)$$

Slabe interakcije imaju V – A strukturu, pa se u (6.42 – 43) pojavljuju lijeva L polja fermiona, tj. $\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ faktori. Elektromagnetska interakcije očuvavaju parnost i konjugaciju naboja, pa se u struji (6.41) pojavljuju samo ukupna fermionska polja (Diracovi spinori).

Lagrangian interakcije (6.40) daje vertekse Feynmanovih dijagrama elementarnih procesa emisije/apsorpcije elektro-slabih gauge bozona u SM.

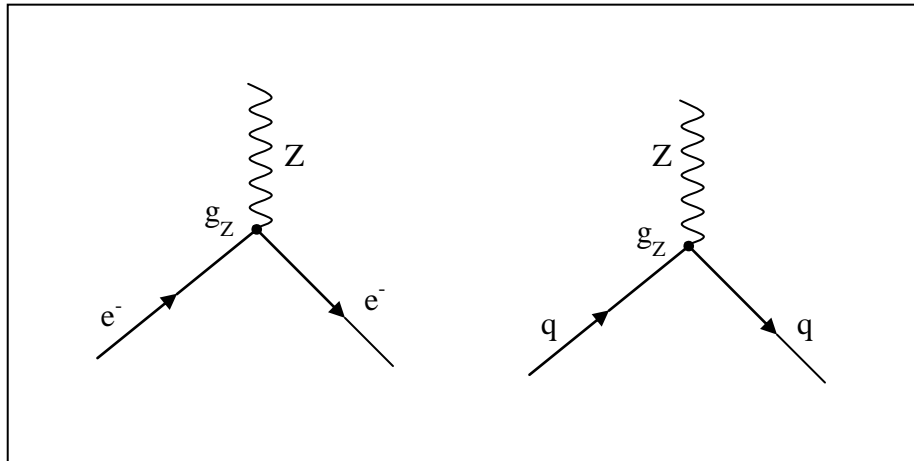


Slika 6.1

Slika 6.1 prikazuje vertekse elektromagnetskih interakcija $j_Q^\mu A_\mu$ električno nabijenih leptona i kvarkova sa fotonom A_μ koji su isti kao u kvantnoj elektrodinamici. Verteks faktori su: $-e\gamma^\mu Q_f$.

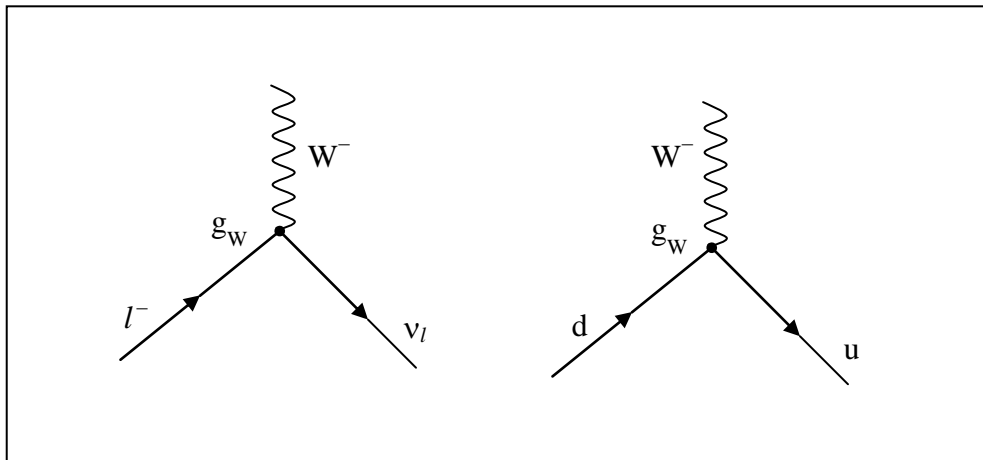
Na Slici 6.2 prikazani su elementarni procesi interakcija slabih neutralnih struja j_Z^μ fermiona sa Z_μ bozonima. Za svaki fermion, prema (6.40) i (6.42), verteks faktori su

$$\frac{e}{\sin\theta_w \cos\theta_w} \gamma^\mu (C_V^f - C_A^f\gamma^5), \text{ gdje je } g_Z = \frac{e}{\sin\theta_w \cos\theta_w}.$$



Slika 6.2

Slika 6.3 prikazuje interakcije slabe struje leptona i kvarkova j_W^μ sa W^+ i W^- slabim bozonima, tj. procesi emisije/apsorpcije nabijenih gauge bozona $f \leftrightarrow f + W^\pm$ koji mijenjaju okuse fermiona. Lagrangian (6.40) pokazuje da su verteks faktori ovih interakcija $\frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_w} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$, gdje je $g_w = \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_w}$ kao u (6.36).



Slika 6.3

Znači, uvjeti (6.25 – 27) osiguravaju da za svaki fermion u SM postoje uobičajene elektromagnetske interakcije sa fotonom kao u QED. U SM postoje i dodatne slabe interakcije fermiona sa Z i W^\pm bozonima čija jakost g_Z i g_w je takođe određena uvjetima (6.25 – 27).

Preostaje da vidimo šta je sa jakim interakcijama kvarkova.

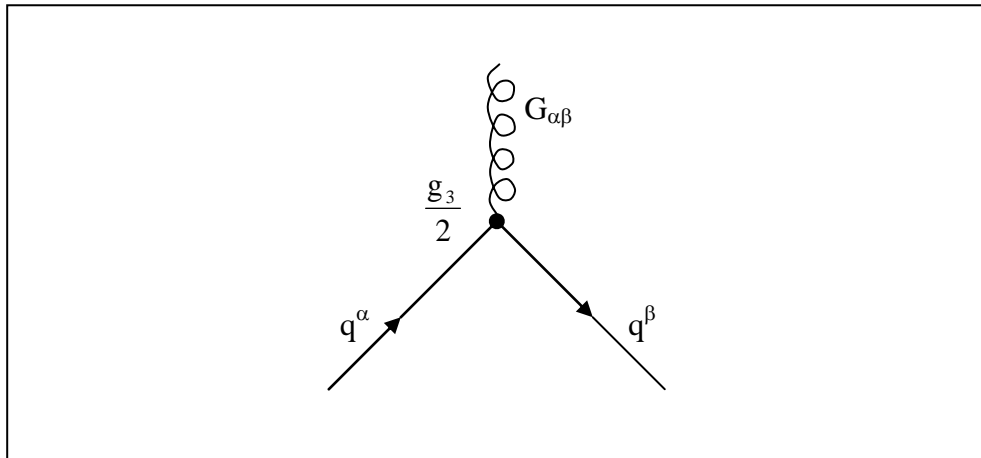
Zadnji $SU(3)_c$ član iz kovarijantne derivacije (6.2) djeluje samo na kvarkovska polja q_L , u_R i d_R iz (6.10). Fermionski Lagrangian iz (6.14) koji opisuje jake interakcije interakcije kvarkova je

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{int.}} = (\bar{u}_L \quad \bar{d}_L)(i\gamma^\mu)\left(i\frac{g_3}{2}\lambda_a G_\mu^a\right)\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \bar{u}_R(i\gamma^\mu)\left(i\frac{g_3}{2}\lambda_a G_\mu^a\right)u_R + \bar{d}_R(i\gamma^\mu)\left(i\frac{g_3}{2}\lambda_a G_\mu^a\right)d_R$$

(ne pišemo spinorske indekse) dijagonalan po kvarkovskim okusima (ne mijenja okuse), ali emisija/apsorpcija gluona mijenja boju kvarkovskih stanja. Lako se vidi da se gornji QCD Lagrangian interakcije može napisati pomoću Dirakovih kvarkovskih polja u i d

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{int.}} = -\frac{g_3}{2} \left[\bar{u} \gamma^\mu (\vec{\lambda} \cdot \mathbf{G}_\mu) u + \bar{d} \gamma^\mu (\vec{\lambda} \cdot \mathbf{G}_\mu) d \right].$$

Verteksi jake interakcije kvarkova i gluona prikazani su na Slici 6.4.



Slika 6.4

Indeksi $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ su kvarkovski i gluonski kolor indeksi.

Sad konačno možemo vidjeti kako gauge bozoni i fermioni dobijaju masu. Teoriji moramo dodati Higgs polje koje mora narušiti lokalnu gauge simetriju teorije.

6.2 Spontano narušenje $SU(2) \times U(1)$ elektro-slabe lokalne gauge simetrije

U SM elektro-slabe interakcije kvarkova i leptona opisane su $SU(2)_L \times U(1)_Y$ lokalnom gauge grupom, tj. generirane su pomoću 4 bezmasena gauge bozona B^μ i W_i^μ koja u teoriju ulaze preko kovarijantne derivacije (6.2). Redefinicijom (6.19) i (6.21), to postaju polja fizikalnih čestica: fotona A_μ i tri slaba gauge bozona W_μ^\pm i Z_μ . Želimo iskoristiti spontano narušenje simetrije da trima od njih damo masu, dok četvrti gauge bozon – foton treba ostati bez mase. U Poglavlju 5.4 smo vidjeli da opći teorem kaže da treba u teoriju uvesti 4 realna skalarna polja i odabrati vakuum tako da samo jedno od njih – Higgs polje, dobije nenultu vov. Na taj način će tri skalarna polja koja bi postala Goldstonovi bozoni narušene kontinuirane simetrije u unitarnom gauge-u postati longitudinalne komponente masivnih gauge bozona i „nestati“ iz teorije, dok će četvrti gauge bozon ostati bez mase. Lagrangian tih skalarnih polja je \mathcal{L}_S u (6.14).

Odaberimo $SU(2)$ dublet kompleksnih skalarnih polja

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix}, \quad (6.45)$$

(vidjećemo malo kasnije da ϕ^+ ima naboj, a ϕ^0 je neutralno polje) gdje su 4 realna skalarna polja

$$\phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad (6.46)$$

$$\phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4), \quad (6.47)$$

čiji Lagrangian je

$$\mathcal{L}_S = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (6.48)$$

kao u (5.22), uz zamjenu kompleksne $*$, Hermitskom † konjugacijom, tako da je

$$\phi^\dagger \phi = (\phi^+ * \phi^0 *) \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \phi^+ * \phi^+ + \phi^0 * \phi^0 = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2), \quad (6.49)$$

a kovarijantna $SU(2)_L \times U(1)_Y$ derivacija je iz (6.2)

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B^\mu + ig_2 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}^\mu. \quad (6.50)$$

Skalarni potencijal

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (6.51)$$

je invarijantan pri $SU(2)_L \times U(1)_Y$ lokalnim gauge transformacijama kao u (4.94) ili (4.119)

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\vec{\epsilon}(x) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}} \phi(x), \quad (6.52)$$

tj. pri djelovanju produkta proizvoljne transformacije (6.52) i proizvoljne lokalne $U(1)$ gauge transformacije kao u (5.24) ili (4.54). Za $\mu^2 < 0$ potencijal ima minimum kad je

$$\phi^\dagger \phi = \frac{-\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}. \quad (6.53)$$

Postoji beskonačno mnogo degeneriranih osnovnih stanja koja imaju $O(4)$ simetriju

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = v^2. \quad (6.54)$$

SSB zahtijeva odabir pravca (odabir vov polja) u $SU(2)$ prostoru i perturbativni razvoj (translaciju polja) oko novog vakuuma teorije. Vakuum ne smije imati električni naboj (samo polje ϕ^0 može imati vov $\neq 0$), pa odabiremo $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$, $\phi_3 = v$, tj.

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (6.55)$$

Odabirom jednog stanja (6.55) od beskonačno mnogo stanja (6.54) iste energije za vakuum kvantne teorije, simetrija se spontano narušava na podgrupu $U(1)_{ED}$ koja je i dalje dobra simetrija vakuuma (jedno realno polje ϕ_3 koje ima minimum u vakuumu teorije), a očekujemo da se pojave tri bezmasena Goldstone bozona (linearne kombinacije preostala tri realna polja).

Ako skalarni dublet parametriziramo u eksponencijalnom obliku [kao u (5.25)] pomoću tri realna polja $\theta^i(x)$ [$i = 1, 2, 3$] i Higsovog polja $h(x)$ u obliku

$$\phi(x) = e^{i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}, \quad (6.56)$$

pametnim izborom lokalne $SU(2)$ gauge transformacije (6.52) sva tri polja $\theta^i(x)$ možemo „odrotirati“ iz teorije – ti stupnjevi slobode postat će longitudinalne komponente tri masivna gauge bozona.

Kao i za fermione, i za Higgs dublet (6.45) važi veza (6.25). Zato se za hiper-naboj Higgs dubleta odabire $Y_\phi = 1$, što je razlog odabira oznaka kompleksnih polja u (6.45).

Da smo kojim slučajem probali odabrati vakuum u kome električno nabijeno polje ϕ^+ dobija vov $\neq 0$, narušili bi zakon očuvanja naboja, jer bi se tada svi kvantni brojevi polja ϕ^+ , pa i električni naboj, mogli „istopiti“ u vakuum.

Higgsovo polje (6.45) je SU(2) dublet, ali samo jedna komponenta dobija vov $\neq 0$, što znači da vakuum teorije (6.55) narušava SU(2)_L simetriju. Kako je i za Higgsovo polje h(x), kao i za dublet (6.45), hiper-naboj $Y_h = 1 \neq 0$, vakuum (6.55) narušava i U(1)_Y simetriju teorije, što se lako provjerava eksplicitnim djelovanjem generatora grupe. Relacija (6.25) jamči da vakuum (6.55) nema električni naboj. Djelovanje operatora električnog naboja (6.25) na vakuum je

$$Q\phi_0 = \left(T_3 + \frac{Y_h}{2} \right) \phi_0 = 0, \quad (6.57)$$

što, prema (5.2), znači da je vakuum (6.55) invarijantan pri lokalnim U(1) gauge transformacijama

$$\phi_0 \rightarrow \phi_0' = e^{-i\alpha(x)Q} \phi_0 = \phi_0. \quad (6.58)$$

Grupu unirarnih transformacija (6.58) vakuuma (6.55), koja ostaje simetrija cijelog Lagrangiana SM, označavamo U(1)_{ED} i identificiramo je sa grupom lokalnih gauge simetrija elektromagnetskih interakcija. Grupa U(1)_{ED} generirana je operatorom Q električnog naboja (6.25), koji je linearna kombinacija generatora SU(2)_L i U(1)_Y grupa gauge simetričnog Lagrangiana (6.14).

Napomena: Kad kovarijantna derivacija djeluje na SU(2) dublet svaki član u (6.50) je produkt U(1)_Y 1 × 1 matrice (samo realni broj Y) i SU(2)_L 2 × 2 matrice (za prvi i drugi član to je jedinična matrica **1**). Operator naboja (6.23) Higgs polja je: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, jer je $Y_\phi = Y_\phi \cdot \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a $T_3 = \frac{\tau_3}{2}$, gdje je treća Pauli matrica $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, pa kad operator Q djeluje na dublet (6.45) daje $Q_{\phi^+} = +1$ i $Q_{\phi^0} = 0$.

Ovim je osigurano da ukupni Lagrangian SM, koji je lokalno SU(3)_c × SU(2)_L × U(1)_Y gauge invarijantan, i poslije spontanog narušenja elektro-slabe SU(2)_L × U(1)_Y → U(1)_{ED} simetrije, tj. odabira (6.55) za vakuum teorije, ostane invarijantan pri lokalnim U(1)_{ED} gauge transformacijama elektromagnetskih interakcija. Ta invarijantnost, prema Noether teoremu, garantira važenje zakona očuvanja električnog naboja u SM.

Bezmaseni gauge bozon U(1)_{ED} gauge grupe je foton. Kako je generator Q grupe U(1)_{ED} linearna kombinacija generatora SU(2)_L i U(1)_Y grupa, polje fotona $A^\mu(x)$ mora biti linearna kombinacija polja gauge bozona $W_i^\mu(x)$ i $B^\mu(x)$ tih grupa, kao u (6.21).

Ukupni elektro-slabi i Higgs dio (dio koji opisuje čestice spina 1 – bezmasene gauge bozone i skalarnе čestice) Lagrangiana SM prije narušenja simetrije ima 12 fizikalnih stupnjeva slobode – po dva za polja B^μ i W_i^μ i 4 za realna skalarna polja Higgs dubleta (6.45). Poslije spontanog narušenja elektro-slabe $SU(2)_L$ i $U(1)_Y$ gauge simetrije u teoriji opet postoji 12 stupnjeva slobode – 9 stupnjeva slobode imaju tri masivna slaba gauge bozona W^\pm i Z , plus 2 stupnja slobode fotona, plus jedan stupanj slobode realne skalarnе čestice – Higgs bozona h .

Teorija nužno predviđa postojanje Higgs bozona h – čestice spina 0, naboja 0, ali nepoznate mase. Masa Higgs bozona zavisi od konstante λ njegove samointerakcije, kao u (5.27), koja ničim nije određena, osim što znamo da mora biti realna i pozitivna.

Sad možemo vidjeti kako Higgs mehanizam daje masu slabim gauge bozonima W^\pm i Z . Kao u Poglavlju 5.3, član iz Lagrangiana (6.48) koji daje masu gauge bozona je član interakcije Higgs polja i polja gauge bozona u kovarijantnoj derivaciji (6.50) Higgs dubleta

$$\phi^\dagger \left(i g_1 \frac{Y}{2} B_\mu + i g_2 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \right)^\dagger \left(i g_1 \frac{Y}{2} B^\mu + i g_2 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}^\mu \right) \phi. \quad (6.59)$$

Ako stavimo $Y_\phi = 1$, eksplicitno ispišemo Pauli matrice τ_i , te imjesto ϕ stavimo njegovu vov (6.55) dobijamo

$$\frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} g_1 B^\mu + g_2 W_3^\mu & g_2 (W_1^\mu - i W_2^\mu) \\ g_2 (W_1^\mu + i W_2^\mu) & g_1 B^\mu - g_2 W_3^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right|^2,$$

tj.

$$\frac{v^2 g_2^2}{8} \left[(W_1^\mu)^2 + (W_2^\mu)^2 \right] + \frac{v^2}{8} \left[g_1 B^\mu - g_2 W_3^\mu \right]^2. \quad (6.60)$$

Napisan pomoću polja fizikalnih nabijenih slabih gauge bozona W^\pm

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 - i W_\mu^2); \quad W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 + i W_\mu^2),$$

prvi član na desnoj strani (6.60) postaje $\left(\frac{v g_2}{2} \right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu}$, što znači da je [za kompleksno polje maseni član je $m^2 \phi^\dagger \phi$ kao u (5.22)] masa nabijenih W^\pm gauge bozona

$$M_W = \frac{v g_2}{2} = \frac{v e}{2 \sin \theta_W}. \quad (6.61)$$

Napišemo li i drugi član na desnoj strani u (6.60) pomoću fizikalnih polja Z^μ i A^μ prema (6.21), zbog uvjeta (6.25), odmah se pokrate članovi u kojima se pojavljuju polja fotona A^μ , tj. nema masenog člana fotona $m_A = 0$. Maseni član za preostalo polje Z^μ neutralnog bozona iz (6.60) je

$$\frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{v g_2}{2 \cos \theta_w} \right)^2 Z_\mu Z^\mu,$$

što znači da je masa Z bozona

$$M_Z = \frac{v g_2}{2 \cos \theta_w} = \frac{1}{2} v \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \frac{e v}{2 \sin \theta_w \cos \theta_w}. \quad (6.62)$$

Usporedba (6.61) i (6.62) pokazuje da uvjet (6.25) koji osigurava da SM reproducira elektromagnetske interakcije fermiona iz QED, zahtijeva da vrijedi

$$\frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_w, \quad (6.63)$$

što se sa točnošću boljom od 1% slaže sa rezultatima eksperimenata: $M_W = 80.4 \text{ GeV}$ i $M_Z = 91.2 \text{ GeV}$.

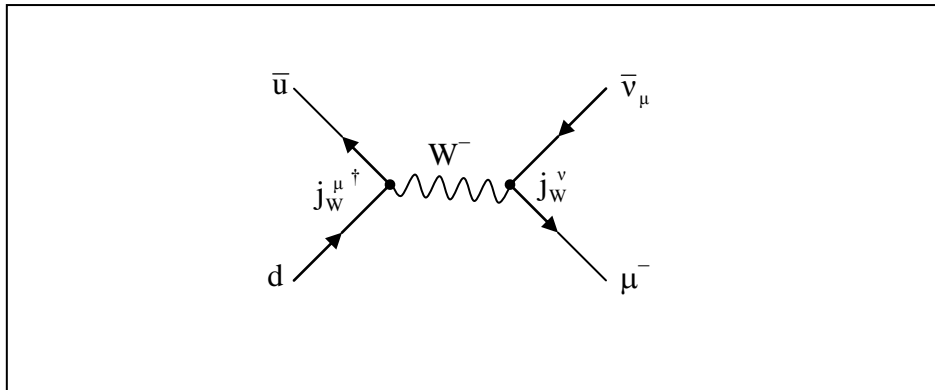
Veza sa rezultatima eksperimenata se lako uspostavi koristeći Lagrangian slabih nabijenih struja koji opisuju procese emisije/apsorpcije W^\pm bozona (medijatora slabih interakcija) od strane fermiona. Verteksi tih interakcija prikazani su na Slici 6.3. Kako je pojašnjeno na primjeru kvantne elektrodinamike u Poglavlju 4.1, zakoni očuvanja energije i impulsa zahtijevaju da svaki realni proces mora sadržavati bar dva verteksa. Fermion (kvark ili lepton) u jednom verteksu emitira W^\pm bozon, koji potom drugi fermion apsorbira u drugom verteksu.

Na primjer, tipični proces slabih interakcija je raspršenje $\bar{u} + d \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$. U SM, taj proces se, u najnižem redu, opisuje pomoću dva elementarna procesa sa Slike 6.3 u dvije bliske, ali separirane, točke u prostor-vremenu. Feynmanov dijagram procesa prikazan je na Slici 6.5. Taj dijagram u prvoj aproksimaciji opisuje raspad π^- mezona što će biti razmatrano u Poglavlju 11. U jednoj točki d -kvark emitira W^- bozon i prelazi u \bar{u} -kvark, a zatim se u nekoj bliskoj točki taj W^- bozon raspadne u elektron i elektronski antineutrino. Inicijalni elementarni proces (verteks) sadrži \bar{u} i d kvark i W^- bozon koji se propagira do finalnog verteksa koji sadrži elektron i elektronski neutrino e^- i $\bar{\nu}_e$.

Propagator W^- bozona je $iD_F(q)_{\mu\nu} = -i \frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2}$, kao u (4.22). Amplituda procesa je

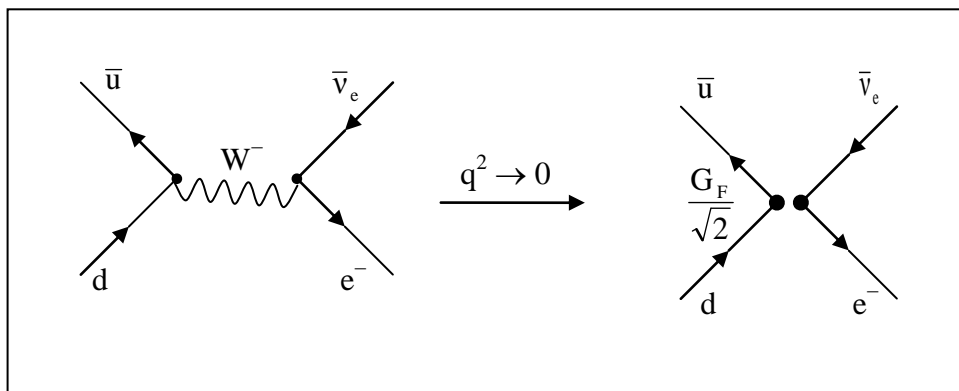
produkt tri faktora:

kvarkovske nabijene struje $g_w j_W^{\mu \dagger}$ za prvi verteks, propagatora W^- bozona $D_F(q)_{\mu\nu}$ i leptonske (muonske) slabe nabijene struje $g_w j_W^\nu$ za drugi verteks. Kako je $g_w = \frac{g_2}{2\sqrt{2}}$, zanemarujući fermionske spinore i faktore $-i$, amplituda Feynmanovog dijagrama sa Slike 6.5 proporcionalna je sa $g_w^2 D_F(q)$.



Slika 6.5

Ako je kvadrat momenta q^2 puno manji od kvadrata mase W^- bozona ($M_W = 80.4$ GeV), svi članovi u njegovom propagatoru koji zavise od momenta q_μ se mogu zanemariti tako da je $D_F(q)_{\mu\nu} \rightarrow -i \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2}$, pa amplituda postaje jednostavno $\frac{g_w^2}{M_W^2} = \frac{g_2^2}{8} \frac{4}{v^2 g_2^2} = \frac{1}{2v^2}$. U limesu $q^2 \ll M_W^2$, slabe interakcije su opisane efektivnom Fermi struja-struja (četiri fermiona) točkastom interakcijom čiji je Lagrangian $\mathcal{L}_{CC}^{eff.} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j_{W\mu} j_W^{\mu \dagger}$, kao što je simbolično prikazano na Slici 6.6.



Slika 6.6

Zato vrijedi $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_2^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2v^2}$, tj. $v = (\sqrt{2} G_F)^{-\frac{1}{2}}$. Fermieva konstanta se određuje iz mjerenja vremena poluživota muona i iznosi $G_F = 1.1664 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$.

Kad sustav prijeđe u stanje najniže energije (6.55), vakuumska očekivana vrijednost Higgs polja je

$$v = \sqrt{2} \langle 0 | \phi_0 | 0 \rangle \cong 246 \text{ GeV}, \quad (6.64)$$

što se naziva skalom (energija) slabih interakcija.

Ako se zna vov Higgs polja v i ako se izmjeri slabi kut θ_w (iz eksperimenata koji mjere konstantu g_Z jakosti neutralnih slabih interakcija), prema (6.61) i (6.62) određene su mase slabih gauge bozona W^\pm i Z . Tako se dojavu vrijednosti od oko 78 GeV i 89 GeV. Korekcije višeg reda masama dodaju oko 2 GeV i daju izvrsno (bolje od 0.1 %) slaganje predikcija SM sa mjerenim vrijednostima masa.

Od četiri bezmasena elektro-slaba gauge bozona samo je foton ostao bez mase. Generiranje masa slabih gauge bozona W^\pm i Z pomoću Higgs mehanizma u skladu sa eksperimentalnim rezultatima je nesumnjivi uspjeh SM.

Iako smo sada razmotrili samo masene članove gauge bozona (6.59), jasno je da Lagrangian \mathcal{L}_S skalarnog polja (6.48) spontanom narušenjem simetrije poslije translacije Higgs polja (6.56) sadrži puno dodatnih članova. U unitarnom gauge-u $SU(2)_L \times U(1)_Y$ lokalnom gauge transformacijom mogu se iz teorije eliminirati polja $\theta_i(x)$. Umjesto (6.56) dublet skalarnih polja (6.45) postaje

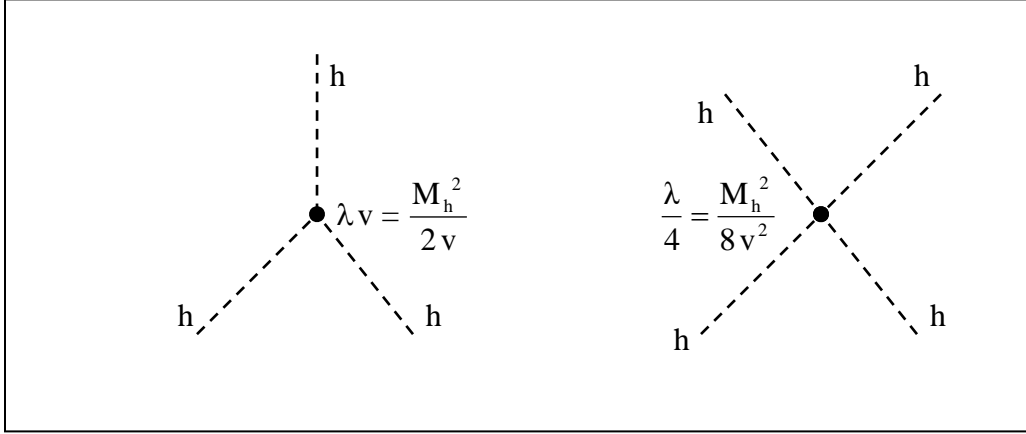
$$\phi \rightarrow \phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}, \quad (6.65)$$

gdje je $h(x)$ polje Higgs bozona. Zamjenom u (6.51), zbog uvjeta minimuma $\lambda v^2 = -\mu^2$, dobija se potencijal skalarnog Higgs polja h

$$V(h) = \frac{\lambda}{4} h^4 + \lambda v h^3 - \mu^2 h^2 - \frac{\lambda}{4} v^4, \quad (6.66)$$

koji pokazuje da Higgs bozon ima kubne i kvartične samointerakcije jakosti λv i $\frac{\lambda}{4}$. Ove interakcije se reprezentiraju tro i četvero Higgs bozon verteksima prikazanim na Slici 6.7. Isprekidane linije reprezentiraju Higgs bozone h .

Trenutno nas zanimaju mase čestica, pa sada ostavimo po strani članove iz \mathcal{L}_S koji poslije SSB daju interakcije Higgs i elektro-slabih gauge bozona oblika hW^+W^- i $hZ_\mu Z^\mu$ i hhW^+W^- i $hhZ_\mu Z^\mu$.



Slika 6.7

Kvadratni član iz \mathcal{L}_S pokazuje da Higgs bozon h ima masu

$$M_h = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda} v, \quad (6.67)$$

koju teorija ne može predvidjeti zbog zavisnosti o neodređenoj konstanti samointerakcije λ . Teorijski argumenti (zahtjev da u SM vrijedi teorija perturbacija) zahtijevaju da masa Higgs bozona bude manja od ~ 1 TeV, dok eksperimenti pokazuju da je $M_h > 114$ GeV. LHC akcelerator u CERN je dizajniran tako da sigurno detektira Higgs bozon bez obzira kolika mu je masa.

Zadnji član u (6.66) je minimum gustoće potencijalne energije polja Higgs bozona $V_0 = \langle 0|V|0 \rangle = -\frac{\lambda v^4}{4} = -\frac{v^2 M_h^2}{8}$. Takav konstantni član u Lagrangianu nema utjecaja na jednadžbe gibanja i nema nikakav značaj u teoriji elementarnih čestica. Ali, u bilo kojoj teoriji koja uključuje gravitacijske interakcije takav član konstantne gustoće energije je kozmološka konstanta Λ koja bitno utječe na rješenja Einsteinovih jednadžbi opće teorije relativnosti (3.156). Spontano narušenje elektro-slabe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ simetrije teorije elementarnih čestica vodi do pojave kozmološke konstante od koje zavise globalna svojstva svemira – ekspanzija svemira, na primjer.

Na žalost, dok se ne otkriju bolje i možda unificirane teorije gravitacije i elementarnih čestica, ova veza je jako daleko od eksperimentalnih rezultata. Kozmološku konstantu možemo smatrati zbrojem dva člana – jednog označenog Λ_{SSB} , koji dolazi od nenulte gustoće energije polja Higgs bozona V_0 poslije spontanog narušenja simetrije, i drugog člana Λ_0 koji je primordijalna kozmološka konstanta (gustoća energije vakuuma koja možda postoji i prije spontanog narušenja elektro-slabe gauge simetrije)

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_{\text{SSB}}. \quad (6.68)$$

Sva astrofizička opažanja pokazuju da je kozmološka konstanta vrlo mala ili je nula $\Lambda_{\text{ops.}} \leq 10^{-46} \text{ GeV}^4$, tako da je za $m_h > 114 \text{ GeV}$

$$|\Lambda_{\text{SSB}}| = 8\pi G_N |\langle 0|V|0 \rangle| = 10^8 \text{ GeV}^4 \geq 10^{56} |\Lambda_{\text{ops.}}|. \quad (6.69)$$

Jasno je da tehnički možemo potencijalu (6.66) Higgs polja dodati konstantu $\Lambda_0 = \frac{\mu^4}{4\lambda}$

tako da energija vakuuma bude nula. Ali takvo kraćenje funkcionalno nepovezanih konstanti sa tačnošću od više od 50 redova veličine je jako neprirodno – fizičari to nazivaju „fine tuning problem“, što je u pravilu indikacija da postoje bitni elementi koji se u teoriji još ne razumiju.

U Lagrangianu (6.14) ne postoje maseni članovi elektrona i kvarkova. Da bi se opisivale realne elementarne čestice Higgs mehanizam mora generirati i mase fermiona, osim neutrina. U SM isti Higgs dublet (6.45) koji daje mase slabim gauge bozonima može poslije SSB dati mase i fermionima. Da se to postigne Lagrangianu SM (6.14) treba dodati jedan $SU(2)_L \times U(1)_Y$ lokalno gauge invarijantni član. Taj član se naziva Lagrangian Yukawa interakcija $\mathcal{L}_{\text{Yuk}}^l$ i za leptone prve familije je

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk.}}^l = -g_e (\bar{l}_L \phi e_R + \bar{e}_R \phi^\dagger l_L), \quad (6.70)$$

gdje je g_e nepoznata konstanta interakcije polja elektrona i skalarnog Higgs polja. Gornji izraz je gauge invarijantan jer je

$$\bar{l}_L \phi = (\bar{\nu}_L \ \bar{e}_L) \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \bar{\nu}_L \phi^+ + \bar{e}_L \phi^0,$$

$SU(2)$ invarijantno (ϕ^+ se transformira kao $T_3 = +\frac{1}{2}$ član dubleta, a zbog Hermitske konjugacije $\bar{\nu}_L$ se transformira kao $T_3 = -\frac{1}{2}$ član), što se ne mijenja ni množenjem sa $SU(2)$ singletom e_R . Poslije SSB, od Higgsovog dubleta preostaje samo (6.65), pa je

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk.}}^l = -\frac{g_e}{\sqrt{2}} [\bar{e}_L (v+h) e_R + \bar{e}_R (v+h) e_L].$$

Prvi i treći član na desnoj strani su oblika $\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L$ i predstavljaju masene članove za polje elektrona kao u (6.13). Masa elektrona

$$m_e = \frac{g_e v}{\sqrt{2}}, \quad (6.71)$$

nije određena zbog proizvoljnosti konstante interakcija g_e elektrona i Higgs bozona h . Zato se (6.71) najčešće uzima za relaciju koja određuje $g_e = \frac{\sqrt{2}}{v} m_e$ pomoću poznate (mjerene) mase elektrona. Kako je ukupno Diracovo polje elektrona $e = e_L + e_R$, Lagrangian Yukawa interakcija leptona može se napisati u obliku

$$-\mathcal{L}'_{\text{Yuk.}} = m_e \bar{e} e + \frac{m_e}{v} \bar{e} e h. \quad (6.72)$$

Kvarkovi dobijaju masu na isti način, ali postoji dodatna komplikacija jer i u-kvark mora dobiti masu. Kad postoji (6.45) Higgs SU(2) dublet ϕ , postoji i dodatni dublet

$$\phi_c = i\tau_2 \phi^* = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{+*} \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \quad (6.73)$$

gdje smo, prema (6.46), označili

$$\phi^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2).$$

Kako je hipernaboj dubleta $Y_\phi = 1$, zbog konjugacije dublet ϕ_c mora imati $Y_{\phi_c} = -1$, tako da i za konjugirani Higgs dublet ϕ_c vrijedi $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$, pa se i ϕ_c može koristiti da se napravi SU(2)_L × U(1)_Y gauge invarijantan član Yukawa interakcija za kvarkove. Poslije SSB od konjugiranog Higgs dubleta preostaje samo realno polje Higgs bozona h , tj.

$$\phi_{c_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v+h \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.74)$$

Lagrangian Yukawa interakcija kvarkova i skalarnog Higgs polja $\mathcal{L}_{\text{Yuk}}^q$ koji treba dodati Lagrangianu (6.14) je

$$-\mathcal{L}_{\text{Yuk.}}^q = g_d \bar{q}_L \phi d_R + g_u \bar{q}_L \phi u_R + \text{h.k.} \quad (6.75)$$

Uz malo algebre lako se pokazuje da Higgs mehanizam da je i za u i d-kvarkove

$$-\mathcal{L}_{\text{Yuk.}}^q = m_u \bar{u} u + \frac{m_u}{v} \bar{u} u h + m_d \bar{d} d + \frac{m_d}{v} \bar{d} d h, \quad (6.76)$$

gdje je $g_{u,d} = \frac{\sqrt{2}}{v} m_{u,d}$, kao i za elektron.

Napomena: Ustvari u SM postoji dodatna komplikacija sa masama i slabim interakcijama kvarkova – mješanje kvarkovskih okusa. Komplikacija postaje očigledna tek kad imamo više familija (ako želimo u teoriju uvesti i R polja neutrina, tako da i oni dobiju mase, ista komplikacija se pojavljuje i sa masama leptona). Da bi konstrukciju Lagrangiana SM predočili što jednostavnije, sve dosad rečeno odnosilo se na prvu familiju leptona i kvarkova (ν_e, e^-, u, d), uz razumjevanje da u Lagrangian SM treba dodati analogne članove za drugu i treću familiju. Kad govorimo o stanju (polju) pojedinog fermiona, po definiciji, mislimo na svojstveno stanje Hamiltoniana sustava koje ima precizno određene svojstvene vrijednosti mase (energije), spina i električnog naboja. Takva stanja fermiona okusa „i“ se u Lagrangianu kvantne teorije polja opisuju Diracovim poljima ψ_i , čiji su maseni članovi dijagonalni po okusu $\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\sum_i m_i \bar{\psi}_i \psi_i$,

kao u (3.161). Ali, SM je gauge teorija u kojoj se fermionska polja aranžiraju u multiplete grupe simetrija njihovih interakcija. Neobična svojstva slabih interakcija (narušenje parnosti i konjugacije električnog naboja) zahtijevaju da lijeva fermionska polja slažemo u SU(2) dublete, a desna u singlete kao u (6.11). Tako dobijeni simetrični Lagrangian sadrži samo polja bez mase. Da bi se generirale mase čestica mora se narušiti lokalna gauge simetrija teorije. Način da se to učini, a bez narušavanja lokalne gauge simetrije Lagrangiana, je Higgs mehanizam. Pretpostavi se da, pored fermiona i gauge bozona, u prirodi postoji još i dublet skalarnih Higgs polja (6.45). Lagrangianu teorije se dodaju gauge invarijantni članovi \mathcal{L}_S Lagrangian Higgsovog dubleta (6.48) i Lagrangian Yukawa interakcija koji je za prvu familiju fermiona

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk.}} = -g_e \bar{l}_L \phi e_R - g_d \bar{q}_L \phi d_R - g_u \bar{q}_L \phi u_R + \text{h.k.}, \quad (6.77)$$

zbroj leptonskog (6.70) i kvarkovskog člana (6.75). Dosad su sva polja u Lagrangianu određena simetrijom njihovih interakcija – to su polja koja imaju točno određena transformaciona svojstva u odnosu na gauge grupu.

Interakcije skalarnih polja, određene Lagrangianom \mathcal{L}_S (6.48), izazivaju spontano narušenje $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ gauge simetrije. Higgs polje dobija vov različit od nule (6.55), pa vakuum, a time i ukupna teorija, ostaje invarijantan samo pri $U(1)_{\text{ED}}$ lokalnim gauge transformacijama. Da se nađe spektar stanja poslije spontanog narušenja elektro-slabe gauge simetrije treba napraviti teoriju perturbacija oko novog vakuuma. U unitarnom gauge-u to znači da u Lagrangianu SM treba translirati Higgsovo polje $h(x)$ prema (6.65). Tako dobijeni Lagrangian spontanog narušenog SM je samo $U(1)_{\text{ED}}$ gauge invarijantan, što znači da samo foton mora ostati bez mase. Da se nađu mase čestica treba u Lagrangianu izdvojiti članove kvadratne po poljima, a članovi višeg reda (trećeg i četvrtog) određuju interakcije. Ova procedura spontanog narušenja gauge simetrije ne daje kvadratne članove dijagonalne po fermionskim poljima. Zato se unitarnim matricama moraju prvo dijagonalizirati stanja u i d kvarkova i tek tako dobijena polja su polja određene mase. Analogna procedura je napravljena sa elektro-slabim gauge bozonima. Morala se napraviti linearna transformacija (6.19) i (6.21) originalnih polja B^μ i W_3^μ da bi u Lagrangianu SM poslije SSB ostali samo dijagonalni članovi po poljima fotona, W^\pm i Z bozona. Za kvarkovska polja dodatna komplikacija je svojstvo slabih interakcije da povezuju kvarkovske okuse (nisu „flavor“ dijagonalne) različitih familija.

Slabi nabijeni gauge bozoni W^\pm ne djeluju stvarno na dublete lijevih kvarkovskih stanja

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L,$$

već na SU(2) dublete

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L, \quad (6.78)$$

gdje su d' , s' , i b' linearne kombinacije svojstvenih stanja okusa d , s i b . Unitarna 3×3 matrica U koja transformira (d,s,b) stanja u (d',s',b')

$$\begin{pmatrix} d' & s' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{ud} & U_{us} & U_{ub} \\ U_{cd} & U_{cs} & U_{cb} \\ U_{td} & U_{ts} & U_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.974 & 0.226 & 0.004 \\ 0.230 & 0.989 & 0.004 \\ 0.008 & 0.004 & 0.999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad (6.79)$$

naziva se Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) matrica. Numeričke vrijednosti na desnoj strani su sadašnji najbolji eksperimentalni rezultati. Miješanje kvarkovskih okusa znači da su nabijeni gauge bozoni W^\pm medijatori ne samo procesa $u \leftrightarrow d$ već, sa manjom vjerojatnošću, i procesa $u \leftrightarrow s$ i $u \leftrightarrow b$, što znatno obogaćuje fenomenologiju slabih interakcija kvarkova – s - i b -kvarkovi nisu stabilni, već se raspadaju na u - i c -kvarkove. Zato bi u slaboj nabijenoj struji za prvu familiju kvarkova (6.43) trebalo zamjenit $\bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d$ sa $\bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d'$, gdje je $d'_i = \sum_{j=1}^3 U_{ij} d_j$, te isto za drugu i treću familiju.

