Prirodoslovno matematički fakultet
Sveučilište u Splitu

Specijalna teorija relativnosti

Skripta iz kolegija

Elektrodinamika II

Prof. Željko Antunović

SPECIJALNA TEORIJA RELATIVNOSTI

SPECIJALNA TEORIJA RELATIVNOSTI

1. UVOD

Krajem XIX. i početkom XX. stoljeća fizika se suočavala s ogromnim problemima. Osnovne tvrdnje teorije − Newtonove klasične mehanike, koja je smatrana točnom i kroz više od 200 godina mnogo puta provjerenom, bile su u suprotnosti s temeljnim tvrdnjama tadašnje "nove fizike" − Maxwellove elektrodinamike. Vodeći znanstvenici ulagali su ogroman trud pokušavajući razriješiti taj paradoks. Tek je 1905. mladi, nepoznati fizičar Albert Einstein, u članku publiciranom u Annalen der Physik 1905., riješio problem na spektakularan način:

Newtonova klasična mehanika samo je približno točna teorija kad su brzine male u udnosu na brzinu svjetlosti, a Maxwellova elektrodinamika je ispravna teorija bez ikakvih ograničenja!

Tu novu Einsteinovu teoriju koja zamjenjuje Newtonovu klasičnu mehaniku i predstavlja temelj moderne fizike nazivamo Specijalna teorija relativnosti (STR).

Bit nesuglasja između klasične mehanike i elektrodinamike najlakše se vidi na primjeru najjednostavnijih fizikalnih veličina. Cjelokupna fizika, i klasična i moderna, bazirana je na principu relativnosti:

(I) Zakoni fizike ne zavise od izbora inercijalnog referentnog sustava!

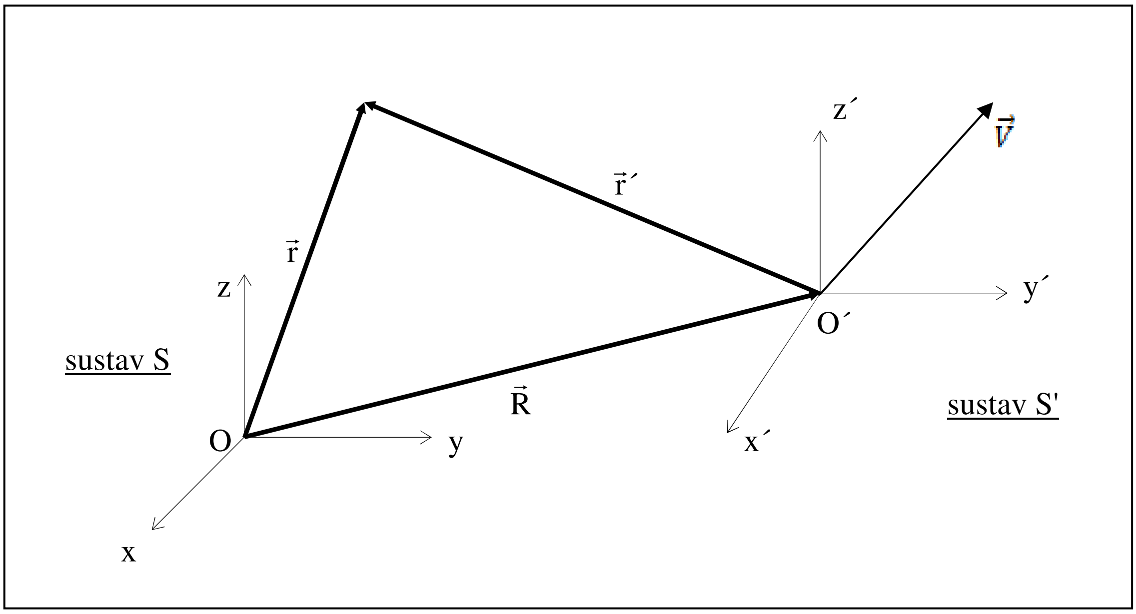
Inercijalni referentni sustavi su oni u kojima važi prvi Newtonov zakon. Takvi sustavi se jedan u odnosu na drugi gibaju konstantnom brzinom bez akceleracije. Svatko ko je u avionu koji leti brzinom od 900 kmh^{-1} popio kavu ili pisao po papiru ili na kompjuteru, provjerio je važenje principa relativnosti − zakoni fizike su isti u sustavu vezanom za zemlju i u sustavu koji se giba nekom konstantnom brzinom, makar ona bila i 250 ms^{-1}. Npr. kava se na isti način ulijeva u šalicu. Ovaj jednostavni eksperiment još pokazuje da pricip relativnosti važi samo za inercijalne sustave − posljedice bilo kakve turbulencije (akceleracije) su očigledne.

Referentni sustavi su nužni u fizici zbog relativnosti gibanja − čestica se giba u odnosu na "nešto" − to jest u odnosu na neki referentni sustav. Gornji iskaz: "avion leti konstantnom brzinom 900 kmh^{-1}..." ima smisla samo zato što mi znamo da je to brzina aviona mjerena u odnosu na Zemlju. Pri prelasku iz jednog u drugi inercijalni referentni sustav vrijednosti nekih fizikalnih veličina se mjenjaju, a nekih drugih ostaju iste. Fizikalne veličine čija vrijednost je ista u svim inercijalnim referentnim sustavima (IRS) nazivamo invarijantnim − za njih je svejedno u odnosu na koji IRS ih mjerimo.

1.1 GALILEJEVE TRANSFORMACIJE

Transformacije koordinata i vremena kojima se prelazi iz jednog u drugi IRS u Newtonovoj mehanici nazivaju se Galilejeve transformacije. Zamislimo da imamo dva IRS-a. Jedan uvjetno mirni S, čije su prostorno-vremenske koordinate $(\vec{r}, t) = (x,y,z,t)$ i drugi S´ s paralelnim osima, u kojemu su odgovarajuće koordinate $(\vec{r}\,', t') = (x',y',z',t')$.

Neka se sustav S´ giba brzinom $\vec{V} = \overrightarrow{\text{const.}}$ u odnosu na S kao na Slici 1.



Slika 1.

Ishodišta sustava S´ u S određuje radijus vektor $\vec{R} = \vec{V}\,t + \vec{R}_0$, gdje je $\vec{R}_0$ njihova udaljenost u trenutku t = 0 . Vidi se da su transformacije iz S u S´:

$$x´ = x - V_x\,t - R_{0x}$$
$$y´ = y - V_y\,t - R_{0y}$$
$$z´ = z - V_z\,t - R_{0z}$$
$$t´ = t + t_0$$

ili u vektorskom obliku:

$$\vec{r}´ = \vec{r} - \vec{V}\,t - \vec{R}_0 \qquad t´ = t + t_0 \tag{1.1}$$

Zadnji redak u relaciji (1.1) znači da vrijeme teče istom brzinom i u S i u S´, ali im se vremenska ishodišta ne poklapaju po analogiji s prostornim ishodištima. To i jeste čest slučaj na Zemlji: vrijeme u Splitu i New Yorku se razlikuje za t_0 = 6 h. Bez gubitka općenitosti, lako je zamisliti da su napravljene vremenske ($t_0 = 0$) i prostorne translacije ($\vec{R}_0 = 0$) tako da se ishodišta oba sustava poklapaju u početnom trenutku t = t´ = 0 . Zato se Galilejeve transformacije najčešće pišu bez ovih konstanti u obliku:

$$x´ = x - V_x\,t$$
$$y´ = y - V_y\,t$$
$$z´ = z - V_z\,t$$
$$t´ = t$$

ili u vektorskom obliku:

$$\vec{r}´ = \vec{r} - \vec{V}\,t \qquad t´ = t \tag{1.2}$$

Dva IRS-a su potpuno ravnopravna, pa je iz (1.2) lako naći inverznu transformaciju iz sustava S´ u sustav S (zamijeniti "crtane" i "necrtane" koordinate te promijeniti $\vec{V}$ u $-\vec{V}$):