Kvarkovska polja sa kojima se vezuju W^\pm gauge bozoni nisu d , s i b stanja već d' , s' i b' stanja, gdje je $d' = U_{11} d + U_{12} s + U_{13} b$, pa je, umjesto (6.43), slaba nabijena struja kvarkovskih polja

$$j_W^{\mu \dagger} = \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U_{1i} d'_i + \bar{c} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U_{2i} d'_i + \bar{t} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U_{3i} d'_i. \quad (6.80)$$

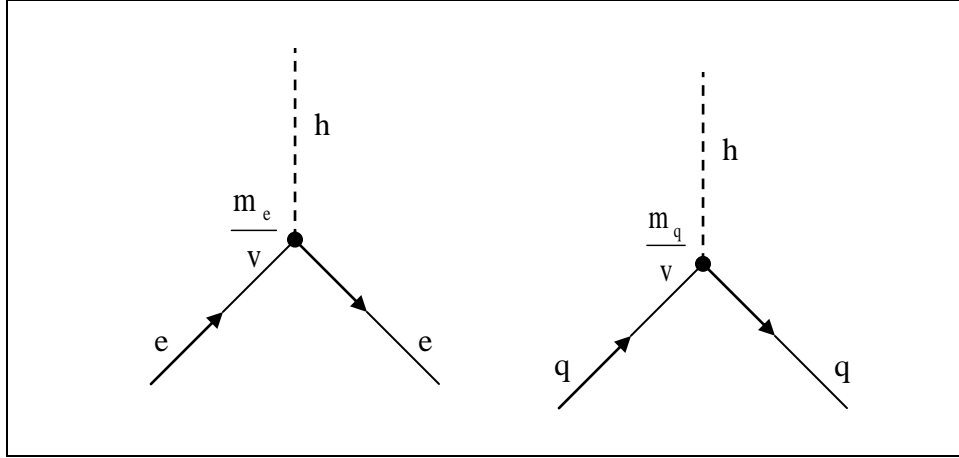
Najjednostavniji način da se ovo implementira u Lagrangian SM je da se odmah na početku tri familije fermiona definiraju kao

$$\begin{bmatrix} \nu_e & u \\ e^- & d' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\mu & c \\ \mu^- & s' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\tau & t \\ \tau^- & b' \end{bmatrix}. \quad (6.81)$$

što radi jednostavnosti u prvoj aproksimaciji možemo zanemariti.

Miješanje kvarkovskih polja određeno CKM matricom mijenja samo slabe nabijene interakcije (čiji medijatori su W^\pm bozoni). Nepostojanje slabih neutralnih procesa koji mijenjaju kvarkovske okuse [sve interakcije fotona i Z bozona su „flavor“ dijagonalne (GIM mehanizam)] je za eksperimentalnu provjeru teorije izuzetno važno svojstvo SM.

Članovi oblika $\bar{f} f h$ u (6.72) i (6.76) predstavljaju interakcije Higgs bozona h i fermiona – leptona i kvarkova (ali, ne neutrina), jakosti $\frac{m_f}{v}$ i prikazani su verteksima na Slici 6.8.



Slika 6.8

Na kraju možemo rezimirati djelovanje Higgsovog mehanizma u SM. Ukupni $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ lokalno gauge invarijantni, pa onda i renormalizabilni, Lagrangian SM za prvu familiju je

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_S = \sum_f \bar{f} i \gamma^\mu D_\mu f - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{Yuk.}, \quad (6.82)$$

gdje je zadnji član napisan u (6.77). Simetriju Lagrangiana (6.82) spontano narušava vakuum (6.55) teorije koji je stanje najniže energije dubleta (6.45) Higgs polja. Preostala simetrija teorije (i Lagrangiana i vakuuma) je samo $U(1)_{ED}$ grupa lokalnih gauge transformacija koja osigurava da zakon očuvanja električnog naboja vrijedi u SM. U unitarnom gauge-u od dva kompleksna skalarna polja iz (6.45), poslije SSB preostaje samo jedno realno skalarno polje Higgs bozona $h(x)$ definirano u (6.65). Perturbativni razvoj Lagrangiana (6.82) (translacija polja h za v oko novog vakuuma teorije daje masene članove W^\pm i Z gauge bozona

$$M_W = \frac{v g_2}{2} = \frac{v e}{2 \sin \theta_w} = m_Z \cos \theta_w = 80.4 \text{ GeV} \quad (6.83)$$

$$M_Z = \frac{v g_2}{2 \cos \theta_w} = \frac{1}{2} v \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \frac{e v}{2 \sin \theta_w \cos \theta_w} = 91.2 \text{ GeV},$$

dok foton i gluoni ostaju bez mase.

Numerička vrijednost masa (6.83) je u SM potpuno određena i teorijski izračunata prije eksperimentalnog otkrića tih čestica. Elektron i kvarkovi (ali, ne i neutrini) takođe dobijaju mase Higgs mehanizmom iz \mathcal{L}_{Yuk} člana u (6.82) koje se odabiru u skladu sa eksperimentom. Mase fermiona nisu predikcija SM jer su konstante interakcija g_e , g_u i g_d proizvoljne [nisu fiksirane gauge principom, tj. ne ulaze u kovarijantnu derivaciju (6.2)]. Jedan od nedostataka SM je nemogućnost predviđanja ogromnog raspona fermionskih masa. Masa Higgs bozona h , takođe nije određena

$$M_h = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda} v, \quad (6.67)$$

jer zavisi od konstante samointerakcije λ . Higgs mehanizam u SM u potpunosti reproducira spektar masa elementarnih čestica u skladu sa rezultatima eksperimenata. Eventualno otkriće Higgs bozona na LHC-u omogućilo bi eksperimentalnu provjeru svojstava SM vezanih za spontano narušenje elektro-slabe gauge simetrije, a prije svega određivanje mase m_h i konstante λ .

Kako je prema (6.56) u unitarnom gauge-u

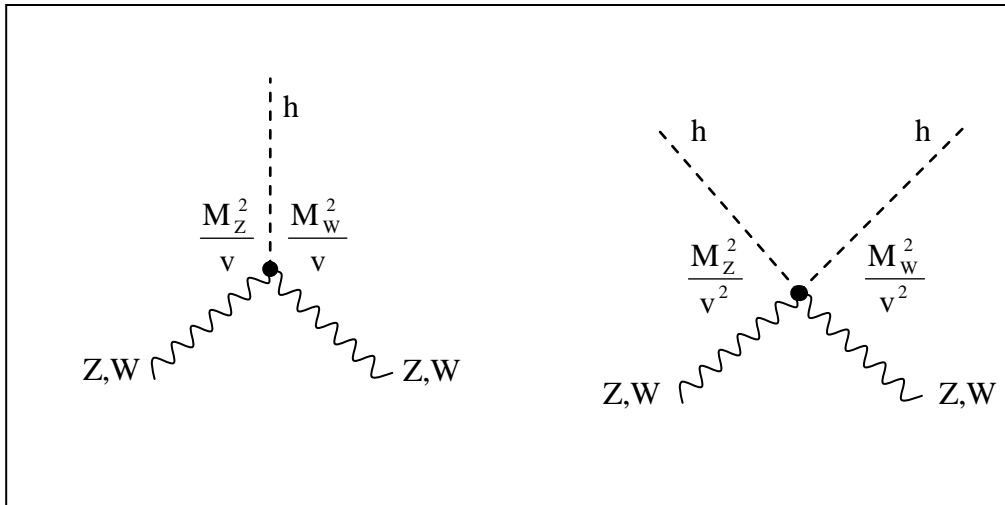
$$D^\mu \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu h \end{pmatrix} + \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} g_2 W_\mu^+ \\ g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3 \end{pmatrix} (v+h),$$

koristeći relacije (6.21), (6.26) i izraze za mase Higgs (6.67) i gauge bozona (6.83), ukupni Lagrangian Higgs polja h poslije SSB je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h = & \frac{1}{2} (\partial_\mu h) (\partial^\mu h) - \frac{1}{2} M_h^2 h^2 - \frac{M_h^2}{2v} h^3 - \frac{M_h^2}{8v^2} h^4 + \\ & + \frac{M_Z^2}{v} h Z^\mu Z_\mu + \frac{M_Z^2}{2v^2} h^2 Z^\mu Z_\mu + 2 \frac{M_W^2}{v} h W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{M_W^2}{v^2} h^2 W^{+\mu} W_\mu^- - \\ & - \frac{m_e}{v} \bar{e} e h - \frac{m_u}{v} \bar{u} u h - \frac{m_d}{v} \bar{d} d h, \end{aligned} \quad (6.84)$$

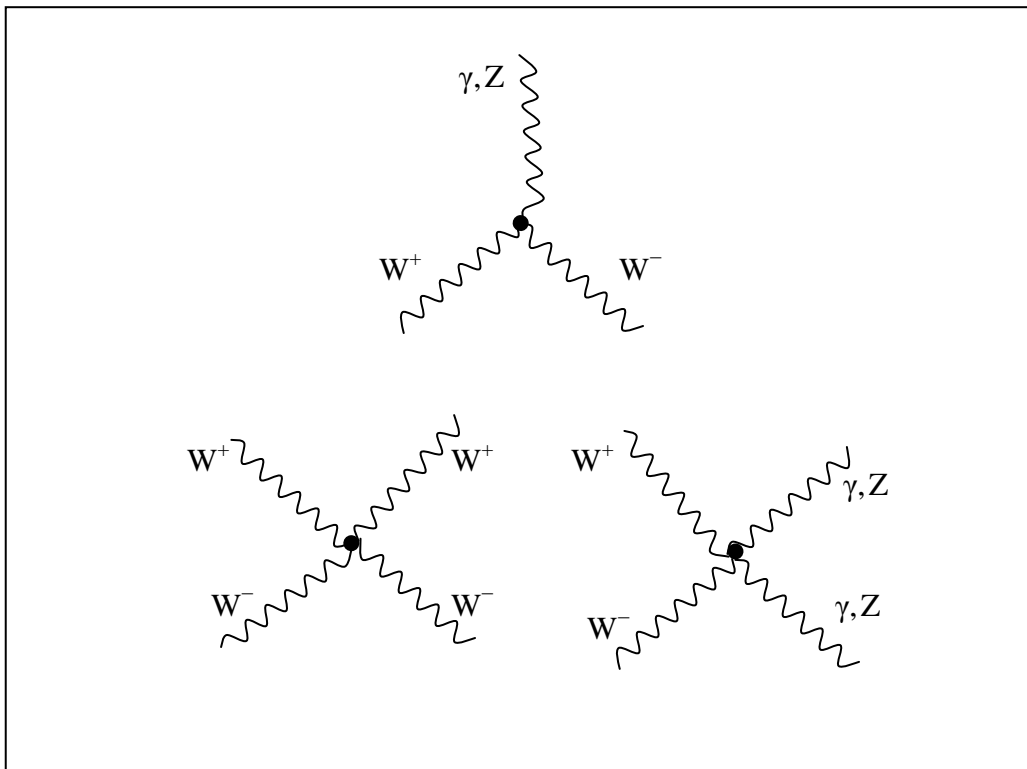
gdje smo izostavili konstantni član iz Higgs potencijala (6.66). Prvi red daje Higgs bozon h^3 i h^4 samointerakcije, drugi red daje Higgs-gauge bozon interakcije hZZ , h^2ZZ , hW^+W^- i $h^2W^+W^-$, a treći red su interakcije Higgs bozona i fermiona $\bar{f}fh$ koje dolaze iz Lagrangiana Yukawa interakcija (6.77).

Samo čestice koje interaguju sa Higgs bozonom poslije SSB dobijaju mase. Foton i gluoni i neutrini nemaju interakcija sa poljem Higgs bozona $h(x)$ i ostaju bez mase. Jakost svih interakcija Higgs bozona proporcionalna je masama čestica. Kako su mase svih fermiona, osim t kvarka, puno manje od $v = 246$ GeV njihova vezanja sa Higgs bozonima su dosta slaba. Dijagrami elementarnih procesa interakcija Higgs bozona i gauge bozona prikazani su na Slici 6.9.



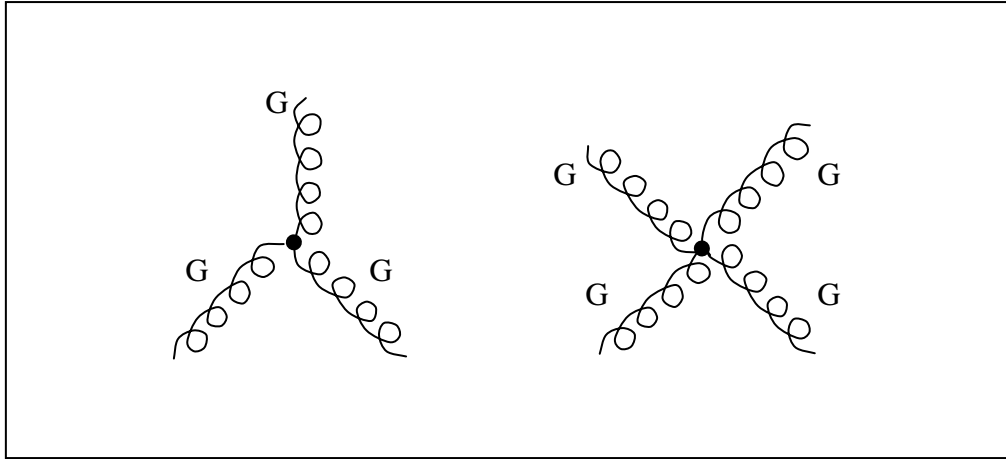
Slika 6.9

Sve interakcije u SM prikazane su verteksima na Slikama: 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.7, 6.8, i 6.9. osim samointerakcija gauge bozona i gluona. Radi potpunosti, na Slici 6.10 prikazani su verteksi kubnih i kvartičnih samointerakcija elektro-slabih gauge bozona. Njihovi verteks faktori su komplicirani i kako nam neće trebati u jednostavnijim primjerima primjena, nećemo ih ni navoditi. Detaljan ispis se može naći u Ref. [6. i 7.].



Slika 6.10

Slika 6.11 prikazuje tri i 4-gluon vertekse jakih interakcija. Zbog ovih samointerakcija gluona jaka sila među kvarkovima i gluonima postaje „jača“ sa smanjenjem energije (asimptotska sloboda) i na niskim energijama zatoči kvarkove i gluoni unutar hadrona.



Slika 6.11

Kao i za elektro-slabe gauge bozone, neće nam trebati eksplicitan oblik tro i četvorogluonskih verteks faktora, koji se mogu naći u Ref. [6. i 7.].

6.3 Feynmanova pravila u SM

Na kraju možemo skupiti sve rezultate u pregledan oblik. Članovi dijagonalni i kvadratni po poljima iz ukupnog Lagrangiana SM poslije spontanog narušenja simetrije daju propagatore odgovarajućih čestica, dok Lagrangian interakcije daje verteks faktore i kao u (2.85), određuje perturbativni razvoj S-matrice. Popis svih Feynmanovih pravila za SM (osim 3 i 4-verteksa elektro-slabih gauge bozona i gluona) je onda:

SM Feynmanova pravila

Fermionska polja:

$$l = \{e \mu \tau\} \quad \nu_l = \{\nu_e \nu_\mu \nu_\tau\} \quad q_u = \{u \ c \ t\} \quad q_d = \{d \ s \ b\}$$

$$q = \{q_u \ q_d\} \quad (3 \text{ boje za svaki kvark}) \quad f = \{l \ \nu_l \ q_u \ q_d\}$$

Elektro-slabi gauge bozoni: γ, Z, W^\pm Gluoni: g Higgs bozon: h

Propagatori:

$$\begin{array}{cc} \xrightarrow{f} & \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \\ \xrightarrow{h} & \frac{i}{p^2 - M_h^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \mu \text{---} \gamma \text{---} \nu & \frac{-i g^{\mu\nu}}{p^2} \\ \mu \text{---} g \text{---} \nu & \frac{-i g^{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta}}{p^2} \end{array}$$

$$\mu \text{---} W^\pm, Z \text{---} \nu \quad \frac{-i \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{M^2} \right)}{p^2 - M^2}$$

Ulazne linije:

$$\longrightarrow \bullet \quad u_\sigma(p)$$

$$\longleftarrow \bullet \quad \bar{v}_\sigma(p)$$

Izlazne linije:

$$\bullet \longrightarrow \quad \bar{u}_\sigma(p)$$

$$\bullet \longleftarrow \quad v_\sigma(p)$$

ϵ_μ	ϵ_μ^*
ϵ_μ	ϵ_μ^*
1	1

Kao što je pojašnjeno u poglavlju 2. pri računanju udarnih presjeka treba zbrajati po svim komponentama polarizacije (spina) finalnih čestica što omogućuju relacije kompletnosti za fermione

$$\sum_{\sigma=1,2} u_\sigma(\mathbf{p}) \bar{u}_\sigma(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + m, \quad \sum_{\sigma=1,2} v_\sigma(\mathbf{p}) \bar{v}_\sigma(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - m, \quad (6.85)$$

i gauge bozone

$$\sum_\lambda \epsilon_\lambda^\mu \epsilon_\lambda^\nu = \begin{cases} -g^{\mu\nu}, & M = 0 \\ -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M^2}, & M \neq 0 \end{cases}, \quad (6.86)$$

gdje se u slučaju fotona i gluona zbraja samo po dva transverzalna stupnja polarizacije. Prema (3.147) i (3.149) fermionska stanja su spinori čije su normalizacije

$$\bar{u}_\sigma(\mathbf{p}) u_\sigma(\mathbf{p}) = -\bar{v}_\sigma(\mathbf{p}) v_\sigma(\mathbf{p}) = 2m. \quad (6.87)$$

Interakcije su određene verteks faktorima. Konstante interakcija su:

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} = \begin{cases} 1/137, & \text{skala } m_e \\ 1/128, & \text{skala } M_Z \end{cases}, \quad \alpha_3 \equiv \frac{g_3^2}{4\pi} = 0.118, \quad \text{skala } M_Z \quad (6.88)$$

$$\sin^2 \theta_w = 0.231, \quad g_Z = \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w}, \quad g_w = \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_w}.$$

Prema (6.44) za svaki fermion f konstante vezanja sa Z bozonom određene su faktorima

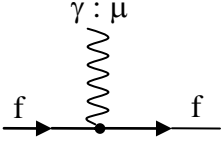
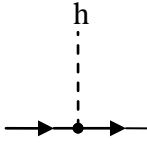
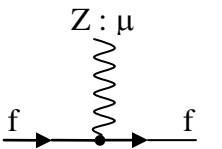
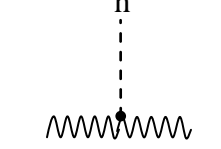
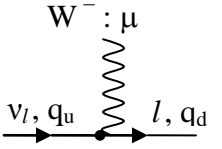
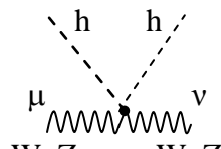
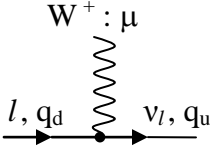
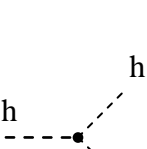
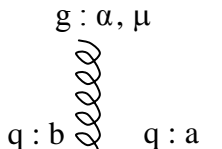
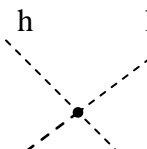
$$C_V^f = \frac{1}{2} T_3^f - Q_f \sin^2 \theta_w; \quad C_A^f = \frac{1}{2} T_3^f, \quad (6.89)$$

koji su prikazani u Tabeli 6.1.

f	Q_f	C_A	C_V
ν_l	0	$\frac{1}{4}$	0.250
l	-1	$-\frac{1}{4}$	-0.019
q_u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	0.096
q_d	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	-0.173

Tabela 6.1

Verteks faktori:

	$-ieQ_f \gamma^\mu$		$-i \frac{m_f}{v}$
	$-ig_Z \gamma^\mu (C_V^f - C_A^f \gamma^5)$		$2i \frac{M_{W,Z}^2}{v} g^{\mu\nu}$
	$-ig_W \gamma^\mu (1 - \gamma^5) [\times U_{q_u q_d}^*]$		$2i \frac{M_{W,Z}^2}{v^2} g^{\mu\nu}$
	$-ig_W \gamma^\mu (1 - \gamma^5) [\times U_{q_u q_d}]$		$3i \frac{M_h^2}{v}$
	$-i \frac{g_3}{2} \lambda_{ab}^\alpha \gamma^\mu$		$3i \frac{M_h^2}{v^2}$

U izrazima za vertekse u kojima postoji više identičnih linija kombinatorni faktor je već uzet u obzir. Na primjer, da se nađe verteks faktor za h^3 i h^4 vertekse, konstante iz Lagrangiana integracije (Slika 6.7) treba pomnožiti sa $3!$ i $4!$ što je broj permutacija identičnih linija Higgs polja h za svaki verteks.

U izrazima za vertekse $\bar{f}_m f_n W^\pm$ slabe nabijene struje koji mjenjaju okuse kvarkova i leptona $U_{q_u q_d}$ je odgovarajući element CKM matrice (6.79) kad su kvarkovi okusa „m“ i „n“, a δ_{mn} element jedinične matrice ako su „m“ i „n“ leptoni.

Gornji faktori uz Feynmanova pravila dozvoljavaju da se za svaki dijagram odredi odgovarajući (2.93) S-matrični element S_{fi} .

Pravila:

- Za željena inicijalna „i“ i finalna „f“ stanja nacrtati sve moguće Feynmanove dijagrame za proces $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ koji su određenog reda u teoriji perturbacija, počevši od najnižeg (sa minimalnim brojem verteksa). Dodavanje verteksa uvijek podiže red dijagrama.
- Amplituda dijagrama M_{fi} dobija se zamjenom svake eksterne/interne linije i verteksa u dijagramu odgovarajućim faktorom.
- Sumirati po svim Dirac i Lorentz indeksima i integrirati po 4-momentima svih internih linija (propagatora).
- Ako dijagram ima n verteksa podijeliti sa $n!$ i pomnožiti sa brojem perturbacija identičnih verteksa unutar dijagrama.
- Pomnožiti sa -1 za svaku zatvorenu fermionsku petlju.
- Ovako dobijeni matrični element M_{fi} pomnožiti sa $(-i)$ i sa δ -funkcijom očuvanja 4-impulsa u procesu, tj. sa $(2\pi)^4 \delta(p_f - p_i)$, gdje je p_i zbroj svih ulaznih, a p_f zbroj svih izlaznih 4-impulsa.

Da se dobiju diferencijalni udarni presjeci $d\sigma$ i širine raspada $d\Gamma$ kao u (2.98) i (2.99), apsolutnu vrijednost kvadrata zbroja amplituda svih dijagrama $|\overline{M_{fi}}|^2$, ako je potrebno usrednjena po neopserviranim komponentama spina/boje inicijalnih čestica, treba podijeliti sa fluksom inicijalnih čestica I_0 (kinematički faktor) i pomnožiti sa faktorom faznog prostora $\prod_{f,i} \frac{1}{2E_{f,i}} \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}$, te integrirati po impulsima svih finalnih čestica.

Ova pravila su dovoljna za računanje udarnih presjeka jednostavnih procesa, na primjer $2 \rightarrow 2$ procese, prvog ili drugog reda u teoriji perturbacija. Računanje popravki višeg reda zahtjeva kompletnu teoriju koja uključuje i dodatna pravila uslijed renormalizacije (dijagrame sa dodatnim nefizikalnim „ghost“ česticama).

Preostaje da vidimo neke jednostavnije primjene, koje ne uključuju jake interakcije, Standardnog Modela za proračun svojstava elementarnih čestica.

Zadaci:

Zadatak 6.1. Pokazati da su kvarkovska stanja mezona (1.4) kolor singleti, tj. da važi: $\hat{C}_a \chi_S^M = 0$, gdje su operatori boje: $\hat{C}_a = \frac{\lambda_a}{2}$, $a = 1, 2, \dots, 8$ zadani u (4.108).

Zadatak 6.2. Pokazati da su kvarkovska stanja bariona (1.5) kolor singleti.

Zadatak 6.3. Iskoristiti zahtjev zatočenja boje $\hat{C}_a \chi = 0$ da se pokaže da je valna funkcija boje mezona (stanja kvark-antikvark) upravo (1.4).

Zadatak 6.4. Pokazati da iz uvjeta $e = g_1 \cos \theta_w = g_2 \sin \theta_w$ slijedi (6.25), kao i da vrijedi:

$$\cos \theta_w = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}; \quad \sin \theta_w = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}; \quad \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w}.$$

Zadatak 6.5. Provjeriti da je SM Lagrangian gauge interakcija leptona dat izrazom (6.27).

Zadatak 6.6. Pokazati da iz SM Lagrangiana (6.14) slijedi Lagrangian elektro-slabih interakcija fermiona (6.38) gdje su elektromagnetska i slaba struja fermiona date izrazima (6.39 – 42).

Zadatak 6.7. Pokazati da je potencijal (6.49) invarijantan pri lokalnim $SU(2) \times U(1)$ gauge transformacijama.

Zadatak 6.8. Pokazati da potencijal (6.51) dubleta Higgs polja poslije spontanog narušenja simetrije daje potencijal (6.66) polja Higgs bozona h .

Zadatak 6.8. Pokazati da je poslije spontanog narušenja simetrije ukupni Higgs Lagrangian oblika (6.84).

7. Raspršenje fermiona u kvantnoj elektrodinamici

Za opis raspršenja čestica iz SM mora se koristiti S-matrični formalizam kvantne teorije polja opisan u Poglavlju 2.5.1. Perturbativni razvoj S-matrice (2.82) određen je Lagrangianom interakcije $\mathcal{L}_{\text{SM}}^{\text{int}}$, tj. dijelom ukupnog Lagrangiana SM (6.14) koji sadrži tri i više polja.

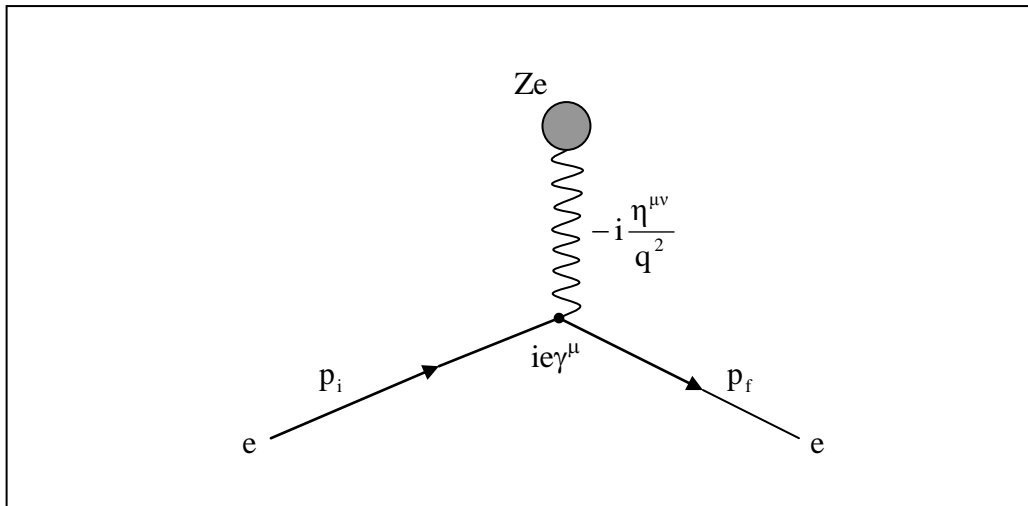
7.1 Potencijalno raspršenje elektrona

Razmotrimo prvo najjednostavniji slučaj potencijalnog raspršenja fermiona, recimo elektrona. U poglavlju 2.5 izvedena je formula (2.63) za amplitudu raspršenja skalarnih čestica. U Born aproksimaciji (2.64) za raspršenje čestica spina nula u Coulombovom potencijalu za diferencijalni udarni presjek dobija se Rutherfordova formula (2.46), ista kao i za raspršenje klasičnih nabijenih čestica.

U poglavlju 3.5 smo vidjeli da se slobodni fermioni opisuju Diracovim spinorima (3.147) čija prostorno-vremenska ovisnost pretstavlja ravne valove. Zamislimo Rutherfordov eksperiment u kome su projektili elektroni koji se raspršuju na jezgrima naboja Ze . Lagrangian interakcije iz kvantne elektrodinamike (4.16) je

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{int}} = -j_{\mu} A^{\mu} = -(-e) \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi A^{\mu}, \quad (7.1)$$

gdje je $j_{\mu}(x)$ vektorska struja elektrona (3.142) u kojoj su $\bar{\psi}(x)$ i $\psi(x)$ polja finalnih i inicijalnih fermiona, a $A^{\mu}(x)$ je polje fotona γ . Feynmanov dijagram najnižeg reda za ovaj proces – razmjena fotona između elektrona i jezgre, prikazan je na Slici 7.1 gdje je jezgra označena sivim krugom.

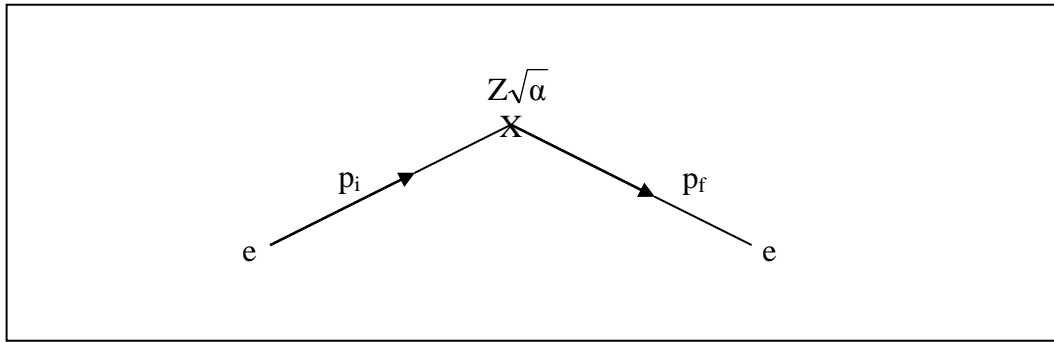


Slika 7.1

U prvoj aproksimaciji jezgra se može smatrati statičnom (zanemaruje se „recoil“ jezgre), a polje fotona A^μ se ne kvantizira i predstavlja klasični elektromagnetski potencijal jezgre, tj. točkastog naboja Ze koji miruje u ishodištu

$$A_0(\mathbf{x}) = \frac{Ze}{4\pi|\vec{\mathbf{x}}|}, \quad \vec{A}(\mathbf{x}) = 0. \quad (7.2)$$

Umjesto dijagrama sa Slike 7.1 onda imamo jednostavniji dijagram potencijalnog raspršenja elektrona u polju jezgre koji je prikazan na Slici 7.2. Umjesto propagatora fotona postoji samo točkasta interakcija sa potencijalom označena sa „X“.



Slika 7.2

Inicijalni i finalni elektron su slobodna jednočestična stanja Diracovog polja (3.154), tj.

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{1}{\sqrt{2E_i}} u(\mathbf{p}_i, s_i) e^{-i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}}, \quad \bar{\psi}_f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{1}{\sqrt{2E_f}} \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) e^{i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{x}}, \quad (7.3)$$

gdje su $s_{i,f}$ vrijednosti komponenti spina inicijalnog/finalnog elektrona. Prema (2.85), S-matrični element ovog procesa za $f \neq i$ u najnižem redu teorije perturbacija je

$$S_{fi} = i \frac{Ze^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_i E_f}} \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0 u(\mathbf{p}_i, s_i) \int d^4x \frac{e^{i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{x}}}{4\pi|\vec{\mathbf{x}}|}. \quad (7.4)$$

Integral po d^3x se lako izračuna u sfernim koordinatama i daje Fourier transform Coulombovog potencijala [regularizacija integrala za $|\vec{\mathbf{x}}| \rightarrow \infty$ može se napraviti pomoću „cut-off“-a α kao u potencijalu (2.65), na primjer]

$$\int d^3x \frac{e^{i\vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{x}}}}{|\vec{\mathbf{x}}|} = -\frac{4\pi}{|\vec{\mathbf{q}}|^2}, \quad (7.5)$$

gdje je $\vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i$.

Preostala x_0 integracija daje $2\pi \delta(E_f - E_i)$ što osigurava da u procesu vrijedi zakon očuvanja energije. Raspršenje je elastično i zbog $E_{f,i}^2 = \vec{p}_{f,i}^2 + m^2$ vrijedi $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| = p$. U interakciji sa mirujućom jezgrom promjeni se jedino pravac impulsa elektrona. S-matrični element je onda

$$S_{fi} = -i \frac{Ze^2}{(2\pi)^2} \frac{\bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0 u(\mathbf{p}_i, s_i)}{|\vec{q}|^2} \frac{1}{\sqrt{E_f E_i}} 2\pi \delta(E_f - E_i). \quad (7.6)$$

Vjerojatnost procesa je kvadrat apsolutne vrijednosti S_{fi} puta koncentracija $\frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}$ finalnih stanja kao u (2.95)

$$|S_{fi}|^2 \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} = \frac{Z^2 \alpha^2}{\pi^2} \frac{|\bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0 u(\mathbf{p}_i, s_i)|^2}{|\vec{q}|^4} \frac{1}{E_i E_f} [2\pi \delta(E_f - E_i)]^2 \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}. \quad (7.7)$$

gdje je $e^2 = 4\pi\alpha$. Kao što je napomenuto na početku poglavlja **2.5.2**, kvadrat δ -funkcije $[2\pi \delta(E_f - E_i)]^2 = [2\pi \delta(0)] [2\pi \delta(E_f - E_i)]$ divergira. Kako je po definiciji $2\pi \delta(E_f - E_i)$

$= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt e^{i(E_f - E_i)t}$, koristeće trik finalnog volumena, formalno je

$$2\pi \delta(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = T. \quad (7.8)$$

Djелеći sa T , vjerojatnost prijelaza u jedinici vremena je

$$dW_{fi} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4\pi^4} \frac{1}{E_i} \frac{|\bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0 u(\mathbf{p}_i, s_i)|^2}{|\vec{q}|^4} \frac{d^3 p_f}{E_f} \delta(E_f - E_i), \quad (7.9)$$

kao u (2.95). Da se nađe diferencijalni udarni presjek treba još podijeliti sa inicijalnim fluksom čestica koji je kao u (2.93), $I_0 = n_i |\vec{v}_i| = \frac{|\vec{p}_i|}{E_i}$ u skladu sa (2.13), i integrirati po impulsima $d^3 p_f = p_f^2 dp_f d\Omega$ finalnih čestica.

Kako je $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| = p$ i $p_f dp_f = E_f dE_f$, te i $\vec{q}^2 = (\vec{p}_f - \vec{p}_i)^2 = 2p^2(1 - \cos\theta) = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ lako se dobija

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{64\pi^4 p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left| \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0 u(\mathbf{p}_i, s_i) \right|^2. \quad (7.10)$$

U eksperimentima se najčešće ne detektiraju komponente spina elektrona, pa treba još usrednjiti po $\pm \frac{1}{2}$ komponentama s_i i zbrojiti po s_f , tako da je konačno

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{64\pi^4 p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} \left| \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0 u(\mathbf{p}_i, s_i) \right|^2. \quad (7.11)$$

Zavisnost od kuta raspršenja $\sin^{-4} \frac{\theta}{2}$ ista je kao u Rutherfordovoj formuli.

Za računanje faktora $\sum_{s_i s_f} \left| \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0 u(\mathbf{p}_i, s_i) \right|^2$ postoji opća procedura koja se svodi na računanje tragova produkata Diracovih γ -matrica.

7.2 Tragovi Diracovih γ -matrica

Na primjeru potencijalnog raspršenja leptona razmotrimo pravila koja omogućuju da se izračunavaju kvadrati apsolutnih vrijednosti matrice elemenata $|M_{fi}|^2$ procesa bez potrebe da se ikada koristi eksplicitna reprezentacija (4×4) Diracovih matrica ili spinora.

Spinska suma u (7.11) može se napisati kao

$$\begin{aligned} \sum_{s_f, s_i} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f) \gamma_{\alpha\beta}^0 u_\beta(p_i, s_i) u_\rho^\dagger(p_i, s_i) \gamma_{\rho\sigma}^0 u_\sigma(p_f, s_f) = \\ = \sum_{s_f, s_i} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f) \gamma_{\alpha\beta}^0 u_\beta(p_i, s_i) \bar{u}_\rho(p_i, s_i) \gamma_{\rho\sigma}^0 u_\sigma(p_f, s_f). \end{aligned}$$

Ovo je specijalni slučaj opće formule

$$|\bar{u}(f)\Gamma u(i)|^2 = [\bar{u}(f)\Gamma u(i)][\bar{u}(i)\bar{\Gamma} u(f)], \quad (7.12)$$

gdje je $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$, tj. specijalno:

$$\begin{aligned} \overline{\gamma^\mu} &= \gamma^\mu \\ \overline{i\gamma^5} &= i\gamma^5 \\ \overline{\gamma^\mu \gamma^5} &= \gamma^\mu \gamma^5 \\ \overline{ab\dots p} &= p\dots ba. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Koristeći uvjete kompletnosti i normiranja (3.149) rješenja Diracove jednadžbe komponente projektora stanja pozitivne i negativne energije su

$$\sum_s u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad \text{i} \quad \sum_s v_\alpha(p, s) \bar{v}_\beta(p, s) = (\not{p} - m)_{\alpha\beta}, \quad (7.14)$$

pa spinska suma u kvadratu matrice elementa (7.11) postaje trag γ -matrica

$$\begin{aligned} \sum_{s_f} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f) \gamma_{\alpha\beta}^0 [(\not{p}_i + m)_{\beta\rho}] \gamma_{\rho\sigma}^0 u_\sigma(p_f, s_f) = [\gamma^0 (\not{p}_i + m) \gamma^0]_{\alpha\sigma} [p_f + m]_{\sigma\alpha} = \\ = \text{Tr}[\gamma^0 (\not{p}_i + m) \gamma^0 (\not{p}_f + m)]. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Sve formule se lako dokazuju primjenom antikomutacijskih relacija γ -matrica (3.121).

Ovo važi za kvadrat apsolutne vrijednosti svakog fermionskog matrice elementa – svojstva kompletnosti Diracovih spinora reduciraju ga na trag produkata γ -matrica koji se može izračunati općenito za bilo koju reprezentaciju Diracovih matrica.

Diferencijalni udarni presjek (7.11) je onda

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{64 \pi^4 p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} \text{Tr} [\gamma^0 (\mathbf{p}_i + m) \gamma^0 (\mathbf{p}_f + m)]. \quad (7.16)$$

Zbog relacija antikomutativnosti (3.121)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (7.17)$$

i svojstva cikličnosti, nijedan trag se ne mora eksplicitno računati. Lako se pokazuje da vrijedi:

1. Trag neparanog broja γ -matrica je nula.
2. $\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \text{Tr} [\mathbf{a}\mathbf{b}] = 4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$
3. $\text{Tr} [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tr} [\gamma^5 \mathbf{a}\mathbf{b}] = 0.$
4. $\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4[g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \quad \Rightarrow$
 $\text{Tr} [\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{d}] = 4[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})].$
5. $\text{Tr} [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad \Rightarrow \quad \text{Tr} [\gamma^5 \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{d}] = 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma.$

Za reduciranje izraza kojima treba izračunati tragove korisne su i dodatne relacije:

1. $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4,$
2. $\gamma^\mu \mathbf{a} \gamma_\mu = -2\mathbf{a},$
3. $\gamma^\mu \mathbf{a}\mathbf{b} \gamma_\mu = 4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},$
4. $\gamma^\mu \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c} \gamma_\mu = -2\mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{a},$
5. $\gamma^\mu \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{d} \gamma_\mu = 2[\mathbf{d}\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c} + \mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{d}].$

Trag u (7.16) sadrži samo dva člana $\text{Tr} \gamma^0 \mathbf{p}_i \gamma^0 \mathbf{p}_f$ i $m^2 \text{Tr} [\gamma^0 \gamma^0]$, jer članovi linearni po m imaju neparan broj γ -matrica. Kako je $\gamma^0 \mathbf{p}_i = p_{i\mu} \gamma^0 \gamma^\mu = p_{i\mu} (-\gamma^\mu \gamma^0 + 2g^{0\mu}) = -\mathbf{p}\gamma^0 + 2p_i^0$, i $(\gamma^0)^2 = 1$, slijedi

$$\frac{1}{2} \text{Tr}[\gamma^0(\mathbf{p}_i + m)\gamma^0(\mathbf{p}_f + m)] = \frac{1}{2} \text{Tr}[-\mathbf{p}_i \mathbf{p}_f + 2p_i^0 \gamma^0 \mathbf{p}_f + m^2(\gamma^0)^2] = -2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f + 4E_i E_f + 2m^2,$$

te

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{32\pi^4 p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} [2E_i E_f - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f + m^2]. \quad (7.20)$$

Pošto je $E = E_f = E_i$ i $p = |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$, te kako je za svaku česticu $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = c \frac{\vec{p}}{E}$, važi i

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f = E_i E_f - |\vec{p}|^2 \cos \theta = m^2 + 2\beta^2 E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

pa se u prvoj aproksimaciji [do na $O(\alpha^2)$] nepolarizirani diferencijalni udarni presjek za potencijalno raspršenje elektrona u polju jezgre (7.20) može izraziti pomoću energije E i kuta raspršenja θ

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{(2\pi)^4 \beta^2 |\vec{p}|^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right). \quad (7.21)$$

Izraz (7.21) naziva se Mott-ov diferencijalni udarni presjek. U nerelativističkom limesu kad $\beta \rightarrow 0$ je $E \approx mc^2 + T$, gdje je T kinetička energija elektrona. Kako je

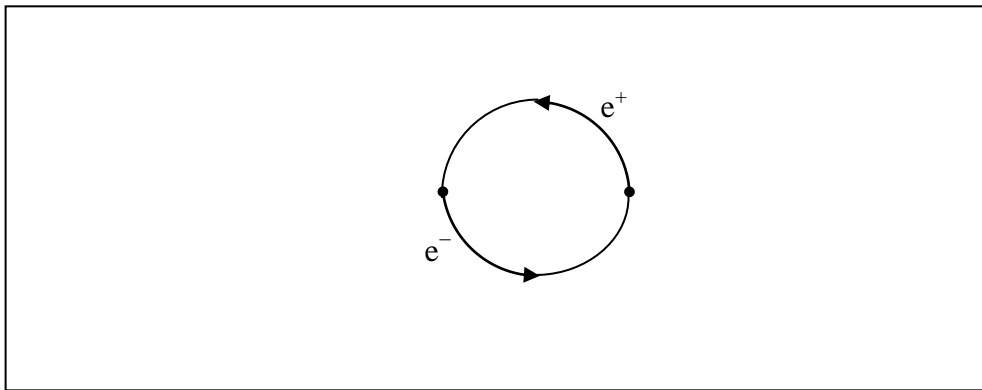
$$\frac{E^2}{|\vec{p}|^4} = \frac{E^2}{(E^2 - m^2)^2} = \frac{(m+T)^2}{(2mT + T^2)^2} = \frac{1}{4T^2} \frac{\left(1 + \frac{T}{m}\right)^2}{\left(1 + \frac{T}{2m}\right)^2} = \frac{1}{4T^2} + O(\beta^2),$$

(7.21) u nerelativističkom limesu dobijamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{(2\pi)^4 4T^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (7.22)$$

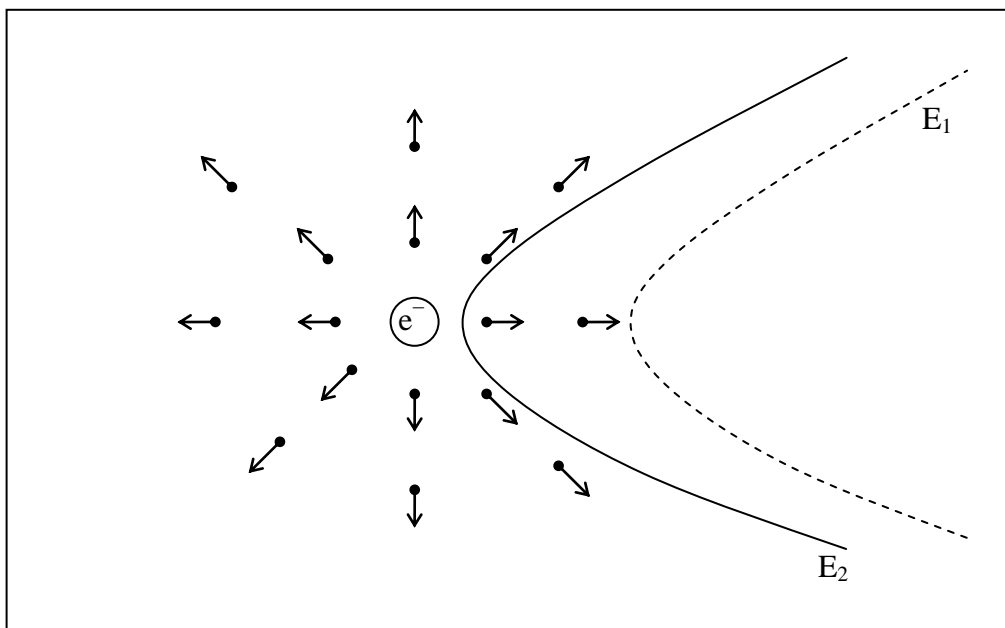
Rezultat (7.22) znači da je diferencijalni udarni presjek $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ proporcionalan produktu „naboja“ elektrona i jezgre $Z\alpha$, inverzno proporcionalan kvadratu kinetičke energije elektrona T^2 , a angularna distribucija raspršenja proporcionalna je sa $\sin^{-4} \frac{\theta}{2}$, sve isto kao u klasičnoj Rutherfordovoj formuli (2.46).

Numeričke konstante na početku izraza (7.22) i (2.46) naravno nisu jednake, jer je Rutherfordova formula, tj. Coulombov zakon iz koga je izvedena, za klasične nabijene čestice preveliko pojednostavljeno da bi direktno korespondirala realnim elektronima i fotonima. Realne elementarne čestice su kvantne relativističke čestice. Relativistička formula $E = mc^2$ znači da broj čestica nije očuvan zbog procesa kreacije i anihilacije, a kvantne relacije neodređenosti znače da u iznimno kratkom intervalu vremena može postojati proizvoljno velika koncentracija energije. Elektron je jednočestično stanje Diracova polja (3.53) nastalo djelovanjem kreacionog operatora $a_p^\dagger(p)$ na vakuum kvantne teorije polja $|0\rangle$. Ali, vakuum $|0\rangle$ nije jednostavno stanje bez čestica i nulte energije kao u klasičnoj fizici, već stanje u kojem se stalno i svuda kreiraju i iznimno brzo anihiliraju parovi virtuelnih čestica-antičestica. Realni elektron je komplicirani kvantni objekt koji je uvijek okružen brojnim virtuelnim elektron-pozitron parovima čiji Feynmanov dijagram je zatvorena petlja (loop) prikazana na Slici 7.3.



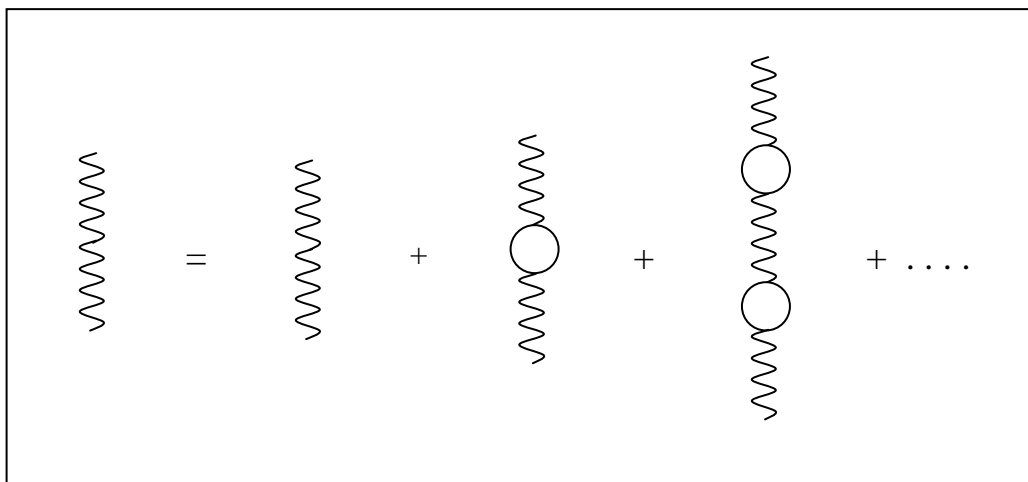
Slika 7.3

U okolini realnog elektrona raspodjela virtuelnih elektron-pozitron parova nije homogena – zbog električnog privlačenja virtuelni pozitroni su uvijek bliži elektronu. Ako virtuelni elektron-pozitron par prikazemo malom strelicom (kao električni dipol) čiji kraj označava virtuelni elektron pojednostavljeni prikaz realnog elektrona e^- je dat na Slici 7.4. Naboj elektrona je „zasjenjen“ (screened) virtuelnim pozitron-elektron parovima. Ovaj efekt se naziva polarizacija vakuuma jer je analogan polarizaciji molekula sredstva u prisustvu električnog naboja. Naboj elektrona $-e$ je mjera jakosti njegovih elektromagnetskih interakcija. Ako zamislimo da mjerimo naboj elektrona raspršenjem nekih čestica – projektila naboja e na elektronu, izmjerena vrijednost naboja zavisiti će od energije projektila. Projektili veće energije, prikazani krivuljom $E_2 > E_1$ na Slici 7.4, prići će bliže elektronu i „vidjet“ će manje zasjenjen, tj. veći naboj elektrona. Ovakvi efekti „zasjenjenja“ naboja (svih, ne samo električnih naboja) su uvijek prisutni u kvantnoj teoriji polja. Konstante jakosti interakcija (naboji čestica) zavise od energije na kojoj se mjere, što se naziva „running coupling constants“ i manifestacija je neophodnosti renormalizacije teorije. Renormalizacija znači da se osnovni parametri teorije koji se pojavljuju u Lagrangianu moraju redefinirati i tek takvi „renormalizirani“ parametri se identificiraju sa mjerenim parametrima realnih čestica. U renormalizabilnim teorijama efekti „zasjenjenja“ naboja se mogu točno proračunati.



Slika 7.4

Na primjer, u kvantnoj elektrodinamici efekti zasjenjenja naboja uslijed polarizacije vakuuma znače promjenu propagatora fotona uslijed mogućnosti kreiranja virtuelnih elektron-pozitron parova tijekom gibanja. Stvarni propagator realnog fotona, shematski prikazan na Slici 7.5, je suma beskonačno mnogo Feynmanovih dijagrama koji sadrže sve više umetnutih virtuelnih fermionskih petlji.



Slika 7.5

Propagator fotona $-i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2}$ se, sa točnošću do na $O(e^4)$, mora zamjeniti sa

$$-i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow -i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \log \left(1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right) + O(e^4) \right], \quad (7.23)$$

gdje je Λ gornji „cut-off“ integrala po momentima virtuelnih fermiona u petlji. Zatim se definira renormalizirani naboj elektrona e_R

$$e_R^2 \equiv e^2 \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{m_e^2} \right), \quad (7.24)$$

gdje je e parametar u Lagrangianu, takozvani „goli“ (bare) naboj. Renormalizirani naboj elektrona e_R se identificira sa mjerenom vrijednošću naboja elektrona u eksperimentima Coulombovog raspršenja na niskim energijama $q \ll m_e$, tj. na makroskopskim udaljenostima, dovoljno daleko od elektrona da se „zasjenjenje“ naboja može zanemariti. To znači da definiramo

$$\alpha(m_e) = \frac{e_R^2}{4\pi} = \frac{1}{137}. \quad (7.25)$$

Svi efekti regularizacije divergentnih integrala po 4-impulsima virtuelnih fermiona u petljama, tj. „cut-off“-a Λ , su uključeni u definiciju renormaliziranog naboja elektrona e_R .

U slučaju da se želi razmatrati raspršenje na visokim energijama, tj. na proizvoljnoj energijskoj skali μ , moraju se u obzir uzimati i petlje svih virtuelnih fermiona f koji ispunjavaju uvjet $m_f < \mu$, na primjer muona, tau leptona, itd. U teoriji renormalizacije se onda općenitije definira veza vrijednosti renormaliziranog naboja e_R na različitim energijskim skalama μ_1 i μ_2

$$\frac{1}{e_R^2(\mu_2)} = \frac{1}{e_R^2(\mu_1)} + \frac{1}{12\pi^2} \log \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2},$$

što dozvoljava da se renormalizirani naboj elektrona koji zavisi od energije (running coupling constant) izrazi pomoću β -funkcije za kvantnu elektrodinamiku

$$\frac{1}{\alpha(\mu_2)} = \frac{1}{\alpha(\mu_1)} + \beta_{\text{QED}} \log \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}, \quad (7.26)$$

gdje je

$$\beta_{\text{QED}} = \frac{1}{3\pi} \left[\frac{1}{9} n_{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{9} n_{\frac{2}{3}} + n_{-1} \right], \quad (7.27)$$

a n_i je broj fermiona (kvarkova i leptona) odgovarajućeg naboja čije su mase manje od μ_2 .

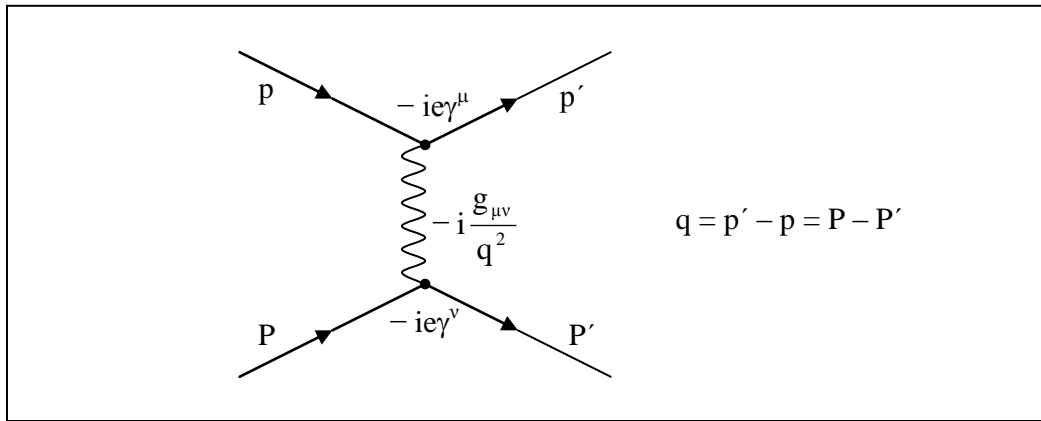
Zato je na skali energija $m_W \sim 80 \text{ GeV}$ renormalizirani naboj veći, pa je jakost elektromagnetskih interakcija $\alpha(m_W) = \frac{1}{128}$, što eksperimenti koji mjere masu W gauge bozona sa točnošću boljom od 0.05% moraju uzimati u obzir.

Sve renormalizabilne kvantne teorije polja, kakav je i SM, imaju ovo svojstvo. Teorija nije dobro definirana jer postoji konačan broj tipova divergentnih integrala koji se moraju regularizirati. Opći teorem dokazuje da način regularizacije integrala nije važan, ako ne narušava ni jednu simetriju teorije i ako je odabrani „cut-off“ Λ dovoljno velik. Tada se svi divergentni djelovi mogu apsorbirati u redefiniciju osnovnih parametara u Lagrangianu: naboja, masa i valnih funkcija čestica, tako da invarijantne amplitude bilo kojeg procesa uvijek ostaju konačne.

7.3 Elektron-muon raspršenje

U općem slučaju raspršenja fermiona, na primjer elektron-muon ili elektron-proton raspršenju, i drugi fermion f mora biti reprezentiran svojim valnim funkcijama $\psi^f(x)$. Vektorska struja (3.142) tih Diracovih polja $j_\mu^f(x)$ onda daje Lagrangian interakcije sa poljem fotona $A^\mu(x)$, potpuno analogno kao (7.1) za elektrone. Dijagram jedno-fotonske razmjene između elektrona i muona, elektrona i τ leptona, ili između elektrona i protona (zanemarujući strukturu protona), koji je $2 \rightarrow 2$ elektromagnetski proces $e + \mu \rightarrow e + \mu$, prikazan je na Slici 7.6.

Ograničimo se na slučaj elektron-muon (ili τ) raspršenja da izbjegnemo korekcije uslijed jakih interakcija kvarkova unutar protona i na niske energije (puno manje od m_W) da možemo zanemariti slabe interakcije. Impulsi muona označeni su velikim slovima.



Slika 7.6

Na ovom primjeru iz QED detaljno ćemo ilustrirati proceduru kojom se u kvantnoj teoriji polja od Lagrangiana teorije dolazi do vjerojatnosti pojedinog procesa. Elektromagnetske interakcije polja leptona i fotona u SM određene su članovima u Lagrangianu interakcije oblika (7.1), tj.

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{int.}} = e j_e^\mu A_\mu + e j_\mu^\mu A_\mu + e j_\tau^\mu A_\mu, \quad (7.28)$$

gdje je struja (3.141) pojedinog fermionskog polja

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (7.29)$$

Ograničimo li razmatranje samo na elektron-muon raspršenje Lagrangian interakcije čine samo prva dva člana na desnoj strani izraza (7.28).

U bilo kojoj točki prostor-vremena x^μ u kojoj dolazi do interakcije polja Lagrangian interakcije $\mathcal{L}^{\text{int.}}(x)$ daje kontribuciju S-matričnom elementu S_{fi} procesa u razvoju (2.82). Za proces sa Slike 7.6 trebaju nam dva verteksa interakcije u nekim točkama x_1 i x_2 .

U prvom verteksu jedan lepton emitira foton koji u drugom verteksu apsorbira drugi lepton. U najnižem redu (drugom) S-matrični element je

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{(i)^2}{2!} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \langle f | T [\mathcal{L}_{\text{int.}}(x_1) \mathcal{L}_{\text{int.}}(x_2)] | i \rangle = \\ &= (i)^2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \langle f | \mathcal{L}_{\text{int.}}(x_1) \mathcal{L}_{\text{int.}}(x_2) | i \rangle \theta(x_1^0 - x_2^0). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Produkt dva Lagrangiana interakcije (7.28) sadrži četiri člana i to

$$e^2 \left[(j_{e^-}^\mu A_\mu)(j_{e^-}^\nu A_\nu) + (j_{\mu^-}^\mu A_\mu)(j_{\mu^-}^\nu A_\nu) + (j_{e^-}^\mu A_\mu)(j_{\mu^-}^\nu A_\nu) + (j_{\mu^-}^\mu A_\mu)(j_{e^-}^\nu A_\nu) \right],$$

od kojih samo zadnja dva člana opisuju elektron-muon raspršenje. Prvi član opisuje $e^- e^-$ raspršenje, a drugi $\mu^- \mu^-$ raspršenje. Pišemo li eksplicitno prostorno-vremensku zavisnost točaka interakcije u (7.30) treba izračunati matrični element operatora

$$j_{e^-}^\mu(x_1) A_\mu(x_1) j_{\mu^-}^\nu(x_2) A_\nu(x_2) + j_{\mu^-}^\nu(x_1) A_\nu(x_1) j_{e^-}^\mu(x_2) A_\mu(x_2), \quad (7.31)$$

između inicijalnog $|i\rangle$ i finalnog $\langle f|$ stanja. U procesu koji nas zanima sa Slike 7.6 i inicijalno i finalno stanje sadrže po jedan elektron i jedan muon (i nula fotona). Napisana pomoću slobodnih jednočestičnih stanja odgovarajućih kvantnih polja kao u (3.64), tj. (3.67), inicijalno i finalno stanje procesa su

$$|i\rangle = |\mu_i\rangle |e_i\rangle |0\gamma\rangle, \quad \langle f| = \langle \mu_f | \langle e_f | \langle 0\gamma|. \quad (7.32)$$

S_{fi} element procesa zavisi od matričnog elementa

$$\begin{aligned} \langle f | \mathcal{L}_{\text{int.}}(x_1) \mathcal{L}_{\text{int.}}(x_2) | i \rangle &= \langle e_f | j_{e^-}^\mu(x_1) | e_i \rangle \langle \mu_f | j_{\mu^-}^\nu(x_2) | \mu_i \rangle \langle 0 | A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) | 0 \rangle + \\ &+ \langle \mu_f | j_{\mu^-}^\nu(x_1) | \mu_i \rangle \langle e_f | j_{e^-}^\mu(x_2) | e_i \rangle \langle 0 | A_\nu(x_1) A_\mu(x_2) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (7.33)$$

Točke u prostor-vremenu po kojima se na kraju integrira u (7.30) su proizvoljne (osim što ih T operator uređuje po vremenu) točke x_1 i x_2 u kojima se događaju bilo kakve interakcije. Fizikalno je puno poželjnije odabrati uređenje po tipu interakcije, tj. tipu verteksa. Želimo da x_1 reprezentira točku u prostor-vremenu gdje se raspršuje elektron, a x_2 točku raspršenja muona. Zato u drugom članu u (7.33) zamijenimo $x_1 \leftrightarrow x_2$, pri čemu moramo zamjeniti i vremena u θ -funkciji u (7.30), što za S-matrični element daje

$$S_{fi} = (i)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \langle e_f | j_{e^-}^\mu(x_1) | e_i \rangle \langle \mu_f | j_{\mu^-}^\nu(x_2) | \mu_i \rangle D_{\mu\nu}(x_1, x_2), \quad (7.34)$$

gdje je propagator fotona

$$D_{\mu\nu}(x_1, x_2) = \langle 0 | A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \theta(x_1^0 - x_2^0) + A_\nu(x_2) A_\mu(x_1) \theta(x_2^0 - x_1^0) | 0 \rangle. \quad (7.35)$$

Prema (3.69), svako kvantno polje ima razvoj po kreacionim i anihilacionim operatorima koji djeluju u Fock prostoru teorije i kreiraju/anihiliraju slobodnu česticu (kvant) polja određenog impulsa \vec{p} i heliciteta λ . Za kvantna polja fotona i pojedinog leptona razvoji su eksplisitno:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \sum_{\vec{p}, \lambda} a_{\vec{p}, \lambda} \varepsilon_\mu(\lambda) e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}, \lambda}^\dagger \varepsilon_\mu^*(\lambda) e^{ip \cdot x}, \\ \psi(x) &= \sum_{\vec{p}, \lambda} b_{\vec{p}, \lambda} u(\vec{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} + d_{\vec{p}, \lambda}^\dagger v(\vec{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}, \\ \psi^\dagger(x) &= \sum_{\vec{p}, \lambda} b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger u^\dagger(\vec{p}, \lambda) e^{ip \cdot x} + d_{\vec{p}, \lambda} v^\dagger(\vec{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}, \end{aligned} \quad (7.36)$$

gdje su b i b^\dagger , te d i d^\dagger , kreacioni/anihilacioni operatori elektrona i pozitrona, te muona i anti-muona čija stanja spina su opisana slobodnim Diracovim spinorima $u(\vec{p}, \lambda)$ i $v(\vec{p}, \lambda)$ datim u (3.154). Kreacioni i anihilacioni operatori zadovoljavaju odgovarajuća (3.69) komutaciona pravila za bozonska, a antikomutaciona pravila za fermionska polja. Kako je operator fermionske (elektronske ili muonske) struje $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ bilinearan po poljima, razvoj (7.36) daje četiri člana

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \psi = \sum_{\vec{p}, \vec{p}', \lambda, \lambda'} \sum_{i=1}^4 j_\mu^{(i)}(\vec{p}, \lambda; \vec{p}', \lambda'; x), \quad (7.37)$$

koji su redom

$$\begin{aligned} j_\mu^{(1)} &= \bar{u}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu u(\vec{p}, \lambda) b_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger b_{\vec{p}, \lambda} e^{i(p' - p) \cdot x}, \quad j_\mu^{(2)} = \bar{v}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu v(\vec{p}, \lambda) d_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger d_{\vec{p}, \lambda} e^{i(p - p') \cdot x}, \\ j_\mu^{(3)} &= \bar{u}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu v(\vec{p}, \lambda) b_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger d_{\vec{p}, \lambda}^\dagger e^{+i(p' + p) \cdot x}, \quad j_\mu^{(4)} = \bar{v}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu u(\vec{p}, \lambda) d_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger b_{\vec{p}, \lambda} e^{-i(p' + p) \cdot x}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

U (7.38) svi članovi osim drugog su u takozvanom normalnom poretku produkta operatora – anihilacioni operatori su desno od kreacionih, što osigurava da daju nulu kad djeluju na vakuum u skladu sa zahtjevom (3.66). Koristeći antikomutacijsku relaciju za operatore kreacije i anihilacije antifermiona poredak operatora se može zamjeniti i $j_\mu^{(2)}$ se može napisati u obliku

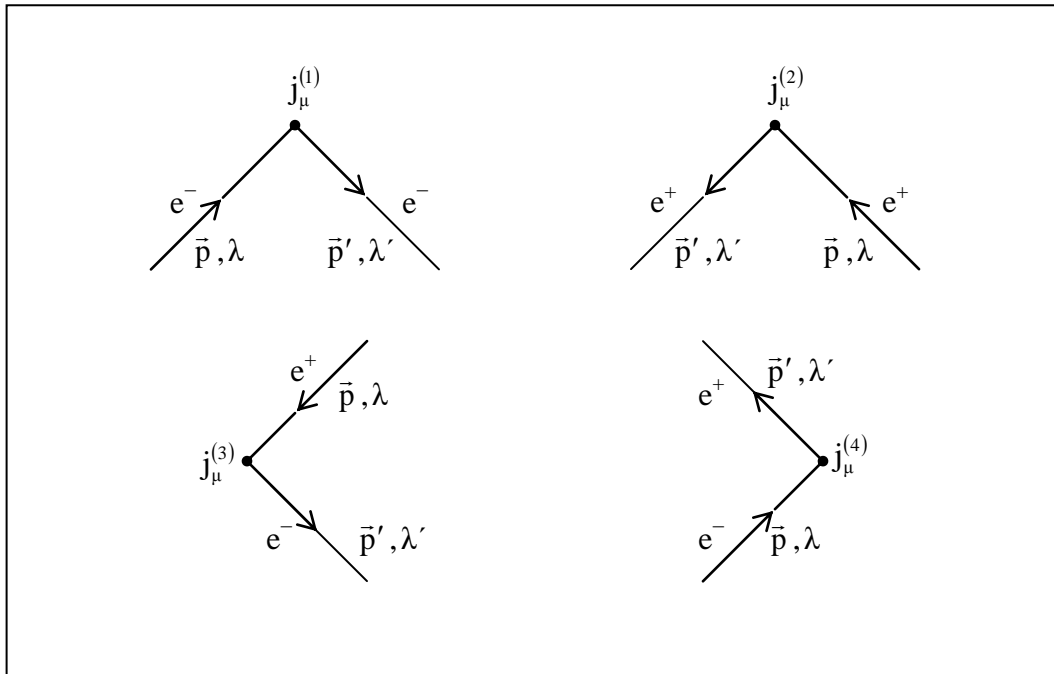
$$j_\mu^{(2)} = -\bar{v}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu v(\vec{p}, \lambda) d_{\vec{p}, \lambda}^\dagger d_{\vec{p}', \lambda'} e^{i(p - p') \cdot x}, \quad (7.39)$$

gdje smo zanemarili konstantu čiji matrični element je nula za $p' \neq p$.

Označimo li 4-impulse i helicitete fermiona u finalnom stanju sa \vec{p}' i λ' , a sa \vec{p} i λ u inicijalnom stanju, svaki član u (7.38) ima ne-nulti matrični element između jednočestičnih fermionskih stanja. Na primjer, u prvom članu u $j_\mu^{(1)}$ operatoru $b_{\vec{p},\lambda}$ anihilira fermion (elektron ili muon) impulsa \vec{p} i spina λ u inicijalnom, a $b_{\vec{p}',\lambda'}^\dagger$ kreira fermion impulsa \vec{p}' i spina λ' u finalnom stanju, tako da je matrični element

$$\langle e^-(\vec{p}',\lambda') | j_\mu^{(1)}(x) | e^-(\vec{p},\lambda) \rangle = \bar{u}(\vec{p}',\lambda') \gamma_\mu u(\vec{p},\lambda) e^{i(p'-p)x}. \quad (7.40)$$

Analogno, $j_\mu^{(2)}$ reprezentira gibanje (propagaciju) antifermiona jer ekstra minus znak u (7.39) znači suprotan naboj, koji je u inicijalnom stanju imao impuls i helicitet \vec{p}' i λ' , a završi u finalnom stanju sa kvantnim brojevima \vec{p} i λ . Treći član u (7.38) kreira elektron-pozitron par iz vakuuma, a četvrti član anihilira elektron-pozitron par u vakuum. Sva četiri člana u (7.38) se mogu grafički prikazati kao na Slici 7.7, što je razlog odabira Feynmanovih pravila za spoljašnje fermionske linije iz Poglavlja 6.3.



Slika 7.7

Četiri verteksa sa Slike 7.7 reprezentiraju elementarne procese kvantne elektrodinamike sa Slike 4.3, ali bez ucrtanih fotonских linija. Svaki član u Lagrangianu interakcije sadrži tri polja i u svakom verteksu, tj. integracionoj točki x^μ u (7.30), moraju se spojiti tri linije – dvije fermionske i jedna linija fotonskog polja. Svi kreacioni i anihilacioni operatori fotona u razvoju S-matričnog elementa (7.30) sadržani su u izrazu (7.35) koji je kvadratan po polju fotona.

Kako u drugom redu elektron-muon raspršenja nema fotona ni u inicijalnom, ni u finalnom stanju, sve fotonske linije su unutarne linije dijagrama. Na primjer, (7.35) daje matrični element u kome kreacioni operator iz $A_\nu(x_2)$ stvori foton impulsa \bar{q} i heliciteta ϵ_ν u točki raspršenja muona, koji potom anihilacioni operator iz $A_\mu(x_1)$ anihilira u točki raspršenja elektrona – ukupni efekt je razmjena jednog fotona između muona i elektrona. Kako se radi o bozonskim operatorima koji komutiraju za $p' \neq p$, različiti redosljedi fotonskih kreacionih i anihilacionih operatora ne mijenjaju znak amplitude. Na taj način fotonski propagator (7.35) spaja dva fermionska verteksa sa Slike 7.7 u dijagram elektron-muon raspršenja razmjenom jednog fotona koji je prikazan na Slici 7.6. Uvrštavanjem kompletnog skupa jedno-čestičnih stanja i kompleksnom integracijom, slično kao što je u Poglavlju 4.1 urađeno za skalarno polje, nalazi se Fourierov transform izraza (7.35) koji daje (4.21) propagator fotona $-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$.

Kad se izračuna djelovanje svih kreacionih/anihilacionih operatora u razvoju svih polja u S-matričnom elementu (7.30) preostaje produkt dva matrična elementa oblika (7.40) – jednog za elektron i jednog za muon, u kojima je razdvojena zavisnost od spina i prostorno-vremenskih koordinata čestica i koji su povezani propagatorom fotona. Integracija prostorno-vremenskih valnih funkcija – ravnih valova koji opisuju slobodne čestice po d^4x_i daje 4-dimenzionu δ -funkciju koja garantira očuvanje energije i impulsa u svakom pojedinom verteksu procesa. Za proces elektron-muon raspršenja sa Slike 7.6 je $P' = P - q$ i $p' = p + q$. Eliminacijom impulsa unutarnjih linija preostaje zakon očuvanja energije i impulsa ukupnog procesa $\delta^4(P' + p' - P - p)$.

Prema pravilima za računanje diferencijalnog udarnog presjeka procesa iz Poglavlja 2.5, uvrštavajući normalizacione konstante koje smo dosad zanemarivali (faktore 2π), djeljeći početnim fluksom i integrirajući po impulsima finalnih čestica dobija se

$$d\sigma = \frac{1}{I_0} (2\pi)^4 \delta^4(p_f + P_f - p_i - P_i) |\overline{M_{fi}}|^2 \frac{1}{4E_i^e E_i^p} \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f^e} \frac{d^3P_f}{(2\pi)^3 2E_f^p}, \quad (7.41)$$

gdje je invarijantna amplituda procesa

$$M_{fi} = -e^2 [\bar{u}(p_f, s_f) \gamma_\mu u(p_i, s_i)] \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}(P_f, S_f) \gamma_\nu u(P_i, S_i)]. \quad (7.42)$$

Propagator izmjenjenog fotona povezuje spinorske faktore iz struja elektrona i muona. Inicijalni flux I_0 se kao u (2.96) može kombinirati sa normalizacionim faktorima inicijalnih čestica $\frac{1}{E_i^e E_i^p}$ u Lorentz invarijantni faktor $\frac{1}{I_0} \frac{1}{4E_i^e E_i^p} = \frac{1}{4\sqrt{(p_i \cdot P_i)^2 - m^2 M^2}}$, tako da je

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f + P_f - p_i - P_i)}{4\sqrt{(p_i \cdot P_i)^2 - m^2 M^2}} |\overline{M_{fi}}|^2 \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f^e} \frac{d^3P_f}{(2\pi)^3 2E_f^p}, \quad (7.43)$$

gdje još treba integrirati po impulsima finalnih čestica. Sva fizika elektron-muon elektromagnetske interakcije sadržana je u kvadratu amplitude $\overline{|M_{fi}|^2}$.

Nepolarizirani diferencijalni udarni presjek se dobija potpuno analogno kao u (7.15) i daje

$$\begin{aligned} \overline{|M_{fi}|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} \left| \left[\bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma_\mu u(\mathbf{p}_i, s_i) \right] \frac{e^2}{q^2} \left[\bar{u}(\mathbf{P}_f, S_f) \gamma^\mu u(\mathbf{P}_i, S_i) \right] \right|^2 = \\ &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{(q^2)^2} \text{Tr}[(\not{\mathbf{p}}_f + m) \gamma^\mu (\not{\mathbf{p}}_i + m) \gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{\mathbf{P}}_f + M) \gamma_\mu (\not{\mathbf{P}}_i + M) \gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Koristeći prvu i treću od relacija (7.18), trag γ -matrica daje

$$\text{Tr}[(\not{\mathbf{p}}_f + m) \gamma^\mu (\not{\mathbf{p}}_i + m) \gamma^\nu] = 4 [p_f^\mu p_i^\nu + p_i^\mu p_f^\nu - g^{\mu\nu} (p_f \cdot p_i - m^2)]. \quad (7.45)$$

Drugi trag je istog oblika, pa je kvadrat invarijantne amplitude konačno

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{(q^2)^2} [(P_f \cdot p_f)(P_i \cdot p_i) + (P_f \cdot p_i)(P_i \cdot p_f) - m^2(P_f \cdot P_i) - M^2(p_f \cdot p_i) + 2M^2 m^2]. \quad (7.46)$$

Diferencijalni udarni presjek (7.43) najzgodnije je izračunati u sustavu mirovanja inicijalnog muona gdje je

$$\mathbf{p}_f = (\mathbf{E}', \vec{p}'), \quad \mathbf{p}_i = (\mathbf{E}, \vec{p}), \quad \mathbf{P}_i = (M, \vec{0}), \quad (7.47)$$

te $\sqrt{(p_i \cdot P_i)^2 - m^2 M^2} = M|\vec{p}|$. δ -funkcija očuvanja 4-impulsa $P_f = P_i + p_i - p_f$ omogućuje integraciju po finalnom impulsu $d^3 P_f$ muona čija energija je $E_f^p = P_i^0 + p_i^0 - p_f^0 = P_i^0 + E - E'$. Tu integraciju je najzgodnije napraviti u 4-dimenzionom obliku. Kao u (2.96), vrijedi

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 P_f}{2E_f^p} \delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i) &= \int d^4 P_f \delta(P_f^2 - M^2) \delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i) \theta(P_f^0) = \\ &= \delta[(P_i + p_i - p_f)^2 - M^2] \theta(P_i^0 + E - E'). \end{aligned}$$

Kako zbog $p_f \cdot p_f = m^2 = E'^2 - p'^2$, vrijedi $p' dp' = E' dE'$, za integraciju po komponentama finalnog impulsa elektrona možemo pisati $d^3 p_f = p'^2 dp' d\Omega' = p' E' dE' d\Omega'$, gdje je $d\Omega'$ element prostornog kuta.

Diferencijalni udarni presjek (7.43) onda postaje

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{8M|\vec{p}|} \int p' dE' \overline{|M_{fi}|^2} \delta[(P_i + p_i - p_f)^2 - M^2] \theta(P_i^0 + E - E'). \quad (7.48)$$

Uvjet očuvanja energije je $\delta[(P_i + p_i - p_f)^2 - M^2] = \delta[2m^2 - 2M(E' - E) - 2E'E + 2p'p \cos \theta]$, a kako za δ -funkcije vrijedi $\int dx \delta[f(x)] = \left| \frac{df(x)}{dx} \right|^{-1}$, dobija se

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{16M} \frac{p'}{p} \frac{1}{M + E - E' \frac{p}{p'} \cos \theta} \overline{|M_{fi}|^2}, \quad (7.49)$$

gdje je

$$E'(M + E) - p'p \cos \theta = EM + m^2. \quad (7.50)$$

Izraz za udarni presjek se znatno uprosti u slučaju raspršenja ultra-relativističkih elektrona kad je $\frac{m}{E} \ll 1$. Tada se mogu zanemariti svi članovi proporcionalni sa m^2 i uzeti da je $E = p$ i $E' = p'$, te se umjesto (7.50) dobija

$$M(E - E') = EE'(1 - \cos \theta), \quad (7.51)$$

a, umjesto (7.49)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{16M^2} \frac{E'}{E} \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \overline{|M_{fi}|^2}. \quad (7.52)$$

Koristeći $q^2 = q^\mu q_\mu = (p_f - p_i)^2 = 2m^2 - 2p_f \cdot p_i \cong -2p_f \cdot p_i = -4E'E \sin^2 \frac{\theta}{2}$ i $M(E - E') \cong \cong 2E'E \sin^2 \frac{\theta}{2} = -\frac{q^2}{2}$, te $P_f = P_i + p_i - p_f$, izraz za invarijantnu amplitudu (7.46) se uprosti

$$\begin{aligned} \overline{|M_{fi}|^2} &= \frac{8e^4}{(q^2)^2} \left[2(P_i \cdot p_f)(P_i \cdot p_i) + (p_f \cdot p_i)(P_i \cdot p_i - P_i \cdot p_f - M^2) \right] = \\ &= \frac{16e^4 M^2 E' E}{(q^2)^2} \left[1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(-\frac{q^2}{2M^2} \right) - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = \end{aligned} \quad (7.53)$$

$$= \frac{e^4 M^2}{E' E \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right].$$

Uvrštavajući ovaj izraz za $\overline{|M_{fi}|^2}$ u (7.52) diferencijalni udarni presjek raspršenja elektrona visoke energije $E \gg m$ na muonu je konačno

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{64\pi^2} \frac{1}{E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (7.54)$$

Ovaj udarni presjek ima izražen maksimum za vrlo male kuteve raspršenja $\theta \approx 0$ i točan je za slučaj relativističkog elektron-muon ili elektron-tau raspršenja. Izraz (7.54) vrijedi i u slučaju elektron-proton raspršenja pod pretpostavkom da je proton isto što i lepton mase M , što je naravno samo aproksimativno točno. Proton je vezano stanje kvarkova i gluona koji međudjeluju jakim silama, pa u elektron-proton raspršenju postoje dodatne korekcije uslijed strukture protona koje nisu zanemarive kad energije elektrona postanu $E \geq 0.5$ GeV.

Na sličan način se, polazeći od (7.43), za nerelativističke elektrone za koje je $E \ll m$, pokazuje da se diferencijalni udarni presjek raspršenja reducira na (7.21) Mott udarni presjek (Zadatak 7.6.).

7.4 Polarizacija fotona

Tipični proces kvantne elektrodinamike je $2 \rightarrow 2$ proces raspršenja fermiona, kao proces prikazan na Slici 7.6, u kome se elektromagnetska interakcija fermiona smatra razmjenom medijatora interakcije – fotona. Razmotrimo još jednom, malo detaljnije ne-relativistički limes kvantne elektrodinamike. Prvo treba detaljnije razmotriti polarizaciju fotona.

Lagrangian interakcije QED (7.1) pokazuje da se polje fotona $A^\mu(x)$ veže za vektorsku struju fermiona (elektrona, muona, protona, ...) oblika $j_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$ dajući verteks teorije koji reprezentira jedan od elementarnih procesa sa Slike 4.3. Zanimajući normalizacione faktore u (3.2), fermioni se reprezentiraju jednočestičnim inicijalnim ili finalnim stanjima oblika $u(p)e^{-ip \cdot x}$ ili $\bar{u}(p')e^{+ip' \cdot x}$, a foton jednočestičnim stanjem $\epsilon_\mu(\lambda)e^{-iq \cdot x}$ ili $\epsilon_\mu(\lambda)^* e^{+iq \cdot x}$, gdje je $\epsilon_\mu(\lambda)$ vektor polarizacije fotona, $q = p - p'$ je njegov impuls, a $\lambda = 1, 2$ označava helicitet fotona.

U Poglavlju 3. već je pokazano da zbog gauge simetrije QED važi zakon očuvanja struje, tj. uvjet $p \cdot q = 0$. Zato projekcija spina fotona na pravac njegova impulsa ima samo dvije vrijednosti, tj. postoje samo dva transverzalna stupnja polarizacije fotona.

Fermionski dio matičnog elementa elementarnog procesa iz QED je oblika

$$\langle f | j_\mu | i \rangle = -eQ j_\mu(0) e^{iq \cdot x}, \quad (7.55)$$

gdje je Q naboj fermiona u jedinicama naboja pozitrona e . Gauge simetrija kvantne elektrodinamike zahtijeva očuvanje struje $\partial^\mu j_\mu = 0$, što u impulsnom prostoru za matični element (7.55) implicira $q^\mu j_\mu(0) = 0$. Da se dobije amplituda emisije/apsorpcije realnog fotona, matični element elementarnog QED verteksa treba još pomnožiti sa vektorom polarizacije fotona $\epsilon^\mu(\lambda)$. Vjerojatnost procesa proporcionalna je onda sa

$$\left| \epsilon_\mu(\lambda) j^\mu(0) \right|^2 = \epsilon_\mu^*(\lambda) \epsilon_\nu(\lambda) j^{\mu*}(0) j^\nu(0). \quad (7.56)$$

U inicijalnom stanju treba usrednjiti po helicitetu (spinu) λ inicijalnih fotona, a osim u iznimnom slučaju kad se u eksperimentu mjeri polarizacija finalnih fotona, treba sumirati i po helicitetu finalnih fotona.

Najjednostavniji način računanja polarizacijske sume za fotone je da uzmemo da mu je impuls \vec{q} duž z-osi, pa za bazu prostornog dijela stanja heliciteta možemo odabrati jedinične vektore x- i y-osi \hat{e}_x i \hat{e}_y . Tada je

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^*(\lambda) \epsilon_\nu(\lambda) = \hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{e}_y \hat{e}_y. \quad (7.57)$$

Izraz (7.57) nije teško napisati u obliku koji je očigledno kovarijantan.

Očuvanje struje znači da vrijedi $q^0 j_0 - q^z j_z = 0$. Za realni foton vrijedi $q^2 = 0$, pa mora biti $j_0(0) = j_z(0)$, te se desna strana izraza (7.56) može napisati kao

$$\left[\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{e}_y \hat{e}_y + \hat{e}_z \hat{e}_z - \hat{e}_t \hat{e}_t \right] \cdot \left[j_\mu^*(0) j_\nu(0) \right] = -g^{\mu\nu} j_\mu^*(0) j_\nu(0),$$

što znači da suma po stanjima polarizacije fotona u bilo kojem sustavu mora biti

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu^*(\lambda) \varepsilon_\nu(\lambda) = -g_{\mu\nu}, \quad (7.58)$$

kao u (6.86).

Transverzalnost fotona znači postojanje Coulomb interakcije među električno nabijenim česticama. Za procese jedno-fotonske razmjene, tj. za procese sa dva QED elementarna verteksa kao na Slici 1.1 ili 7.6 matični element sadrži propagator fotona između dvije vektorske struje fermiona oblika

$$-i M_{fi} = (-ij_\mu(0)) \left[\frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2} \right] (-ij_\nu(0)), \quad (7.59)$$

gdje su fermionske struje, recimo za elektron-muon raspršenje sa Slike 7.6,

$$j_{(e)}^\mu(0) = -e \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i), \quad j_{(\mu)}^\nu(0) = -e \bar{u}(P_f) \gamma^\nu u(P_i). \quad (7.60)$$

Izaberemo li opet da je impuls $q_\mu = (q_0, 0, 0, |\vec{q}|)$ fotona duž z-osi, matični element je

$$M_{fi} = -\frac{j_{(e)} \cdot j_{(\mu)}}{q^2} = -\frac{j_0^{(e)} j_0^{(\mu)} - j_z^{(e)} j_z^{(\mu)}}{q^2} + \frac{\vec{j}_T^{(e)} \cdot \vec{j}_T^{(\mu)}}{q^2}, \quad (7.61)$$

gdje indeks T označava transverzalne komponente struje. Za realni foton je $q^2 = 0$, pa zbog očuvanja fermionske struje (gauge invarijantnosti) $q_\mu j^\mu = 0$, vrijedi $j_0^{(e)} = j_z^{(e)}$, kao i $j_0^{(\mu)} = j_z^{(\mu)}$, pa bi u (7.61) preostao samo zadnji član na desnoj strani koji znači razmjenu realnog fotona sa samo dva transverzalna stupnja polarizacije.