$$x = x´ + V_x\,t´$$
$$y = y´ + V_y\,t´$$
$$z = z´ + V_z\,t´$$
$$t = t´$$

ili u vektorskom obliku:

$$\vec{r} = \vec{r}´ + \vec{V}\,t´ \qquad t = t´ \tag{1.2´}$$

Galilejeve transformacije za bilo koje dvije točke u prostoru: $\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{V}\,t$ i $\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{V}\,t$, oduzimanjem daju:

$$\vec{r}\,'_{12} \equiv \vec{r}\,'_2 - \vec{r}\,'_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \equiv \vec{r}_{12}\ , \quad t'_{12} \equiv t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1 \equiv t_{12}\ , \tag{1.3}$$

ili u infinitezimalnom obliku:

$$d\vec{r}\,' = d\vec{r} \qquad i \qquad dt' = dt\ . \tag{1.3´}$$

Proizilazi da su udaljenost dviju točaka i duljina vremenskog intervala invarijantni pri Galilejevim transformacijama. Ovo je potpuno u skladu s našim svakodnevnim iskustvom i intuicijom u makrosvijetu – kad specificiramo dimenzije tijela i vremenskih intervala podrazumijevamo da su to jednoznačne veličine i ne moramo razmišljati gdje, kada (u kojem IRS-u) i kako su te veličine mjerene.

Za opisivanje gibanja trebaju nam još i brzina i akceleracija. Iz relacije (1.3´) slijedi $d/dt = d/dt'$, pa deriviranjem po vremenu iz (1.2) ili (1.2´) dobijamo:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}\ . \tag{1.4}$$

Kako je $\vec{V} = \overrightarrow{\text{const.}}$ za ubrzanje nalazimo

$$\vec{a}\,' = \vec{a}\ . \tag{1.5}$$

Izraz (1.4), koji slijedi iz Galilejevih transformacija, je zakon slaganja brzina u klasičnoj mehanici – brzina čestice u mirnom sustavu jednaka je zbroju brzine čestice u pokretnom sustavu i brzine samog pokretnog sustava.

Primjer 1.**Relativna brzina brodova** (slaganje brzina u klasičnoj fizici)

Radar s obale izmjeri da se dva brza motorna čamca približavaju luci brzinama $24\ \text{ms}^{-1}$ (8×10^{-8} c) i $18\ \text{ms}^{-1}$ (6×10^{-8} c) i to: a) duž istog pravca, b) duž okomitih pravaca.
Koliku brzinu bržeg čamca izmjeri kapetan sporijeg?

Brzine čamaca su zadane u IRS-u koji miruje u odnosu na obalu (zemlju), a traži se brzina prvog čamca koju izmjeri promatrač iz drugog (sporijeg) čamca.

a) Odaberimo prostorni koordinatni sustav tako da se čamci gibaju gibaju duž x-osi, pa su brzine čamaca:

IRS zemlje: $\vec{v}_1 = 24\ \text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$ i $\vec{v}_2 = -\,18\ \text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$ (čamac 1 lijevo, a čamac 2 desno od $x = 0$)

IRS čamca 2: je sustav mirovanja (mirujući IRS) promatrača iz čamca 2. U ovom sustavu brzina obale (zemlje) ≡ pokretni IRS je: $\vec{V} = 18\ \text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$, a brzina čamca 1 u odnosu na pokretni sustav obale (zemlje) je: $\vec{v}\,'_1 = 24\ \text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$. Prema (1.4) je onda:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}\,'_1 + \vec{V} = 42\ \text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$$ – čamci se približavaju brzinom od $42\ \text{ms}^{-1}$.

b) Sada su brzine čamaca:

IRS zemlje: $\vec{v}_1 = 24\,\mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$ i $\vec{v}_2 = -\,18\,\mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}$

IRS čamca 2: brzina pokretnog sustava je sad $\vec{V} = 18\ \mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}$, brzina prvog čamca u odnosu na pokretni sustav je opet $\vec{v}'_1 = 24\ \mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$. Brzina čamca 1 u odnosu na čamac 2 je:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{V} = 24\,\mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}} + 18\,\mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}\ .$$

Čamci se približavaju brzinom: $v_1 = \sqrt{\left(24\mathrm{ms}^{-1}\right)^2 + \left(18\mathrm{ms}^{-1}\right)^2} = 30\ \mathrm{ms}^{-1} = 10^{-7}\ c$, koja s x-osi tvori kut $\theta = \mathrm{arctg}\dfrac{v_{1_y}}{v_{1_x}} = \mathrm{arctg}\dfrac{3}{4} = 36{,}87^0 \approx 37^0$.

Napomenimo da je brzina svjetlosti u vakuumu c = 299792458 ms^{-1}, vrlo približno $c = 3 \times 10^8$ ms^{-1}, a navodimo je samo da se vidi kako su sve brzine u ovom primjeru vrlo male u odnosu na c.

Precizno govoreći, sustav referencije vezan za točku na površini Zemlje (obalu), naravno, nije inercijalni. Takav sustav ima akceleraciju uslijed Zemljine vrtnje oko vlastite osi, te oko Sunca, oko centra naše galaksije, ... No, zbog sporosti vrtnje, efekti neinercijalnosti se u prvoj aproksimaciji mogu zanemariti.

Uz pretpostavku da je masa čestice invarijantna pri Galilejevim transformacijama

$$m' = m\ , \tag{1.6}$$

relacije (1.3) do (1.6) osiguravaju invarijantnost klasične fizike u odnosu na Galilejeve transformacije!

Ako promatramo sustav čestica, lako se uvjeriti da svaki član u drugom Newtonovom zakonu za i-tu česticu izoliranog sustava čestica:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}(\vec{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_{ij})\ , \tag{1.7}$$

ostaje nepromijenjen pri promjeni IRS-a, jer se $\vec{r}_{ij}$ transformira kao $\vec{r}_{12}$, a iz (1.4) relativna brzina čestica je $\dot{\vec{r}}'_{ij} \equiv \vec{v}'_{ij} = \vec{v}'_i - \vec{v}'_j = (\vec{v}_i - \vec{V}) - (\vec{v}_j - \vec{V}) = \vec{v}_i - \vec{v}_j = \vec{v}_{ij} \equiv \dot{\vec{r}}_{ij}$.

Zaključujemo: ako u II Newtonovom zakonu za jednu česticu $\vec{F} = \dfrac{d}{dt}(m\vec{v})$ Galilejevim transformacijama pređemo u sustav S´ nalazimo:

$$\vec{F} = \vec{F}',\quad t = t',\quad m = m',\quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V},\quad \vec{a}' = \vec{a}\ !$$

Općenito u fizici ovo nije točno. Prijelaz iz jednog u drugi IRS je složeniji i gornje relacije su samo aproksimativno točne tako da vrijedi:

$$\vec{F} \neq \vec{F}',\quad t \neq t',\quad \vec{v} \neq \vec{v}' + \vec{V},\quad \vec{a}' \neq \vec{a}\ !$$

1.2 KLASIČNA ELEKTRODINAMIKA

Situacija je bitno drukčija u klasičnoj elektrodinamici. Osnovne jednadžbe elektrodinamike u vakuumu su Maxwellove jednadžbe:

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \qquad \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{1.8}$$

U području prostora gdje nema izvora, $\rho = \vec{j} = 0$, uzimanjem rotora od $\nabla\times\vec{E}$ i $\nabla\times\vec{B}$ lako se pokaže da elektromagnetska polja zadovoljavaju homogene valne jednadžbe

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{pmatrix}=0\,, \tag{1.9}$$

čija su rješenja transverzalni elektromagnetski valovi koji se kroz vakuum šire brzinom svjetlosti c određenom sa:

$$c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\,, \qquad c = 299792458\ \mathrm{ms}^{-1}. \tag{1.10}$$