Za razmjenu virtualnog fotona ne vrijedi uvjet $q^2 = 0$ jer virtuelni foton ne mora biti na svojoj masenoj ljusci. Uvjet očuvanja elektromagnetske struje onda daje jedini uvjet

$q_0 j_0 = |\vec{q}| j_z$, tj. $j_z = \frac{q_0}{|\vec{q}|} j_0$, pa je amplituda razmjene jednog virtuelnog fotona

$$M_{fi} = \frac{\vec{j}_0^{(e)} \cdot \vec{j}_0^{(\mu)}}{|\vec{q}|^2} + \frac{\vec{j}_T^{(e)} \cdot \vec{j}_T^{(\mu)}}{q^2}. \quad (7.62)$$

Prvi član u (7.62) zavisi samo od kvadrata 3-impulsa fotona i naziva se Coulomb interakcija jer je proporcionalan produktu nultih komponenti struja dva fermiona, tj. produktu gustoća električnog naboja tih čestica. Ako je čestica nerelativistička $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$, za operator gustoće struje vrijedi $|\vec{j}| \approx |\vec{v} j_0| \ll |j_0|$, pa je prvi Coulomb član vrlo dobra aproksimacija ukupnog matričnog elementa.

Dobar primjer je atom vodika u kome su i elektron, a pogotovo proton, nereletivističke čestice, pa Coulombov član daje veoma dobru aproksimaciju elektromagnetskih elektron-foton-proton interakcija. Ukupni Hamiltonian elektrona u elektromagnetskom polju protona može se dobiti minimalnom supstitucijom $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$ iz Diracova Hamiltoniana (3.125) kome se još mora dodati elektrostatska interakcija $e\phi$. Tako dobijeni Hamiltonian je kompliciran (sadrži osam članova) i pored uobičajenog člana kinetičke energije i relativističke korekcije mase, sadrži članove elektrostatske monopol i magnetske dipolne interakcije, te spin-orbit interakcije i takozvani Darwin član $-\frac{e}{8m^2} \nabla \cdot \vec{E}$ koji daje Lamb pomak. Popravke višeg reda dolaze uslijed spinske zavisnosti gustoće naboja fermiona i relativističke korekcije kinetičke energije elektrona i nazivaju se popravke fine strukture i Lambov pomak spektralnih linija vodika.

Zadržavajući samo prvi član u (7.62) i koristeći normalizaciju (3.153) fermionskih jednočestičnih stanja koja daje $\bar{u} \gamma_0 u = 2m$, za nerelativističko elektron-muon raspršenje u najnižem (drugom) redu teorije perturbacija dobija se matrični element

$$M_{fi} = \frac{e^2 (2m_e)(2m_\mu)}{|\vec{q}|^2} = 4\pi\alpha \frac{(2m_e)(2m_\mu)}{|\vec{q}|^2}. \quad (7.63)$$

Da se dobije diferencijalni udarni presjek – diferencijal vjerojatnosti procesa, treba kvadrat apsolutne vrijednosti (7.63) podijeliti inicijalnim fluksom i integrirati po faznom prostoru finalnih čestica kao u (7.41). Koristimo li iste oznake kao u (7.47), u sustavu mirovanja muona (protona) Lorentz invarijantni izraz za diferencijalni udarni presjek $d\sigma$ dat je u (7.49). U nerelativističkoj aproksimaciji zanemaruje se „recoil“ muona, što znači da muon (proton) djeluje kao statični izvor za potencijalno raspršenje elektrona kao na Slici 7.2. Raspršenje je elastično $|\vec{p}'| = |\vec{p}| = p$ i $E' = E = m_e \ll m_\mu$, što znači da nema transfera energije $q_0 \approx 0$, tj. $q^2 \approx -|\vec{q}|^2$, i jedina promjena je promjena pravca impulsa elektrona. Zanemarujući sve članove u nazivniku izraza (7.49) koji zavise od energije elektrona diferencijalni udarni presjek je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(2m_\mu)^2} \overline{|M_{fi}|^2}, \quad (7.64)$$

Uvrstimo li za kvadrat amplitude izraz (7.63), za nerelativistički diferencijalni udarni presjek dobijamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \left(\frac{m_e}{2\pi}\right)^2 \frac{e^4}{|\vec{q}|^4}, \quad (7.65)$$

gdje je $|\vec{q}|^2 = |\vec{p}' - \vec{p}|^2 = 4|\vec{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

Uporedimo li gornji izraz sa Born aproksimacijom elastičnog raspršenja (2.63) u nerelativističkoj kvantnoj mehanici

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2. \quad (2.63)$$

gdje je amplituda „out-going“ sfernog vala određena izrazom (2.64)

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m_e}{2\pi} \int d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} V(\vec{x}), \quad (2.64)$$

vidimo da za Fourier transform potencijala V mora vrijediti

$$\int d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} V(\vec{x}) = \frac{e^2}{|\vec{q}|^2}. \quad (7.66)$$

Usporedba sa (4.9) i (4.10) [za slučaj $m = 0$] ili sa (7.5), za elektron-muon potencijal u nerelativističkoj aproksimaciji odmah daje Coulombov potencijal

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{|\vec{x}|}. \quad (7.67)$$

Renormalizacija, tj. zavisnost konstante interakcije (naboja) od energije fermiona, unosi popravke višeg reda. Zadnji član u (7.23) koji zavisi od q^2 je konačan i u limesu $\frac{q^2}{m^2} \ll 1$ male promjene impulsa daje popravku propagatora fotona

$$-i \frac{\mathbf{g}^{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow -i \frac{\mathbf{g}^{\mu\nu}}{q^2} \left[1 - \frac{e_R^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} + O(\alpha_R^2) \right]. \quad (7.68)$$

U prvoj aproksimaciji Coulombov potencijal (7.67) se u kvantnoj elektrodinamici mijenja u

$$\left(1 - \frac{e_R^2}{60\pi^2 m^2} \nabla_x^2\right) \frac{e_R^2}{4\pi|\vec{x}|} = \frac{e_R^2}{4\pi|\vec{x}|} + \frac{e_R^4}{60\pi^2 m^2} \delta(\vec{x}), \quad (7.69)$$

što znači da se pojavljuje dodatni privlačni član.

Na niskim energijama, kad $q^2 \rightarrow 0$, probni naboj ostaje na velikoj udaljenosti od elektrona i interakcija je određena samo prvim Coulomb članom u (7.26) sa „potpuno zasjenjenim“ nabojem elektrona e_R . Ali, na višim energijama, probni naboj djelimično penetrira oblak virtuelnih fermion-antifermion parova oko elektrona i „vidi“ manje zasjenjen naboj elektrona, pa je interakcija ojačana drugim članom u (7.26) koji mjeri polarizaciju vakuuma. Fizikalno ovo lako možemo razumjeti jer veliko $|\vec{p}|$ u impulsnom prostoru odgovara maloj prostornoj udaljenosti – možemo zamisliti sićušnu petlju virtuelnog fermion-antifermion para ogromne energije kako se sažima u točku dajući efektivnu točkastu interakciju oblika (7.69). Efekt ove korekcije Coulombovog zakona na energijske nivoe $E_{n'l}$ atoma vodika je precizno izmjeren i naziva se Lambov pomak (shift).

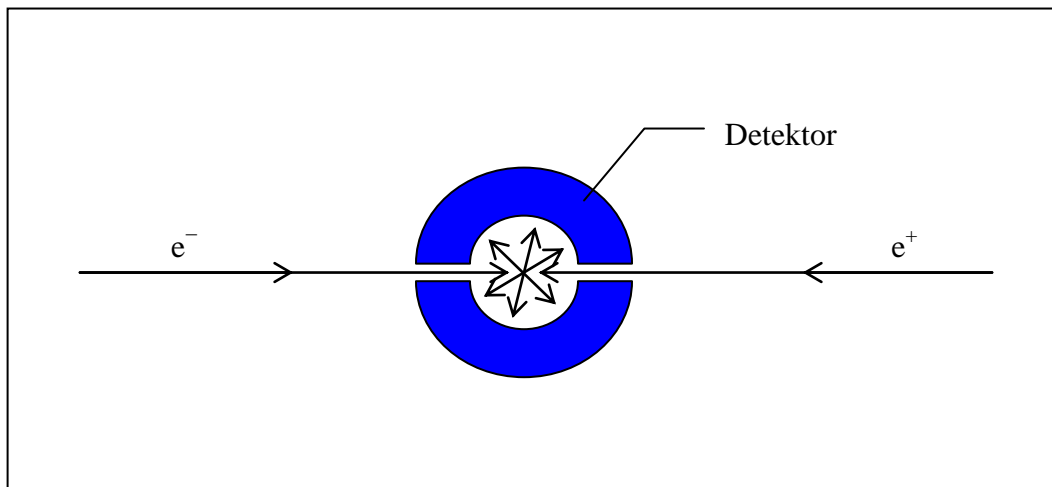
Proračuni za Lamb pomak daju izraz

$$\Delta E_{n'l} = -\frac{e_R^4}{60\pi^2 m^2} |\psi_{n'l}(0)|^2 \delta_{l0} = -\frac{4m\alpha_R^5}{15\pi n^3} \delta_{l0}. \quad (7.70)$$

Izračunati Lamb shift za $n = 2$ nivo u atomu vodika je $\nu = \frac{\Delta E}{\hbar} = -27$ MHz, što se sa tačnošću boljom od 0.01% slaže sa eksperimentalnim mjerenjima.

7.5 Elektron-pozitron anihilacija

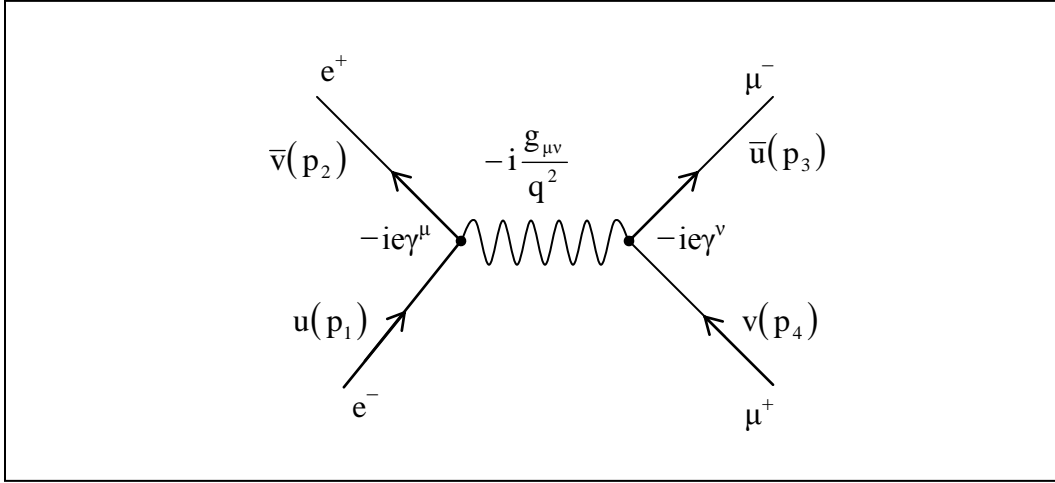
Razmatranje raspršenja fermiona završimo uspostavljanjem veze ovih procesa sa eksperimentima u kojima se provjerava SM. U akceleratorima se snopovi čestica ubrzavaju do ultra relativističkih energija i potom međusobno sudaraju. Preciznu provjeru SM omogućili su elektron-pozitron sudari u LEP akceleratoru u CERN-u. U tim eksperimentima se anihiliraju elektro-pozitron parovi čija energija omogućuje kreaciju raznih novih čestice čije 4-impulse mjeri detektor. Pomoću tragova koje ostave u materijalu detektora, te novo-nastale čestice se registriiraju bilo direktno ako dovoljno dugo žive, ili pomoću produkata raspada ako su izuzetno nestabilne. Principijelna shema jednog LEP eksperimenta prikazana je na Slici 7.8.



Slika 7.8

Novi akcelerator LHC koji uskoro započinje sa radom sudaraće snopove protona koji su ubrzani do energije od 7 TeV. Kako protoni nisu elementarne čestice, analiza proton-proton sudara je kompliciranija jer se moraju uzimati u obzir funkcije raspodjele unutar individualnog protona. Zato se ograničimo na proračun udarnih presjeka u procesu elektron-pozitron anihilacije koji dobro ilustriraju i tehnike neophodne za proračun udarnih presjeka analognih dominantnih QCD procesa između kvarkova i gluona.

U procesima elektron-proton anihilacije mogu nastati različita finalna stanja koja sva moraju imati ukupan leptonski broj nula. U najnižem redu, najjednostavniji takav proces je kreacija lepton-antilepton para u finalnom stanju razmjennom jednog virtualnog fotona. Razmotrimo zato proces $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ kreacije muon-antimuon para sa Slike 7.9. Označimo inicijalne impulse elektrona i pozitrona p_1 i p_2 , a finalni impuls muona p_3 i antimuona p_4 . Spoljašnje linije čestica u procesu označene su odgovarajućim spinorima u skladu sa Feynmanovim pravilima iz Poglavlja 6.3, a naznačeni su i verteks faktori, kao i propagator fotona u međustanju. Kao i u slučaju elektron-muon raspršenja sa Slike 7.6 i u ovom procesu matrični element je produkt dvije fermionske struje spojene propagatorom izmijenjenog fotona.



Slika 7.9

Invarijantna amplituda ovog procesa je

$$-i M_{fi} = i e^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \frac{g_{\mu\nu}}{s} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4), \quad (7.71)$$

gdje je $s = (p_1 + p_2)^2 = q^2$ Mandelstamova varijabla definirana u Poglavlju 2.1. U sustavu centra mase elektron-pozitron para, zbroj njihovih 3-impulsa je $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$, a energije su im γm_e , pa je varijabla s jednaka kvadratu ukupne energije procesa $s = 4\gamma^2 m_e^2$ koja je u LEP eksperimentima bila 200 GeV. Jedina razlika između (7.71) i amplitude elektron-muon raspršenja (7.42) je u zavisnosti spinora u i/ili v od 4-impulsa p^μ pojedinih inicijalnih ili finalnih čestica. Kvadrat apsolutne vrijednosti amplitude (7.71) je

$$|M_{fi}|^2 = \frac{e^4}{s^2} |\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)|^2 |\bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4)|^2. \quad (7.72)$$

Usrednjavanje po spinu inicijalnih i sumiranje po spinu finalnih čestica daje tragove γ -matrica

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \frac{e^4}{s^2} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_2 - m_e) \gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma_\nu]. \quad (7.73)$$

U relativističkom limesu možemo zanemariti mase svih čestica pa je

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \frac{e^4}{s^2} \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu], \quad (7.74)$$

što korištenjem formula za tragove lako za kvadrat amplitude daje

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{s^2} [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)]. \quad (7.75)$$

Zbog zakona očuvanja 4-impulsa $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ u relativističkom limesu daje

$$t = (p_1 - p_3)^2 \cong -2p_1 \cdot p_3 \cong -2p_2 \cdot p_4, \quad u = (p_1 - p_4)^2 \cong -2p_1 \cdot p_4 \cong -2p_2 \cdot p_3, \quad (7.76)$$

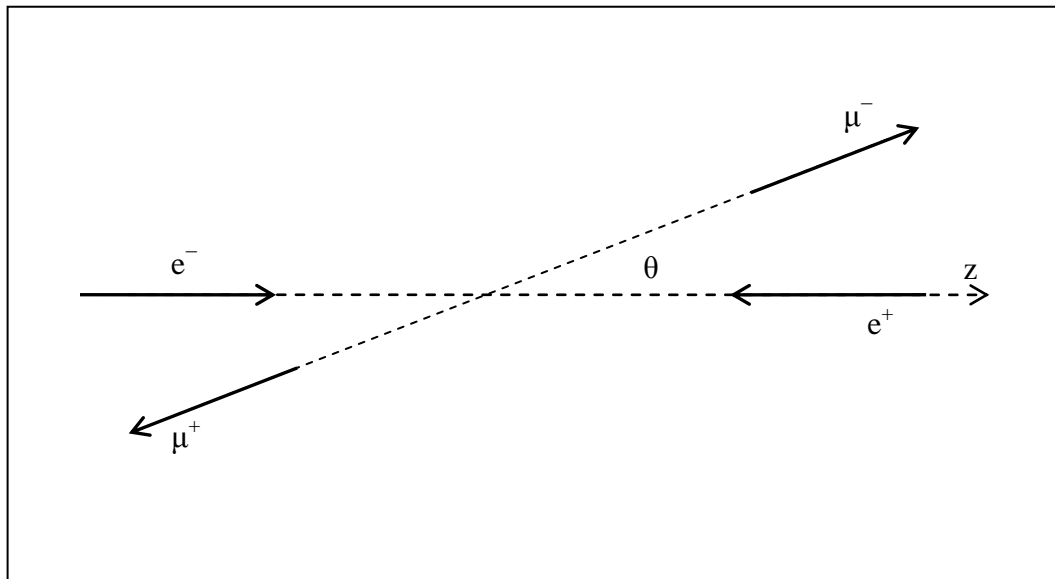
pa je kvadrat invarijantne amplitude nepolariziranog procesa kreacije muon-antimuon para u elektron-pozitron sudaru izražen pomoću Mandelstam varijabli jednostavno

$$\overline{|M_{fi}|^2} = 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2}. \quad (7.77)$$

Odaberemo li pravac snopova inicijalnih čestica za z-os, u relativističkoj aproksimaciji $E \cong |\vec{p}| \gg m_\mu$ impulsi svih čestica u sustavu centra mase elektron-pozitron para su:

$$p_1 = (E, 0, 0, p_0); \quad p_2 = (E, 0, 0, -p_0); \quad p_3 = (E, p \sin \theta, 0, p \cos \theta); \quad p_4 = (E, -p \sin \theta, 0, -p \cos \theta),$$

gdje je $E = \frac{\sqrt{s}}{2}$ energija bilo koje čestice i proces je potpuno određen samo sa dva parametra: energijom E i kutom θ pravca finalnog muona. Pravci impulsa svih čestica prikazani su na Slici 7.10.



Slika 7.10

U relativističkoj aproksimaciji je prema (7.76)

$$s = 4E^2, \quad t = -2E(1 - \cos\theta), \quad u = -2E(1 + \cos\theta), \quad (7.78)$$

pa je prema (7.77) spinska suma kvadrata apsolutne vrijednosti nepolarizirane amplitude

$$|\overline{M_f}|^2 = e^4(1 + \cos^2\theta). \quad (7.79)$$

Kao u (2.98), ukupni fazni faktor finalnih čestica je $\frac{1}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}_3|}{\sqrt{s}} d\Omega$, a inicijalni fluks je

$\frac{1}{4|\vec{p}_1|\sqrt{s}}$, pa je diferencijalni udarni presjek kreacije muon-antimuon para u procesu elektron-pozitron anihilacije

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{64\pi^2} \frac{1 + \cos^2\theta}{s} = \frac{\alpha^2}{16} \frac{1 + \cos^2\theta}{E^2}, \quad (7.80)$$

kao u (2.99). Za razliku od relativističkog elektron-muon raspršenja (7.54) udarni presjek (7.80) nema oštar maksimum za male kuteve θ (forward direction). Integracija po prostornom kutu daje ukupni udarni presjek za produkciju muon-antimuon parova u elektron-pozitron sudarima

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}, \quad (7.81)$$

kojaj opada sa kvadratom energije inicijalnih čestica.

Svi ovi primjeri su poslužili za ilustraciju opće procedure korištenja formalizma S-matrice i Feynmanovih pravila za nalaženja udarnih presjeka interakcija elementarnih čestica. Ujedno, primjeri pokazuju kako se u najnižem redu teorije perturbacija tretira raspršenje fermionskih čestica koje razmjenjuju fotone, tj. koje međudjeluju elektromagnetskim silama.

Ali, najveći uspjesi SM vezani su za opis procesa raspršenja čestica pri djelovanju slabih i jakih sila. Spontano narušenje simetrije pokazuje kako elektro-slabi gauge bozoni dobijaju masu u skladu sa eksperimentalnim mjerenjima. Za ukupnu eksperimentalnu potvrdu SM najvažniji procesi su raspadi masivnih gauge bozona Z i W^\pm , a za eksperimentalnu potragu za Higgs bozonima najvažniji su procesi njihovih raspada. Ovi procesi raspada su posljedica djelovanja slabih interakcija i razmotrit ćemo ih u sljedećim poglavljima.

Zadaci:

Zadatak 7.1. Koristeći svojstva γ -matrica i definiciju $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ dokazati valjanost formula (7.13).

Zadatak 7.2. Dokazati valjanost formula (7.18) za trag γ -matrica.

Zadatak 7.2. Provjeriti ispravnost formula (7.19).

Zadatak 7.4. Pokazati da se iz (7.16) zaista dobija Mott udarni presjek (7.21).

Zadatak 7.5. Eksplicitno izračunati tragove Diracovih γ -matrica u (7.44) i pokazati da se za nepolarizirani kvadrat amplitude raspršenja dobija izraz (7.46).

Zadatak 7.6. Polazeći od izraza (7.46) pokazati da se u nerelativističkom slučaju $\frac{m}{E} \ll 1$ udarni presjek elektron-proton raspršenja reducira na Mott udarni presjek (7.20), tj. (7.21).

8. Raspadi Z bozona

U SM elektro-slabe interakcije kvarkova i leptona opisane su $SU(2)_L \times U(1)_Y$ lokalnom gauge grupom, tj. generirane su poljima 4 bezmasena gauge bozona B^μ i W_i^μ , od kojih poslije spontanog narušenja simetrije samo polje (6.21) fotona A^μ

$$A_\mu = B_\mu \cos\theta_w + W_\mu^3 \sin\theta_w, \quad (8.1)$$

ostaje bez mase. Higgs mehanizam fizikalnom polju neutralnog gauge bozona Z^0

$$Z_\mu = -B_\mu \sin\theta_w + W_\mu^3 \cos\theta_w, \quad (8.2)$$

daje masu (6.61)

$$m_Z = \frac{v g_2}{2 \cos\theta_w} = \frac{1}{2} v \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \frac{e v}{2 \sin\theta_w \cos\theta_w} = 91.2 \text{ GeV}. \quad (8.3)$$

Postoji šest tipova interakcija Z bozona koje su određene odgovarajućim članovima iz Lagrangiana interakcije SM koji sadrži $\mathcal{L}_{ZZWW} + \mathcal{L}_{ZWW\gamma} + \mathcal{L}_{ZWW} + \mathcal{L}_{ZZh} + \mathcal{L}_{ZZhh} + \mathcal{L}_{Zf\bar{f}}$.

Da bi bio moguć spontani raspad čestice, zakon očuvanja energije zahtjeva da inicijalna masa bude veća od finalne

$$m_{\text{in}} > \sum_i m_{\text{fi}}^i.$$

Na primjer, za dvočestični raspad $A \rightarrow B + C$ zakon očuvanja energije je $E_A = E_B + E_C$. U sustavu mirovanja čestice A je $E_A = m_A$, pa napišemo li E_B i E_C pomoću energije mirovanja i kinetičke energije vrijedi

$$m_A c^2 = m_B c^2 + T_B + m_C c^2 + T_C.$$

Kako je $T_B + T_C > 0$, zaista slijedi $m_A > m_B + m_C$.

Zato su jedini mogući procesi raspada Z bozona raspadi $Z \rightarrow \bar{f}f$ u fermion-antifermion par. S-matrica ovog procesa određena je, prema (2.81), Hamiltonianom interakcije za koji očekujemo da je $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}}$, jer \mathcal{L}_{int} ne sadrži derivacije. [Detaljna analiza pokazuje da naivna zamjena $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}}$ važi i u ovom slučaju samo zato što se međusobno točno pokrate dva dodatna Lorentz neinvarijantna člana. Jedan od njih je posljedica kanonske kvantizacije polja gauge bozona $Z^\mu(x)$, a drugi se zbog gauge simetrije pojavljuju u vremenskom uređenju tenzora polarizacije propagatora gauge bozona. Ovo je još jedan primjer osjetljive veze Lorentz i gauge simetrije koja se manifestira u slučaju vektorskih polja. Sama procedura pojavljivanja i kraćenja ovih članova je komplicirana i nije važna za naše potrebe.]

Prema (6.40) Lagrangian interakcije Z bozona i fermion-antifermion parova je

$$\mathcal{L}_{Z\bar{f}f} = -g_Z j_Z^\mu Z_\mu. \quad (8.4)$$

U (8.4) konstanta vezanja Z bozona je

$$g_Z = \frac{e}{\sin\theta_w \cos\theta_w} = \left[4\sqrt{2} G_F M_Z^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (8.5)$$

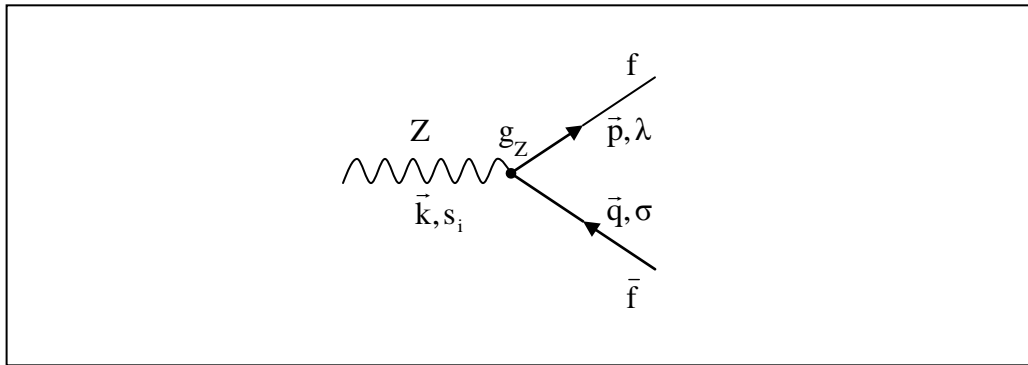
gdje je Fermijeva konstanta slabih interakcija $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$, a neutralna slaba struja fermiona je

$$j_Z^\mu = \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (C_V^f - C_A^f \gamma^5) f, \quad (8.6)$$

gdje se sumira po svim leptonima i kvarkovima osim t-kvarka čija masa je prevelika. Vektorski i aksijalnovektorski verteks faktori fermionskih neutralnih struja su

$$C_V^f = \frac{1}{2} T_3^f - Q_f \sin^2 \theta_w; \quad C_A^f = \frac{1}{2} T_3^f. \quad (8.7)$$

kao u (6.44). Na Slici 8.1 prikazan je Feynmanov dijagram procesa raspada $Z \rightarrow \bar{f} f$ u najnižem redu. Inicijalni Z bozon impulsa \vec{k} i spina s_i raspada se u fermion impulsa \vec{p} i spina λ i antifermion impulsa \vec{q} i spina σ .



Slika 8.1

Prema (2.100) diferencijalna širina raspada (diferencijal brzine raspada) Z bozona je

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \frac{1}{2k^0} \delta^4(p+q-k) \overline{|M(Z \rightarrow \bar{f}f)|^2} \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} \frac{d^3q}{2q^0(2\pi)^3}, \quad (8.8)$$

gdje je matrični element $M(Z \rightarrow \bar{f}f)$ amplituda Feynmanovog dijagrama sa Slike 8.1 koju još treba na odgovarajući način usrednjiti ili sumirati po stupnjevima polarizacije inicijalnih i finalnih čestica. Svi faktori u (8.8) su Lorentz invarijantni osim $\frac{1}{2k^0}$ člana.

Energija Z bozona k^0 , izražena preko njegove mase M_Z i brzine v je $k^0 = \gamma(\vec{v})M_Z = \frac{M_Z}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}$,

slijedi da vrijedi i

$$d\Gamma = \sqrt{1-\vec{v}^2} d\Gamma_{\text{mir.}}, \quad (8.9)$$

pa je $d\Gamma_{\text{mir.}} = \gamma d\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} d\Gamma = \frac{k^0}{M_Z} d\Gamma = d\left(\frac{1}{\tau_{\text{mir.}}}\right)$ širina raspada u sustavu mirovanja

Z bozona, a τ vrijeme njegova života. Relacija (8.9) za širinu raspada je u skladu sa relativističkom formulom za dilataciju vremena koja daje relaciju između duljina života Z bozona $\tau = \gamma \tau_{\text{mir.}}$ u pokretnom i mirnom sustavu.

Feynmanova pravila iz poglavlja 6.3 pokazuju da je matrični element $M(Z \rightarrow \bar{f}f)$ produkt četiri faktora: $\varepsilon_\mu(\vec{k}, s_i)$ za ulaznu liniju Z bozona, $\bar{u}(\vec{p}, \lambda)$ i $v(\vec{q}, \sigma)$ za izlazne fermionske linije i verteks faktora $-i g_Z \gamma^\mu (C_V^f - C_A^f \gamma^5)$

$$\begin{aligned} M(Z \rightarrow \bar{f}f) &= \langle f(\vec{p}, \lambda); \bar{f}(\vec{q}, \sigma) | \mathcal{L}_{\text{int.}}(0) | Z(\vec{k}, s_i) \rangle = \\ &= -i g_Z \varepsilon_\mu(\vec{k}, s_i) \bar{u}(\vec{p}, \lambda) \gamma^\mu (C_V^f - C_A^f \gamma^5) v(\vec{q}, \sigma). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Da se nađe širina raspada (8.8) treba izračunati kvadrat apsolutne vrijednosti matričnog elementa (8.10). U odnosu na (7.11) ili (7.34) za Coulombovo raspršenje fermiona ovaj matrični element je kompliciraniji zbog prisustva polarizacije Z bozona ε_μ i složenijeg verteks faktora koji pored γ^μ sadrži i γ^5 faktore. Kao i prije, relacije kompletnosti za komponente spina čestica omogućuju da se računanje kvadrata amplitude reducira na računanje tragova γ -matrica. Računska procedura zavisi od vrste eksperimenta – da li se radi o raspadu nepolariziranih ili polariziranog Z bozona.

Ako inicijalni snop Z bozona nije polariziran, tada su sve tri moguće vrijednosti njegovog spina jednako vjerojatne. Stanje inicijalnog Z bozona opisano je matricom

gustoće $\rho = \frac{1}{3} \sum_{s_i=-1}^{+1} |Z(\vec{k}, s_i)\rangle \langle Z(\vec{k}, s_i)|$, te treba usrednjiti po komponentama spina Z

bozona s_i . Ako se u eksperimentu ne mjeri spin finalnih fermiona (to je najčešće slučaj), treba zbrojiti po stanjima polarizacije finalnih čestica. Diferencijalna širina raspada nepolariziranog Z bozona je onda

$$d\Gamma[Z(\vec{k}) \rightarrow f\bar{f}] = \frac{1}{3} \sum_{s_i=-1}^{+1} \sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} \sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}} d\Gamma[Z(\vec{k}, s_i) \rightarrow f\bar{f}], \quad (8.11)$$

gdje se spinske sume računaju pomoću relacija kompletnosti (6.85) i (6.86). Sumiranje po spinskim stupnjevima slobode Z bozona daje

$$\sum_{s_i=-1}^{+1} |\varepsilon_\mu \bar{u} \gamma^\mu (C_V^f - C_A^f \gamma^5) v|^2 = \left[-\eta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right] [\bar{u} \gamma^\mu (C_V^f - C_A^f \gamma^5) v] [\bar{u} \gamma^\nu (C_V^f - C_A^f \gamma^5) v]^*.$$

Kako je prema (7.13)

$$[\bar{u} \gamma^\nu (C_V^f - C_A^f \gamma^5) v]^* = [\bar{u} \gamma^\nu (C_V^f - C_A^f \gamma^5) v]^\dagger = \bar{v} \gamma^\nu (C_V^f - C_A^f \gamma^5) u,$$

koristeći relacije (7.14), sumiranje po spinovima finalnih fermiona daje trag

$$\sum_{\lambda, \sigma=\pm\frac{1}{2}} [\bar{u} \gamma^\mu (C_V^f - C_A^f \gamma^5) v] [\bar{u} \gamma^\nu (C_V^f - C_A^f \gamma^5) v]^* = \text{Tr}[(\not{p} + m_f) \gamma^\mu (C_V^f - C_A^f \gamma^5) (\not{q} - m_f) \gamma^\nu (C_V^f - C_A^f \gamma^5)],$$

gdje je zbog jednakosti masa čestica i antičestica $p^2 = q^2 = m_f^2$. Usrednjeni kvadrat invarijantne amplitude je

$$|\overline{M}|^2 = \frac{g_Z^2}{3} \left[-\eta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right] \text{Tr}[(\not{p} + m_f) \gamma^\mu (C_V^f - C_A^f \gamma^5) (\not{q} - m_f) \gamma^\nu (C_V^f - C_A^f \gamma^5)], \quad (8.12)$$

a diferencijalna širina raspada nepolariziranih Z bozona je

$$d\Gamma[Z(\vec{k}) \rightarrow f\bar{f}] = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\delta^4(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k})}{2k^0} \frac{d^3\mathbf{p}}{2p^0} \frac{d^3\mathbf{q}}{2q^0} |\overline{M}|^2. \quad (8.13)$$

Prvo treba izračunati trag u (8.12). Kako je $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$, a trag neparnog broja γ -matrica je nula, članovi linearni po m_f ne daju doprinos, pa preostaje samo

$$|\overline{M}|^2 = -\frac{g_Z^2}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right) \text{Tr} \left[p_\rho q_\sigma \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu (C_V^{f^2} + C_A^{f^2} - 2C_V^f C_A^f \gamma^5) + m_f^2 \gamma^\mu \gamma^\nu (C_V^{f^2} - C_A^{f^2}) \right].$$

Koristeći formule za tragove γ -matrica (7.18) lako se dobija

$$|\overline{M}|^2 = \frac{4}{3} g_Z^2 \left[\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \frac{2}{M_Z^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) \right] (C_V^{f^2} + C_A^{f^2}) + 4g_Z^2 m_f^2 (C_V^{f^2} - C_A^{f^2}). \quad (8.14)$$

U sustavu mirovanja Z bozona je $k^\mu = (M_Z, \vec{0})$, pa δ -funkcija u izrazu za širinu raspada (8.13) postaje $\delta(p^0 + q^0 - M_Z) \delta^3(\vec{p} + \vec{q})$. Tada je

$$\vec{p} = -\vec{q}, \quad p^0 = q^0 = \frac{M_Z}{2}, \quad |\vec{p}| = |\vec{q}| = \frac{1}{2} \sqrt{M_Z^2 - 4m_f^2}, \quad p \cdot q = \frac{M_Z^2}{2} - m_f^2, \quad (8.15)$$

te $k \cdot p = k \cdot q = \frac{M_Z^2}{2}$, što konačno daje usrednjeni kvadrat invarijantne amplitude raspada $Z \rightarrow f\bar{f}$ nepolariziranih Z bozona

$$|\overline{M}|^2 = \frac{4}{3} g_Z^2 M_Z^2 \left[C_V^{f^2} + C_A^{f^2} + 2 \frac{m_f^2}{M_Z^2} (C_V^{f^2} - 2C_A^{f^2}) \right], \quad (8.16)$$

koji uopće ne zavisi od pravca (sfernih kuteva θ i φ) impulsa fermiona – izotropni raspad, što nije iznenađujuće jer je početno stanje bilo sferno simetrično.

Kao u (2.101), četvorodimenzionalna $\delta^4(p+q-k)$ u (8.13) omogućuje integraciju po d^3q i po $dp \equiv d|\vec{p}|$. Koristeći $d^3p = p^2 dp d\Omega$, $p dp = p^0 dp^0$ i $\delta(p^0 + q^0 - M_Z) = \frac{q^0}{k^0} \delta\left(p^0 - \frac{M_Z}{2}\right)$, diferencijalna širina raspada (8.13) u sustavu mirovanja Z bozona je

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\vec{p}|}{M_Z^2} |\overline{M}|^2 d\Omega. \quad (8.17)$$

Uvrštavajući (8.16) i integrirajući po prostornom kutu konačno se dobija ukupna širina raspada nepolariziranih Z bozona u par fermion-antifermion u sustavu mirovanja Z bozona

$$\Gamma(Z \rightarrow f\bar{f}) = \frac{g_Z^2}{12\pi} M_Z \sqrt{1 - 4 \frac{m_f^2}{M_Z^2}} \left[C_V^{f^2} + C_A^{f^2} + 2 \frac{m_f^2}{M_Z^2} (C_V^{f^2} - 2C_A^{f^2}) \right]. \quad (8.18)$$

Kako je za sve fermione u SM za koje je raspad $Z \rightarrow f\bar{f}$ kinematički dozvoljen $\frac{m_f^2}{M_Z^2} \leq \frac{m_b^2}{M_Z^2} = \left(\frac{4.2 \text{ GeV}}{91.2 \text{ GeV}}\right)^2 = 0.212\%$, približno je

$$\Gamma(Z \rightarrow f\bar{f}) = \frac{g_Z^2}{12\pi} M_Z (C_V^{f^2} + C_A^{f^2}). \quad (8.19)$$

Gornja formula dozvoljava da se izračuna parcijalna širina raspada Z bozona u svaki fermion-antifermion par, te ukupna širina raspada Γ_{tot} koja je zbroj svih parcijalnih širina.

Tabela 8.1 prikazuje odgovarajuće konstante vezanja slabih struja za razne ferione.

Fermion f	T₃	Q_f	C_A	C_V	C_V² + C_A²
ν_e, ν_μ, ν_τ	$+\frac{1}{2}$	0	0.25	0.25	0.125
e, μ, τ	$-\frac{1}{2}$	-1	-0.25	-0.0189	0.0629
u, c, t	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	0.25	0.0959	0.0717
d, s, b	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	-0.25	-0.1730	0.0924

Tabela 8.1

Jakost interakcija Z bozona sa fermionima zavisi i od treće komponente slabog izospina T₃ i od naboja fermiona Q_f, pa neutini, l leptoni, u- i d-tip kvarkovi, različito doprinose vjerojatnosti raspadu Z bozona.

Za usporedbu sa mjerenim vrijednostima koriste se frakcije grananja (branching fractions) $B_f = \frac{\Gamma(Z \rightarrow f\bar{f})}{\Gamma_{\text{tot}}}$ koje se puno preciznije mjere, a teorijski zavise samo od verteks faktora C_V i C_A. Koristeći najbolje današnje eksperimentalne vrijednosti konstanti vezanja na skali M_Z [numeričke vrijednosti: $\alpha(M_Z) = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{127.9}$ i $\sin^2\theta_W = 0.2312$] parcijalna širina Z bozona za raspad u fermion-antifermion par je

$$\Gamma(Z \rightarrow f\bar{f}) = \frac{\alpha}{3\sin^2\theta_W \cos^2\theta_W} M_Z (C_V^2 + C_A^2) N_c = (1.336 \text{ GeV}) (C_V^2 + C_A^2) N_c, \quad (8.20)$$

gdje je faktor boje N_c = 1 za leptone, a N_c = 3 za kvarkove.

Numeričke vrijednosti konstanti vezanja C_V² + C_A² iz Tabele 8.1 daju ukupnu širinu raspada Z bozona

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{tot.}} &= (1.336 \text{ GeV}) [3 \cdot (0.125) + 3 \cdot (0.0629) + 6 \cdot (0.0717) + 9 \cdot (0.0924)] = \\ &= 2.44 \text{ GeV}, \end{aligned} \quad (8.21)$$

gdje faktor na desnoj strani za kvarkove u-tipa ima faktor boje 6 jer su raspadu u t-kvarkove kinematički zabranjeni zbog prevelike mase.

Kao što pokazuje Tabela 8.2 slaganje sa eksperimentalnim rezultatima je vrlo dobro.

No.	Fermion	Formula (7.63)	Mjerenje
1)	$\nu_e \bar{\nu}_e + \nu_\mu \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \bar{\nu}_\tau$	20.5%	$(20.00 \pm 0.06)\%$
2)	$e^+ e^-$	3.45%	$(3.363 \pm 0.004)\%$
3)	$\mu^+ \mu^-$	3.45%	$(3.366 \pm 0.007)\%$
4)	$\tau^+ \tau^-$	3.45%	$(3.370 \pm 0.008)\%$
5)	$b\bar{b}$	15.18%	$(15.14 \pm 0.05)\%$
6)	$u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} + c\bar{c}$	54%	$(54.76 \pm 0.06)\%$
7)	Ukupna širina	2.44 GeV	(2.4952 ± 0.0023) GeV

Tabela 8.2

Kad se uzmu u obzir zanemareni članovi u (8.18), kao i proračun popravki sljedećeg reda, koji prevazilazi naše potrebe, numeričko slaganje sa teorijskim predviđanjima postaje zaista impresivna potvrda SM. Te dodatne popravke nastaju uslijed djelovanja jakih [proporcionalne sa $O\left(\alpha_s(M_Z) = \frac{g_3^2}{(4\pi)^2}\right) \approx 1\%$] i elektromagnetskih interakcija [proporcionalne sa $O\left(\frac{\alpha}{4\pi \sin^2 \theta_w}\right) \approx 3 \times 10^{-3}$]. Particle Data Group 2008. navodi za slaganje SM sa rezultatima preciznih eksperimenata numeričke vrijednosti prikazane u Tabeli 8.3.

Veličina	SM Proračun	Eksperiment
M_Z (GeV)	91.1874 ± 0.0021	91.1876 ± 0.0021
$\Gamma_{tot.}$ (GeV)	2.4968 ± 0.0010	2.4952 ± 0.0023
$\Gamma_{had.}$ (GeV)	1.7434 ± 0.0010	1.7444 ± 0.0020
$\Gamma_{l^+l^-}$ (MeV)	83.988 ± 0.016	83.984 ± 0.086

Tabela 8.3

Impresivno slaganje $\Gamma_{tot.}(Z \rightarrow f\bar{f})$ sa rezultatima mjerenja je indirektna potvrda postojanja samo tri familije fermiona – da postoji dodatna, četvrta familija fermiona Z bozon bi se mogao raspadati u dodatna finalna stanja i teorijski proračun bi bio bitno drukčiji.

Poredeći ukupnu širinu raspada i masu Z bozona $\frac{\Gamma_{tot.}}{M_Z} \cong 2.7\%$ jasno je da je Z bozon razmjerno vrlo stabilan za svoju masu (uska rezonanca).

Vrijeme života Z bozona je

$$\tau_Z = \frac{\hbar}{\Gamma_{\text{tot.}}} = \frac{6.6 \times 10^{-25} \text{ GeVs}}{2.495 \text{ GeV}} = 2.65 \times 10^{-25} \text{ s}. \quad (8.22)$$

Vrijeme života je toliko kratko da čak i ultrarelativistički Z bozoni ne mogu ostaviti trag svoje putanje u detektoru. Na primjer, u vrlo malo vjerojatnom slučaju produkcije u LHCu Z bozona energije $\sim 9 \text{ TeV}$, čiji je relativistički faktor dilatacije vremena $\gamma \approx 100$, putanja takvog Z bozona prije raspada bi bila svega $8 \times 10^{-15} \text{ m}$. Zato se u svim eksperimentima Z bozoni rekonstruiraju pomoću čestica koje su produkti njihova raspada. Izazov za eksperimentalne fizičare je identifikacija i mjerenje 4-impulsa baš onih čestica koje su nastale raspadom Z bozona u moru čestica iste vrste.

Dosad smo razmatrali raspade nepolariziranih Z bozona. U slučaju da u eksperimentu imamo polarizirani snop Z bozona amplituda procesa raspada je (8.10), ista kao i prije. Pretpostavimo da se u eksperimentu ne određuje spin finalnih fermiona. Da se nađe vjerojatnost procesa, kvadrat matričnog elementa treba sumirati po spinovima finalnih čestica koristeći uvjete kompletnosti (6.85), kao i u slučaju raspada nepolariziranih Z bozona. Jedina razlika u slučaju raspada Z bozona određenog spina, je odsustvo usrednjavanja matričnog elementa po polarizacijskim stupnjevima slobode, tj. ne koristi se sumaciona formula (6.86).

Umjesto izraza (8.12), sada će usrednjeni kvadrat apsolutne vrijednosti matričnog elementa biti

$$\overline{|\mathbf{M}|^2}_{\text{pol.}} = g_Z^2 \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu^* \sum_{\lambda, \sigma = \pm \frac{1}{2}} [\bar{u} \gamma^\mu \mathbf{V} v] [\bar{u} \gamma^\nu \mathbf{V} v]^*, \quad (8.23)$$

gdje smo verteks faktor označili sa $\mathbf{V} = C_V^f - C_A^f \gamma^5$. Kao i u nepolariziranom slučaju, računanje tragova γ -matrica daje

$$\overline{|\mathbf{M}|^2}_{\text{pol.}} = 4g_Z^2 (C_A^{f^2} + C_V^{f^2}) [(\varepsilon^* \cdot \mathbf{p})(\varepsilon \cdot \mathbf{q}) + (\varepsilon^* \cdot \mathbf{q})(\varepsilon \cdot \mathbf{p}) - (\varepsilon^* \cdot \varepsilon)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})] + 4g_Z^2 m_f^2 (\varepsilon^* \cdot \varepsilon) (C_A^{f^2} - C_V^{f^2}).$$

U sustavu mirovanja Z bozona uvijek se može odabrati gauge u kome su normirani vektori polarizacije Z bozona realni $\varepsilon_\mu^* = \varepsilon_\mu$ i imaju samo prostorne komponente $\varepsilon_\mu = (0, \hat{\varepsilon})$, tako da je $\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu = -\hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varepsilon} = -1$. Kako je $\mathbf{k}^\mu = (M_Z, \vec{0})$ ovaj odabir očigledno zadovoljava neophodni uvjet $\varepsilon \cdot \mathbf{k} = \varepsilon^\mu k_\mu = 0$. Odaberemo li još za z-os upravo pravac $\hat{\varepsilon}$ linearno polariziranog Z bozona, a pravac impulsa \vec{p} finalnog fermiona u sfernim koordinatama kao (θ, φ) , u sustavu mirovanja Z bozona je onda $\varepsilon \cdot \mathbf{p} = -\varepsilon \cdot \mathbf{q} = -|\vec{p}| \cos \theta$, pa je kvadrat invarijantne amplitude za raspad polariziranih Z bozona u par fermiona

$$\overline{|\mathbf{M}|}_{\text{pol.}}^2 = 2g_Z^2 M_Z^2 \left[C_V^{f^2} \left(1 - \cos^2\theta + 4 \frac{m_f^2}{M_Z^2} \cos^2\theta \right) + C_A^{f^2} \left(1 - 4 \frac{m_f^2}{M_Z^2} \right) (1 - \cos^2\theta) \right]. \quad (8.24)$$

Nijedan član u kvadratu matričnog elementa ne zavisi od φ , pa se iz (8.17) odmah dobija diferencijalna parcijalna širina raspada polariziranih Z bozona u par fermion-antifermion koja zavisi samo od kuta θ

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{\sin\theta d\theta} &= 2\pi \frac{d\Gamma}{d\Omega} = \\ &= \frac{g_Z^2 M_Z}{16\pi} \sqrt{1 - 4 \frac{m_f^2}{M_Z^2}} \left[C_V^{f^2} \left(1 - \cos^2\theta + 4 \frac{m_f^2}{M_Z^2} \cos^2\theta \right) + C_A^{f^2} \left(1 - 4 \frac{m_f^2}{M_Z^2} \right) (1 - \cos^2\theta) \right]. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Lako se uvjeriti da integracija po kutu θ daje ukupnu širinu raspada Z bozona (8.18) kao što i mora biti (Zadatak 8.4.).

Zadaci:

Zadatak 8.1. Pokazati da je u sustavu mirovanja Z bozona kvadrat usrednjenog invarijantnog matričnog elementa (8.10) za raspad $Z \rightarrow f\bar{f}$ nepolariziranih Z bozona dat izrazom (8.16).

Zadatak 8.2. Koristeći kvadrat matričnog elementa (8.16), pokazati da je u sustavu mirovanja Z bozona ukupna širina raspada data izrazom (8.18).

Zadatak 8.3. Pokazati da je u sustavu mirovanja Z bozona kvadrat invarijantne amplitude raspada polariziranih Z bozona u $f\bar{f}$ par dat izrazom (8.24).

Zadatak 8.4. Pokazati da integral diferencijalne širine raspada polariziranih Z bozona (8.25) daje ukupnu širinu raspada Z bozona (8.18).

9. Raspadi W^\pm bozona

U Lagrangianu SM elektro-slabe interakcije W^\pm gauge bozona opisane su sa osam članova koji reprezentiraju procese: $WWWW$, $WWZZ$, $WW\gamma\gamma$, $WWZ\gamma$, $WWhh$, WWZ , $WW\gamma$, WWh , $W\nu l$, $Wq_u q_d$. Raspad W bozona u najnižem redu teorije perturbacija može opisati samo član iz Lagrangiana interakcije linearan po poljima W bozona. Zbog dodatne kinematičke zabrane (prevelika masa finalnog stanja) samo dva poslednja člana opisuju raspade W^\pm bozona. Zakoni očuvanja naboja i leptonskog, tj. barionskog broja, zahtijevaju da su kanali raspada W^\pm bozona procesi

$$W^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l, \quad W^- \rightarrow q_d \bar{q}_u, \quad W^+ \rightarrow \nu_l l^+, \quad W^+ \rightarrow q_u \bar{q}_d, \quad (9.1)$$

što znači da se W^\pm bozoni raspadaju u neutrino-lepton ili q_u - q_d parove koji ne uključuju t -kvark. Procesi raspada W^\pm bozona mijenjaju okuse leptona i kvarkova. Odgovarajući članovi Lagrangiana interakcije SM su eksplicitno [zadnji član na desnoj strani izraza (6.40)]

$$\mathcal{L}_{SM}^{int} = -g_w \left(j_W^\mu W_\mu^- + j_W^{\mu \dagger} W_\mu^+ \right), \quad (9.2)$$

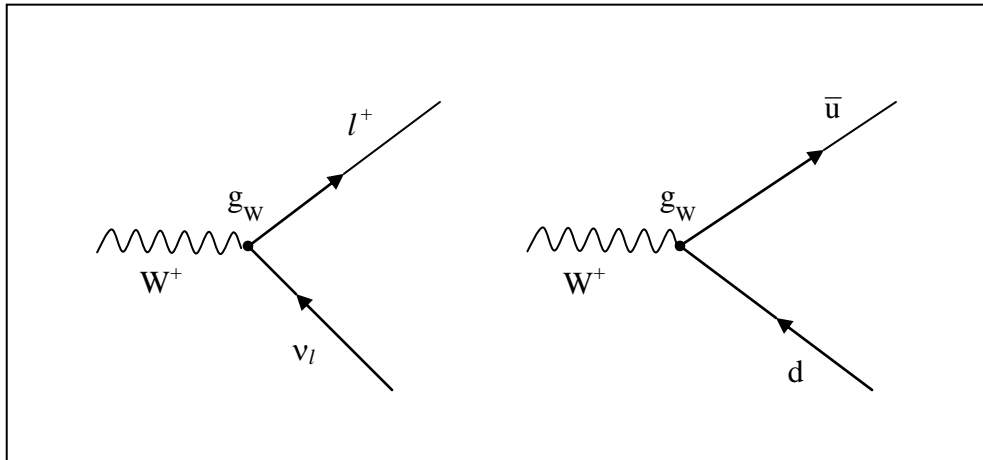
gdje je nabijena struja fermiona (6.43)

$$j_W^{\mu \dagger} = \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e + \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d, \quad (9.3)$$

a konstanta vezanja (6.36) je

$$g_w = \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_w} = \frac{g_2}{2\sqrt{2}}. \quad (9.4)$$

Feynmanovi dijagrami raspada W^+ bozona prikazani su na Slici 9.1. Analogni dijagrami sa konjugiranim poljima daju raspade W^- bozona.



Slika 9.1

W^+ je antičestica od W^- , pa CPT teorem kvantne teorije polja garantira da je ukupna širina (brzina raspada) obe čestice jednaka, ali ne nužno i parcijalna širina pojedinog kanala raspada. Parcijalne širine raspada za W^+ i W^- bozone su jednake ako odgovarajuće interakcije očuvavaju CP simetriju – produkt konjugacije naboja (charge) i transformacije parnosti (parity). Svaki član u Lagrangianu koji je realan je CP invarijantan. Ali, u SM postoji član u Lagrangianu koji nije realan – CKM unitarna matrica (6.79) mješanja kvarkovskih okusa. Kobayashi i Maskawa su podijelili Nobelovu nagradu za fiziku 2008. za taj doprinos Lagrangianu SM. CKM matrica se može napisati u takozvanoj Wolfenstein parametrizaciji u kojoj su jedino elementi „13“ = U_{ub} i „31“ = U_{td} kompleksni. Posljedica je da u SM modelu postoji malo narušenje CP simetrije, koje još uvijek nije dovoljno istraženo. Narušenje CP simetrije dozvoljava mogućnost različitih parcijalnih širina raspada ekvivalentnih procesa sa česticama i antičesticama i potencijalno može objasniti kako tijekom evolucije svemira od inicijalno simetričnog stanja (jednaka gustoća čestica i antičestica) nastaje potpuno asimetrično stanje – današnji svemir se sastoji samo od čestica (nema antimaterije). Pošto i neutriini imaju masu, iako za sada ne znamo precizno koliku, najvjerojatnije će postojati i mješanje leptonskih okusa u slabim nabijenim strujama leptona.

Nas zanima samo prvi član u razvoju S-matrice (2.88) koji daje dominantnu kontribuciju raspadu W bozona (Born aproksimacija), koji uvijek očuvava CP simetriju jer je Lagrangian interakcije Hermitski operator. Vjerojatnosti svih procesa za W^+ i W^- bozone su onda jednake i dovoljno je razmatrati samo W^+ raspade.

Miješanje kvarkovskih okusa u CKM matrici znači da W^\pm bozon interagiraju ne sa slabom nabijenom strujom (9.3) koja sadrži samo u i d kvarkovska polja, već sa kvarkovskom strujom (6.80)

$$j_W^\mu = \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U_{ui} d'_i + \bar{c} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U_{ci} d'_i + \bar{t} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U_{ti} d'_i, \quad (9.5)$$

u kojoj se pojavljuju i kvarkovska polja druge i treće generacije. To znači da se W^+ ne raspada samo na u-kvark + d-antikvark, već sa puno manjom vjerojatnošću, i na u-kvark + s-antikvark i na u-kvark + b-antikvark. Član u Lagrangianu interakcije SM odgovoran za raspad W^+ bozona onda možemo napisati

$$\mathcal{L}_{W^+ f \bar{f}} = -g_W \left[\bar{v}_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e_m + U_{nm} \bar{u}_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d_n \right] W_\mu^+, \quad (9.6)$$

gdje se sumira po indeksima generacija m,n = 1,2,3, tako da je $e_m = e, \mu, \tau$ i $d_m = d, s, b$, ali $u_m = u, c$ (t-kvark ne može biti produkt raspada W^+ bozona). Za procese raspada W^+ bozona sa Slike 9.1 Feynmanova pravila daju amplitudu

$$M(W^+ \rightarrow \bar{f}_m f_n) = -i g_W \varepsilon_\mu(\vec{k}, s_i) \bar{u}(\vec{p}, \lambda) V_{nm} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(\vec{q}, \sigma). \quad (9.10)$$

Uporedimo li matični element (9.10) sa amplitudom (8.10) za raspad Z bozona vidimo da imaju istu Lorentz tenzorsku strukturu ako zanemarimo mase fermiona.

To se i očekuje, jer se u oba slučaja radi o raspadu masivne vektorske čestice u fermion-antifermion par i jedina razlika između tih procesa je u konstantama jakosti interakcija i masama finalnih fermiona. Aproximacija zanemarivanja masa finalnih fermiona je vrlo

dobra jer je $\frac{m_f^2}{M_W^2} \leq \frac{m_b^2}{M_W^2} = \left(\frac{4.2 \text{ GeV}}{80.4 \text{ GeV}}\right)^2 = 0.273\%$. Bez ikakvog računa, jednostavno koristeći zamjene:

$$\begin{aligned} C_V, C_A &\rightarrow 1 \\ M_Z &\rightarrow M_W \\ g_Z &\rightarrow g_W V_{nm}, \end{aligned}$$

gdje je

$$V_{nm} = \begin{cases} \text{jedinicna matrica, } \delta_{mn}, & \text{ako su } f_m, f_n \text{ leptoni} \\ \text{CKM matrica, } U_{mn}, & \text{ako su } f_m, f_n \text{ kvarkovi} \end{cases}, \quad (9.11)$$

iz (8.25) slijedi da je diferencijalna širina raspada linearno polariziranih W bozona u nepolarizirani par $\bar{f}_m f_n$ fermiona

$$\frac{d\Gamma(W^+ \rightarrow \bar{f}_m f_n)}{\sin\theta d\theta} \approx \frac{g_W^2}{8\pi} |V_{nm}|^2 M_W N_c (1 - \cos^2\theta), \quad m_m^2, m_n^2 \ll M_W^2. \quad (9.12)$$

Kao i u slučaju raspada Z bozona, pravac inicijalnog spina W bozona je z-os, θ je kut impulsa finalnog fermiona u odnosu na z-os, a faktor boje je $N_c = 1$ za leptone, a $N_c = 3$ za kvarkove. Ukupna širina raspada W bozona, u aproksimaciji zanemarivanja masa finalnih fermiona, je

$$d\Gamma(W^+ \rightarrow \bar{f}_m f_n) \approx \frac{g_W^2}{6\pi} |V_{nm}|^2 M_W N_c, \quad m_m^2, m_n^2 \ll M_W^2. \quad (9.13)$$

Raspad W bozona je i kinematički vrlo sličan raspadu Z bozona iz Poglavlja 8. Zakon očuvanja 4-impulsa u sustavu mirovanja W bozona je

$$(M_W, \vec{0}) = (p^0, \vec{p}) + (q^0, \vec{q}), \quad (9.14)$$

pa je zbroj impulsa finalnih fermiona nula, kao i sličaju raspada Z bozona, ali sad su energije finalnih fermiona

$$p_m^0 = \frac{M_W}{2} + \frac{m_m^2 - m_n^2}{2M_W}, \quad q_n^0 = \frac{M_W}{2} - \frac{m_m^2 - m_n^2}{2M_W}. \quad (9.15)$$

Bez aproksimacija, koristeći identične metode kao u Poglavlju 8. za raspad Z bozona, točan proračun ukupne širine raspada polariziranih W^+ bozona u nepolarizirani par $\bar{f}_m f_n$ fermiona je

$$\frac{d\Gamma(W^+ \rightarrow \bar{f}_m f_n)}{\sin\theta d\theta} = \frac{g_w^2}{8\pi} |V_{nm}|^2 M_w N_c \sqrt{\left(1 - \frac{m_m^2 + m_n^2}{M_w^2}\right)^2 - 4 \frac{m_m^2 m_n^2}{M_w^4}} \times \left\{ 1 - \frac{m_m^2 + m_n^2}{M_w^2} - \left[\left(1 - \frac{m_m^2 + m_n^2}{M_w^2}\right)^2 - 4 \frac{m_m^2 m_n^2}{M_w^4} \right] \cos^2 \theta \right\}. \quad (9.16)$$

Za poređenje sa rezultatima eksperimenata posebno je važan slučaj kad se zanemari masa samo jednog finalnog fermiona – neutrina. Izraz (9.16) za parcijalnu širinu raspada polariziranih W^+ bozona se tada uprosti i postaje

$$\frac{d\Gamma(W^+ \rightarrow \bar{f}_m f_n)}{\sin\theta d\theta} = \frac{g_w^2}{8\pi} |V_{nm}|^2 M_w N_c \left(1 - \frac{m_m^2}{M_w^2}\right)^2 \left[1 - \left(1 - \frac{m_m^2}{M_w^2}\right) \cos^2 \theta \right], \quad (9.17)$$

a ukupna širina raspada W^+ bozona postaje

$$d\Gamma(W^+ \rightarrow \bar{f}_m f_n) = \frac{g_w^2}{6\pi} |V_{nm}|^2 M_w N_c \left(1 - \frac{m_m^2}{M_w^2}\right)^2 \left(1 + \frac{m_m^2}{2M_w^2}\right). \quad (9.18)$$

Uobičajeno je da se širina raspada normalizira pomoću parcijalne širine raspada W^+ bozona $W^+ \rightarrow e^+ \nu_e$ koji se najpreciznije mjeri

$$\Gamma(W^+ \rightarrow e^+ \nu_e) = \frac{\alpha}{12 \sin^2 \theta_w} M_w = 226 \text{ MeV}. \quad (9.19)$$

Ukupna širina raspada W^\pm bozona je onda za sve tri familije leptona i tri boje kvarkova

$$\Gamma_{\text{tot.}} = \Gamma(W^+ \rightarrow e^+ \nu_e) \left[3 + 3 \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^3 |U_{nm}|^2 \right], \quad (9.20)$$

gdje sumacija po n ne uključuje treći kvarkovski okus (t-kvark). Unitarnost CKM matrice (6.79) zahtijeva

$$\sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^3 |U_{nm}|^2 = \sum_{n=1}^2 |U U^\dagger|_{nn} = 2, \quad (9.21)$$

pa u najnižem redu (tree diagrams) SM predviđa za ukupnu širinu raspada

$$\Gamma_{\text{tot.}} = 9\Gamma(W^+ \rightarrow e^+ \nu_e) = 2.04 \text{ GeV}. \quad (9.22)$$

Duljina života W^\pm bozona je

$$\tau_W = \frac{\hbar}{\Gamma_{\text{tot.}}} = \frac{6.6 \times 10^{-25} \text{ GeVs}}{2.04 \text{ GeV}} = 3.22 \times 10^{-25} \text{ s}, \quad (9.23)$$

razmjerno vrlo velika za česticu mase $M_W = 80.4 \text{ GeV}$.

Izvršno slaganje sa preciznim mjerenjima ilustrirano je za neke kanale raspada u Tabeli 9.1, gdje su radi potpunosti u prvom retku uključene i vrijednosti za masu W bozona.

Fermion	SM Proračun	Eksperiment
$M_W(\text{GeV})$	80.375 ± 0.015	80.398 ± 0.025
$e^+ \nu_e$	11.1 %	$(10.75 \pm 0.13) \%$
$\mu^+ \nu_\mu$	11.1 %	$(10.57 \pm 0.15) \%$
$\tau^+ \nu_\tau$	11.1 %	$(11.25 \pm 0.20) \%$
$\Gamma_{\text{had.}}$	66.7 %	$(67.60 \pm 0.27) \%$
$\Gamma_{\text{tot.}} (\text{GeV})$	2.04	2.141 ± 0.041

Tabela 9.1

W^\pm bozoni žive prekratko za direktnu detekciju pomoću tragova čestica. Parcijalne širine raspada pokazuju da se W^\pm trećinu vremena raspadaju u leptone, a ostatak vremena u hadrone. Kao i u slučaju Z bozona, izračunljive radiativne korekcije (dijagrami višeg reda sa petljama) uslijed jakih i elektromagnetskih interakcija daju dodatne popravke veličine 2-3 % koje su pravog znaka da slaganje sa eksperimentima bude skoro perfektno.

Zadaci:

Zadatak 9.1. Pokazati da u raspadu $W^+ \rightarrow \bar{f}_m f_n$ u sustavu mirovanja W bozona vrijede kinematičke relacije (9.15).

Zadatak 9.2. Naći kvadrat invarijantne amplitude (9.10) za raspad $W^+ \rightarrow \bar{f}_m f_n$ polariziranih W^+ bozona u njegovom sustavu mirovanja.

Zadatak 9.3. Koristeći rezultat prethodnog zadatka i formulu (2.100) za diferencijalnu širinu raspada $d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\vec{p}|}{M_W^2} |\overline{M}|^2 d\Omega$ pokazati da je parcijalna širina raspada $W^+ \rightarrow \bar{f}_m f_n$ polariziranih nabijenih gauge bozona data izrazom (9.16).

10. Raspadi Higgs bozona h

U Poglavlju 6. vidjeli smo kako spontano narušenje simetrije preko Higgs mehanizma generira masu slabih gauge bozona

$$M_W = \frac{v g_2}{2} = \frac{v e}{2 \sin \theta_w}, \quad M_Z = \frac{v g_2}{2 \cos \theta_w} = \frac{e v}{2 \sin \theta_w \cos \theta_w}, \quad (10.1)$$

gdje v Higgs polja (6.64)

$$v = \sqrt{2} \langle 0 | \phi_0 | 0 \rangle = \left(\sqrt{2} G_F \right)^{-\frac{1}{2}} \cong 246 \text{ GeV}, \quad (10.2)$$

određuje energijsku skalu slabih interakcija. Masivni gauge bozoni W^\pm i Z su vrlo kratko živuće čestice i u Poglavljima 8. i 9. smo vidjeli kako proračunati širine njihovih raspada. Izvrsno slaganje teorijskih proračuna za mase i vremena života gauge bozona sa rezultatima mjerenja je nesumnjivi uspjeh SM. Ali, da bi SM bio u potpunosti provjerena teorija elementarnih čestica mora se eksperimentalno detektirati Higgs bozon h. Kao što je napomenuto u Poglavlju 6. SM točno precizira sve interakcije Higgs bozona sa ostalim česticama, osim samointerakcija od kojih zavisi masa (6.67) Higgs bozona

$$M_h = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda} v. \quad (10.3)$$

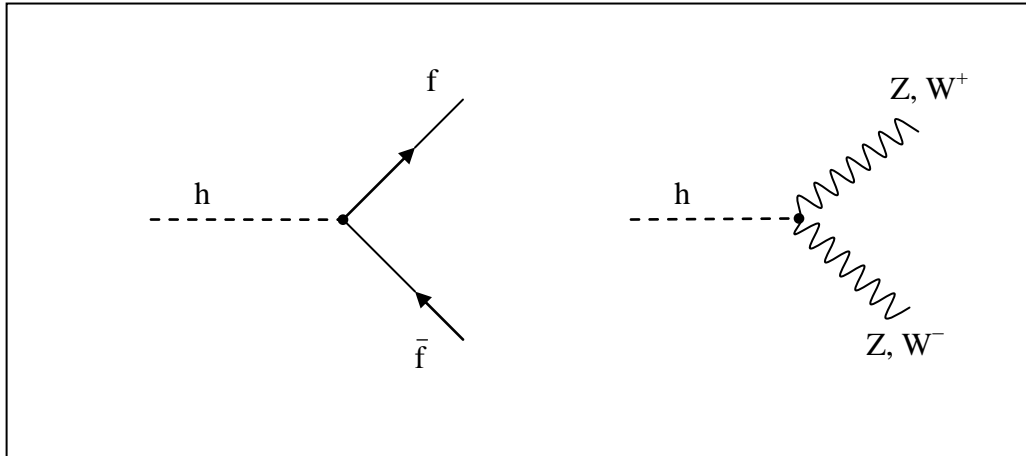
Dosadašnja neuspješna potraga je utvrdila da je masa $M_h > 114 \text{ GeV}$. Eksperimentalna potraga za Higgs bozonom je primarni cilj LHCa. Za očekivati je da čestica tako velike mase živi vrlo kratko i može se detektirati samo preko produkata svog raspada. Proračun parcijalnih širina raspada Higgs bozona je teorijska predikcija SM koja pomaže fizičarima da dizajniraju buduće eksperimente.

Prema (2.88) raspad Higgs bozona u najnižem redu teorije perturbacija određuje član iz Lagrangiana interakcije SM linearan po polju Higgs bozona za koji je $\langle f | \mathcal{L}_{\text{int.}} | h \rangle \neq 0$. Kako Higgs polje nema ni električni naboj, ni boju, neme interakcija ni sa fotonom, ni sa gluonima, pa u Lagrangianu SM postoje samo dva takva člana – linearna po Higgs polju i kvadratna po poljima fermiona ili masivnih gauge bozona. Prema (6.84), u najnižem redu teorije perturbacija, jedini mogući raspadi Higgs bozona opisani su sa

$$\mathcal{L}_{h f \bar{f}} = - \sum_f \frac{m_f}{v} h \bar{f} f, \quad (10.4)$$

$$\mathcal{L}_{h-g} = - \frac{M_Z^2}{v} h Z^\mu Z_\mu - 2 \frac{M_W^2}{v} h W^{+\mu} W_\mu^-, \quad (10.5)$$

čiji dijagrami su prikazani na Slici 10.1.



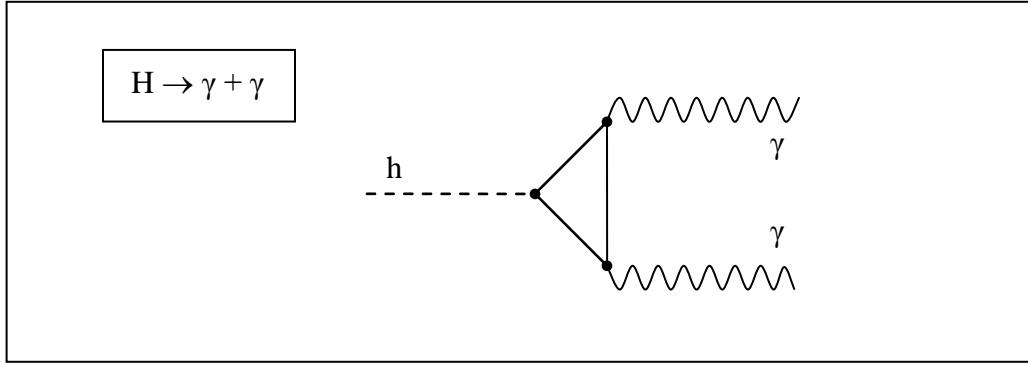
Slika 10.1

Konstanta vezanja Higgs bozona proporcionalna je masi čestice u koju se raspada m_f ili $M_{Z,W}$, pa je najveća vjerojatnost raspada u čestice maksimalne dozvoljene mase. Zbog kinematičkih ograničenja mogući kanali raspada Higgs bozona h zavise od njegove mase:

- Ako je $M_h < 2M_W \approx 161$ GeV – mogući su raspad u par $f\bar{f}$ kvarkova i leptona (osim t-kvarka), pa maksimalnu vjerojatnost raspada ima proces $h \rightarrow b\bar{b}$,
- Ako je $2M_W < M_h < 2M_Z \approx 180$ GeV preferirani kanal raspada je $h \rightarrow W^+W^-$,
- Ako je $2M_Z < M_h < 2m_t \approx 342$ GeV Higgs bozon se sa najvećom vjerojatnošću raspada u ZZ par,
- Ako je $2m_t < M_h$ preferirani kanal raspada Higgs bozona bio bi $h \rightarrow t\bar{t}$.

Konzistentnost SM zahtijeva da masa Higgs bozona bude manja od 1 TeV, najvjerojatnije u rasponu $114 < M_h < 200$ GeV.

Napomena: Teorijski proračuni, specijalno u slučaju postojanja supersimetričnih čestica, predviđaju Higgs bozon „male“ mase, najvjerojatnije manje od $2M_W$. Preferirani kanal raspada takvog Higgs bozona $h \rightarrow b\bar{b}$ sadrži kvarkovsko finalno stanje koje je relativno teško precizno mjeriti zbog procesa raspada i hadronizacije b-kvarka. Zato se izgradnjom specijalnih elektromagnetskih kalorimetara (ECAL), potraga za „lakim“ Higgs bozonom na LHCu koncentrira na kanal raspada u dva fotona $h \rightarrow 2\gamma$, iako je to proces višeg reda koji ima oko 10^3 puta manji udarni presjek. Higgs bozon se raspadne u par virtuelnih fermiona, koji prije međusobne anihilacije emitiraju par realnih fotona. Dijagram ovog procesa je prikazan na Slici 10.2. Prednost ovog kanala je čisto leptonsko finalno stanje 2γ , koje se može puno preciznije mjeriti u detektoru. Osim malog udarnog presjeka signala, velika eksperimentalna poteškoća je ogromna pozadina. Pozadinu čine svi drugi procesi čije finalno stanje takođe čine dva fotona 2γ .



Slika 10.2

Feynmanova pravila za matrični element raspada Higgs bozona u fermion-antifermion par daju

$$M(h \rightarrow f \bar{f}) = -i \frac{m_f}{v} \bar{u}(\vec{p}, \lambda) v(\vec{q}, \sigma). \quad (10.6)$$

Sumacija po spinovima λ, σ finalnih fermiona daje kvadrat amplitude

$$|\overline{M_{fi}}|^2 = \frac{m_f^2}{v^2} \text{Tr}[(\not{p} + m_f)(\not{q} - m_f)] = 4 \frac{m_f^2}{v^2} (p \cdot q - m_f^2). \quad (10.7)$$

Zakon očuvanja 4-impulsa u sustavu mirovanja Higgs bozona $(M_h, \vec{0}) = (p^0, \vec{p}) + (q^0, \vec{q})$, daje

$$p^0 = q^0 = \frac{M_h}{2}, \quad \vec{p} = -\vec{q}, \quad p \cdot q = p^0 q^0 - \vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{M_h^2}{4} - |\vec{p}|^2 = \frac{M_h^2}{2} \left(1 - 4 \frac{m_f^2}{M_h^2}\right). \quad (10.8)$$

Diferencijal širine raspada

$$d\Gamma = \frac{1}{2k^0} (2\pi)^4 \delta^4(p + q - k) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2q^0} 4 \frac{m_f^2}{v^2} \frac{M_h^2}{2} \left(1 - 4 \frac{m_f^2}{M_h^2}\right), \quad (10.9)$$

ne zavisi od sfernih kuteva (izotropni raspad). Poslije integracije po impulsima finalnih fermiona, ukupna širina raspada Higgs bozona u fermion-antifermion par je

$$\Gamma(h \rightarrow f \bar{f}) = \frac{N_c}{8\pi} \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 M_h \left(1 - 4 \frac{m_f^2}{M_h^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (10.10)$$

gdje je faktor boje $N_c = 1$ za leptone, a $N_c = 3$ za kvarkove.

Ako je $M_h < 2m_t \approx 342 \text{ GeV}$, zbog $\frac{m_f^2}{M_h^2} \leq \frac{m_b^2}{M_h^2} \leq \left(\frac{4.2 \text{ GeV}}{114 \text{ GeV}}\right)^2 = 0.136\%$, širina raspada Higgs bozona u par fermiona je približno

$$\Gamma(h \rightarrow f\bar{f}) = \frac{N_c}{8\pi} \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 M_h. \quad (10.11)$$

Zanemarujući sve kanale raspada osim $h \rightarrow b\bar{b}$ zbog $M_h > 114 \text{ GeV}$ ukupna širina Higgs bozona je sigurno

$$\Gamma_{\text{tot.}} > \Gamma(h \rightarrow b\bar{b}) \approx (3.5 \times 10^{-5}) M_h > 4 \text{ MeV}, \quad (10.12)$$

što znači da je vrijeme života Higgs bozona manje od $\tau_h < 1.65 \times 10^{-22} \text{ s}$. Vrijeme života τ_h je prekratko za bilo kakav direktni trag u materijalu detektora, pa se i postojanje Higgs bozona mora rekonstruirati iz produkata raspada.

Prema (10.5), matrični element raspada Higgs bozona u W^+W^- par nabijenih gauge bozona je

$$M(h \rightarrow W^+W^-) = 2i \frac{M_W^2}{v} \epsilon_\mu^*(\vec{p}, \lambda) \epsilon^{\mu*}(\vec{q}, \sigma). \quad (10.13)$$

Kvadriranje i sumiranje po stanjima spina gauge bozona zbog (6.86) daje

$$|\overline{M}|_w^2 = 4 \left(\frac{M_W^2}{v}\right)^2 \left[2 + \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})^2}{M_W^4}\right]. \quad (10.14)$$

U sustavu mirovanja Higgs bozona kinematika ovog procesa je ista kao u raspadu u fermion-antifermion par (osim što mora biti $M_h > 2M_W$), pa je diferencijalna širina raspada

$$d\Gamma(h \rightarrow W^+W^-) = \frac{1}{64\pi^2} \frac{M_h^3}{v^2} \left(1 - 4 \frac{M_W^2}{M_h^2} + 12 \frac{M_W^4}{M_h^4}\right) \sqrt{1 - 4 \frac{M_W^2}{M_h^2}}. \quad (10.15)$$

Raspad je izotropan i ukupna širina raspada je

$$\Gamma(h \rightarrow W^+W^-) = \frac{M_h}{16\pi} \left(\frac{M_h}{v}\right)^2 \left(1 - 4 \frac{M_W^2}{M_h^2} + 12 \frac{M_W^4}{M_h^4}\right) \sqrt{1 - 4 \frac{M_W^2}{M_h^2}}. \quad (10.16)$$

Npr, za $M_h = 200 \text{ GeV}$ ukupna širina raspada u W par bila bi $(5.26 \times 10^{-3}) M_h \sim 1.05 \text{ GeV}$.

Uporedimo li sa (10.10), vidimo da je najvažnija razlika proporcionalnost s $\left(\frac{M_h}{v}\right)^2$ umjesto s kvadratom mase finalne čestice $\left(\frac{m_f}{v}\right)^2$. Razlog je razlika u jakosti vezanja Higgs bozona sa transverzalnim stupnjevima slobode W bozona (proporcionalna s $\frac{M_W}{v}$), dok je jakost vezanja h sa longitudinalnom komponentom W bozona (koja je prije SSB bila komponenta Higgs dubleta) proporcionalna samointerakciji Higgs bozona $\left(\frac{M_h}{v}\right)^2 = 2\lambda$ koja (zbog derivacija polja u Lagrangianu interakcije) zavisi od 4-impulsa čestica.

U slučaju raspada $h \rightarrow ZZ$ imamo dodatnu komplikaciju dvije identične čestice u finalnom stanju. To znači da procesu korespondiraju dva različita dijagrama koja se dobijaju zamjenom $p^\mu \leftrightarrow q^\mu$, ali pri integraciji po finalnim impulsima svakoj čestici odgovara prostorni kut od samo 2π (zbog identičnosti čestica integracija po ukupnom prostornom kutu 4π će svako finalno stanje dvostruko brojati). Ova dva efekta se poništavaju – jedan zahtijeva da matrični element pomnožimo sa 2, a drugi da ga pomnožimo sa $\frac{1}{2}$. Jedina razlika između procesa raspada $h \rightarrow ZZ$ i $h \rightarrow W^+W^-$ je onda razlika masa $M_W \rightarrow M_Z$ puta faktor $\frac{1}{2}$ koji dolazi od razlike jakosti vezanja u Lagrangianu interakcije (10.5), tj.

$$\Gamma(h \rightarrow Z^0 Z^0) = \frac{1}{2} \Gamma(h \rightarrow W^+ W^-) \Big|_{M_W \rightarrow M_Z}, \quad (10.17)$$

što za Higgs bozon mase 200 GeV daje $(3.74 \times 10^{-3}) M_h \sim 0.75$ GeV. Ukupna širina raspada u gauge bozone Higgs bozona mase 200 GeV bila bi

$$\Gamma_g(M_h = 200 \text{ GeV}) = \Gamma(h \rightarrow W^+ W^-) + \Gamma(h \rightarrow ZZ) \sim 1.8 \text{ GeV},$$

čemu odgovara vrijeme života $\tau_h(M_h = 200 \text{ GeV}) \sim 3.67 \times 10^{-25} \text{ s}$.

Kad bi Higgs bozon imao zaista veliku masu $M_h > 2m_t \approx 342$ GeV, dominantni proces raspada bi bio $h \rightarrow t\bar{t}$ čija ukupna širina je dana izrazom (10.10).

Svi dosad razmatrani primjeri raspršenja i raspada čestica pri djelovanju elektro-slabih sila bili su najnižeg reda u teoriji perturbacija [prvi član na desnoj strani u (2.88)]. Sad razmotrimo primjer procesa višeg reda sa više od jednog verteksa.

Zadaci:

Zadatak 10.1. Pokazati da je ukupna širina raspada $h \rightarrow f\bar{f}$ data izrazom (10.10).

Zadatak 10.2. Pokazati da je kvadrat apsolutne vrijednosti amplitude raspada Higgs bozona $h \rightarrow W^+W^-$ dat izrazom (10.14).

Zadatak 10.3. Koristeći rezultat prethodnog zadatka pokazati da je ukupna širina raspada $h \rightarrow W^+W^-$ u sustavu mirovanja Higgs bozona data formulom (10.16).

11. Raspadi leptona

Slijedeća najjednostavnija primjena SM je proračun širina raspada ostalih slabo interagujućih čestica – leptona. U SM postoji šest leptona od kojih su četiri: e , ν_e , ν_μ , ν_τ stabilne, a preostala dva μ i τ nestabilne čestice. Postojanje stabilnih leptona u SM se objašnjava zakonima očuvanja koji su posljedica simetrija Lagrangiana teorije. Zakon očuvanja električnog naboja znači da se najlakša (najmanje mase) nabijena čestica – elektron, nema u šta raspasti, pa živi beskonačno dugo. Analogno, zakoni očuvanja elektronskog, muonskog i tau leptonskog broja osiguravaju stabilnost najlakših čestica koje nose nenultu vrijednost tih kvantnih brojeva: ν_e , ν_μ i ν_τ .

Napomena: Danas znamo da neutrini imaju mase i da se međusobno miješaju, što znači da nisu (ili nisu svi) stabilni. Sigurno se zna da je najlakši nenabijeni lepton elektronski neutrino. Pošto precizni eksperimentalni podaci o masama i duljinama života neutrina nisu poznati, zanemarit ćemo mogućnost njihova raspada. Kao što je već napomenuto, trebat će neko vrijeme da se potpuno istraži neutronska teorije.

Za preostala dva leptona, μ i τ , ne postoji nikakva simetrija koja bi zahtijevala njihovo očuvanje i oni su nestabilne čestice. Eksperimentalne vrijednosti njihovih masa i duljina života date su u Tabeli 11.1.

Lepton	Masa (MeV)	Duljina života (s)
μ	105.658367 ± 0.000004	$(2.197019 \pm 0.000021) \times 10^{-6}$
τ	1776.84 ± 0.17	$(2.906 \pm 1.0) \times 10^{-13}$

Tabela 11.1

Podaci su iz Particle Data Group, 2008. i namjerno su napisani sa svim značajnim znamenkama da se ilustrira preciznost mjerenja. Ta preciznost je indikacija točnosti koja se očekuje od teorijskih SM proračuna.

Da opišemo raspad muona inicijalno stanje mora biti jednočestično stanje muonskog polja $|i\rangle \equiv |\mu^-\rangle$, pa tražimo finalno stanje $|f\rangle$ koje ne sadrži muon, tj. tražimo element S-matrice S_{fi}

$$S_{fi} = \langle f | S | \mu^- \rangle \neq 0. \quad (11.1)$$

Prema (2.82), S-matrica je red integrala vremenski uređenih produkata Lagrangiana interakcije SM. Lako je vidjeti koji su članovi u Lagrangianu interakcije SM odgovorni za raspad muona i tau-leptona. To su članovi (6.40),

$$\mathcal{L}_{cc} = -g_w \left(j_W^\mu W_\mu^- + j_W^{\mu\dagger} W_\mu^+ \right), \quad (11.2)$$

slabe nabijene struje leptona (6.43), koji jedini mješaju leptonske okuse i pretstavljaju slabe interakcije leptona sa nabijenim W^+ i W^- masivnim gauge bozonima.

U najnižem redu teorije perturbacija, imamo samo jedan operator Lagrangiana \mathcal{L}_{cc} slabe nabijene struje muona, pa jedini član različit od nule

$$\langle f | \mathcal{L}_{cc}(0) | \mu^- \rangle \supset -i g_w \langle f | W_\rho^+ \bar{v}_\mu \gamma^\rho (1 - \gamma^5) \mu | \mu^- \rangle \neq 0, \quad (11.3)$$

mora imati finalno stanje $|f\rangle = |W^-; v_\mu\rangle$. Anihilacioni operator iz polja $\mu(x)$ anihilira inicijalni muon, a kreacioni operatori iz W_ρ^+ i \bar{v}_μ polja kreiraju finalne čestice: W^- i muonski neutrino v_μ . Gornji matrični element opisuje raspad $\mu^- \rightarrow W^- + v_\mu$, koji je kinemetički zabranjen jer je masa W bozona puno veća od mase muona. Da se izračunaju širine raspada μ^- i τ^- leptona mora se u matričnom elementu (11.1) uzeti član koji je bar drugog reda u teoriji perturbacija, tj. matrični element sa bar dva Lagrangiana \mathcal{L}_{cc} slabe nabijene struje leptona (6.43) i kvarkova (6.80).

Dominantnu kontribuciju raspadu muona daje član

$$M(\mu^- \rightarrow f) = \frac{-i}{2!} \int d^4x \langle f | T[\mathcal{L}_{cc}(x) \mathcal{L}_{cc}(0)] | \mu^- \rangle, \quad (11.4)$$

u kome je uloga dodatnog $\mathcal{L}_{cc}(x)$ člana da anihilira kreirani W^- bozon u finalne čestice čija masa je manja od mase inicijalnog muona. Jedini raspad W^- gauge bozona koji zadovoljava taj uvjet i zakone očuvanja naboja i elektronskog leptonskog broja je raspad $W^- \rightarrow e^- + \bar{v}_e$. To znači da je u najnižem redu teorije perturbacija jedini mogući raspad muona koji zadovoljava sve zakone očuvanja tročestični raspad $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{v}_e + v_\mu$, koji se odvija u dva koraka. U prvom koraku $\mu^- \rightarrow W^- + v_\mu$ muon se raspadne u muonski neutrino i virtuelni W^- bozon u međustanju koji se u slijedećem koraku raspadne u finalni elektron i elektronski antineutrino $W^- \rightarrow e^- + \bar{v}_e$.