Pojava brzine svjetlosti u jednadžbama elektrodinamike odmah ukazuje na probleme s Galilejevim transformacijama. Prema (1.4) pri prelasku u drugi IRS brzina se mijenja u $c = c'+V$, što je fizikalno veliki problem zbog veze (1.10) brzine svjetlosti s električnom permitivnošću, ε_0, i magnetskom permeabilnosti, μ_0, vakuuma. *Ne mijenjaju se valjda osnovne elektromagnetske svojstva praznog prostora pri prelasku iz jednog IRS-a u drugi!*

Valna jednadžba (1.9), pa onda ni elektrodinamika, nije invarijantna pri Galilejevim transformacijama (jednadžbe elektrodinamike nisu iste u svim IRS-ima vezanim Galilejevim transformacijama). Preciznije, ako pretpostavimo da u nekom IRS-u važi valna jednadžba:

$$\left(\nabla'^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\Psi(r',t')=0 \tag{1.11}$$

i želimo preći u drugi IRS koristeći (1.2) lako dobijamo $\nabla_{\vec{r}'}=\nabla_{\vec{r}}$; $\partial/\partial t' = \partial/\partial t$ te:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\Psi(\vec{r}',t')=\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}',t')=\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}-\vec{V}t,t)=\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)-\left(\vec{V}\cdot\nabla_{\vec{r}-\vec{V}t}\right)\Psi(\vec{r},t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\vec{V}\cdot\nabla\right)\Psi(\vec{r},t)$$

i konačno:

$$\left\{\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\frac{1}{c^2}\left[\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)-2\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\right\}\Psi(\vec{r},t)=0\,. \tag{1.12}$$

Gornja jednadžba nije valna jednadžba i ne postoji transformacija valne funkcije Ψ koja bi (1.12) pretvorila u (1.11).

Situacija je slična i kod mehaničkih valova, npr. zvučnih valova. No, kod mehaničkih valova uvijek postoji preferirani IRS (sustav mirovanja sredstva kroz koji se prostire mehanički val) u kome važi valna jednadžba (1.11), dok je u svim drugim IRS-ima jednadžba gibanja valova kompliciranija uslijed gibanja sredstva.

Ali, u jednadžbi (1.9) nema nikakvog sredstva – to je valna jednadžba elektromagnetskih valova u vakuumu.

Znanstvenici su razmatrali nekoliko logičkih mogućnosti razrješenja ovog problema:

1. Maxwellove jednadžbe su pogrešne - ispravna teorija elektrodinamike je invarijantna pri Galilejevim transformacijama.
2. Galilejev princip relativnosti je ispravan, ali u elektromagnetizmu postoji preferirani IRS ≡ eter, pa je gibanje svjetlosti kroz eter analogno gibanju mehaničkog vala kroz neko sredstvo.
3. Postoji novi princip relativnosti koji važi i za mehaniku i za elektromagnetizam koji nije zasnovan na Galilejevim transformacijama - ova mogućnost zahtijeva **promjene osnovnih zakona mehanike!**

Većina fizičara vjerovala je u ispravnost druge, mali broj u prvu, ali je Einstein riješio problem razmatrajući treću mogućnost.

Njegova primarna motivacija je čvrsta uvjerenost da *osnovni zakoni fizike moraju biti univerzalni!*

To znači da nikako ne može mehanika biti invarijantna pri Galilejevim, a elektodinamika pri nekim drugim transformacijama.

Razmotrimo Einsteinovo rješenje ovog problema.

2. POSTULATI SPECIJALNE TEORIJE RELATIVNOSTI

Einsteinova specijalna teorija relativnosti utemeljena je na dva jednostavna aksioma:

(I) Zakoni fizike ne zavise od izbora inercijalnog referentnog sustava!

(II) U bilo kojem inercijalnom referentnom sustavu brzina svjetlosti u vakuumu je c!

Prvi aksiom je princip relativnosti koji važi u fizici bar od Galilea koji ga je eksplicitno formulirao 1638.

Drugi aksiom je bitna novina u fizici jer zahtijeva kompletnu reviziju našeg poimanja prostora i vremena!

Za ilustraciju dovoljno je navesti samo nekoliko primjera fenomena koji su izravne posljedice drugog aksioma:

- postoji maksimalna brzina u svemiru c !
- postoji svojstveno vrijeme svake čestice koje nije nužno identično svojstvenom vremenu drugih čestica ili promatrača!
- brzina svjetlosti (elektromagnetskih valova) ne ovisi o brzini izvora!
- ekvivalentnost mase i energije!

1905. bilo je vrlo malo eksperimentalnih potvrda drugog aksioma, što je dosta dugo otežavalo prihvaćanje STR. No, s razvojem nuklearne i specijalno fizike elementarnih čestica (High Energy Physics), postulati i konsekvence STR dobili su eksperimentalnu potvrdu nebrojeno mnogo puta. Može se reći, kao što krajem XIX stoljeća nijedan fizičar nije želio razmatrati teorije koje narušavaju osnovne postavke klasične mehanike, u zadnjih pola stoljeća gotovo da i nema fizičara koji ozbiljno razmatraju teorije koje narušavaju STR (teorije i modele koji nisu Lorentz invarijantni, kako se to tehnički kaže). Danas se zahtijeva da svi fizikalni zakoni budu u skladu s aksiomima STR.

2.1 LORENTZOVE TRANSFORMACIJE

Prvi zahtjev je očigledno zamjena za transformacije (1.2) - traže se nove transformacije prelaska iz jednog u drugi IRS. Već su bile poznate transformacije koje ostavljaju invarijantnim Maxwellove jednadžbe (Lorentzove transformacije), pa je čak i jedna posljedica prostornog dijela tih transformacija bila poznata (tzv. FitzGerald-Lorentzova kontrakcija) − no, interpretacija tih matematičkih izraza bila je ili ograničena samo na elektrodinamiku ili samo na gibanje u IRS etera, a niko nije razumio značenje vremenskog dijela Lorentzovih transformacija.

Einstein je odredio Lorentzove transformacije direktno i samo iz postulata (I) i (II), te što je i najvažnije, uzdigao ih na nivo *temeljnih transformacija kojima se prelazi iz jednog u drugi IRS*. To ustvari znači zahtjev:

Svi fizikalni zakoni moraju biti invarijantni u odnosu na Lorentzove transformacije!

Slijedeći Einsteina pogledajmo kako se izvode Lorentzove transformacije.

Zamislimo dva IRS-a s paralelnim osima S i S´ čija se ishodišta poklapaju za $t = t' = 0$. Jednostavnosti radi, a bez gubitka općenitosti, pretpostavimo da se sustav S´ giba duž pozitivne x-osi konstantnom brzinom V u odnosu na S. Neka je u ishodištu sustava S mirni izvor svjetlosti (u odnosu na sustav S´ izvor se giba brzinom $-V$ duž x´- osi) koji se uključi u trenutku $t = t' = 0$.

Aksiomi (I) i (II) zahtijevaju da promatrači u oba sustava vide sferni val koji se iz ishodišta njihovih IRS-a širi brzinom c, tako da su jednadžbe valnih fronti:

$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \qquad \text{u S} \tag{2.1}$$

$$c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0 \qquad \text{u S}' \tag{2.1´}$$

Lako je vidjeti da transformacije: $x' = x - Vt$; $y' = y$; $z = z'$; $t' = t$; ne zadovoljavaju gornje relacije.

Ako su prostor i vrijeme homogeni i izotropni, što postulat (I) pretpostavlja (inače ne bi svi IRS-i bili ekvivalentni), veza koordinata S i S´ mora biti linearna. Jedino linearne transformacije osiguravaju obostrano jednoznačnu vezu ekvivalentnih sustava S i S´. Npr. $x' \rightarrow x^2$ nije moguće zbog nejednoznačnosti inverzne transformacije: $x \rightarrow +\sqrt{x'}$ i $x \rightarrow -\sqrt{x'}$. Kako (2.1) i (2.1´) zahtijevaju da se sfera radijusa ct (za svako t) s centrom u O iz S uvijek preslikava u sferu radijusa ct´ s centrom u O´ u S´ i obrnuto, kvadratne forme iz gornjh jednadžbi moraju uvijek biti proporcionalne (čak i kad nisu jednake nuli!), tj. važi:

$$c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \lambda^2(V)\,[c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] \tag{2.2}$$

gdje $\lambda(V)$ označava moguću promjenu skale između dva sustava.

Najopćenitije linearne transformacije koordinata S i S´ su onda:

$$x' = \lambda(a_1x + a_2t) \qquad y' = \lambda y \qquad z' = \lambda z \qquad t' = \lambda(b_1t + b_2x)\,, \tag{2.3}$$

jer je brzina V duž x-osi. Želimo da se gornje transformacije svode na (1.2) u limesu $c \rightarrow \infty$, tj. kad $V/c \rightarrow 0$, što znači da koeficijenti u (2.3) moraju zadovoljavati početne uvjete:

$$\lambda(V) \rightarrow 1 \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{kad} \quad V \rightarrow 0\,. \tag{2.4}$$

Pokažimo prvo da je $\lambda(V) = 1$. Zaista, ako zamislimo treći IRS, S´´, koji se giba brzinom $-V$ u odnosu na S´ (pa je prema tome identičan sa S), mora važiti: $\lambda(V)\,\lambda(-V) = 1$, a kako u izotropnom prostoru mora biti $\lambda(-V) = \lambda(V)$, dobijamo $\lambda^2(V) = 1$, tj. $\lambda(V) = \pm 1$, pa, zbog početnog uvjeta (2.4), mora biti: $\lambda(V) = 1$.

Kako se u S ishodište O´ sustava S´ giba brzinom V duž x-osi važi: $x = Vt$, pa iz (2.3) slijedi: $0 \equiv a_1Vt + a_2t$, što daje: $a_2 = -a_1V$, te: $x' = a_1(x - Vt)$. Uvrštavanjem u (2.2) dobijamo:

$$c^2(b_1t + b_2x)^2 - [\,a_1^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2\,] = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\,,$$

što mora važiti za svako x i t . Izjednačavanjem koeficijenata imamo:

$$\begin{aligned} a_1^{\;2} - c^2 b_2^{\;2} &= 1 \\ a_1^{\;2} V + c^2 b_1 b_2 &= 0 \quad , \\ a_1^{\;2} V^2 - c^2 b_1^{\;2} &= -c^2 \end{aligned}$$

te izražavajući konstante b_1 i b_2 pomoću a_1 dobijamo: $a_1 = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$.

Zbog početnih uvjeta (2.4) je onda: $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = b_1$ i $b_2 = -\dfrac{V}{c^2} a_1 = -\dfrac{V}{c^2} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$.

Tako konačno dobijamo **Lorentzove transformacije** iz S u S ´:

$$x' = \gamma(x - Vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma(t - \frac{V}{c^2} x) \ . \tag{2.5}$$

gdje je: $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} \geq 1$ i $\vec{\beta} \equiv \dfrac{\vec{V}}{c}$ tj. $\beta \equiv \left|\vec{\beta}\right| \equiv \dfrac{\left|\vec{V}\right|}{c} < 1$.

Vidi se da Lorentzove transformacije kojima se u STR prelazi iz jednog IRS-a u drugi koji se giba brzinom *V* duž x-osi:

- ne mjenjaju koordinate okomite na pravac brzine (transverzalne koordinate),
- povezuju vrijeme i koordinate paralelne brzini, !
- u limesu $c \to \infty$, tj. kad $\beta \equiv V/c \to 0$ ili $\gamma \to 1$ prelaze u Galilejeve transformacije,
- uvjet realnosti zahtijeva $V < c$. !

Pri Lorentzovim transformacijama (2.5) vrijeme ne ostaje invarijantno! Ovo je osnovna razlika između Lorentzovih i Galilejevih transformacija (dokida se apsolutni karakter vremena klasične fizike).

Svaki promatrač (svaki IRS) ima svoje vrijeme i svoje tri prostorne koordinate, ali vrijeme i prostorne koordinate bilo kojeg drugog promatrača (u drugom IRS-u) su linearna kombinacija vremena i prostornih koordinata prvog.

Jasno je da Lorentzove transformacije na određeni način umanjuju razliku između prostornih i vremenskih koordinata. To je još očiglednije ako uvedemo novu, takozvanu relativističku notaciju, primjereniju prostor-vremenu u STR.

2.2 ČETVORO VEKTORI

Međudjelovanje čestica (sile) u "mikrosvijetu" na nivou elementarnih čestica, koje su najmanji djelići materije, opisuje se emisijom ili absorpcijom drugih elementarnih čestica.

Najjednostavniji fizikalni proces je kad jedna elementarna čestica emitira ili absorbira drugu elementarnu česticu. Takav proces se dešava u jednom trenutku vremena u jednoj točci prostora, tj. u jednoj točci u 4-dimenzionalnom prostor-vremenu.

Točka u prostor-vremenu naziva se događaj (engleski event). Koordinate događaja određene su **kovarijantnim četvoro-vektorom $\mathbf{x_\mu}$** događaja (analogon radijus vektora točke u 3-dimenzionalnom prostoru) u prostor-vremenu (prostoru Minkowskog) koji je po definiciji:

$$x_\mu \equiv (x_0,x_1,x_2,x_3) \equiv (ct,x,y,z) \equiv (ct\,,\vec{r}\,) \equiv (x_0\,,\vec{x}\,)$$

Za razliku od nerelativističke ($\vec{r}$, t), relativistička notacija (x_0 , $\vec{x}$) = ($x_0 \equiv$ ct , $\vec{x} \equiv \vec{r}$) ističe ravnopravnosti komponenti 4-vektora jer eliminira sveprisutne faktore c između vremenskih i prostornih komponenti. U pravilu grčki indeksi poprimaju vrijednosti μ = 0,1,2,3 dok latinski indeksi i = 1,2,3 poprimaju samo vrijednosti prostornih komponenti.

Tenzori u 4-dimenzionalnom prostoru Minkowskog mogu imati kovarijantne (donje) i/ili kontravarijantne (gornje) indekse. Za svaki kovarijantni 4-vektor x_μ postoji odgovarajući kontravarijantni tenzor prvog reda – **kontravarijantni četvoro-vektor $\mathbf{x^\mu}$**, koji je po definiciji:

$$x^\mu \equiv (x^0,x^1,x^2,x^3) = (x^0,-\vec{x}\,) = (ct\,,-\vec{x}\,)\ .$$

Spuštanje i podizanje indeksa vrši se množenjem s metričkim tenzorom $g_{\mu\nu}$ prostora Minkowskog – to je simetrični tenzor 2-og reda s matričnom reprezentacijom:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ \text{čiji je inverzni tenzor:}\ \ g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad (2.6)$$

tako da je: $g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu$, gdje je Kroneckerov δ-simbol $\delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1, & za\ \ \mu = \nu \\ 0, & za\ \ \mu \neq \nu \end{cases}$. Na primjer: $x^\mu = g^{\mu\rho}x_\rho$ ili $x_\mu = g_{\mu\rho}x^\rho$ ili $x^\mu x_\mu = g^{\mu\nu}x_\mu x_\nu = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$.

Uvijek se podrazumijeva sumacija po dva puta ponovljenom indeksu – jednom kovarijantnom i jednom kontravarijantnom, npr. $x_\mu x^\mu = x^\mu x_\mu \equiv x_0x^0 - \vec{x}\cdot\vec{x} \equiv (ct)^2 - \vec{x}^{\,2}$.

Tenzor $g_{\mu\nu}$ nazivamo metrički tenzor jer je kvadrat udaljenosti dvije bliske točke u prostoru Minkowskog određen sa: $ds^2 = g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dx_\mu\, dx^\mu$.