Zbog puno veće mase τ leptona postoji više kanala njegovog raspada. To su ili leptonski raspadi: $\tau^- \rightarrow e^- + \bar{v}_e + v_\tau$ i $\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{v}_\mu + v_\tau$, ili hadronski raspadi u kojima se kreirani virtuelni W^- bozon raspada u kvark-antikvark par, na primjer $W^- \rightarrow \bar{u} + d$ ili $W^- \rightarrow \bar{u} + s$. Kvarkovi nastali raspadom W^- bozona odmah međudjeluju jakim interakcijama i hadroniziraju (ne postoje slobodna kvarkovska stanja), tj. pretvaraju se u hadrone – vezana stanja kvarkova i gluona. Na kvark nivou, jedini dozvoljeni raspadi W^- bozona kreiranog u raspadu τ^- leptona su u stanja u-kvarka, tj. u kvark-antikvark parove $\bar{u}d$ i $\bar{u}s$. Zbog faktora boje kvarkova, to je ustvari šest različitih finalnih stanja. Iako su po masama samih kvarkova naizgled moguća, finalna stanja $\bar{c}d$ i $\bar{c}s$ su ustvari kinemetički zabranjena, jer ta stanja poslije hadronizacije zahtijevaju c-hadron u finalnom stanju, a najlakši takav mezon je $D^- = \bar{c}d$ koji ima masu $M_{D^-} = 1870$ MeV veću od mase inicijalnog τ leptona.

Dominantni raspadi i muona i tau leptona su tročestični raspadi $\mu^- \rightarrow f_m \bar{f}_n \nu_\mu$, $\tau^- \rightarrow f_m \bar{f}_n \nu_\tau$ u fermion-antifermion par $f_m \bar{f}_n$ (lepton-antineutino ili kvark-antikvark) povezan W^- interakcijom sa inicijalnim negativno nabijenim leptonom čija ukupna masa je manja od mase leptona i odgovarajući neutrino koji osigurava očuvanje inicijalnog leptonskog broja.

U prvoj aproksimaciji, matrični element raspada τ leptona određen je onda članovima iz Lagrangiana interakcije

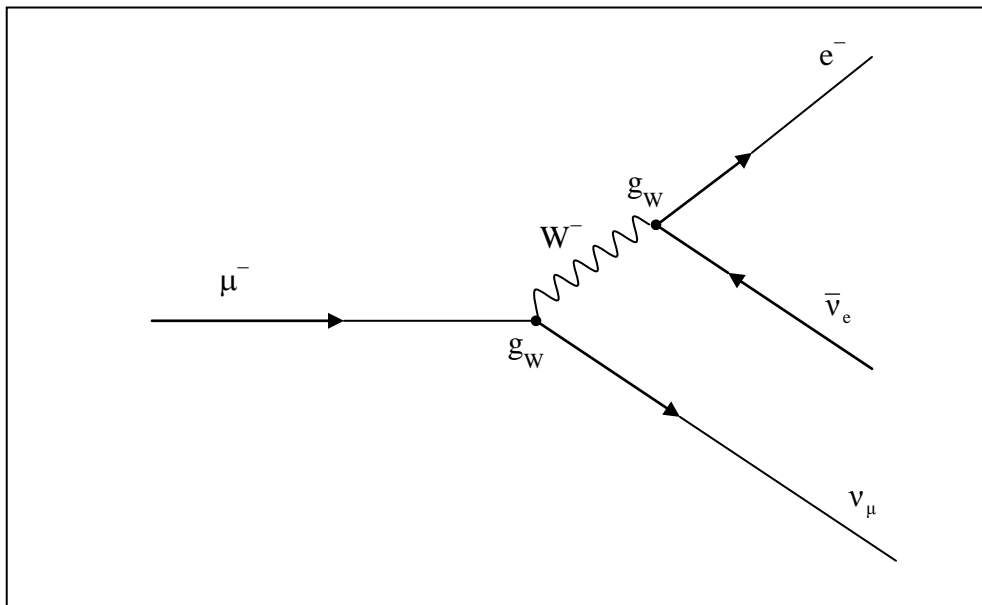
$$\mathcal{L}_{cc} \supset -g_W \left[W_\mu^+ \bar{\nu}_\tau \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \tau + W_\mu^- \sum_{m,n} V_{mn}^* \bar{f}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) f_m \right], \quad (11.5)$$

gdje matrica V_{mn} sadrži elemente CKM matrice kvarkovskih stanja i definirana je u (9.11), a konstanta vezanja g_W dana je u (9.4).

Mnoga svojstva raspada leptona slijede samo iz ovih općih razmatranja bez detaljnog računanja.

μ^- raspadi

- Kako je elektron e^- jedina negativno nabijena čestica čija je masa manja od mase muona, jedini tročestični raspad muona je $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. Feynmanov dijagram tog procesa prikazan je na Slici 11.1.



Slika 11.1

- Od tri čestice u finalnom stanju, neutrine je izuzetno teško detektirati, pa je jedina mjerljiva veličina 4-impuls elektrona. Energija inicijalne čestice se raspodjeljuje na tri finalne čestice, pa finalni elektron ima kontinuirani spektar energija i od teorije se zahtijeva proračun broja elektrona određene energije koji nastaju raspadom muona.
- Dimenzionim argumentima aproksimativno se lako odredi vrijeme života muona. Dijagram procesa raspada u najnižem redu zahtijeva dva verteksa jakosti g_W , pa je matrični element proporcionalan sa $M \sim g_W^2$. Amplituda vjerojatnosti se mora umanjiti zbog neophodnosti kreiranja i anihiliranja virtuelnog W^- bozona umetanjem njegova propagatora koji je proporcionalan sa M_W^{-2} , što znači da je matrični element raspada proporcionalan sa $M \sim \frac{g_W^2}{M_W^2}$. Vjerojatnost procesa je

kvadrat amplitude $|M|^2$ i proporcionalna je sa M^{-4} . Da se nadje širina raspada treba napraviti integral po faznom prostoru finalnih čestica i izraziti ga preko parametara inicijalnih čestica, tj. mase inicijalnog muona m_μ koja je jedina invarijantna veličina u početnom stanju. Kako širina raspada ima dimenzije mase [djelovanje je skalar, pa je $\Gamma \sim t^{-1} \sim L \sim E \sim m$], mora biti $\Gamma \sim \frac{g_W^4}{M_W^4} m_\mu^5$. Da se

odredi red veličine vjerojatnosti procesa treba još pobrojati (2π) faktore. U izrazu za širinu raspada integral po impulsima svake finalne čestice sadrži $(2\pi)^{-3}$, a δ -funkcija očuvanja energije sadrži $(2\pi)^4$ faktor. Integracija po prostornom kutu dvije finalne čestice daje svaka po faktor $\sim (2\pi)$, tako da je ukupno

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) \sim \frac{|M|^2 m_\mu^5}{(2\pi)^3} \sim \frac{g_W^4}{(2\pi)^3} \frac{m_\mu^5}{M_W^4} \sim \frac{\alpha^2}{32\pi \sin^4 \theta_W} \frac{m_\mu^5}{M_W^4} \sim 3.1 \times 10^{-18} \text{ GeV}. \quad (11.6)$$

Ovaj aproksimativni izraz daje vrijeme života muona $\tau_\mu^{\text{app.}} \sim 2.1 \times 10^{-7} \text{ s}$, što je za red veličine prekratko, jer je eksperimentalna vrijednost $\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$. Eksplicitni račun će pokazati da razlika nastaje uslijed integracije po stanjima virtuelnog W^- bozona. Za razliku od mnogih dvočestičnih procesa, kvalitativna dimenziona analiza u slučaju raspada muona (tročestični raspad) daje pogrešan rezultat i mora se provesti detaljni proračun.

- U najnižem (drugom) redu teorije perturbacija jedini mogući raspad muona je $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$, pa očekujemo da je frakcija tog procesa B.R. $\approx 100\%$, ako se zanemare procesi višeg reda. To je moguće provjeriti poređenjem sa procesom trećeg reda $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \gamma$ u kome inicijalni muon ili finalni elektron emitira dodatni finalni foton, kao i sa procesom četvrtog reda $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu e^+ e^-$ u kome dodatni virtuelni foton kreira elektron-pozitron par u finalnom stanju. Prvi od ovih procesa ima dodatni elektromagnetski verteks jakosti e , a integracija po faznom

prostoru finalnog fotona daje dodatni $\frac{2\pi}{(2\pi)^3}$ faktor, pa je aproksimativno

$$\text{B.R.}(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \gamma) \sim \frac{e^2}{(2\pi)^2} \sim 2 \times 10^{-3}. \quad (11.7)$$

Drugi proces sadrži još jedan elektromagnetski verteks, pa očekujemo

$$\text{B.R.}(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu e^+ e^-) \sim \left(\frac{e^2}{(2\pi)^2} \right)^2 \sim 10^{-5}. \quad (11.8)$$

Ovi rezultati se dosta dobro slažu sa rezultatima mjerenja

$$\begin{aligned} \text{B.R.}(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) &\sim 100\%, \\ \text{B.R.}(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \gamma) &= (1.4 \pm 0.4)\%, \\ \text{B.R.}(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu e^+ e^-) &= (3.4 \pm 0.4) \times 10^{-5}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Vjerojatnost procesa $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \gamma$ dodatno je povećana za „large logarithm“ faktor $\log \frac{m_\mu}{m_e} \sim 5.3$ koji je posljedica kinematičkog faktora koji se pojavljuje u propagatoru muona u međustanju u slučaju emisije kolinearnog fotona od strane inicijalnog muona.

τ^- raspad

- Zbog veće mase postoji više mogućih načina raspada tau leptona i to

$$\text{leptonski: } \tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau \text{ i } \tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau,$$

$$\text{hadronski: } \tau^- \rightarrow \bar{u} d \nu_\tau \text{ i } \tau^- \rightarrow \bar{u} s \nu_\tau.$$

- Širina raspada τ leptona se može aproksimirati pomoću širine raspada muona. Svi argumenti koji su vrijedili za raspad muona, vrijede i za τ raspad i jedina razlika je zamjena $m_\mu \leftrightarrow m_\tau$. Tako se za odnos vremena života muona $\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6}$ s i tau leptona dobija

$$\tau_\tau^{\text{app.}} \sim \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^5 \tau_\mu \sim 1.6 \times 10^{-12} \text{ s}, \quad (11.10)$$

što je oko pet puta veće od stvarne eksperimentalne vrijednosti $\tau_\tau = 2.9 \times 10^{-13}$ s.

- Iako se, kao i slučaju muona, točna vrijednost ukupne širina raspada τ leptona ne može odrediti bez preciznog računa, frakcije grananja se mogu dosta dobro predvidjeti jer uglavnom zavise samo od broja dozvoljenih stupnjeva slobode. Kako procesi raspada i muona i τ leptona u najnižem redu idu preko produkcije virtuelnog W^- bozona čija je jakost vezanja g_W univerzalna (ista za sve čestice, i leptone i kvarkove) u prvoj aproksimaciji očekujemo da vrijedi

$$\begin{aligned} \text{B.R.}(\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau) &= \text{B.R.}(\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau) \sim \frac{1}{2 + 3(|U_{ud}|^2 + |U_{us}|^2)} \approx 20\% , \\ \text{B.R.}(\tau^- \rightarrow \text{s-hadrone}) &\sim \frac{3|U_{us}|^2}{2 + 3(|U_{ud}|^2 + |U_{us}|^2)} \approx 2\% , \\ \text{B.R.}(\tau^- \rightarrow \text{ne s-hadrone}) &\sim \frac{3|U_{ud}|^2}{2 + 3(|U_{ud}|^2 + |U_{us}|^2)} \approx 58\% . \end{aligned} \quad (11.11)$$

Izrazi za frakcije grananja se dosta dobro (do na $\sim 10\%$) slažu sa eksperimentalnim vrijednostima

$$\begin{aligned} \text{B.R.}(\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau) &= (17.84 \pm 0.06)\% , \\ \text{B.R.}(\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau) &= (17.37 \pm 0.06)\% , \\ \text{B.R.}(\tau^- \rightarrow \text{s-hadrone}) &= (2.7 \pm 0.9)\% , \\ \text{B.R.}(\tau^- \rightarrow \text{ne s-hadrone}) &= (62 \pm 4)\% . \end{aligned}$$

Kad se u proračunu uzmu u obzir i popravke višeg reda uslijed elektromagnetskih (2-3%) i jakih interakcija (5-10%) slaganje između predikcija SM i rezultata mjerenja postaje izvrsno.

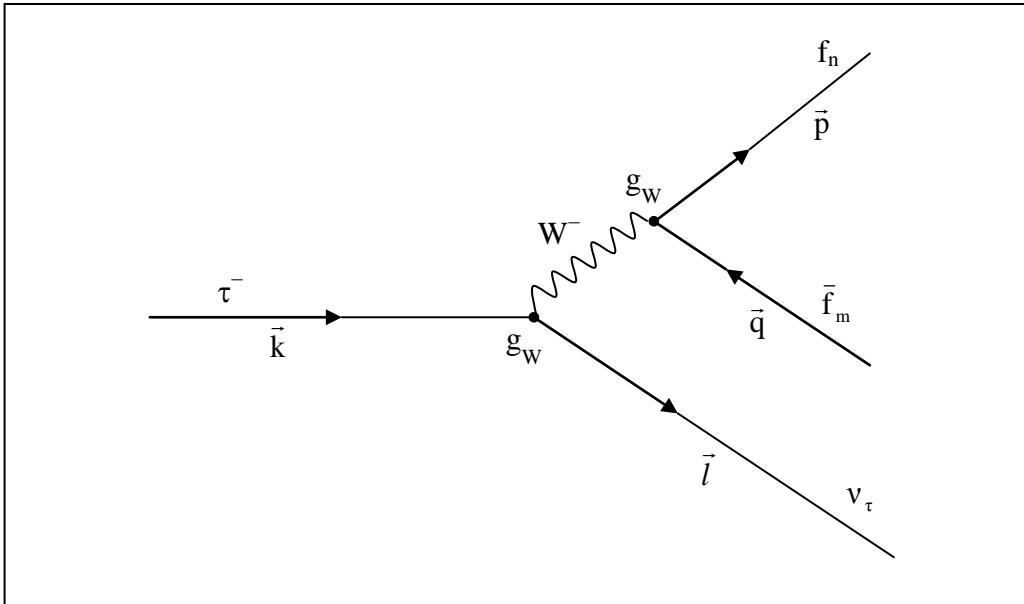
Da se dobiju točni izrazi za širine raspada leptona mora se provesti detalji proračun amplitude procesa (11.4) koju generiraju članovi (11.5) iz Lagrangiana SM. Ovo je prvi primjer proračuna kvadrata amplitude nekog procesa u drugom redu teorije perturbacija. Zato ćemo detaljno izračunati vjerojatnost ovog procesa kao ilustraciju procedure koja daje Feynmanova pravila za bilo koji proces.

Tenzorska struktura matričnog elementa (11.4) u kome je Lagrangian interakcije nabijene slabe struje dat u (11.5), ista je i za raspad muona i tau leptona. Zato ćemo razmatrati samo opći tročestični proces raspada tau leptona $\tau^- \rightarrow \bar{f}_m f_n \nu_\tau$, jer se dobijeni izrazi lako specijaliziraju i na raspad muona.

11.1 Raspadi tau leptona

Dijagram općeg raspada $\tau^- \rightarrow \bar{f}_m f_n \nu_\tau$ u najnižem (drugom) redu isti je kao dijagram prikazan na Slici 11.1 uz zamjenu $\mu \leftrightarrow \tau$ i $e^- \nu_e \rightarrow \bar{f}_m f_n$. U eksperimentima se najčešće ne mjeri polarizacija čestica u inicijalnom i finalnom stanju pa ćemo izračunati širinu nepolariziranog raspada tau leptona. Matrični element (11.4) ovog raspada sadrži dva \mathcal{L}_{cc} člana data u (11.5), pa postoje dva dijagrama koji daju jednaku kontribuciju – jedan \mathcal{L}_{cc} operator anihilira τ^- i kreira W^- i ν_τ , a drugi \mathcal{L}_{cc} operator anihilira W^- i kreira finalne čestice \bar{f}_m i f_n . Izračunaćemo kontribuciju samo jednog od njih i pomnožiti konačni rezultat sa 2, što će pokratiti faktor $\frac{1}{2!}$ koji se pojavljuje u drugom redu perturbativnog razvoja S-matrice (2.82).

Inicijalno i finalno stanje u procesu $\tau^- \rightarrow \bar{f}_m f_n \nu_\tau$ je tenzorski produkt odgovarajućih jednočestičnih stanja. Označimo impulse inicijalnih i finalnih stanja kao na Slici 11.2.



Slika 11.2

Prostor jednočestičnih stanja zgodno je razložiti na produkt Hilbertovih podprostora τ , ν_τ , W i $\bar{f}_m f_n$ stanja, tj.

$$|\tau^-\rangle = |\tau^-\rangle_\tau \otimes |0\rangle_W \otimes |0\rangle_f, \quad (11.12)$$

$$|\nu_\tau; \bar{f}_m; f_n\rangle = |\nu_\tau\rangle_\tau \otimes |0\rangle_W \otimes |\bar{f}_m; f_n\rangle_f,$$

jer se onda matricni element (11.4) raspada u produkt tri neovisna faktora

$$\begin{aligned} M(\tau^- \rightarrow \bar{f}_m f_n v_\tau) &= 2 \frac{1}{2!} (-i) \int d^4 x \langle v_\tau(\vec{l}); \bar{f}_m(\vec{q}); f_n(\vec{p}) | T[\mathcal{L}_{cc}(x)\mathcal{L}_{cc}(0)] | \tau(\vec{k}) \rangle = \\ &= -i (-g_W^2 V_{mm}^*) \int d^4 x A^\mu(\vec{k}, \vec{l}; x) D_{\mu\nu}(x) B^\nu(\vec{q}, \vec{p}), \end{aligned} \quad (11.13)$$

gdje individualni faktori djeluju svaki u svom podprostoru:

$$\begin{aligned} A^\mu(\vec{k}, \vec{l}; x) &= \langle v_\tau(\vec{l}) | [\bar{v}_\tau \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \tau](x) | \tau(\vec{k}) \rangle_\tau, \\ B^\nu(\vec{p}, \vec{q}) &= \langle \bar{f}_m(\vec{q}); f_n(\vec{p}) | [\bar{f}_n \gamma^\nu (1 - \gamma^5) f_m](0) | 0 \rangle_f, \\ D_{\mu\nu}(x) &= {}_w \langle 0 | T[W_\mu^+(x) W_\nu^-(0)] | 0 \rangle_w. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Razvojem operatora polja po kreacionim i anihilacionim operatorima kao u (3.46) matricni elementi A^μ i B^ν daju uobičajene izraze sa Diracovim spinorima

$$\begin{aligned} A^\mu(\vec{k}, \vec{l}; x) &= \bar{u}_{v_\tau}(\vec{l}) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_\tau(\vec{k}) e^{i(k-l)x}, \\ B^\nu(\vec{p}, \vec{q}) &= \bar{u}_n(\vec{p}) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) v_m(\vec{q}), \end{aligned} \quad (11.15)$$

čiji se doprinos kvadratu amplitude računa pomoću formula za tragove γ -matrica na sličan način kao u prijašnjim poglavljima. Jedini novi doprinos dolazi od trećeg faktora $D_{\mu\nu}$ iz (11.14) koji zavisi samo od svojstava virtuelnog W^- bozona u međustanju. Taj faktor se naziva W propagator i najlakše se računa umetanjem kompletnog skupa jednočestičnih W -stanja $|W^-(\vec{r}, \lambda)\rangle \langle W^-(\vec{r}, \lambda)|$ između vremenski uređenih operatora polja $W_\mu^+(x)$ i $W_\mu^-(0)$. Razvoj operatora polja $W_\mu^+(x)$ i $W_\mu^-(0)$ po kreacionim/anihilacionim operatorima kao u (3.61), koristeći komutacione relacije (3.69), prema definiciji (2.77) vremenskog uređenja operatora T i normalizaciji jednočestičnih stanja (3.68), daje

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x) &= \sum_{\lambda=-1}^{+1} \int \frac{d^3 \vec{r}}{(2\pi)^3 2E_r} \left[\langle 0 | W_\mu^+(x) | W^-(\vec{r}, \lambda) \rangle \langle W^-(\vec{r}, \lambda) | W_\nu^-(0) | 0 \rangle \theta(x^0) + \right. \\ &\quad \left. + \langle 0 | W_\nu^-(0) | W^-(\vec{r}, \lambda) \rangle \langle W^-(\vec{r}, \lambda) | W_\mu^+(x) | 0 \rangle \theta(-x^0) \right] = \\ &= \sum_{\lambda=-1}^{+1} \int \frac{d^3 \vec{r}}{(2\pi)^3 2E_r} \left[\varepsilon_\mu(\vec{r}, \lambda) \varepsilon_\nu^*(\vec{r}, \lambda) e^{ir'x} \theta(x^0) + \varepsilon_\nu(\vec{r}, \lambda) \varepsilon_\mu^*(\vec{r}, \lambda) e^{-ir'x} \theta(-x^0) \right], \end{aligned} \quad (11.16)$$

gdje je E_r energija $E_r = +\sqrt{\vec{r}^2 + M_W^2}$ umetnutog stanja W^- bozona impulsa \vec{r} i spina λ .

U faznim faktorima $\pm i r' \cdot x$ koji se pojavljuju u produktu valnih funkcija u razvoju operatora $W_\mu^+(x)$ i $W_\mu^-(0)$ četvero-vektor impulsa označen je sa r' da se naznači da uzimamo samo pozitivno energijsku komponentu $r'^0 = E_r$. U rezultatu (11.16) treba izvršiti integraciju po d^3r i sumaciju po spinu W^- bozona λ koristeći uvjete kompletnosti, kao u (6.86)

$$\Pi_{\mu\nu}(\vec{r}, E_r) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{+1} \varepsilon_\mu(\vec{r}, \lambda) \varepsilon_\nu^*(\vec{r}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{r'_\mu r'_\nu}{M_W^2}. \quad (11.17)$$

Kompleksna integralna reprezentacija $\theta(x)$ funkcije

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dw \frac{e^{iwx}}{w - i\varepsilon'}, \quad (11.18)$$

u kojoj je ε' pozitivni infinitezimalni parametar po kome na kraju računa treba uzeti limes $\varepsilon' \rightarrow 0$, poslije smjene integracione varijable $w \rightarrow -w$ u zadnjem članu u (11.16), dozvoljava da se propagator $D_{\mu\nu}$ napiše kao

$$D_{\mu\nu}(x) = -i \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} \frac{dw}{2\pi} \Pi_{\mu\nu}(\vec{r}, E_r) e^{i\vec{r}\cdot\vec{x} - iw x^0} \frac{1}{2E_r} \left[\frac{1}{E_r - w - i\varepsilon'} + \frac{1}{E_r + w - i\varepsilon'} \right]. \quad (11.19)$$

Ako redefiniramo infinitezimalni parametar $\varepsilon = 2E_r \varepsilon' > 0$, zanemarimo ε^2 članove i označimo $r^0 \equiv w$ propagator $D_{\mu\nu}(x)$ možemo izraziti kao jedan kompleksni 4-integral

$$D_{\mu\nu}(x) = i \int \frac{d^4r}{(2\pi)^4} \frac{\Pi_{\mu\nu}(\vec{r}, E_r)}{r^2 - M_W^2 + i\varepsilon} e^{-ir \cdot x}. \quad (11.20)$$

Izraz za propagator W bozona (11.20) nije Lorentz invarijantan samo zato što se u izrazu za polarizacijski tenzor $\Pi_{\mu\nu}$ pojavljuje $r'^0 = E_r = +\sqrt{\vec{r}^2 + M_W^2}$ nužno pozitivna energija čestice, dok je integraciona varijabla $r^0 \equiv w = \pm E_r$ realan broj. Na sreću, ova Lorentz neinvarijantnost je upravo ono što je potrebno da se točno pokrači još jedna Lorentz neinvarijantnost koja postoji u teoriji i koju smo dosad zanemarivali. Mada to prevazilazi okvire ovog izlaganja, napomenimo samo da uslijed postojanja veza u teoriji precizna kovarijantna kvantizacija rezultira Hamiltonom slabe nabijene interakcije $\mathcal{H}_{cc} \neq -\mathcal{L}_{cc}$, koji se razlikuje od negativnog Lagrangiana interakcije, iako u Lagrangianu interakcije nema derivacija polja. Razlika između \mathcal{H}_{cc} Hamiltona interakcije i negativnog Lagrangiana interakcije \mathcal{L}_{cc} dovodi do pojave dodatnog Lorentz neinvarijantnog člana koji točno pokrači neinvarijantnost propagatora (11.20). Ovaj rezultat nije baš jednostavno dokazati, ali je lako iskazati konačni rezultat.

Ako se propagator gauge bozona, umjesto pomoću (11.17), definira pomoću Lorentz invarijantnog tenzora polarizacije

$$\Pi_{\mu\nu}(\mathbf{r}) \equiv \Pi_{\mu\nu}(\vec{\mathbf{r}}, \mathbf{E}_r \rightarrow r^0) = -g_{\mu\nu} + \frac{\mathbf{r}_\mu \mathbf{r}_\nu}{M_W^2}, \quad (11.21)$$

tako da je

$$D_{\mu\nu}(x) = \langle 0 | T [W_\mu^+(x) W_\nu^-(0)] | 0 \rangle = i \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \frac{\Pi_{\mu\nu}(\mathbf{r})}{r^2 - M_W^2 + i\epsilon} e^{-ir \cdot x}, \quad (11.22)$$

kao što je već urađeno u Poglavlju 6.3, te ako se malo promjeni definicija vremenski uređenog produkta operatora tako da vrijedi $\mathcal{H}_{cc} = -\mathcal{L}_{cc}$, ukupna teorija je potpuno Lorentz invarijantna i nikad se ne pojavljuju nikakvi Lorentz neinvarijantni članovi.

Sad se mogu skupiti sva tri faktora u matricnom elementu (11.13) raspada tau leptona $\tau^- \rightarrow \bar{f}_m f_n \nu_\tau$. Integracija po $d^4 x$ se odmah može izvršiti i daje δ -funkciju koja osigurava očuvanje 4-impulsa u procesu: $\int d^4 x e^{i(k-l-r)x} = (2\pi)^4 \delta(k-l-r)$, pa je matricni element

$$M = -g_W^2 V_{mn}^* \left[\bar{u}_\nu(\vec{l}) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_\tau(\vec{k}) \right] \left[\bar{u}_n(\vec{p}) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) v_m(\vec{q}) \right] \frac{g_{\mu\nu} - \frac{(k-l)_\mu (k-l)_\nu}{M_W^2}}{(k-l)^2 - M_W^2 + i\epsilon}. \quad (11.23)$$

Da se izračuna vjerojatnost raspada treba naći kvadrat ovog matricnog elementa koristeći svojstva γ -matrica kao u prethodnim poglavljima. Puno je jednostavnije odmah napraviti aproksimaciju koja znatno uprošćava račun. U inicijalnom i finalnom stanju imamo samo lake čestice od kojih je najmasivnija tau lepton mase $m_\tau = 1.78 \text{ GeV}$, dok u međustanju imamo W^- bozon mnogo veće mase $M_W = 80.4 \text{ GeV}$. Matricni element procesa (11.23) zavisi od propagatora W^- bozona [zadnji faktor u (11.23)] čiji je impuls $r_\mu = (k-l)_\mu$. U sustavu mirovanja inicijalnog tau leptona je $k_\mu = (m_\tau, \vec{0})$, pa je 4-impuls gauge bozona $r_0 = m_\tau - l_0 \leq m_\tau$ i $r_i = -l_i$. Kako je $m_\nu^2 = l_0^2 - \vec{l}^2 \geq 0$ i $|\vec{l}| \geq |l_i|$, slijedi da je svaka komponenta 4-impulsa W^- bozona manja ili jednaka m_τ , tj. vrijedi

$$\frac{(k-l)^2}{M_W^2} \leq \frac{m_\tau^2}{M_W^2} \leq 5 \times 10^{-4}. \quad (11.24)$$

Zato se svi članovi u propagatoru W^- bozona koji zavise od njegovog 4-impulsa mogu kompletno zanemariti i cijeli propagator zamjeniti sa

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{(k-l)_\mu (k-l)_\nu}{M_W^2}}{(k-l)^2 - M_W^2 + i\epsilon} \approx \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2}. \quad (11.25)$$

Aproksimacija je još oko 300 puta bolja u slučaju raspada muona, jer je tada

$$\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{l})^2}{M_W^2} \leq \frac{m_\mu^2}{M_W^2} \leq 2 \times 10^{-6}. \quad (11.26)$$

Matrični element raspada tau leptona onda postaje

$$M(\tau^- \rightarrow \bar{f}_m f_n \nu_\tau) = \frac{g_W^2 V_{mn}^*}{M_W^2} [\bar{u}_\nu(\bar{l}) \gamma^\mu (1-\gamma^5) u_\tau(\bar{k})] [\bar{u}_n(\bar{p}) \gamma_\mu (1-\gamma^5) \nu_m(\bar{q})]. \quad (11.27)$$

Ovo je upravo aproksimacija malog impulsa W^- bozona u kojoj se slabe interakcije efektivno mogu zamjeniti Fermijevom struja-struja interakcijom (koja se naziva i četiri fermion interakcija) kao što je napomenuto u Poglavlju 6.2 i grafički ilustrirano na Slici 6.6. Za usporedbu sa eksperimentima konstanta vezanja se izražava pomoću već prije mjerene (u raspadu muona) Fermijeve konstante $G_F = 1.1644 \times 10^{-5} (\text{GeV})^{-2}$, tj.

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{M_W^2} = \frac{1}{2v^2}, \quad (11.28)$$

što fiksira vrijednost (6.64) vakuumske očekivane vrijednosti Higgs polja $v = 246 \text{ GeV}$.

Da se izračuna nepolarizirana širina raspada tau leptona matrični element M iz (11.27) treba kvadrirati, usrednjiti po spinu inicijalnog tau leptona i zbrojiti po spinovima finalnih fermiona, što daje

$$\overline{M^2} = \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} |M(\tau^- \rightarrow \bar{f}_m f_n \nu_\tau)|^2 = \frac{G_F^2}{4} |V_{mn}|^2 M^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) N_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (11.29)$$

gdje su $M^{\mu\nu}$ i $N_{\mu\nu}$ tragovi Diracovih matrica:

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= \text{Tr}[\gamma^\mu (1-\gamma^5) u_\tau \bar{u}_\tau \gamma^\nu (1-\gamma^5) u_\nu \bar{u}_\nu] = \text{Tr}[\gamma^\mu (1-\gamma^5)(\mathbf{k} + m_\tau) \gamma^\nu (1-\gamma^5)(\mathbf{l})] = \\ &= 8[g^{\mu\nu} \mathbf{k} \cdot \mathbf{l} - k^\mu l^\nu - k^\nu l^\mu - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho l_\sigma], \end{aligned} \quad (11.30)$$

te analogno

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu} &= \text{Tr}[\gamma_\mu (1-\gamma^5) \nu_m \bar{\nu}_m \gamma_\nu (1-\gamma^5) u_n \bar{u}_n] = \text{Tr}[\gamma_\mu (1-\gamma^5)(\mathbf{q} - m_m) \gamma_\nu (1-\gamma^5)(\mathbf{p} + m_n)] = \\ &= 8[g_{\mu\nu} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu - i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\rho q^\sigma]. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Kako je $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 2(\delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta)$ vrijedi jednostavno

$$M^{\mu\nu} N_{\mu\nu} = 256(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{l} \cdot \mathbf{p}), \quad (11.32)$$

pa je diferencijal nepolarizirane širine raspada tau leptona

$$d\Gamma(\tau^- \rightarrow \bar{f}_m f_n \nu_\tau) = \frac{64G_F^2}{2k^0} |V_{mn}|^2 (k \cdot q)(l \cdot p)(2\pi)^4 \delta^4(p + q + l - k) \frac{d^3l d^3p d^3q}{8(2\pi)^9 l^0 p^0 q^0}. \quad (11.33)$$

Izraz (11.33) treba još integrirati po impulsima finalnih čestica. Možemo uzeti da su mase neutrina i još jednog finalnog fermiona nula, što je točno za leptonske raspade $\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$ i $\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$, a vrlo približno točno i za hadronske raspade tau leptona zbog male mase u kvarka (popravke višeg reda uslijed jakih interakcija su puno veće od popravki uslijed nenulte $m_u \sim 2-3$ MeV mase u kvarka).

Širina raspada tau leptona računa se na isti način za svaki kanal. Razmotrimo zato samo širinu leptonskog raspada $\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$. Prema Slici 11.2 4-impuls tau leptona označen je sa k^μ , a p^μ označava 4-impuls finalnog muona. Širinu raspada tau leptona treba izraziti kao funkciju energije muona p^0 koja je jedina lako mjerljiva veličina u finalnom stanju. Kao i u slučaju raspada Z bozona u Poglavlju 8. želimo izračunati širinu raspada tau leptona u njegovu sustavu mirovanja, što daje duljinu njegova života $\Gamma_{\text{mir.}} = \frac{\hbar}{\Gamma_{\text{mir.}}}$ koju poredimo sa rezultatima mjerenja. Prema (8.9) je

$$d\Gamma_{\text{mir.}} = \frac{k^0}{m_\tau} d\Gamma. \quad (11.34)$$

Prvo treba integrirati (11.33) po impulsima finalnih neutrina d^3l i d^3q koji se ne observiraju. Integraciju je lako provesti ako iskoristimo svojstva Lorentz kovarijantnosti. Zamislimo li da smo izvršili integraciju, desna strana u (11.33) zavisi samo od 4-impulsa k^μ i p^μ inicijalnog tau leptona i finalnog muona. Lorentz kovarijantnost (tranlaciona invarijantnost) zahtijeva da diferencijalna širina raspada zavisi samo od jednog 4-vektora $w^\mu \equiv k^\mu - p^\mu$, a zbog zakona očuvanja 4-impulsa mora biti i $w^\mu = l^\mu + q^\mu$. Tenzorska struktura izraza (11.33) je onda

$$d\Gamma_{\text{mir.}}(\tau^- \rightarrow \bar{f}_m f_n \nu_\tau) = \frac{64G_F^2}{2m_\tau} |V_{mn}|^2 p^\mu k^\nu I_{\mu\nu}(k, p) \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}, \quad (11.35)$$

gdje je

$$I_{\mu\nu}(k, p) = I_{\mu\nu}(w) = \int l_\mu q_\nu (2\pi)^4 \delta^4(l + q + p - k) \frac{d^3l d^3q}{4l^0 q^0 (2\pi)^6}. \quad (11.36)$$

Integral $I_{\mu\nu}(w)$ je Lorentzov tenzor drugog reda i nužno je oblika

$$I_{\mu\nu}(w) = A(w^2) g_{\mu\nu} + B(w^2) w_\mu w_\nu, \quad (11.37)$$

jer za konstrukciju tenzora imamo samo 4-vektor w^μ i tenzor $g^{\mu\nu}$. Skalarnе veličine A i B u gornjem izrazu mogu zavisiti samo od Lorentz invarijante $w^2 = w_\mu w^\mu$, i obe se mogu izraziti preko jednog skalarnog integrala

$$I(w) = \int (2\pi)^4 \delta^4(l + q - w) \frac{d^3l d^3q}{4l^0 q^0 (2\pi)^6}. \quad (11.38)$$

Kako je masa neutrina nula, vrijedi

$$l^2 = l_0^2 - \vec{l}^2 = 0 \quad \text{i} \quad q^2 = q_0^2 - \vec{q}^2 = 0, \quad (11.39)$$

$$w^2 = (k - p)^2 = (l + q)^2 = 2l \cdot q \quad \text{i} \quad w \cdot l = (l + q) \cdot l = q \cdot l = w \cdot q,$$

pa je

$$g^{\mu\nu} I_{\mu\nu} = (4A + B)w^2 = \int (l \cdot q)(2\pi)^4 \delta^4(l + q + p - k) \frac{d^3l d^3q}{4l^0 q^0 (2\pi)^6} = \frac{w^2}{2} I(w),$$

te i

$$w^\mu w^\nu I_{\mu\nu} = (A + B)(w^2)^2 = \int (l \cdot w)(q \cdot w)(2\pi)^4 \delta^4(l + q + p - k) \frac{d^3l d^3q}{4l^0 q^0 (2\pi)^6} = \frac{(w^2)^2}{4} I(w).$$

Ove dvije jednadžbe imaju rješenje: $A = \frac{I(w)}{12}$; $B = \frac{I(w)}{6}$, tj.

$$I_{\mu\nu}(w) = \frac{1}{12} (g_{\mu\nu} + 2w_\mu w_\nu) I(w). \quad (11.40)$$

Preostaje još izračunati skalarni integral $I(w)$. Zamjenimo li integraciju po d^3l Lorentz invarijantnom integracijom kao u (3.70) uz $m_\nu = 0$

$$\int \frac{d^3l}{2l^0 (2\pi)^3} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(l^2) \theta(l^0), \quad (11.41)$$

imamo

$$I(w) = \int (2\pi)^4 \delta^4(l + q - w) (2\pi) \delta(l^2) \theta(l^0) \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{d^3q}{2q^0 (2\pi)^3} = \int (2\pi) \delta[(w - q)^2] \theta(w^0 - q^0) \frac{d^3q}{2q^0 (2\pi)^3}$$

Kako je za neutrino $d^3q = |\vec{q}|^2 d|\vec{q}| d\Omega = q_0^2 d|\vec{q}| d\Omega$, a integracija po prostornom kutu $d\Omega$ daje samo 4π , vrijedi

$$I(\mathbf{w}) = \frac{1}{2\pi} \int d|\vec{q}| q^0 \delta[(\mathbf{w} - \mathbf{q})^2] \theta(\mathbf{w}^0 - q^0), \quad (11.42)$$

gdje je $q^0 = \pm|\vec{q}|$ prema (11.39). θ -funkcija u (11.41) osigurava da je $l^0 > 0$, a uvjet da je \mathbf{w}^μ vremenski (time-like) 4-vektor, tj. da važi

$$\mathbf{w}^2 = (\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 = (l + \mathbf{q})^2 = 2l \cdot \mathbf{q} = 2(l^0 q^0 - |\vec{l}||\vec{q}|) = 2|\vec{l}||\vec{q}|(1 - \cos\theta) \geq 0,$$

zahtijeva $q^0 = |\vec{q}| \geq 0$.

Integral $I(\mathbf{w})$ je Lorentz invarijantni skalar pa ga možemo izračunati u bilo kojem inercijalnom referentnom sustavu. Za vremenski 4-vektor uvijek postoji IRS u kome su sve prostorne komponente tog vektora nula. Odaberimo onda sustav u kome je vektor $\mathbf{w}^\mu = (\mathbf{w}^0, \vec{0})$. Tada vrijedi $\mathbf{w}^2 = \mathbf{w}_0^2$ i $(\mathbf{w} - \mathbf{q})^2 = \mathbf{w}^2 - 2\mathbf{w} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{w}_0^2 - 2\mathbf{w}_0 q^0$, pa i $\delta[(\mathbf{w} - \mathbf{q})^2] = \delta(\mathbf{w}_0^2 - 2\mathbf{w}_0 q^0) = \frac{1}{2\mathbf{w}_0} \delta\left(\frac{\mathbf{w}^0}{2} - q^0\right)$, što za $I(\mathbf{w})$ daje vrijednost

$$I(\mathbf{w}) = \frac{1}{8\pi} \theta(\mathbf{w}^2). \quad (11.43)$$

U (11.43) se pojavljuje $\theta(\mathbf{w}^2)$, što je ekvivalentno uvjetu $q^0 \geq 0$. Prema (11.40) je onda

$$I_{\mu\nu}(\mathbf{w}) = \frac{1}{96\pi} (\mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{w}^2 + 2\mathbf{w}_\mu \mathbf{w}_\nu) \theta(\mathbf{w}^2). \quad (11.44)$$

Skupimo li sve faktore zajedno izraz za diferencijal širine raspada tau leptona postaje

$$d\Gamma_{\text{mir.}}(\tau^- \rightarrow \bar{f}_m f_n \nu_\tau) = \frac{64G_F^2}{2m_\tau} |V_{mn}|^2 \frac{\mathbf{p}^\mu \mathbf{k}^\nu}{96\pi} (\mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{w}^2 + 2\mathbf{w}_\mu \mathbf{w}_\nu) \theta(\mathbf{w}^2) \frac{d^3\mathbf{p}}{2p^0(2\pi)^3}, \quad (11.45)$$

gdje još treba izvršiti integraciju po prostornom kutu impulsa finalnog muona. Za leptonski raspad je $V_{mn} = 1$. Iskoristimo li još, $d^3\mathbf{p} = |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega = |\vec{p}| p^0 dp^0 d\Omega$ što je točno jer je za 4-impuls muona $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m_\mu^2$, lako se dobije

$$d\Gamma_{\text{mir.}}(\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau) = \frac{G_F^2}{12\pi^3 m_\tau} |\vec{p}| dp^0 p^\mu k^\nu (\mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{w}^2 + 2\mathbf{w}_\mu \mathbf{w}_\nu) \theta(\mathbf{w}^2). \quad (11.46)$$

Na kraju u sustavu mirovanja tau leptona je $\mathbf{k}^\mu = (\mathbf{k}^0, \vec{0})$, $k^2 = m_\tau^2$ i $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} = m_\tau p^0$, pa je

$$p^\mu k^\nu (\mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{w}^2 + 2\mathbf{w}_\mu \mathbf{w}_\nu) \theta(\mathbf{w}^2) = 3m_\tau^4 \left(\varepsilon - \frac{4}{3} \varepsilon^2 + \delta^2 \varepsilon - \frac{2}{3} \delta^2 \right), \quad (11.47)$$

gdje smo definirali energiju i masu finalnog muona normaliziranu na masu tau leptona

$$\varepsilon = \frac{p^0}{m_\tau} \text{ i } \delta = \frac{m_\mu}{m_\tau}. \quad (11.48)$$

Konačni izraz za diferencijal širine raspada tau leptona je

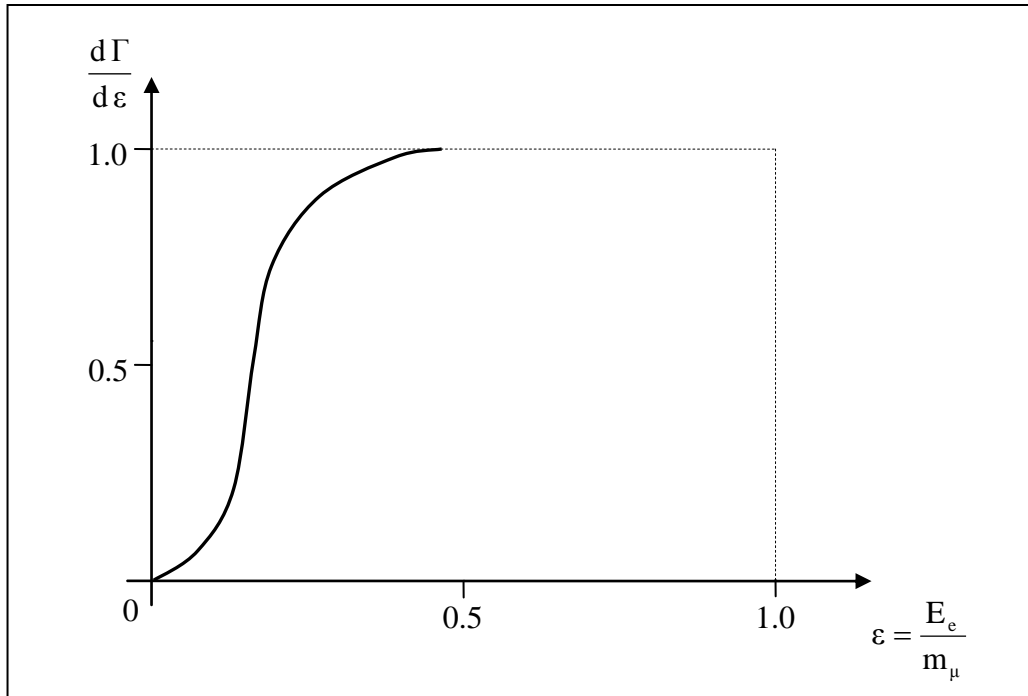
$$\frac{d\Gamma}{d\varepsilon}(\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau) = \frac{G_F^2 m_\tau^5}{4\pi^3} \left(\varepsilon - \frac{4}{3}\varepsilon^2 + \delta^2\varepsilon - \frac{2}{3}\delta^2 \right) \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2}. \quad (11.49)$$

Kako je $\delta_\mu = \frac{m_\mu}{m_\tau} \cong 0.06$, a $\delta_e = \frac{m_e}{m_\tau} \cong 0.0003$ zanemarujući δ^2 članove vrlo približno je

$$\frac{d\Gamma}{d\varepsilon}(\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau) \approx \frac{G_F^2 m_\tau^5}{4\pi^3} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{4}{3}\varepsilon \right). \quad (11.50)$$

Iz uvjeta $(k - p)^2 \geq 0$ u sustavu mirovanja tau leptona slijedi $m_\tau^2 - 2m_\tau p^0 + m_\mu^2 \geq 0$, što znači da je dozvoljena kinematička domena energije muona

$$0 \leq p^0 \leq \frac{m_\tau^2 + m_\mu^2}{2m_\tau} \approx \frac{m_\tau}{2}. \quad (11.51)$$



Slika 11.3

Slika 11.3 prikazuje diferencijalnu širinu raspada muona $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ kao funkciju energije elektrona. Za raspad muona je $\delta = \frac{m_e}{m_\mu} \cong 0.005$. Krivulja sa Slike 11.3 perfektno se slaže sa rezultatima izuzetno preciznih mjerenja raspada muona.