Kvadrat udaljenosti dva događaja 1 i 2 u prostor-vremenu može biti bilo koji realni broj

$$s_{12}{}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - \left|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\right|^2 \lesseqgtr 0.$$

Za dva događaje kaže se da su:

vremenski razdvojeni ako je $s_{12}^2 > 0$,

prostorno razdvojeni ako je $s_{12}^2 < 0$, i

svjetlosno razdvojeni ako je $s_{12}^2 = 0$.

Samo vremenski razdvojeni događaji za koje je $s_{12}^2 > 0$ mogu biti kauzalno povezani interakcijama čija je brzina manja od brzine svjetlosti, a svjetlosno razdvojene događaje za koje je $s_{12}^2 = 0$ može kauzalno povezati samo interakcija brzine c!

Opći kovarijantni 4-vektor definira se kao objekt koji se pri Lorentz transformacijama ponaša kao x_μ . Za bilo koji kovarijantni 4-vektor $a_\mu = (a_0\ ,\vec{a})$, postoji odgovarajući kontravarijantni 4-vektor: $g^{\mu\nu}a_\nu = a^\mu = (\,a^0\,, -\vec{a}\,) = (\,a_0\,, -\vec{a}\,)$.

Skalarni produkt bilo koja dva četvoro-vektora a_μ i b_μ po definici je:

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu}\, a^\mu b^\nu = g^{\mu\nu}\, a_\mu b_\nu = b \cdot a\,,$$

ili u matričnoj notaciji $a \cdot b = a^T g\, b$, gdje su 4-vektori a_μ i b_μ 4×1 matrice.

Neka su koordinate mirnog inercijalnog referentnog sustava S označene sa x_μ . Koordinate sustava S´ s paralelnim osima koji se giba konstantnom brzinom *V* duž pozitivne x-osi označimo sa x'_μ . Lorentzova transformacija kojom se iz S prelazi u S´, ako su se ishodišta dva sustava poklapala za $t = t' = 0$, prema (2.5) je:

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1) \qquad x'_1 = \gamma(x_1 - \beta x_0) \qquad x'_2 = x_2 \qquad x'_3 = x_3\,. \tag{2.7}$$

Rješavanjem po x_μ dobijamo inverznu transformaciju iz sustava S´ u sustav S:

$$x_0 = \gamma(x'_0 + \beta x'_1) \qquad x_1 = \gamma(x'_1 + \beta x'_0) \qquad x_2 = x'_2 \qquad x_3 = x'_3\,. \tag{2.7´}$$

Iz (2.7) i (2.7´) lako je vidjeti da se inverzna Lorentz transformacija jednostavno dobija zamjenama: $x'_\mu \leftrightarrow x_\mu$ i $\beta \rightarrow -\beta$.

Ako napišemo kovarijantne 4-vektore x'_μ i x_μ kao vektore stupce (tj. 4x1 matrice) za koje važi:

$$x'_\mu = a_\mu{}^\nu x_\nu \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\, x_\nu\,,$$

ili u matričnoj notaciji: $x' = Ax$, lako je naći matričnu reprezentaciju Lorentzove transformacije duž x_1-osi brzinom *V* :

$$A(\beta) = \left[a_\mu{}^\nu\right] = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Iz $x_\mu = (a^{-1})_\mu{}^\nu x'_\nu$ i (2.8) lako se uvjeriti da je inverzna transformacija:

$$A^{-1}(\beta) = A(-\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

te važi: $(A^{-1})\,A = A\,(A^{-1}) = \Im$, gdje je $\Im$ jedinična matrica $\Im = [\delta_\mu{}^\nu]$.

Relativistički efekti utječu na vrijeme i koordinate paralelne relativnoj brzini dva sustava, dok koordinate u okomitim pravcima ostaju nepromjenjene.

Pogledajmo opće Lorentzove transformacije u vektorskoj notaciji. Ako sustavi S i S´ imaju paralelne osi, a ishodišta im se poklapaju za $t = t' = 0$, pri čemu se S´ giba brzinom $\vec{V}$ u proizvoljnom pravcu u odnosu na S, tada opće Lorentzove transformacije brzinom $\vec{V}$ imaju oblik:

Opće Lorentzove transformacije

$$\begin{aligned} x_0 &= \gamma\,(x'_0 + \beta\, x'_{\|}) & \qquad x'_0 &= \gamma\,(x_0 - \beta\, x_{\|}) \\ \vec{x} &= \gamma\,(\vec{x}'_{\|} + \vec{\beta}\, x'_0) + \vec{x}'_{\perp} & \qquad \vec{x}' &= \gamma\,(\vec{x}_{\|} - \vec{\beta}\, x_0) + \vec{x}_{\perp} \end{aligned} \tag{2.10}$$

ili za proizvoljni kovarijantni 4-vektor $a_\mu = (a_0, \vec{a})$:

Opće Lorentzove transformacije

$$\begin{aligned} a_0 &= \gamma\,(a'_0 + \vec{\beta}\cdot\vec{a}') & \qquad a'_0 &= \gamma\,(a_0 - \vec{\beta}\cdot\vec{a}) \\ \vec{a} &= \vec{a}' + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{a}')\vec{\beta} + \gamma\vec{\beta}\,a'_0 & \qquad \vec{a}' &= \vec{a} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{a})\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}\,a_0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

gdje su $\vec{x}_{\|}$ i $\vec{x}_{\perp}$ komponente vektora $\vec{x}$ paralelne i okomite na pravac vektora $\vec{V}$, tj:

$$\vec{x}_{\|} = \frac{1}{V^2}(\vec{x}\cdot\vec{V})\vec{V} = \frac{1}{\beta^2}(\vec{x}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}\ ; \qquad \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\|} \tag{2.12}$$

i $\vec{\beta} = \dfrac{\vec{V}}{c}$.

Neka veličina je invarijantna ako ne zavisi od izbora inercijalnog referentnog sustava. Na primjer udaljenost dviju točaka u prostoru $|\vec{r}_{12}|$ ili duljina vremenskog intervala t_{12} pri Galilejevim transformacijama kao u (1.3).

Lako je pokazati koristeći relacije (2.10) ili (2.11), da kvadrat 4-vektora ostaje invarijantan pri općim Lorentzovim transformacijama, tj. da za bilo koji 4-vektor važi:

$$x'_\mu x'^\mu = c^2 t'^2 - \vec{x}'^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2 = x_\mu x^\mu .$$

Općenito vrijedi: **skalarni produkt bilo koja dva 4-vektora invarijantan je pri Lorentzovim transformacijama (ima istu vrijednost u bilo kojem IRS-u)** ili skraćeno: **skalarni produkt bilo koja dva 4-vektora je Lorentz invarijantan!**

$$a_\rho b^\rho = a'_\rho b'^\rho . \tag{2.13}$$

Može se pokazati da Lorentzove transformacije čine grupu najopćenitijih linearnih transformacija u prostor-vremenu koje ostavljaju invarijantnim skalarni produkt (2.13). Štoviše, Lorentzove transformacije mogu se eksplicitno odrediti samo iz tog zahtjeva. Znači ako je $x' = Ax$, tada mora biti:

$$x' \cdot x' = (Ax)^T g\,(Ax) = x\,(A^T g A)\,x = x^T g\, x = x \cdot x , \quad \text{za } \forall x ,$$

pa važi:

$$A^T g A = g . \tag{2.14}$$

Kako je $\det g = -1 \neq 0$, iz (2.14) slijedi: $\det A^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det A = \pm 1$. Lako je provjeriti da (2.8) i (2.9) zadovoljavaju uvjet $\det A = +1$ i pretstavljaju tzv. prave (proper) Lorentzove transformacije, za razliku od nepravih koje imaju $\det A = -1$, što znači da uključuju inverziju.

Opće Lorentzove transformacije čine grupu koja se naziva Lorentzova grupa.

Za nas je dovoljno znati da se bilo koja Lorentzova transformacija sastoji od "čiste" Lorentzove transformacije (pure = proper orthochronous) plus prostorne rotacije i možda inverzije (prostorne i/ili vremenske). Realna matrica A koja reprezentira opću Lorentzovu transformaciju ima $4^2 = 16$ elemenata. Jednadžba (2.14) daje 10 uvjeta među njima jer je metrički tenzor $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ simetričan. Znači, bilo koja Lorentzova transformacija jednoznačno je određena sa 6 linearno nezavisnih parametara – vektorom $\vec{V}$ relativne brzine dva IRS-a i tri parametra koji određuju prostornu rotaciju, npr. tri Eulerova kuta.

Primjer 2. **Produkt dvije Lorentzove transformacije duž x-osi**

Zamislimo da se sustav S´ giba brzinom V_1 u odnosu na mirujući sustav S duž x_1-osi, a da se sustav S´´ giba brzinom V_2 duž x'_1-osi u odnosu na sustav S´. Neka su osi sva tri IRS-a paralelne i neka se sva tri ishodišta poklapaju za $t = t' = t'' = 0$. Znači imamo dvije sukcesivne Lorentzove transformacije: S → brzinom V_1 duž $x_1 \equiv$ S´ → V_2 brzinom duž $x'_1 \equiv$ S´´.

Pokažimo grupoidnost, tj. pokažimo da je produkt dvije sukcesivne Lorentzove transformacije određene parametrima $\gamma(\beta_1)$ i $\gamma(\beta_2)$ jednak nekoj trećoj Lorentzovoj transformaciji: S → γ_{12} duž $x_1 \equiv$ S´´ određenoj parametrom γ_{12} .

Iz (2.7) je (nećemo pisati transformacije za transverzalne koordinate x_2 i x_3 koje ostaju nepromjenjene):

$$x'_0 = \gamma_1(x_0 - \beta_1 x_1) \,;\; x'_1 = \gamma_1(x_1 - \beta_1 x_0) \quad \text{i analogno} \quad x''_0 = \gamma_2(x'_0 - \beta_2 x'_1) \,;\; x''_1 = \gamma_2(x'_1 - \beta_2 x'_0) ,$$

što daje: $x''_0 = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2)\left(x_0 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{1+\beta_1\beta_2} x_1 \right)$; $x''_1 = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \left(x_1 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{1+\beta_1\beta_2} x_0 \right)$.

Kako je:

$$\gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) = \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}} = \left[\frac{(1+\beta_1\beta_2)^2}{1-\beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{(1+\beta_1\beta_2)^2}{1-\beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2 - 2\beta_1\beta_2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(1+\beta_1\beta_2)^2}{(1+\beta_1\beta_2)^2 - (\beta_1+\beta_2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[1 - \left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \equiv$$

$$\equiv \gamma(\beta_{1\bullet 2}) \equiv \gamma_{12} ,$$

kao i u (2.7) imamo:

$$x''_0 = \gamma_{12} (x'_0 - \beta_{1\bullet 2} x'_1) \; ; \quad x''_1 = \gamma_{12} (x'_1 - \beta_{1\bullet 2} x'_0)$$

uz:
$$\beta_{1\bullet 2} \equiv \frac{\beta_1 + \beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \; . \tag{2.15}$$

Produkt dva sukcesivne Lorentzove transformacije duž x_1-osi, prve određene s $\gamma(\beta_1)$ i druge određene s $\gamma(\beta_2)$, je također Lorentzova transformacija duž x_1-osi određena s

$$\gamma_{12} \equiv \gamma(\beta_{1\bullet 2}) = \left[1 - \left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} , \quad \text{gdje je} \quad \beta_{1\bullet 2} \equiv \frac{\beta_1 + \beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \; ! \tag{2.16}$$

Formula za $\beta_{1\bullet 2}$ pokazuje da za slaganje paralelnih brzina umjesto (1.4) važi:

$$V_{1\bullet 2} = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}} \; . \tag{2.17}$$

Opći zakon slaganje brzina u STR razmatrat će se kasnije.

Nije teško pokazati i asocijativnost Lorentzovih transformacija duž x-osi. Formula (2.7´) je inverzna transformacija, a jedinični elemenat je identična transformacija određena parametrom $\gamma(0) = 1$. Time bi zaista pokazali da "čiste" Lorentzove transformacije duž jedne koordinatne osi čine grupu koja je podgrupa Lorentzove grupe.

Napomenimo, da iako Lorentzove transformacije duž jedne osi međusobno komutiraju, što se lako vidi iz (2.17), dvije opće Lorentzove transformacije ne komutiraju − Lorentzova grupa nije Abelova.

Za razumijevanje relativističkih efekata Lorentzovih transformacija dovoljno je onda razmatrati samo "čiste" Lorentzove transformacije koje možemo uvijek rotacijom prostornih osi odabrati da budu duž x-osi.

Razmotrimo sada osnovne posljedice Lorentzovih transformacija.

Pri Lorentzovim transformacijama ni duljina (udaljenost dviju točaka u prostoru), ni vremenski interval (udaljenost dva trenutka u vremenu) nisu invarijantni - mijenjaju se pri prelazu iz jednog u drugi inercijalni sustav referencije!

Kako je prema (2.13) skalarni produkt dva 4-vektora Lorentz invarijantan, samo kvadrat udaljenosti dva događaja, tj. pseudo-euklidski kvadrat udaljenosti dvije točke u prostor-vremenu ostaje invarijantan pri Lorentzovim transformacijama:

$$(x_2 - x_1)_\mu = \big(c(t_2 - t_1), (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\big) = (c\, t_{12}, \vec{x}_{12}) \quad \Rightarrow$$

$$s'^{\,2}_{12} = (x'_2 - x'_1)_\mu (x'_2 - x'_1)^\mu = c^2 t'^{\,2}_{12} - \vec{x}'^{\,2}_{12} = c^2 t_{12}^2 - \vec{x}_{12}^2 = (x_2 - x_1)_\mu (x_2 - x_1)^\mu = s_{12}^2$$

– Lorentz invarijantno!

Neinvarijantnost duljine naziva se kontrakcija duljine, a neinvarijantnost vremenskih intervala naziva se dilatacija vremena.

2.3 KONTRAKCIJA DULJINE

Neka promatrač u sustavu S´ fiksira na svoju x´-os kruti štap duljine: $L_0 = x'_2 - x'_1$. L_0 se naziva svojstvena ili vlastita (proper) duljina – to je duljina objekta u sustavu u kome on miruje.

Koliku duljinu bi izmjerio promatrač u sustavu S za koga se štap giba brzinom *V* duž x-osi?

U sustavu S duljina štapa je razlika koordinata krajeva štapa $L = x_2 - x_1$ u istom trenutku vremena $t = t_1 = t_2$. Prema (2.7) je: $x'_{1,2} = \gamma\,(x_{1,2} - V t)$, pa promatrač u sustavu S mjeri kontrahiranu duljinu:

$$L = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}\, L_0 = \frac{L_0}{\gamma} < L_0\,. \tag{2.18}$$

Jasno ja da Lorentzova kontrakcija ne zavisi od predznaka brzine, pa i kad bi štap mirovao u S promatrač iz S´ bi izmjerio $L = L_0 / \gamma < L_0$.

Lako je iz (2.7) i (2.7´) vidjeti da u pravcima okomitim na pravac gibanja nema kontrakcije duljine. To znači da se pri općoj Lorentzovoj transformaciji brzinom $\vec{V}$, duljina $\vec{L}^0$ (svojstvena duljina) transformira po pravilu:

$$\vec{L} = \frac{1}{\gamma}\, \vec{L}^0_{\parallel} + \vec{L}^0_{\perp}\,. \tag{2.19}$$

Ako je element površine paralelograma u njegovu sustavu mirovanja $d\vec{A}^0 = d\vec{L}_1^{\,0} \times d\vec{L}_2^{\,0}$, tada je zbog (2.19) u sustavu u kojem se paralelogram giba brzinom $\vec{V}$:

$$d\vec{A} = d\vec{L}_1 \times d\vec{L}_2 = d\vec{A}^0{}_{\parallel} + \frac{1}{\gamma} d\vec{A}^0{}_{\perp} \ , \qquad (2.20)$$

jer je vektor elementa površine okomit na površinu.