Ako zanemarimo mase svih fermiona, integracija po p^0 inutar kinematički dozvoljene domene daje ukupnu širinu raspada tau leptona za bilo koji kanal

$$\Gamma(\tau^- \rightarrow \bar{f}_m f_n \nu_\tau) = \frac{G_F^2 m_\tau^5}{192 \pi^3} |V_{mn}|^2. \quad (11.52)$$

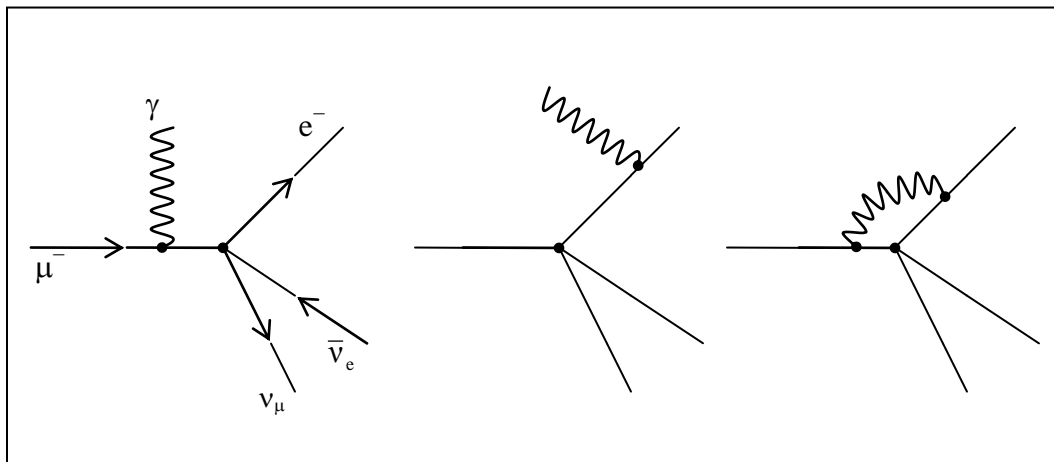
Za jedini mogući raspad muona ovaj izraz odmah daje

$$\Gamma_{\text{tot.}}(\mu^-) = \Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192 \pi^3} = 3.00952 \times 10^{-19} \text{ GeV}, \quad (11.53)$$

tj. vrijeme života muona

$$\tau(\mu^-) = \frac{\hbar}{\Gamma_{\text{tot.}}(\mu^-)} = 2.1871 \times 10^{-6} \text{ s}, \quad (11.54)$$

samo 0.45 % kraće od stvarne vrijednosti $\tau(\mu^-) = 2.19702 \times 10^{-6} \text{ s}$. Kad se računa bez aproksimacija i kad se uzmu u obzir elektromagnetske korekcije višeg reda teorijska vrijednost se potpuno slaže sa mjerenom. Dijagrami elektromagnetskih korekcija raspadu muona reda $\alpha = \frac{1}{137}$ koji sadrže dodatni foton γ prikazani su na Slici 11.4, gdje radi jednostavnosti nije prikazana linija W^- bozona u međustanju.



Slika 11.4

Raspad muona se vrlo precizno mjeri u eksperimentima sa točnošću $\sim 10^{-5}$. Najbolja današnja vrijednost života muona je $\tau_\mu = (2.197019 \pm 0.000021) \times 10^{-6}$ s. Raspad muona je leptonski proces koji ne zahtijeva QCD korekcije i koji je teorijski proračunat sa QED korekcijama drugog reda (proporcionalnih sa $\alpha^2 \leq 5 \times 10^{-5}$). Ako se ne zanemaruje masa elektrona može se pokazati da je ukupna širina raspada muona

$$\Gamma_{\text{tot.}} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192 \pi^3} I(\delta), \quad (11.55)$$

gdje je

$$I(\delta) = [1 - 8\delta + 8\delta^3 - \delta^4 - 12\delta^2 \ln \delta], \quad (11.56)$$

$$a, \delta = \frac{m_e^2}{m_\mu^2}.$$

Kad se uzmu u obzir sve radijativne korekcije drugog reda i ne zanemaruje masa elektrona ukupna širina raspada muona Γ_μ^{rad} je

$$\Gamma_\mu^{\text{rad}} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192 \pi^3} \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{25 - \pi^2}{4} \right) \left(1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \frac{m_\mu}{m_e} \right) \right] \left[1 + \frac{3m_\mu^2}{5M_W^2} \right] \left[1 - 8 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right]. \quad (11.57)$$

Zbog velike eksperimentalne preciznosti mjerenja, u praksi se raspad muona ne koristi za verifikaciju SM, već za definiciju i fiksiranje numeričke vrijednosti konstante slabih interakcija $G_F = 1.16637(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$. Onda se ta vrijednost koristi za provjeru ostalih predikcija teorije.

Za raspade tau leptona izraz (11.52) daje

$$\Gamma_{\text{tot.}}(\tau^-) = [2 + 3(|U_{ud}|^2 + |U_{us}|^2)] \Gamma_{\text{mir.}}(\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau) = 5 \frac{G_F^2 m_\tau^5}{192 \pi^3} = 2.025 \times 10^{-12} \text{ GeV}, \quad (11.58)$$

tj. vrijeme života

$$\tau(\tau^-) = 3.252 \times 10^{-13} \text{ s}, \quad (11.59)$$

što je za oko 11.9% dulje od mjerene vrijednosti. Proračun bez aproksimacija i uzimanje u obzir dijagrama višeg reda, naročito QCD korekcija proporcionalnih sa $\alpha_{\text{QCD}} = \frac{g_3^2}{4\pi}$ koje iznose oko 10%, daje izvrsno slaganje teorije i eksperimenta.

Zadaci:

Zadatak 11.1. Razvijajući operatore polja po kreacionim i anihilacionim operatorima pokazati da je propagator gauge bozona dat izrazom (11.16).

Zadatak 11.2. Eksplicitno napraviti integraciju po impulsima u izrazu (11.16) i pokazati da je propagator gauge bozona dat izrazom (11.20).

Zadatak 11.3. Izračunati tragove γ -matrica i pokazati da vrijedi (11.30) i (11.31), te njihov produkt (11.32).

Zadatak 11.4. Provjeriti ispravnost izraza (11.47) u sustavu mirovanja tau leptana.

12. Jake interakcije

Na kraju završimo pregled SM razmatranjem kvantne kromodinamike (QCD) koja je teorija jakih interakcija o kojima dosad nije bilo puno govora. To je izuzetno aktivno polje istraživanja sa puno još nedovoljno rasvijetljenih fenomena. Osnovna poteškoća u razumijevanju jakih interakcija je problem vezanih stanja. Inicijalna i finalna stanja u procesima nisu slobodne elementarne čestice SM-a – kvarkovi i gluoni, već njihova vezana stanja – hadroni na koja nije jednostavno primjeniti teoriju perturbacija za proračun vjerojatnosti procesa.

Sa problemom vezanih stanja fizičari se suočavaju od početka moderne fizike. Najjednostavniji sustav u kvantnoj mehanici – atom vodika je vezano stanje elektrona i protona. Hadroni su bitno drukčija vezana stanja. Relativno je lako razdvojiti atom vodika na čestice koje ga sačinjavaju – elektron i proton, dok je zbog zatočenja boje nemoguće izdvojiti slobodni kvark iz hadrona. Zbog relativističkog gibanja kvarkova i gluona i „jakosti“ jakih interakcija naš uobičajeni način tretiranja vezanih stanja kao zbroja pojedinačnih čestica često ne daje točne rezultate u slučaju hadrona. To je lako razumjeti na primjeru protona koji je vezano stanje tri kvarka uud. Ova predodba protona točno i jednostavno objašnjava njegov električni naboj $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$. Problem se pojavi

kad probamo razumjeti masu protona $m_p = 938.27$ MeV. Svi eksperimenti pokazuju da su mase u i d kvarka vrlo male. Particle Data Group 2008. navodi $m_u = 1.5 - 3.3$ MeV i $m_d = 3.5 - 6.0$ MeV. Bez obzira kako određivali mase kvarkova (kvarkovi su zatočeni unutar hadrona i mase im ne možemo mjeriti na način na koji se mjeri masa slobodnih čestica), očigledno je da 92-99% mase protona nije masa kvarkova koji ga sačinjavaju, već potencijalna energija jakih sila među česticama unutar protona. Takvo vezano stanje relativističkih čestica je bitno drukčije od uobičajenih vezanih stanja koja se susreću u svim područjima fizike. Kako potencijalna energija ima smisla samo za nerelativističke čestice, intuitivno razumjevanje stanja kvarkova unutar protona vezanih razmjennom gluona nije jednostavno. Na sreću, u prirodi postoje i mnogo masivniji kvarkovi (c, b i t) čije gibanje unutar hadrona je nerelativističko. Tehnički, hadroni se nazivaju jako vezana stanja, za razliku od uobičajenih slabo vezanih stanja kakav je na primjer atom vodika ili Sunčev sustav.

Kako ne znamo riješiti jednadžbe gibanja SM da eksplicitno dobijemo valne funkcije hadrona za izučavanje jakih interakcija razvijene su posebne tehnike. Spomenimo samo: kvantnu kromodinamiku na rešetci (lattice QCD), teorije efektivnih Lagrangiana i kiralnu teoriju perturbacija. Rezultati tih teorija omogućuju razumijevanje spektra hadrona u prirodi sa točnošću od nekoliko procenata. Iako problemi jakih interakcija prevazilaze okvire ovog izlaganja, pogledajmo ukratko njihova osnovna svojstva koje je moguće razumjeti bez previše matematičkih komplikacija.

Osnovno svojstvo jakih interakcija koje zahtijeva razumijevanje je njihova „jakost“. To je aspekt jakih sila koji ih bitno razlikuje od drugih interakcija i dovodi do pojave specifičnih fenomena kao što je zatočenje (confinement) kvarkova i gluona, tj. boje. Jakost interakcije mjeri se numeričkom vrijednošću bez-dimenzione konstante vezanja koja je u Poglavlju 1. navedena kao

$$\alpha_s(M_Z) = \frac{g_3^2}{4\pi} = 0.1176. \quad (12.1)$$

Kao što je već napomenuto u Poglavlju 7. konstante vezanja ustvari su funkcije energije. M_Z u (12.1) označava da se mjerenje vrši na skali energija $M_Z \approx 90$ GeV, tj. u procesima u kojima je prosječna energija čestica M_Z . Za usporedbu konstanta elektromagnetskih interakcija je oko 15 puta manja, tj.

$$\alpha_{\text{em}}(M_Z) = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{128} = 0.0078, \quad \alpha_{\text{em}}(m_e) = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} = 0.0073. \quad (12.2)$$

Efekt zasjenjenja električnog naboja virtuelnim e^+e^- parovima koji se kreiraju u vakuumu uzrokuje porast jakosti elektromagnetskih interakcija kad raste energije čestica. To je u fizici uobičajena situacija da intenzitet sila između čestica opada sa udaljenošću (manja udaljenost \sim veća energija).

Jaka sila pokazuje suprotno ponašanje. Renormalizabilnost svake kvantne teorije polja zahtijeva da se izračunaju i zbroje kontribucije svih divergentnih dijagrama koji doprinose renormalizaciji verteksa interakcija i propagatora pojedinih čestica uslijed njihove self-energije. Kao primjer, Slika 12.1 prikazuje divergentne dijagrame koji daju radijativne korekcije sa samo jednom petljom („one loop level“) kvark-kvark-gluon QCD verteksa. Renormalizacija zahtijeva da se elementarni („bare“) QCD verteks qqG , koji se pojavljuje u Lagrangianu teorije, zamijeni efektivnim („dressed“) verteksom, prikazanim zasjenjenim krugom na Slici 12.1, koji uzima u obzir mogućnost postojanja dodatnih petlji virtuelnih čestica – svaka čestica može emitirati i potom apsorbirati virtuelnu česticu ili par čestica-antičestica.

Broj takvih divergentnih dijagram varira od teorije, do teorije i zavisi od gauge grupe, tj. od broja polja u fundamentalnoj reprezentaciji i traga produkata strukturalnih konstanti (4.105) grupe. Za kvantnu kromodinamiku QCD, lokalnu $SU_c(3)$ ne-Abelovu gauge teoriju, jednažba (7.26) renormalizacione grupe za konstantu jakih interakcija je

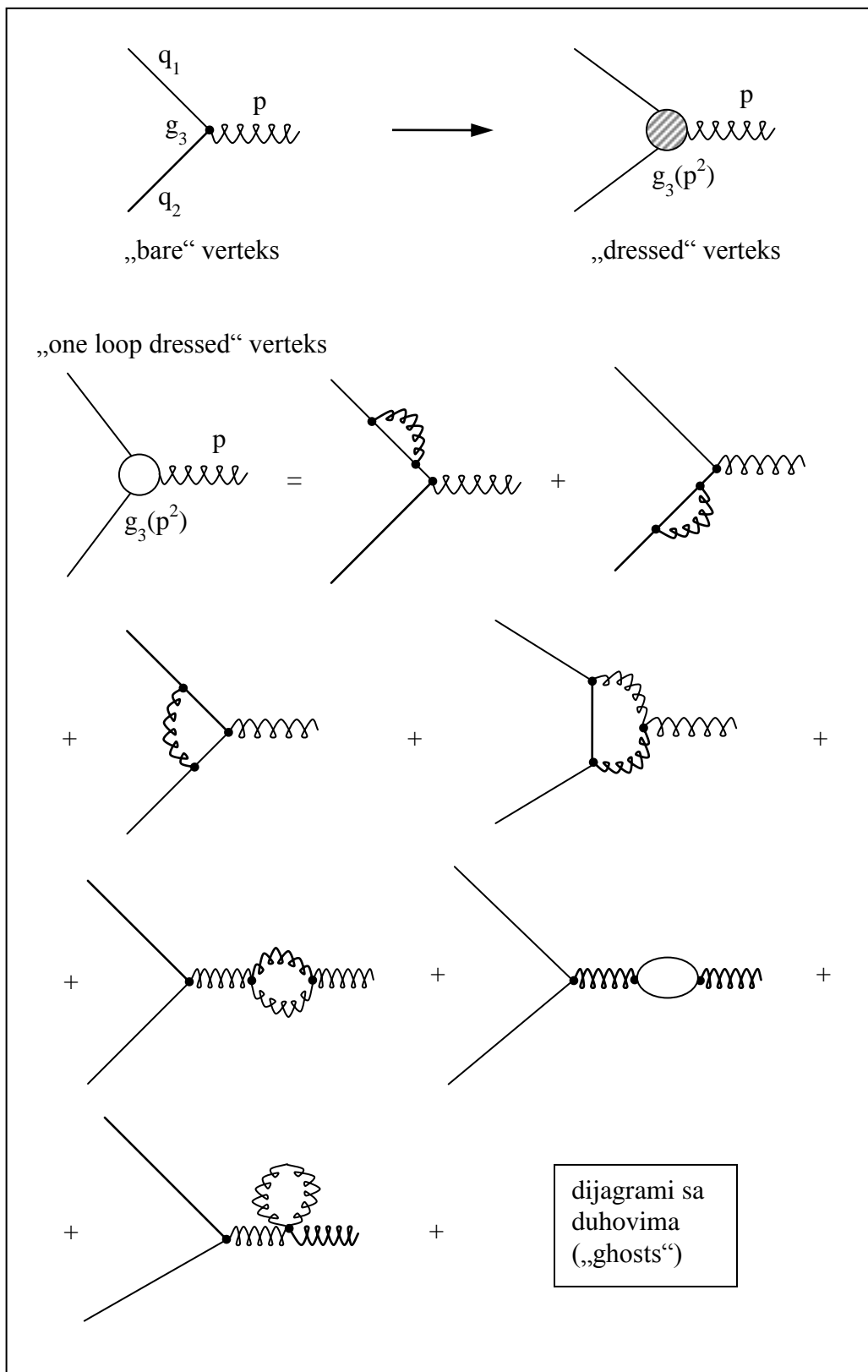
$$\frac{1}{\alpha_s(\mu)} = \frac{1}{\alpha_s(M_Z)} + \beta_{\text{QCD}} \ln \frac{M_Z^2}{\mu^2}, \quad (12.3)$$

gdje je

$$\beta_{\text{QCD}} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{3} n_q - \frac{11}{3} N_c \right) = \frac{2n_q - 33}{12\pi}. \quad (12.4)$$

N_c je broj različitih boja, a n_q je broj fermiona (kvarkova) čija polja se transformiraju kao tripleti $SU_c(3)$ grupe i čija masa je manja od μ . Za QCD na skali energija malo iznad mase b-kvarka $\mu \geq m_b \approx 5$ GeV je $n_q = 5$ jer svojim petljama β -funkciji doprinose svi kvarkovi, osim t-kvarka, pa je $\beta_{\text{QCD}} = -0.61$. Broj stanja električno nabijenih fermiona za istu $\mu \approx 5$ GeV skalu energija je $n_{\frac{2}{3}} = 6$; $n_{\frac{1}{3}} = 9$ i $n_{-1} = 3$, pa izraz (7.27) za β -funkciju

kvantne elektrodinamike daje $\beta_{\text{QED}} = +0.71$.



Slika 12.1

Negativna vrijednost β -funkcije znači opadanje jakosti jakih interakcija $\alpha_s(\mu)$ sa porastom energije čestica. Sila među kvarkovima unutar hadrona raste sa porastom njihove međusobne udaljenosti (kao da su vezani oprugom). Ovo krucijalno svojstvo jakih interakcija naziva se asimtotska sloboda teorije – unutar hadrona kvarkovi se u limesu visokih energija ponašaju kao slobodne čestice.

Asimtotska sloboda je posljedica postojanja jakih interakcija između medijatora tih interakcija – gluona. Samointerakcije gluona rezultiraju efektom „anti-zasjenjenja“ boje – crveni kvark okružen je virtuelnim kvark-antikvark parovima u kojima je uslijed privlačne jake sile crvena čestica bliža crvenom kvarku. Ovaj efekt je upravo suprotan zasjenjenju električnog naboja u QED koji je simbolično prikazan na Slici 7.4.

Teorija perturbacija je pouzdanija što je numerička vrijednost konstante interakcija manja. Na skali energija oko mase b-kvarka $m_b \approx 5 \text{ GeV}$ izrazi (12.3-4) daju za konstantu jakih interakcija

$$\alpha_s(m_b) = 0.20, \quad (12.5)$$

dok je na nižim energijama malo iznad mase c-kvarka $m_c \approx 1.4 \text{ GeV}$ kad β -funkciji doprinose petlje samo u,d,s i c kvarkova

$$\alpha_s(m_c) = 0.34. \quad (12.6)$$

Izraz (12.3) pokazuje da konstanta jakih interakcija $\alpha_s(\mu)$ raste sa smanjenjem energije μ i postaje beskonačna za

$$\Lambda_{\text{QCD}} = M_Z \exp \left[-\frac{2\pi}{9\alpha_s(M_Z)} \right] \cong 240 \text{ MeV}, \quad (12.7)$$

što se naziva QCD skalom Λ_{QCD} . Jasno je da beskonačna vrijednost α_s fizikalno nema nikakvog smisla, to je samo numerička vrijednost koja se koristi u teoriji renormalizacije (minimal renormalization scheme) kao prirodna skala teorije za cut-off integrala po energijama virtuelnih čestica u petljama Feynmanovih dijagrama. Svaka asimptotski slobodna teorija ima prirodnu skalu energija – to je energija ispod koje su jake interakcije zaista „jake“ i nije više moguće koristiti teoriju perturbacija. Fizikalno to znači da se ne-perturbativni efekti (kao vezana stanja) više nikako ne mogu zanemarivati u proračunima. Kako je svaki dijagram višeg reda proporcionalan sa α_s^2 , u realnosti teorija perturbacija postaje neuspješna već na nešto većim energijama kvarkova i gluona od približno 0.4 – 0.5 GeV. Ovo je u skladu sa očekivanjima jer, na primjer, izraz (12.3) za konstanta jakih interakcija daje $\alpha_s(0.5 \text{ GeV}) \approx 0.94$.

Zatočenje kvarkova i gluona unutar hadrona intuitivno (kvantitativni proračuni još uvijek nedostaju) se može razumjeti kao posljedicu ovog neograničenog porasta jakosti međusobnog vezanja pri niskim energijama. Pri tome su vezana stanja kvarkova i gluona upravo stanja mezona (1.4) i bariona (1.5) iz Poglavlja 1. koja točno odgovaraju eksperimentalno detektiranim česticama.

Kao primjer razmotrimo kvark q_i i antikvark \bar{q}_j , gdje ćemo zanemariti sve njihove kvantne brojeve osim indeksa boje „i“ i „j“. Razlika energija stanja para kvark-antikvark vezanih u mezon $|q_i \bar{q}_j\rangle$ i energije $E_0 = E(q) + E(\bar{q})$ stanja $|q_i\rangle |\bar{q}_j\rangle$ tih istih slobodnih kvarkova je njihova energija interakcije $E_{\text{int.}}$. U najnižem, drugom redu teorije perturbacija je

$$E_{\text{int.}} = \int dp \frac{\langle q_i \bar{q}_j | \mathcal{L}_{\text{int.}}^{\text{QCD}} | p \rangle \langle p | \mathcal{L}_{\text{int.}}^{\text{QCD}} | q_k \bar{q}_m \rangle}{E_0 - E(p)}, \quad (12.8)$$

gdje je prema (6.15) Lagrangian kvark-gluon interakcija

$$\mathcal{L}_{\text{int.}}^{\text{QCD}} = i g_3 \int d^3 x \left(\bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q \right) G_\mu^a. \quad (12.9)$$

Izdvojimo li iz (12.8) konstantu vezanja g_3 i indekse boje Gell-Mann $SU_c(3)$ matrica λ_a (4.120), energiju interakcije kvark-antikvark para možemo napisati u obliku

$$E_{\text{int.}} = -\frac{g_3^2}{4} \boldsymbol{\varepsilon} \sum_{a=1}^8 (\lambda_a)_{ij} (\lambda^a)_{km}, \quad (12.10)$$

gdje je $\boldsymbol{\varepsilon}$ tako reducirani matricni element. Ovaj izraz možemo usporediti sa elektromagnetskom interakcijom istih čestica koju također uzrokuje razmjena bezmasenih vektorskih čestica – fotona. Po analogiji sa negativnom električnom energijom interakcije istog kvark-antikvark para koja mora sadržavati identični reducirani matricni element (u najnižem redu, jedina razlika je u konstantama interakcija i faktorima boje)

$$E_{\text{int.}}^{\text{QED}} = e^2 Q_i Q_j \boldsymbol{\varepsilon} \delta_{ij} \delta_{km}, \quad (12.11)$$

zaključujemo da je $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$. U teoriji Lie grupa se pokazuje da se produkt dvije tripletne reprezentacije [devet različitih produkata $|q_i\rangle |\bar{q}_j\rangle$ jednočestističnih obojanih kvark-antikvark stanja] $SU_c(3)$ grupe $\mathbf{3} \oplus \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$ transformira kao zbroj singletne $\mathbf{1}$ i oktetne $\mathbf{8}$ reprezentacije. Za naše potrebe najvažnija je singletna reprezentacija

$$|\mathbf{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Tr} |q_i, q_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^3 |q_i, q_i\rangle, \quad (12.12)$$

koja zbog svojstava operatora boje $\text{Tr} \lambda_a \lambda_b = 2\delta_{ab}$, za kolor singletno kvark-antikvark stanje daje upravo bezbojno stanje mezona (1.4)

$$|\mathbf{1}\rangle = \chi_s^M = \frac{1}{\sqrt{3}} (c\bar{c} + z\bar{z} + p\bar{p}), \quad (1.4)$$

koje je simetrična kombinacija sve tri boje.

Prema (12.10) energija interakcije takvog stanja je negativna

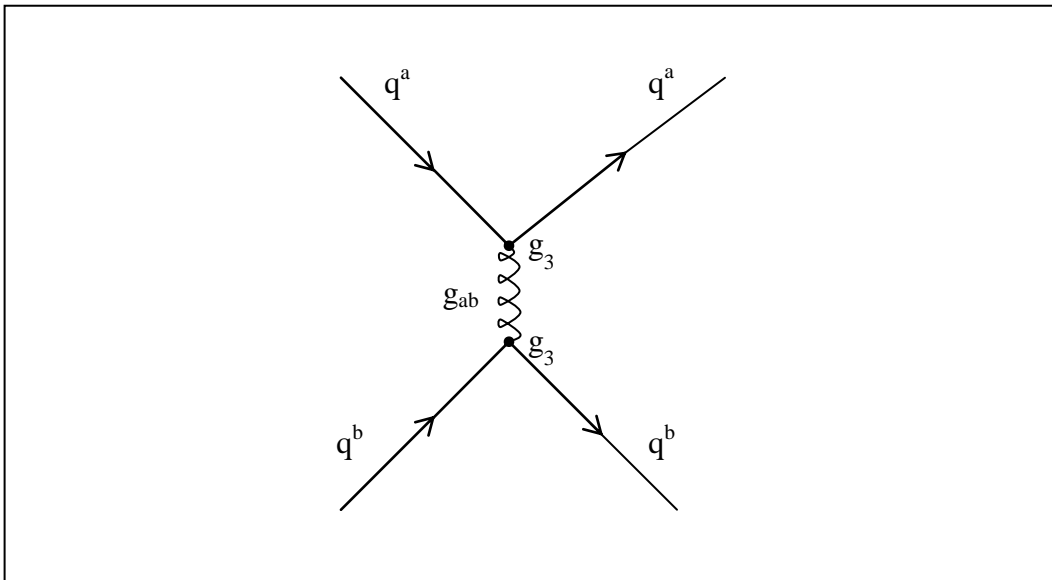
$$E_{\text{int.}}(\mathbf{1}) = -\frac{g_3^2}{12} \boldsymbol{\varepsilon} \sum_{a=1}^8 \text{Tr}(\lambda_a \lambda^a) = -\frac{4g_3^2}{3} \boldsymbol{\varepsilon} < 0, \quad (12.13)$$

i najniža od svih drugih mogućih kvark-antikvark stanja, pa je preferirana kombinacija za stvaranje jako vezanih stanja. Znači, bezbojno singletno vezano kvark-antikvark stanje – mezon imaće nižu energiju (najmanju masu) u skladu sa opservacijama spektra hadrona. Slični argumenti dokazuju da su stanja minimuma potencijalne energije za sve hadrone upravo bezbojna $SU_c(3)$ stanja mezona (1.4) i bariona (1.5).

Ovi kvalitativni argumenti pokazuju da su ne-obojana vezana kvarkovska stanja energijski preferirana u kvantnoj kromodinamici, ali naravno ne dokazuju da su to i jedina moguća jako vezana stanja, tj. ne dokazuju zatočenje boje.

Asimptotska sloboda i zatočenje kvarkova (boje) su bitne razlike između QCD i QED. QCD je kompliciranija, $SU_c(3)$ ne-Abelova lokalno gauge invarijantna teorija polja, dok je QED jednostavnija $U(1)_{ED}$ Abelova gauge teorija.

Postoji i puno sličnosti između jakih i elektro-magnetskih interakcija. Boja kvarkova (i gluona) je izvor jake sile između njih, baš kao što je električni naboj izvor elektromagnetske interakcije između električno nabijenih čestica. Medijatori jakih interakcija su osam, obojanih vektorskih bozona bez mase koji se nazivaju gluoni g_{ab} , kao što je medijator elektromagnetske interakcije jedan električno neutralan, vektorski bozon bez mase – foton γ . Hadroni su kolor singletna (neobojana) vezana stanja jakih interakcija, kao što su atomi električno neutralna vezana stanja elektromagnetskih interakcija.



Slika 12.2

Razmjena, emisija i apsorpcija, obojanih gluona između obojanih kvarkova, prikazana osnovnim dijagramom na Slici 12.2, generira privlačni potencijal jakih interakcija para kvarkova unutar nebojanih mezona ili bariona oblika

$$V^{\bar{q}q} = -\frac{4}{3}\alpha_s \frac{1}{r}; \quad V^{qq} = -\frac{2}{3}\alpha_s \frac{1}{r}; \quad \alpha_s \equiv \frac{g_3^2}{4\pi}, \quad (12.14)$$

baš kao što analogni dijagram sa Slike 1.1 razmjene fotona u QED generira električni potencijal para nabijenih čestica naboja eQ_i i eQ_j

$$V^{ED} = \alpha \frac{Q_i Q_j}{r}; \quad \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}. \quad (12.15)$$

U nazivnicima izraza (12.14) i (12.15) udaljenost čestica je $r = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$.

Potencijal (12.15) oblika $\frac{\alpha}{r}$, gdje je $\alpha = \frac{1}{137}$, generiran razmjenom fotona, suprotno nabijenim česticama daje negativnu energiju veze koja omogućuje slabo vezana stanja u elektrodinamici. Energija veze kvark-antikvark para koju daje analogni $c\frac{\alpha_s}{r}$ privlačni potencijal (12.14) generiran razmjenom gluona (konstanta c je $-\frac{4}{3}$ ili $-\frac{2}{3}$), nije dovoljna za zarobi kvarkove u hadrone, kao što potencijal (12.15) ne zarobljava elektron i proton u atom vodika. Ako česticama dovedemo dovoljno energije razbićemo vezano stanje. Asimptotska sloboda QCD dozvoljava izuzetak za vezana stanja jakih interakcija. Na nekoj dovoljno niskoj energiji, kad $\mu \rightarrow \Lambda_{\text{QCD}}$ jakost vezanja $\alpha_s(\mu) \rightarrow \infty$, pa i energija veze kvark-antikvark para teži beskonačnosti i kvarkovi ostaju zarobljeni unutar vezanog stanja bez obzira koliko energije dobili. U eksperimentima na visokim energijama, ako čestice unutar hadrona dobiju dovoljno energije kreiraju mlazove („jets“) i hadroniziraju. Tako se nazivaju procesi u kojima kvarkovi i gluoni visokih energija kreiraju realne kvark-antikvark parove, što ustvari znači raspad originalnog hadrona u dodatna QCD vezana stanja.

Zadatak je buduće teorije da ova kvalitativna razmatranja zamijeni preciznim proračunima. Na primjer, u QCD na rešetci dobri numerički rezultati su postignuti dodavanjem potencijalu (12.14) jednostavnog fenomenološkog člana $V^c(r)$ odgovornog za zarobljavanje (confinement) kvarkova koji linearno raste sa porastom njihove udaljenosti. Zarobljavajući potencijal koji uopće ne zavisi od boje, spina ili naboja kvarkova, je oblika $V^c(r) = kr$, gdje je eksperimentalno određena najbolja vrijednost konstante $k \approx 0.25 (\text{GeV})^2$.

12.1 Raspadi π^\pm piona

Dodatne informacije o jakim interakcijama mogu dati procesi raspada iz Poglavlja **11**. Pored impresivne potvrde SM u raspadima leptona, proračun širine raspada (11.53) ili (11.52) procesa sa Slike 11.2 – raspada muona ili tau leptona u tri lakša fermiona, ima veliki dodatni značaj za teoriju elementarnih čestica jer omogućuje vezu sa jakim interakcijama.

U prirodu postoji hijerarhija masa fermiona takva da se svaki nestabilni fermion raspada uslijed slabih interakcija u tri lakša fermiona. Ovo je točno, ne samo za leptone μ i τ , već i za kvarkove d , c , s , b i t iako oni imaju i jake interakcije. Na primjer, c -kvark, čija je masa $m_c = 1.27$ GeV, raspada se u tri puno lakša fermiona $c \rightarrow s W^+ \rightarrow s \bar{f}_m f_n$, gdje $\bar{f}_m f_n$ mogu biti: $e^+ \bar{\nu}_e$ ili $\mu^+ \bar{\nu}_\mu$ ili $u \bar{d}$. Kao i raspadi leptona iz Poglavlja **11**., proces zahtijeva kreaciju i sukcesivnu anihilaciju virtualnog W -bozona u međustanju. Od svih fermiona u finalnom stanju raspada c -kvarka najmasivniji su s -kvark mase $m_s = 0.104$ GeV i muon $m_\mu = 0.106$ GeV. Jedini izuzetak ovog pravila je t -kvark koji se zbog svoje velike mase $m_t = (171.2 \pm 2.1)$ GeV raspada u realni, a ne u virtualni, W -bozon. Zato izraz za širinu primarnog kanala njegovog raspada $t \rightarrow b W^+ \rightarrow b \bar{f}_m f_n$ nije (11.52), već malo drukčiji izraz koji eksplicitno zavisi i od m_t i od M_W .

U prvoj aproksimaciji izraz (11.52) daje širinu tročestičnog raspada za svaki pojedini kanal svakog od tih kvarkova. To dozvoljava, aproksimativno i relativno jednostavno, proširenje primjene SM i na elektroslabe raspade jako interagujućih čestica – hadrona. Tako se uspostavlja veza SM sa bogatom i eksperimentalno dosta dobro istraženom fenomenologijom jakih interakcija.

Osnovna pretpostavka SM koja se na ovaj način eksperimentalno provjerava je univerzalnost slabih interakcija, tj. svojstvo W^\pm nabijenih gauge bozona da se na isti način vežu i na leptone i na kvarkove. SM tvrdi da verteks faktor $g_W \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{mn}$ dva elementarna dijagrama sa Slike 6.3 iz Poglavlju **6.1** ne zavisi ni od naboja, ni od boje fermiona. Razlika slabih nabijenih interakcija između leptona i kvarkova je toliko mala da se može opisati samo jednim brojem – vrijednošću odgovarajućeg elementa CKM matrice (9.11), tj. (6.79).

Kad se precizno eksperimentalno istraže mase i interakcije neutrina, najvjerojatnije će i u leptonskom sektoru teorije postojati razlika između svojstvenih stanja mase i interakcijskih svojstvenih stanja tri leptonska dubleta. Tada će i za leptone postojati matrica mješanja okusa analogna kvarkovskoj CKM matrici, pa će i formalno dva verteksa sa Slike 6.3 izgledati potpuno jednako. Naravno, to će dodatno potencirati otvoreno pitanje simetrije između kvarkova i leptona čije rješenje mora čekati neku teoriju elementarnih čestica općenitiju od SM.

Ilustrirajmo osnovnu ideju ovog pristupa na primjeru raspada c -kvarka.

Razmatramo slabe raspade nekog hadrona koji sadrži teški c-kvark i još neke dodatne lakše u, d ili s kvarkove ili anti-kvarkove. Najlakši takvi hadroni su $c = \pm 1$ „šarmantni“ (charmed) mezoni

$$D^0 = (c\bar{u}) \text{ mase } M_{D^0} = 1.865 \text{ GeV} \text{ i } D^+ = (c\bar{d}); D^- = (c\bar{d}) \text{ mase } M_{D^\pm} = 1.87 \text{ GeV},$$

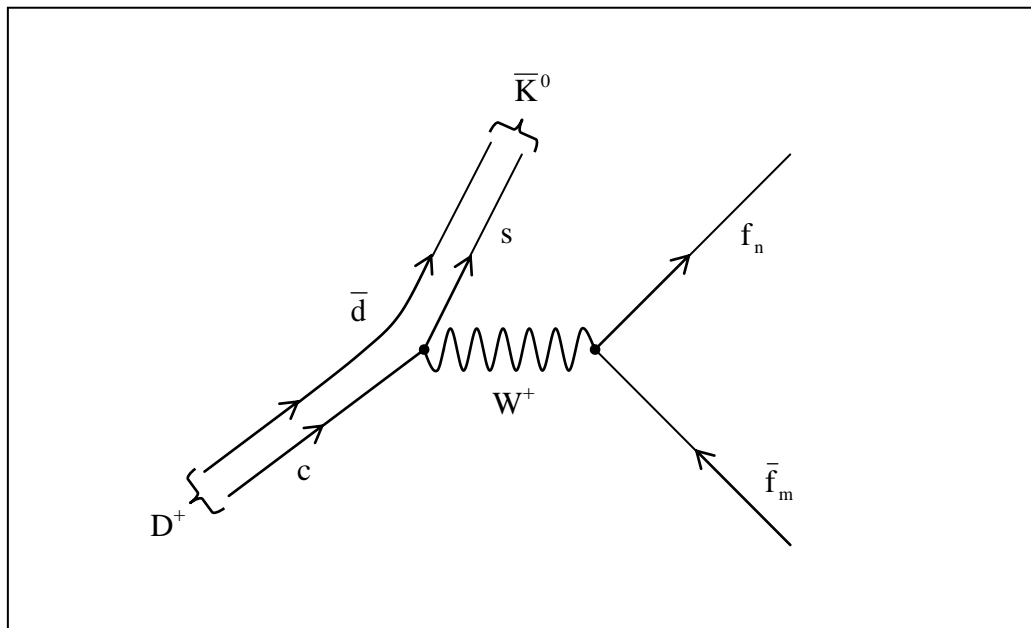
te najlakši „šarmantni“ barion

$$\Lambda_c^+ = (u d c); \Lambda_c^- = (\bar{u} \bar{d} \bar{c}) \text{ čija je masa } M_{\Lambda_c^\pm} = 2.286 \text{ GeV}.$$

Energija koja se oslobađa u raspadu čestice jednaka je masi te nestabilne čestice. Kako je energija veze ovih hadrona manja od njihove mase (iako, ne puno manja u slučaju c-hadrona), energija raspada c-kvarka veća je od njegove energije veze.

Zato je plauzibilno pretpostaviti da vrijedi spektator aproksimacija koja znači da raspad c-kvarka unutar „šarmantnih“ hadrona ne zavisi od ostalih, lakših čestica koje u procesu raspada sudjeluju samo kao „promatrači“. Laki kvarkovi koji ne sudjeluju u procesu nazivaju se spektator kvarkovi. Raspad c-kvarka se onda smatra tročestičnim raspadom slobodnog fermiona za koji je ukupna širina za svaki kanal aproksimativno data sa (11.53) uz trivijalnu zamjenu $m_u \rightarrow m_c$.

Kao primjer na Slici 12.3 prikazan je u spektator aproksimaciji kvark dijagram raspada D^+ mezona u $\bar{K}^0 \bar{f}_m f_n$ finalno stanje. \bar{K}^0 je „strani“ $s = \pm 1$ mezon $\bar{K}^0 = (\bar{d}s)$ čija je masa 0.498 GeV.



Slika 12.3

Hadronski proces raspada $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 \bar{f}_m f_n$, gdje je $f_n = e^+; \mu^+$ ili u , a $\bar{f}_m = \bar{\nu}_e; \bar{\nu}_\mu$ ili \bar{d} , na kvark nivou se razumije kao raspad c-kvarka u međustanje s-kvarka i virtuelnog W^+ , koji se zatim raspadne u $\bar{f}_m f_n$ finalno stanje, tj. $c \rightarrow s W^+ \rightarrow s \bar{f}_m f_n$, a sve uz prisustvo spektator \bar{d} kvarka. U slučaju raspada Λ_c^+ bariona spektator kvarkovi su u i d .

Prva posljedica naivne spektator aproksimacije je da svi „šarmantni“ hadroni trebaju imati iste širine raspada određene širinom raspada c-kvarka, što znači istu duljinu života. Eksperimentalni podaci djelimično podržavaju ovu pretpostavku, jer su mjerena vremena života

$$\tau_{D^\pm} = 10.4 \times 10^{-13} \text{ s}; \quad \tau_{D^0} = 4.1 \times 10^{-13} \text{ s} \quad \text{i} \quad \tau_{\Lambda_c^+} = 2 \times 10^{-13} \text{ s},$$

istog reda veličine. Faktor pet razlike u duljinama života c-hadrona pokazuje da ovakvu jednostavnu aproksimacija ipak treba poboljšati.