Prilikom prijelaza iz jednog IRS u drugi dimenzija paralelna brzini je kontrahirana, dok druge dvije okomite dimenzije ostaju nepromjenjene. To znači da je za elemenat volumena $dV \equiv d^3r$ koji se giba brzinom $\vec{V}$:

$$dV = \frac{1}{\gamma} dV_0 \ , \qquad (2.21)$$

gdje je dV_0 svojstveni element volumena. Posljedica je da se koncentracija čestica $K = \dfrac{dn}{dV}$ pri Lorentzovim transformacijama mijenja prema:

$$K = \gamma K_0 \ , \qquad (2.22)$$

jer je broj čestica dn Lorentz invarijanta.

Lorentzova kontrakcija dimenzije paralelne pravcu gibanja je apsolutno realan efekat. Linarni akcelerator u Stanfordu dugačak je 3 km i u njemu se rutinski ubrzavaju snopovi elektrona do energija 10 GeV što znači da imaju $\gamma \approx 2 \times 10^4$. Za jedan takav elektron duljina akceleratora je kontrahirana na svega $L = 3\ \text{km} / 2 \times 10^4 = 15\ \text{cm}$! Iz istog razloga će 27 kilometara dugi LHC akcelerator u CERN-u protoni energije 7 TeV (masa protona je 938,3 GeV/c²) koji će u njemu kružiti "doživljavati" kao da je svega 3,6 m dugačak ($\gamma \approx 7500$)!

2.4 DILATACIJA VREMENA

Neka promatrač u S´ sustavu mjeri vremensku razliku $\Delta\tau = t'_2 - t'_1$ dva događaja koji se dešavaju na istom mjestu: $x'_1 = x'_2 = x'$ u njegovom sustavu. **τ je svojstveno (proper) vrijeme**. Za promatrača iz sustava S ta dva događaja su na različim mjestima i prema (2.7´) imaju koordinate

$$x_1 = \gamma\,(x'_1 + V t'_1) \neq \gamma\,(x'_2 + V t'_2) = x_2 \ ,$$

što znači da on mjeri vremenski interval:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\,[(t'_2 - t'_1) + \frac{V}{c^2}(x'_2 - x'_1)] = \gamma\,\Delta\tau > \Delta\tau \ . \qquad (2.23)$$

Znači da promatrač iz sustava S mjeri dilatirani vremenski interval $dt = \gamma d\tau$ koji je uvijek dulji od vlastitog vremenskog intervala $d\tau$.

Drugi način da se iskaže dilatacija vremena je: **sat koji se giba ide γ puta sporije!**

Zaista, zamislimo kao idealizirani sat kruti štap duljine L sa zrcalima na krajevima između kojih putuje zraka svjetlosti (svaki realni sat ima neko periodično gibanje a, djelovi sata komuniciraju međusobno promjene svog položaja silama koje se prenose brzinom svjetlosti). Vlastiti period τ_0 ovog sata je $\tau_0 = \frac{2L}{c}$. Pretpostavimo da se sat giba brzinom V okomitom na pravac štapa da bi izbjegli komplikacije s kontrakcijom duljine štapa. Za vrijeme jednog perioda svjetlost pređe put VT u pravcu brzine i put 2L okomito na pravac brzine, tj. ukupni put $\sqrt{(2L)^2 + (VT)^2}$, što daje: $T = \frac{1}{c}[(2L)^2+(VT)^2]^{½}$. Odavde se jednostavno dobije period sata koji se giba:

$$T = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\,\tau_0 > \tau_0 \ . \qquad (2.24)$$

Ovaj fenomen potvrđen je puno puta u raznim eksperimentima.

Najbolji primjer su muoni, čestice po svemu slične elektronima, osim što imaju oko 200 puta veću masu i što su nestabilne s vremenom poluživota 2,2 μs. Muoni koji imaju male (makroskopske) brzine prevale samo kratke udaljenosti − na primjer, ako je brzina 30 kms^{-1} muoni prije raspada u prosjeku prevale svega 6,6 cm. No, površina Zemlje cijelo je vrijeme bombardirana ultra relativističkim muonima koji nastaju visoko u atmosferi u sudarima kozmičkih zraka s jezgrama kisika i dušika. Rastojanja od više kilometara koja ti muoni pređu kroz atmosferu (muoni su kao sat sa sopstvenim periodom τ_0 = 2,2 μs) posljedica su dilatacije vremena. U sustavu vezanom za Zemlju vrijeme poluživota brzih muona je puno duže: $T = \gamma\tau_0 >> \tau_0$. Npr., ako u raspadu piona nastanu muoni brzine β = 0,998 u klasičnoj fizici očekivali bi da u vremenu τ_0 prevale u prosjeku udaljenost od 658,68 m . Uslijed dilatacije vremena (γ = 15,82) takvi muoni u sustavu vezanom za Zemlju imaju vrijeme poluživota od t = 34,8 μs i u prosjeku pređu 10419,86 m . Broj neraspadnutih čestica određen je zakonom raspada:

$$N(t) = N_0 \exp(-t/\tau_0) \ . \qquad (2.25)$$

Ako pretpostavimo da je na visini od 10 km stvoreno $N_0 = 10^8$ muona do naših detektora na površini zemlje došlo bi:

- kl. fiz: t/τ_0 = 10000 / 658,68 = 15,18 → N = 10^8 exp (− 15,18) = 25,6 ≈ 26 muona

- STR: t/τ_0 = 10000 / 10419,86 = 0,96 → N = 10^8 exp (− 0,96) = 38,3 × 10^6 muona.

Umjesto svega 26 muona, detektori otkrivaju oko 38,3 miliona muona!

Ako ovaj eksperiment analiziramo sa stanovišta muona dobijamo potvrdu kontrakcije duljine. U sustavu mirovanja muona on ima poluživot τ_0 = 2,2 μs , a atmosfera "juri" pored njega brzinom 0,998c , pa uslijed kontrakcije duljine udaljenost od 10419.86 m u sustavu zemlje iznosi svega 658.68 m u sustavu muona!

U poslednjih 30-ak godina dilatacija vremena se provjerava i na makroskopskim sustavima koristeći precizne atomske satove koji se očitavaju laserskim pulsevima. U jednom eksperimentu 1975. C. O. Alley je usporedio vrijeme na dva identična atomska sata od kojih je jedan 15 sati letio u avionu brzinom od 140 ms^{-1} = 4,7 × 10^{-7} c . Poslije odbijanja razlike uslijed efekata Opće teorije relativnosti (satovi nisu na istoj visini pa su u različitim gravitacijskim potencijalima), sat iz aviona izgubio je 5,6 × 10^{-9} s što se do na ± 2% slaže s formulom za dilataciju vremena!

2.5 DOPPLEROV EFEKT

Dopplerov efekt u klasičnoj fizici predstavlja promjenu frekvencije zvučnog vala uslijed relativnog gibanja izvora i promatrača. Zbog postulata (II) klasične formule ne važe za svjetlost, tj. elektromagnetske valove i moraju se odrediti koristeći STR. Kao ilustraciju mogućnosti relativističke tenzorske formulacije izvešćemo opću formulu za Dopplerov pomak svjetlosti pri prelasku iz jednog u drugi IRS.