Za tačnost koja nama treba svi relevantni elementi CKM matrice (6.79) mogu se aproksimirati jedinicom, tj. uzeti

$$U_{cs} \approx U_{ud} \approx 0.99 \approx 1, \quad (12.16)$$

što znači da svih 5 kanala raspada c-kvarka

$$c \rightarrow s W^+ \rightarrow s \bar{f}_m f_n = c (e^+ \bar{\nu}_e \text{ ili } \mu^+ \bar{\nu}_\mu \text{ ili } u \bar{d}) \quad (12.17)$$

aproksimativno imaju istu širinu (u \bar{d} finalno stanje zbog faktora boje kvarkova reprezentira ustvari tri stanja). Iz (11.53) onda slijedi da je ukupna širina raspada c-kvarka

$$\Gamma_{\text{tot.}}^c = 5 \frac{G_F^2 m_c^5}{192 \pi^3}. \quad (12.18)$$

Koristeći (12.18) i (11.53) vrijeme života c-kvarka može se povezati sa vremenom života muona

$$\tau_c \cong \frac{\tau_\mu}{5} \left(\frac{m_\mu}{m_c} \right)^5. \quad (12.19)$$

Ovaj rezultat daje vrijeme života c-kvarka kao funkciju njegove mase, ali nije jasno koju vrijednost za masu c-kvarka treba uzeti u ovom izrazu. Uzmemo li vrijednost iz teorije renormalizacije (minimal renormalization scheme) $m_c = 1.27 \text{ GeV}$ koju navodu Particle Data Group za vrijeme života c-kvarka se dobija

$$\tau_c = 1.8 \times 10^{-12} \text{ s}, \quad (12.18)$$

što je za faktor ~ 2 malo predugo vrijeme. Kinematika raspada, kao i logika jednostavne spektator aproksimacije koja cjelokupni raspad D^+ -mezona pripisuje raspadu c-kvarka, sugeriraju za masu c-kvarka odabir $m_{D^+} = m_c = 1.87 \text{ GeV}$ jednak ukupnoj masi D^+ mezona. Takav izbor za duljinu života c-kvarka daje malo prekratko

$$\tau_{D^\pm} \approx \tau_c = 2.6 \times 10^{-13} \text{ s}. \quad (12.20)$$

Jednostavna spektator aproksimacija daje pravi red veličine vremena života c-kvarka, ali očito treba biti dopunjenja boljim opisom jakih interakcija unutar hadrona da se dobije točnije slaganje sa mjerenim vrijednostima.

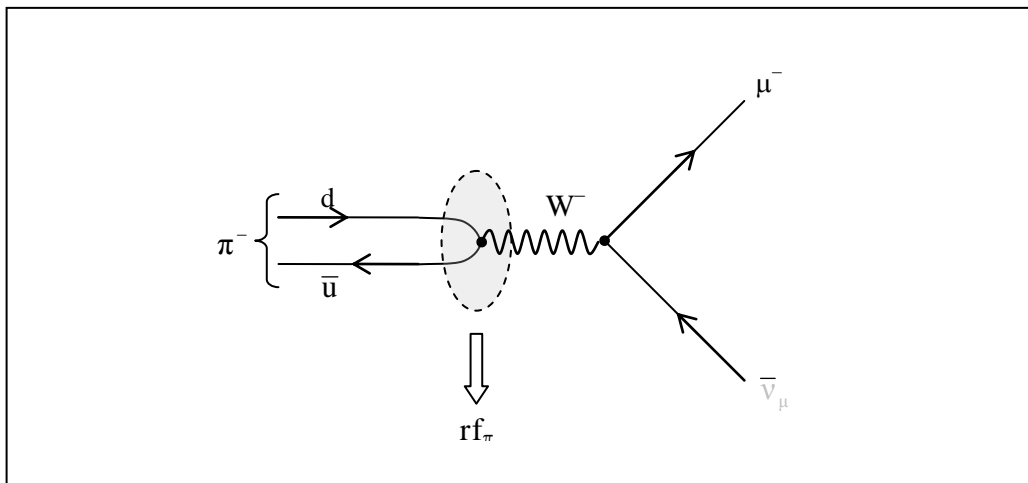
Slični rezultati se dobijaju i za semi-leptonsku frakciju grananja. Kako u prvooj aproksimaciji svih pet finalnih stanja (12.17) u raspadu c-kvarka imaju istu vjerojatnost, vrijedi

$$B(c \rightarrow e^+ + \text{bilo šta}) = \frac{\Gamma(c \rightarrow e^+ + \text{bilo šta})}{\Gamma_{\text{tot.}}} = \frac{1}{5},$$

što se dosta dobro slaže sa eksperimentalnom vrijednošću

$$B(c \rightarrow e^+ + \text{bilo šta}) = (16.0 \pm 0.4)\% .$$

Na primjeru raspada π^\pm mezona, koji su puno preciznije eksperimentalno istraženi, može se točno provjeriti predikcija SM za frakciju grananja. π^\pm pioni su najlakši električno nabijeni mezoni. Nabijeni pioni su jakim interakcijama vezana stanja najlakših kvarkova: $\pi^- = (\bar{u}d)$ i $\pi^+ = (u\bar{d})$, čija je masa $m_\pi = 0.14 \text{ GeV}$, a duljina života $\tau_\pi = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$.



Slika 12.4

U najnižem redu raspad π^- prikazan je dijagramom na Slici 12.4. Isprekidani oval na slici označava da inicijalno stanje nije $d + \bar{u}$ kvark i antikvark stanje slobodnih Dirac fermiona, već π^- mezon koji je vezano stanje d -kvarka i \bar{u} -antikvarka koji razmjenjuju gluone.

U spektator aproksimaciji, ako se zanemare efekti jakih interakcija, raspad je opisan kvarkovskim procesom $d + \bar{u} \rightarrow W^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, prikazanim na Slici 6.5 u Poglavlju 6.2. Jasno je da može postojati i analogni proces raspada sa slabom nabijenom strujom elektrona u finalnom stanju $d + \bar{u} \rightarrow W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$.

Na prvi pogled dijagrami sa Slika 11.2 i 6.5 izgledaju potpuno različito. Raspad leptona (μ ili τ) je $1 \rightarrow 3$ proces, a kvarkovski dijagram raspada π^\pm mezona je $2 \rightarrow 2$ proces sa različitim inicijalnim i finalnim česticama. Između ta dva dijagrama postoji veza koja se naziva „crossing“ simetrija.

Osnovna svojstva kvantne teorije polja: unitarnost (postojanje antičestica) i CPT invarijantnost garantiraju da su izrazi za vjerojatnost (kvadrat apsolutne vrijednosti matričnog elementa) svih „crossed“ procesa jednostavno povezani. „Crossing“ (prijelaz sa lijeve/desne na desnu/lijevu stranu dijagrama) je operacija simetrije koja znači zamjenu čestice/antičestice iz inicijalnog/finalnog stanja odgovarajućom antičesticom/česticom negativnog momenta u finalnom/inicijalnom stanju.

Neka smo izračunali spinsku sumu kvadrata amplitude Feynmanova dijagrama nekog procesa $\overline{|M|^2}$. Napravimo li dijagram novog procesa u kome neku ulaznu liniju čestice /antičestice zamjenimo izlaznom linijom odgovarajuće antičestice/čestice – ta linija (tj. čestica koju ta linija reprezentira) je iz inicijalnog prešla („crossed“) u finalno stanje. Naravno, moguće je i obrnuto, zamjena finalne linije čestice/antičestice odgovarajućom inicijalnom linijom antičestice/čestice. Vrijednost spinske sume kvadrata amplitude novog (crossed) procesa određena je sa $\overline{|M|^2}$ uz:

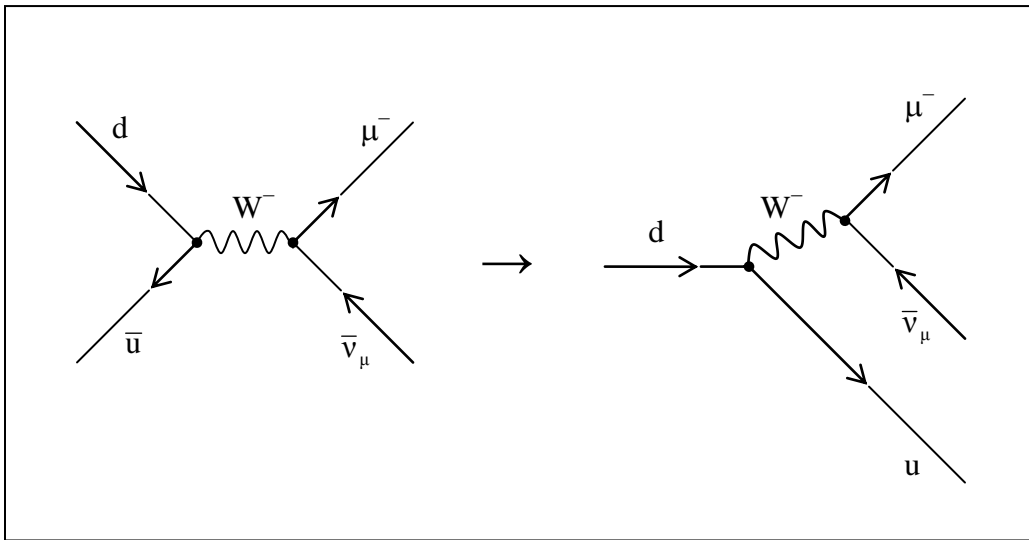
- zamjenu impulsa svake eksterne linije čestice/antičestice prvog procesa odgovarajućim impulsom antičestice/čestice drugog (crossed) procesa koga treba pomnožiti sa (-1) ako je linija prešla iz inicijalnog/finalnog stanja u finalno/inicijalno stanje,
- množenje cijele amplitude sa (-1) za svaku fermionsku liniju koja je iz inicijalnog /finalnog stanja prešla u finalno/inicijalno stanje.

Uzrok promjene znaka impulsa „crossed“ linije je u uvjetima kompletnosti Dirac-ovih spinora (6.85). Ako ulaznu liniju impulsa p , opisanu spinorom $u(p)$, prebacimo u izlaznu liniju antičestice opisanu spinorom $v(-p)$, tada je spinorska suma kvadrata matričnog elementa dva procesa

$$\not{p} + m = \sum_{\sigma} u_{\sigma}(p) \bar{u}_{\sigma}(p) \rightarrow \sum_{\sigma} v_{\sigma}(-p) \bar{v}_{\sigma}(-p) = (-\not{p}) - m = -(\not{p} + m).$$

Zbog svojstava „crossing“ simetrije procesa (Feynmanovih dijagrama) relativno mali broj proračuna kvadrata apsolutne vrijednosti matičnih elemenata usrednjenih po spinu inicijalnih i sumiranih po spinu finalnih čestica može se iskoristiti za računanje vjerojatnosti većeg broja fizikalno različitih nepolariziranih procesa raspršenja ili raspada čestica.

U spektator aproksimaciji raspad π^{-} mezona sa Slike 12.4 i raspad d-kvarka sa Slike 6.5 su „crossed“ procesi. Kao što prikazuje Slika 12.5, ako ulaznu liniju \bar{u} -antikvarka, opisanu $\bar{v}(q)$ spinorom, iz inicijalnog stanja prvog procesa prebacimo u finalnu liniju u-kvarka, opisanu $\bar{u}(-q)$ spinorom, dobijemo tročestični proces raspada d-kvarka. Nepolizirane širine raspada za ta dva procesa su jednake (Zadatak 12.1).



Slika 12.5

Probajmo izračunati vjerojatnost raspada $\pi^{-}(q) \rightarrow \mu^{-}(p) + \bar{\nu}_{\mu}(k)$ čiji Feynmanov dijagram prikazuje Slika 12.4, bez ikakvih aproksimacija koje se odnose na jake interakcije. Na niskim energijama propagator W^{-} bozona je samo $\frac{g^{\mu\nu}}{M_W^2}$, pa je matični element procesa oblika

$$M = \frac{g_W^2}{M_W^2} (\dots)^{\mu} [\bar{u}(p) \gamma_{\mu} (1 - \gamma^5) v(k)], \quad (12.21)$$

gdje je kao u Poglavlju 9.

$$g_w = \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_w} = \frac{g_2}{2\sqrt{2}}. \quad (12.22)$$

Simbol $(\dots)^\mu$ označava fermionsku struju u lijevom verteksu sa Slike 12.4 vezanja W^- bozona i π^- piona koju zbog efekata jakih interakcija ne znamo. U jednostavnoj spektator aproksimaciji (lijevi dijagram na Slici 12.5) bila bi to struja elementarnih d i \bar{u} kvarkova, tj. bilo bi $(\dots)^\mu = \bar{v}_{\bar{u}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_d$.

Kako matrični element mora biti Lorentz invarijantan, nepoznati verteks mora biti vektor ili aksijalni vektor što je naznačeno indeksom μ . Pion π^- ima spin nula, pa je q^μ jedini Lorentz vektor a, $q^2 = q_\mu q^\mu = m_\pi^2$ jedini Lorentz invarijantni skalar, u inicijalnom stanju koji nam stoji na raspolaganju za gradnju tenzora $(\dots)^\mu$. Zato mora biti

$$(\dots)^\mu = q^\mu f(q^2) = q^\mu f(m_\pi^2) = q^\mu f_\pi, \quad (12.23)$$

gdje je f_π konstanta. Zakon očuvanja 4-impulsa zahtijeva da je $q = p + k$, pa je

$$M_{fi} = \frac{g_w^2}{M_w^2} f_\pi (p+k)^\mu [\bar{u}(p) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v(k)]. \quad (12.24)$$

Diracova jednadžba za muon i neutrino daje: $\bar{u}(p)(\not{p} - m_\mu) = 0$ i $\not{k} v(k) = 0$, pa se odmah dobija

$$M_{fi} = \frac{g_w^2}{M_w^2} f_\pi m_\mu [\bar{u}(p)(1 - \gamma^5) v(k)]. \quad (12.25)$$

Koristeći (7.12) i (7.14), kao i formule (7.18) za tragove γ -matrica, kvadriranje i sumiranje po spinovima finalnih fermiona daje

$$|\overline{M_{fi}}|^2 = \frac{g_w^4}{M_w^4} f_\pi^2 m_\mu^2 \text{Tr}[(\not{p} + m)(1 - \gamma^5) \not{k} (1 + \gamma^5)] = 8 g_w^4 f_\pi^2 m_\mu^2 (p \cdot k). \quad (12.26)$$

U sustavu mirovanja piona vrijedi $\vec{q} = 0$ i $q^0 = m_\pi$, tako da je $\vec{p} = -\vec{k}$ i takođe

$$p \cdot k = p^0 k^0 - \vec{p} \cdot \vec{k} = p^0 k^0 + \vec{k}^2 = k^0 (E + k^0), \quad (12.27)$$

jer je masa neutrina nula, a $E \equiv p^0$ je energija finalnog muona.

Širina raspada π^- u njegovu sustavu mirovanja je

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_\pi} (2\pi)^4 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{q}) \overline{|M_{fi}|^2} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0}, \quad (12.28)$$

pa koristeći prethodne relacije dobijamo

$$d\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu) = \frac{g_W^4 f_\pi^2 m_\mu^2}{(2\pi)^2 M_W^4 m_\pi} \frac{E + k^0}{E} \delta(E + k^0 - m_\pi) \delta(\vec{p} + \vec{k}) d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{k}. \quad (12.29)$$

Da se izračuna ukupna širina raspada piona treba integrirati po impulsima finalnih čestica – muona i muonskog neutrina. δ -funkcija omogućuje integraciju po $d^3\mathbf{p}$, a $d^3\mathbf{k} = 4\pi k_0^2 dk_0$ jer je raspad skalarnе čestice u njenom sustavu mirovanja izotropan, pa je

$$\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu) = \frac{g_W^4 f_\pi^2 m_\mu^2}{\pi M_W^4 m_\pi} \int dk_0 k_0^2 \left(1 + \frac{k_0}{E}\right) \delta(E + k_0 - m_\pi), \quad (12.30)$$

gdje je zbog kinematičkih relacija $E = \sqrt{k_0^2 + m_\mu^2}$. Kako je nula prvog reda argumenta δ -funkcije u (12.30)

$$w_0 = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}, \quad (12.31)$$

vrijedi

$$\delta(E + k_0 - m_\pi) = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi^2} \delta(k_0 - w_0), \quad (12.32)$$

što konačno daje

$$\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu) = \frac{1}{4\pi} \frac{g_W^4}{M_W^4} f_\pi^2 m_\mu^2 m_\pi \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2. \quad (12.33)$$

Za usporedbu sa rezultatima mjerenja zgodnije je širinu raspada napisati pomoću (11.28) Fermijeve konstante slabih interakcija

$$\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu) = \frac{G_F^2}{8\pi} f_\pi^2 m_\pi m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2. \quad (12.34)$$

U gornjem izrazu znamo numeričke vrijednosti svih konstanti, osim f_π konstante vezanja piona i nabijenih gauge bozona. Odaberemo li za tu konstantu najjednostavniju moguću vrijednost $f_\pi = m_\pi = 0.14$ GeV za širinu raspada dobijemo

$$\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu) = 3 \times 10^{-17} \text{ GeV}. \quad (12.35)$$

Gornja numerička vrijednost za vrijeme života nabijenih piona daje $\tau_\pi = 2.2 \times 10^{-8}$ s, što je samo 15 % kraće od stvarne vrijednosti. Ovo naravno nije predikcija teorije, nego sretna slučajnost pri pogađanju numeričke vrijednosti konstante f_π .

Izraz za širinu raspada (12.34) omogućuje i potpuno neovisnu kvantitativnu provjeru SM. Negativni pion ima i drugi leptonski kanal raspada $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ u elektron i elektronski antineutrino čija širina raspada takođe mora biti data izrazom (12.34), samo uz zamjenu $m_\mu \rightarrow m_e$. Predikcija SM za frakciju grananja dva moguća raspada piona onda oupće ne zavisi od vrijednosti nepoznate konstante f_π , već samo od odnosa masa poznatih čestica elektrona, muona i piona: $m_e = 511 \text{ KeV}$, $m_\mu = 105.66 \text{ MeV}$ i $m_\pi = 139.57 \text{ MeV}$

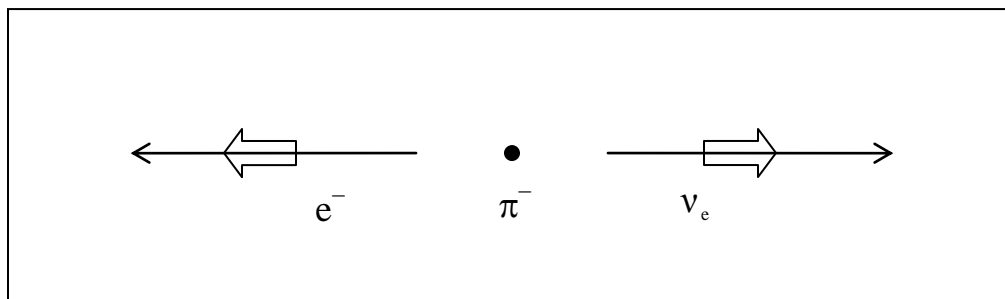
$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 = 1.275 \times 10^{-4}. \quad (12.36)$$

Ova predikcija je eksperimentalno vrlo dobro provjerena i Particle Data Group 2008. navodi

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu)} = (1.230 \pm 0.004) \times 10^{-4}, \quad (12.37)$$

što se za manje od 4 % razlikuje od teorijskog proračuna. Kad se uzmu u obzir i radijativne korekcije teorijski proračun daje 1.233×10^{-4} .

Frakcija grananja dva kanala raspada (12.36) znači da se nabijeni pion ~ 8000 puta češće raspada u muon nego u elektron, iako muon ima oko 200 puta veću masu. To je neobično, jer su u pravilu finalna stanja sa lakšim česticama vjerojatnija (kreiranje čestice manje mase košta manje energije).



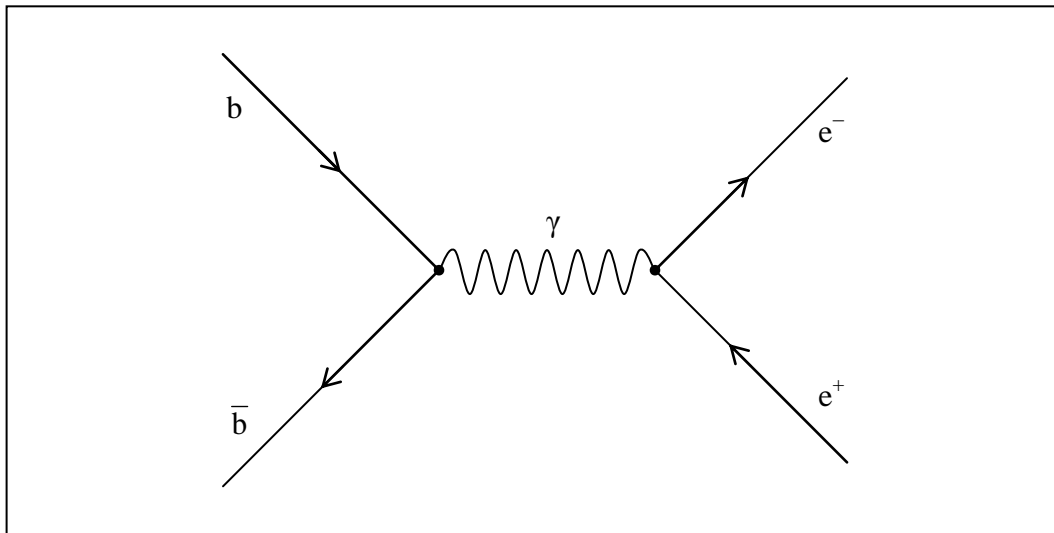
Slika 12.6

Objašnjenje se krije u zakonu očuvanja angularnog momenta i V–A karakteru slabih interakcija. Spin piona je nula, što znači da je ukupni angularni moment finalnih fermiona $J = 0$. Kako je elektronski antineutrino čestica bez mase koja ima pozitivni helicitet, onda i elektron koji se giba u suprotnom smjeru takođe mora imati pozitivni helicitet, kao na Slici 12.6. Uske strijelice označavaju pravce impulsa, a široke pravce spina finalnih čestica.

Za elektron koji je uglavnom čestica lijevog heliciteta [po apsolutnoj vrijednosti puno veća ψ_L , nego ψ_R komponenta iz (6.5)], to je „pogrešno“ stanje heliciteta za interakciju sa W-bozonom – slaba struja se veže na lijeva stanja fermiona. Isto, naravno, vrijedi i za muon. Ali, zbog mnogo veće mase, prema (6.13), muon ima veću komponentu desnog heliciteta, pa se u (12.36) pojavi faktor $\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 = 2.34 \times 10^{-5}$ koji uzrokuje veliku dodatnu supresiju elektronskog kanala raspada.

U hadronskoj spektroskopiji izraz (12.34) za širinu raspada nabijenih piona obično se koristi na malo drukčiji način. Iz mjerenog vremena života (12.35) i izraza (12.34) odredi se numerička vrijednost konstante $f_\pi = 0.934$ GeV, koja se onda koristi za proračun vjerojatnosti sličnih raspada drugih mezona i bariona.

Za teške mezone u nerelativističkoj aproksimaciji može se povezati ukupna širina Γ raspada sa veličinom vezanog stanja. Kao ilustraciju možemo odabrati elektromagnetski raspad vektorskog mezona Y koji je vezano $b\bar{b}$ stanje. Masa Y mezona je 9.46 GeV, a ukupna širina raspada mu je 54.02 keV. Y mezon ima leptonski kanal raspada $Y \rightarrow e^+e^-$ čija je frakcija 2.38 %, tj. širina 1.29 keV. Kvarkovski dijagram tog procesa prikazan je na Slici 12.7.



Slika 12.7

Matrični element M_{fi} ovog procesa je produkt dvije elektromagnetske struje koje povezuje propagator virtuelnog fotona. Desni verteks reprezentira matrični element struje elektrona j^μ između vakuuma i e^+e^- stanja $\langle e^+e^- | j^\mu | 0 \rangle$ koji je poznat iz QED. Lijevi verteks $\langle 0 | j^\mu | Y \rangle$ je nepoznat jer reprezentira elektromagnetsku struju b-kvarkova unutar mezona koja sadrži nepoznate korekcije uslijed jakih interakcija. Kako matrični element mora biti Lorentz kovarijantan, a elektromagnetska struja je vektor, nepoznati verteks mora biti proporcionalan spinu Y mezona

$$\langle 0 | j^\mu | Y \rangle = e_b g_v s_v^\mu, \quad (12.38)$$

gdje je e_b naboj, g_v konstanta vezanja, a s_v^μ spin vektorskog bozona Y . Lijeva strana u (12.38) ne može biti proporcionalna 4-impulsu Y mezona p^μ , koji je jedini drugi Lorentz vektor kojeg imamo u inicijalnom stanju, jer je to ujedno i impuls fotona za koji mora vrijediti $\partial_\mu j^\mu \sim p_\mu j^\mu = 0$ zakon očuvanja elektromagnetske struje (gauge invarijantnost). Uvjet ortogonalnosti vektora spina i četvero-impulsa masivne vektorske čestice $p_\mu^\nu s_v^\mu = p_\mu s_v^\mu = 0$ garantira gauge invarijantnost izraza (12.38). Amplituda procesa je onda

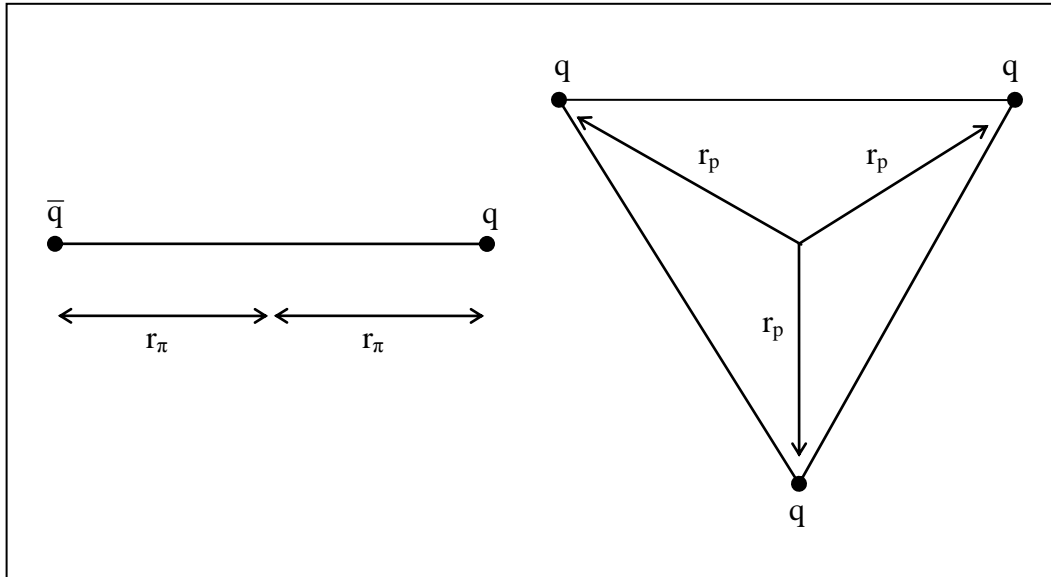
$$-i M_{fi} = -ie (\bar{u} \gamma^\mu v) \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} (-ie_b g_v s_v^\nu), \quad (12.39)$$

gdje je $q^2 = m_v^2$ i $e_b = -\frac{e}{3}$. U nerelativističkom limesu valna funkcija Y mezona se separira na spinski i prostorni dio. Pri računanju ukupne širine raspada Γ u nerelativističkom limesu $\vec{p} \rightarrow 0$ prostorna valna funkcija $\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \psi(\vec{p}) e^{ip \cdot x}$ teži ka $\psi(0)$. Ovo znači da je u prvoj aproksimaciji širina raspada Y mezona proporcionalna vjerojatnosti da se b-kvark i \bar{b} -antikvark nađu na istom mjestu u prostoru. Proračun daje

$$\Gamma_v = \frac{1}{9} \left[16\pi \frac{\alpha^2}{m_v^2} |\psi(0)|^2 \right]. \quad (12.40)$$

Ako uzmemo da je osnovno stanje Y mezona opisano istom valnom funkcijom kao u atomu vodika $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$, za koju je $|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{a_0} \right)^3$, gdje je a_0 Bohrov radijus koji je mjera dimenzija vezanog stanja. Poredeći sa mjerenom vrijednosti širine raspada za ovaj kanal $\Gamma_v = 1.29 \text{ keV}$ dobija se $a_0 = 0.18 \text{ fm}$. Precizna mjera veličine vezanog stanja je RMS radijus (srednja kvadratna devijacija) koja je $\sqrt{3} a_0$, što za Y mezon daje $\sim 0.3 \text{ fm}$.

Iako je ovaj rezultat dobijen za teški mezon u nerelativističkoj aproksimaciji, precizniji QCD proračuni na rešetci daju vrlo slične rezultate za sve hadrone (mezone i barione) koje u prvoj aproksimaciji možemo zamisliti kao na Slici 12.8 koja prikazuje pione i nukleone.



Slika 12.8

Numeričke vrijednosti udaljenosti od CM su

$$r_{\pi} = 0.66 \times 10^{-15} \text{m}, \quad r_p = 0.81 \times 10^{-15} \text{m},$$

što za prosječnu udaljenost valentnih kvarkova i u mezonu i u barionu daje približno isto $2r_{\pi} \sim \sqrt{3} r_p \sim 1.3 \text{ fm}$. Ova jednostavna slika hadrona je naravno samo prva aproksimacija – hadroni su jako vezana stanja kvarkova i antikvarkova. Kao i sve kvantne čestice kvarkovi su kompleksni objekti koji stalno emitiraju/apsorbiraju realne ili virtuelne gluone i fotone, i uvijek su okruženi virtuelnim kvark-antikvark parovima (vjerojatno i tzv. „glueballs“) koji se neprestano kreiraju i anihiliraju iz vakuuma.

Kako buduće provjere SM u eksperimentima na LHC krucijalno zavise od svojstava jakih interakcija u proton-proton sudarima pogledajmo na kraju osnovna svojstva takvih procesa.

12.2 Raspršenja sa velikim transferom impulsa

U eksperimentima raspada čestica se nastoje koristiti procesi sa što većim udarnim presjecima koji daju maksimalni signal u detektoru. Nasuprot tome, za otkriće nove fizike na malim skalama duljina, tj. na visokoj energiji moraju se koristiti izuzetno rijetki procesi u kojima dolazi do velikog transfera energije i impulsa između čestica koje sudjeluju u procesu. Veliki transfer 4-impulsa u procesu je neophodan za kreaciju još neotkrivenih čestica velike mase.

LHC će sudarati protone čija energija u sustavu CM je $\sqrt{s} = 14$ TeV – dva snopa protona energija 7 TeV. Takav proces znači raspšenje (sudar) dva partona, po jednog iz svakog protona, čije energije su oko 1 TeV. Parton je bilo koja čestica kvark ili gluon, bilo koje boje i spina, unutar hadrona koji nosi dio 4-impulsa ukupnog vezanog stanja. Iako proton ima energiju 7 TeV iznimno je malo vjerojatno da će ukupnu energiju imati samo jedna čestica unutar protona. Razvijena je cijela teorija funkcija (structure functions) koje daju raspodjelu 4-impulsa protona između partona koji ga čine u visoko energijskim neelestičnim sudarima. Teorija „deep inelastic“ raspršenja prevazilazi okvire ovog izlaganja i nije neophodna za razumijevanje osnovnih svojstava jakih interakcija.

Proces u kome dolazi do velikog transfera 4-impulsa između protona koji sudjeluju u raspršenju zamišljamo kao nekoherentnu interakciju između dva partona velikih energija razmjenom (u prvoj aproksimaciji jednog) gluona ili fotona. Interakcija takvih partona je QCD u aproksimaciji velikog transfera impulsa q^2 . Veliko q^2 znači otprilike > 10 GeV, što opet znači da parton koji sudjeluju u raspršenju u pravilu ima za red veličine veću energiju i impuls. Na tako visokim energijama, asimptotska sloboda QCD znači da takve partone možemo smatrati slobodnim česticama unutar protona i možemo koristiti teoriju perturbacija za proračun vjerojatnosti procesa jakih interakcija. Štoviše, za veliko q^2 vrlo dobar opis fizike daje već najniži red teorije perturbacija i u obzir se moraju uzimati samo najjednostavniji mogući dijagrami u najnižem redu.

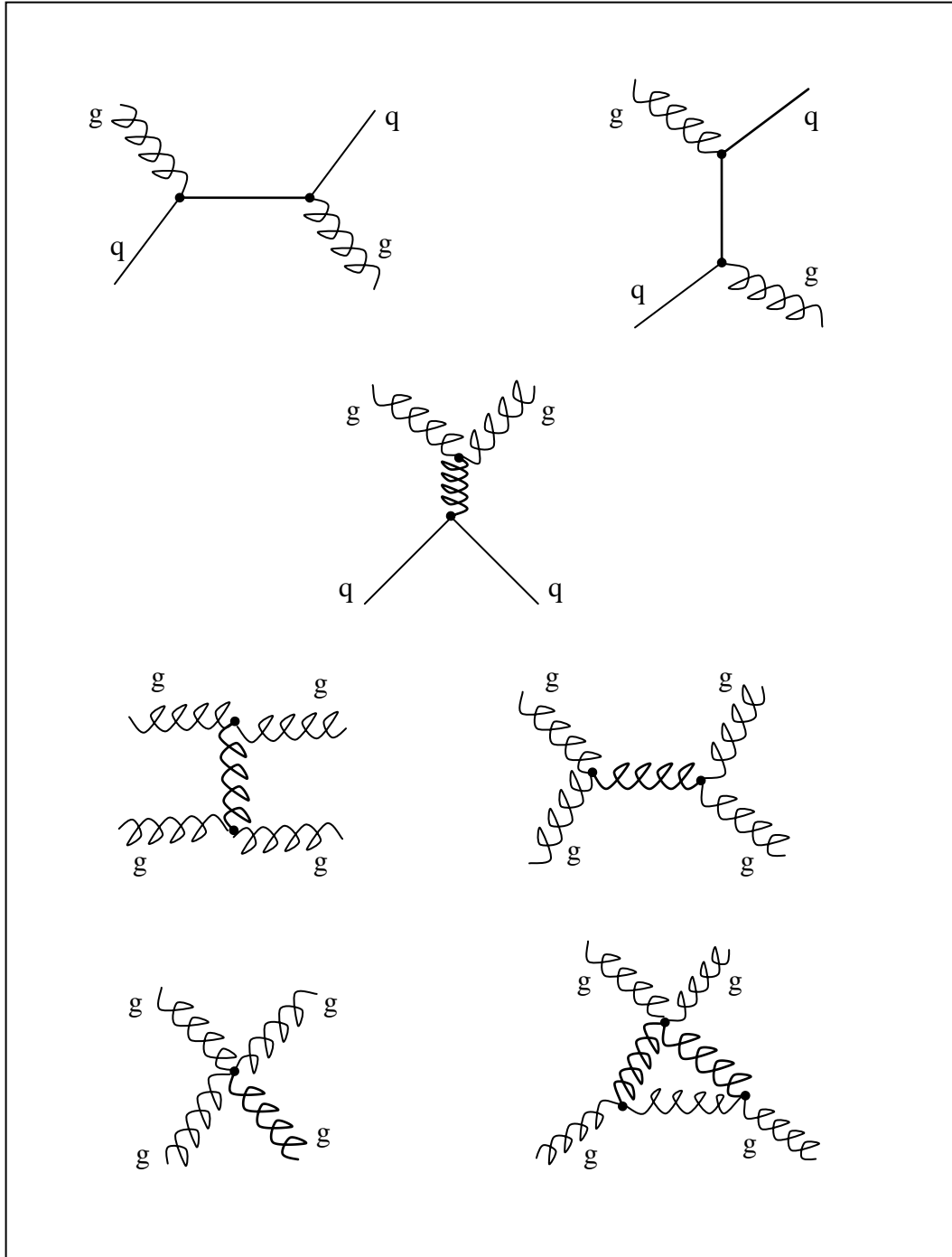
Dominantni QCD procesi sa velikim transferom impulsa u p-p raspršenju su $2 \rightarrow 2$ procesi kvark i/ili gluon raspršenja oblika

$$gg \rightarrow q\bar{q} \text{ ili } gg; \quad gq \rightarrow gq; \quad qq \rightarrow qq; \quad q\bar{q} \rightarrow q\bar{q} \text{ ili } gg,$$

gdje q označava kvark, a g gluon. Svi ovi procesi znače razmjenu virtualnog kvarka ili gluona između čestica u inicijalnom i finalnom stanju. Feynmanovi dijagrami su im oblika kao na Slici 12.8 i veoma su slični dijagramima jednofotonske razmjene iz kvantne elektrodinamike. Jedina bitna razlika u odnosu na QED je da u QCD postoje gluon-gluon samointerakcije koje daju tro- i četvero-gluon vertekse teorije.

Stvarna finalna stanja u detektoru nisu naravno finalni kvarkovi i gluoni u procesu već mlazovi hadrona koji iz njih nastaju. Koristeći tehnike razvijene za duboko neelestično raspršenje, mjerenjem svojstava finalnih hadronskih mlazova dobijaju se informacije o 4-impulsu inicijalne čestice mlaza, a time i o dominantnom QCD procesu raspršenja.

U najnižem redu matrični element se može izračunati iz odgovarajućeg Feynmanova dijagrama primjenom pravila iz Poglavlja 6.3. Da se nađe udarni presjek sumira se po spinu i bojama svih finalnih i usrednji po spinu i bojama svih inicijalnih kvarkova i/ili gluona. Kao primjer, na Slici 12.9 prikazani su osnovni dijagrami (najnižeg reda) za gq i gg raspršenje.



Slika 12.9

Ograničimo li se samo na lake kvarkovske okuse (u i d kvarkove) koji su uvijek relativističke čestice u sudarima protona visokih energija, slično kao u slučaju elektron-pozitron anihilacije iz Poglavlja 7.5, diferencijalni efikasni presjek za svaki od procesa sa slike 12.9 je oblika

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi\alpha_s^2}{s^2} F(s, t, u), \quad (12.41)$$

gdje su s, t i u Mandelstamove varijable za odgovarajući proces, a $dt = \frac{s}{2} d(\cos\theta)$ kao u (2.34). Funkcija F nema dimenzije i za razne procese sa slike 12.9 data je u Tabeli 12.1.

Proces	F(s, t, u)	F(s, $\theta = \frac{\pi}{2}$)
$q_1 q_2 \rightarrow q_1 q_2$	$\frac{4}{9} \left(\frac{s^2 + u^2}{t^2} \right)$	2.22
$q_1 \bar{q}_2 \rightarrow q_1 \bar{q}_2$	$\frac{4}{9} \left(\frac{s^2 + u^2}{t^2} \right)$	2.22
$q_1 q_1 \rightarrow q_1 q_1$	$\frac{4}{9} \left(\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} \right) - \frac{8}{27} \frac{s^2}{ut}$	3.26
$q_1 \bar{q}_1 \rightarrow q_2 \bar{q}_2$	$\frac{4}{9} \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} \right)$	0.22
$q_1 \bar{q}_1 \rightarrow q_1 \bar{q}_1$	$\frac{4}{9} \left(\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right) - \frac{8}{27} \frac{u^2}{st}$	2.59
$q_1 \bar{q}_1 \rightarrow gg$	$\frac{32}{27} \left(\frac{u^2 + t^2}{ut} \right) - \frac{8}{3} \left(\frac{u^2 + t^2}{s^2} \right)$	1.04
$gg \rightarrow q_1 \bar{q}_1$	$\frac{1}{6} \left(\frac{u^2 + t^2}{ut} \right) - \frac{3}{8} \left(\frac{u^2 + t^2}{s^2} \right)$	0.15
$qg \rightarrow qg$	$\frac{s^2 + u^2}{t^2} - \frac{4}{9} \left(\frac{s^2 + u^2}{su} \right)$	6.11
$gg \rightarrow gg$	$\frac{9}{2} \left(3 - \frac{tu}{s^2} - \frac{su}{t^2} - \frac{st}{u^2} \right)$	30.4

Tabela 12.1

Kvark indeksi „1“ i „2“ označavaju različite okuse u i d. Da se lakše usporede vjerojatnosti raznih procesa u zadnjoj koloni Tabele 12.1 date su numeričke vrijednosti diferencijalnih udarnih presjeka odgovarajućih procesa za raspršenje pod kutom $\theta = \frac{\pi}{2}$, tj. $t = u = -\frac{s}{2}$, jer je za ultrarelativističke čestice prema (2.34)

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta), \quad u = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta) . \quad (2.34)$$

Daleko najveći udarni presjek ima gluon-gluon raspršenje.

Proračun udarnih presjeka dominantnih QCD procesa između kvarkova i gluona sličan je proračunu relativističkih elektromagnetskih procesa iz Poglavlja 7.5. Da se nađe vjerojatnost raznih QCD procesa u sudarima protona u LHC akceleratoru treba napraviti konvoluciju tih udarnih presjeka procesa sa elementarnim kvarkovima i gluonima sa partonskim funkcijama distribucije unutar protona. Tako dobijeni SM proračuni će se onda provjeravati u eksperimentima na LHC-u.

Zadaci:

Zadatak 12.1. Eksplicitno napisati sumu po spinu finalnih čestica kvadrata apsolutne vrijednosti dva matrična elementa sa Slike 12.5 – raspada π^- mezona i raspada d-kvarka i provjeriti svojstvo „crossing“ simetrije.

Zadatak 12.2. Pokazati da iz izraza za amplitudu raspada π^- mezona (12.24) slijedi da je spinska suma kvadrata amplitude data izrazom (12.26).

Zadatak 12.3. Koristeći svojstva δ -funkcije i definiciju (12.31) pokazati da za finalnu integraciju po energijama u raspadu π^- piona vrijedi (12.32).

Zadatak 12.4. Pokazati da je ukupna širina raspada $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ data izrazom (12.33) ili (12.34).

Literatura:

1. Abers E. S., Lee B. W., „Gauge Theories“, Physics Reports 9C, 1, 1973.
2. Barger V., Phillips R., „Collider Physics“, Addison-Wesley, 1987.
3. Bjorken J. D., Drell S. D., „Relativistic Quantum Mechanics“, McGraw-Hill, 1964.
4. Bjorken J. D., Drell S. D., „Relativistic Quantum Fields“, McGraw-Hill, 1964.
5. Burgess C. P., Moore G. D., „The Standard Model: A Primer“, Cambridge University Press, 2007.
6. Cheng T. P., Li L. F., „Gauge Theory of Elementary Particle Physics“, Oxford University Press, 1988.
7. Cottingham W., Greenwood D., „An Introduction to the Standard Model“, Cambridge University Press, 1998.
8. Haber H., Kane G., Dawson S, Gunion J., „Higgs Hunters’s Guide“, Perseus, 2000.
9. Hanzen F., Martin A. D., „Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics“, Wiley, 1984.
10. Hammermesh M., „Group Theory“, Addison- Wesley, 1963.
11. Kleinknecht K., „Detectors for Particle Radiation“, 2nd ed., Cambridge University Press, 2000.
12. Marciano W., Pagels H., „Quantum Chromodynamics“, Physics Reports 36C, 3, 1978.
13. Martin B. R., Shaw G., „Particle Physics“, 2nd ed., Wiley, 2004.
14. Merzbacher E., „Quantum Mechanics“, 2nd ed., Wiley, 1970.
15. Picek I., „Fizika elementarnih čestica“, Hinus, Zagreb, 1997.
16. West P., „Introduction to Supersymmetry and Supergravity“, World Scientific, 1986.
17. Weinberg S., „The Quantum Theory of Fields“, Cambridge University Press, 2000.