Faza ravnog vala je Lorentz invarijantna, jer određuje prirodan broj maksimuma (ili minimuma) n koje izbroji neki promatrač. Zaista, za ravni elektromagnetski val

$$\exp i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \approx \cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) = \cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}), \quad \frac{\omega}{|\vec{k}|}=c, \text{ faza je,}$$

$$\Phi = 2\pi n = \omega' t' - \vec{k}'\cdot\vec{x}' = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} \ . \tag{2.26}$$

Ako definiramo $\omega = ck_0$, tada (2.26) možemo napisati kao Lorentz invarijantni skalarni produkt dva 4-vektora

$$k'_\mu x'^\mu = k'_0 x'_0 - \vec{k}'\cdot\vec{x}' = k_0 x_0 - \vec{k}\cdot\vec{x} = k_\mu x^\mu \ ! \tag{2.27}$$

Ovo znači da je $k_\mu \equiv (k_0, \vec{k})$ **valni 4-vektor** (za svjetlost je $k_0 = \omega/c = |\vec{k}|$) , zaista kovarijantni 4-vektor, pa je kao u (2.7) i (2.10), za Lorentzovu transformaciju duž x_1-osi:

$$k'_0 = \gamma(k_0 - \beta k_1) \qquad k'_1 = \gamma(k_1 - \beta k_0) \qquad k'_2 = k_2 \qquad k'_3 = k_3 \, . \tag{2.28}$$

Za opću Lorentzovu transformaciju brzinom $\vec{V}$ je:

$$k'_0 = \gamma(k_0 - \beta k_{\|}) \qquad \vec{k}'_{\|} = \gamma(\vec{k}_{\|} - \vec{\beta} k_0) \qquad \vec{k}'_\perp = \vec{k}_\perp \ , \tag{2.29}$$

gdje je: $\vec{k} = \vec{k}_{\|} + \vec{k}_\perp$; $\beta k_{\|} = \vec{\beta}\cdot\vec{k} = \beta|\vec{k}|\cos\theta = \beta k_0 \cos\theta$, ako je $\sphericalangle\theta \equiv \sphericalangle(\vec{k},\vec{\beta})$. (2.30)

Inverzne transformacije se naravno dobiju zamjenom: $k_\mu \leftrightarrow k'_\mu$ i $\vec{\beta} \to -\vec{\beta}$.

Samo iz činjenice da se faza vala (2.26) može napisati u obliku (2.27), dobili smo Lorentzove transformacije valnog 4-vektora. Naravno, uz puno više algebre, mogli smo koristeći (2.10) iz (2.26) ili (2.27) eliminirati x_μ (ili x'_μ) , pa iz tako dobijenih identiteta koji moraju važiti za svako x_0, $\vec{x}_{\|}$ i $\vec{x}_\perp$ dobiti (2.29) .

Relativistički Doppler efekt je formula (2.29) , ali se ona češće piše u obliku:

$$\omega' = \gamma\omega(1-\beta\cos\theta) \qquad \mathrm{tg}\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)} \ , \tag{2.31}$$

jer je: $\mathrm{tg}\theta' = k'_\perp / k'_{\|} = k_\perp / k'_{\|}$; $k'_{\|} = \gamma|\vec{k}_{\|} - \vec{\beta}k_0| = \gamma|k_0\cos\theta\hat{\beta} - \vec{\beta}k_0| = \gamma k_0(\cos\theta - \beta)$ i

$k_\perp = k_0 \sin\theta$, gdje su θ i θ' kutevi između pravaca širenja valova, tj. vektora $\vec{k}$ i $\vec{k}'$ u odnosu na vektor $\vec{\beta}$.

U specijalnom slučaju gibanja izvora (S) i promatrača (S´) duž istog pravca, u slučaju približavanja ($\theta = \pi$) ili udaljavanja ($\theta = 0$), iz prve (2.31) formule je:

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}} \quad \text{– gornji predznaci za približavanje; a donji za udaljavanje.} \qquad (2.32)$$

Ako se izvor i detektor približavaju, $\omega' > \omega \equiv \omega_0$ – plavi pomak (blueshift), a ako se udaljavaju $\omega' < \omega \equiv \omega_0$ – crveni pomak (redshift).

Kvalitativno novi efekt u odnosu na klasičnu fiziku je tzv. relativistički transverzalni Dopplerov pomak (uslijed dilatacije vremena pokretnog izvora) koji postoji čak i kad se izvor i promatrač gibaju duž okomitih pravaca. Za zvijezdu (pokretni izvor $\omega' = \omega_0$) koja se giba okomito $\theta = \pi/2$ na naš pravac promatranja (line of sight) detektor na zemlji mjeri frekvenciju ω , pa formula (2.31) za transverzalni Dopplerov pomak daje:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad \text{tj.} \quad \lambda = \gamma\lambda_0 \ \text{– crveni pomak .} \qquad (2.33)$$

Ova tvrdnja STR precizno je eksperimentalno provjerena u astronomskim mjerenjima, pa čak i u laboratoriju na makroskopskom sustavu – emisija γ-zraka točno određene energije iz atoma željeza koja se detektira prijemnikom vezanim za ultracentrifugu.

Ako su brzine male u odnosu na brzinu svjetlosti, tj. ako je $\beta \approx 0$, razvojem u red :

$$(1+\beta)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 + \ldots\ ; \quad (1-\beta)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{8}\beta^2 + \ldots\ ;$$

zanemarujući članove reda β^2 iz (2.32) dobijamo klasične formule za Dopplerov efekt:

$$\omega' \approx \omega(1+\beta) \ \text{- približavanje;} \qquad \omega' \approx \omega(1-\beta) \ \text{- udaljavanje .} \qquad (2.34)$$

Primjer 3. **Astronomski crveni pomak**

Američki astronom E. P. Hubble je 1929. mjereći spektre udaljenih galaksija otkrio ekspanziju svemira. Zbog lakoće mjerenja, astonomi definiraju crveni pomak z izvora koji se udaljava kao (λ_0 je valna duljina emitirane svjetlosti, a λ je mjerena valna duljina):

$$z \equiv \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\nu_0-\nu}{\nu} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1\ , \quad \text{iz (2.32) je onda:} \quad \beta = \frac{(z+1)^2-1}{(z+1)^2+1}\ . \qquad (2.35)$$

Najjača emisiona linija u spektru kvazara PKS 2000-330 je Lymanova α linija vodika s mjerenom valnom duljinom λ = 582,5 nm. U laboratoriju se ta linija (prijelaz elektrona iz n = 2 u osnovno n = 1 stanje) opservira u ultravioletnom području s: λ = 121,6 nm.

Koliki je crveni pomak, brzina i udaljenost kvazara PKS 2000-330 od Zemlje?

Iz (2.35) imamo: $z = \dfrac{582{,}5 - 121{,}6}{121{,}6} = 3{,}79$, pa je brzina udaljavanja kvazara $\beta = 0{,}916$!

Hubble je otkrio da postoji proporcionalnost između crvenog pomaka (znači, brzine udaljavanja) z i udaljenosti r galaksija – Hubbleov zakon:

$$v = H_0\, r\,, \tag{2.36}$$

gdje Hubbleova konstanta H_0 ima vrijednost u intervalu 50-90 $\mathrm{kms^{-1}/Mpc}$ (mjerenja su vrlo komplicirana i astronomi nastoje poboljšati preciznost). Najčešće se za proračune uzima srednja vrijednost, pa je: $r \approx \dfrac{0{,}916 \times 3 \times 10^5}{70}$ Mpc = 3926 Mpc = 12,8 Gs.g. – blizu ruba vidljivog svemira!

Primjer 4. **Efekt "reflektora" (Relativistic beaming)**

Brzina svjetlosti ne ovisi o izboru IRS-a ali, pravac širenja svjetlosti ovisi. U sustavu mirovanja izvora (S´) radijacija se emitira izotropno. Zamislimo zraku svjetlosti koja putuje pravcem koji tvori kut θ' s x´-osi. U vremenu $\Delta t'$ u pravcu x´ zraka pređe put $\Delta x'$ i važi:

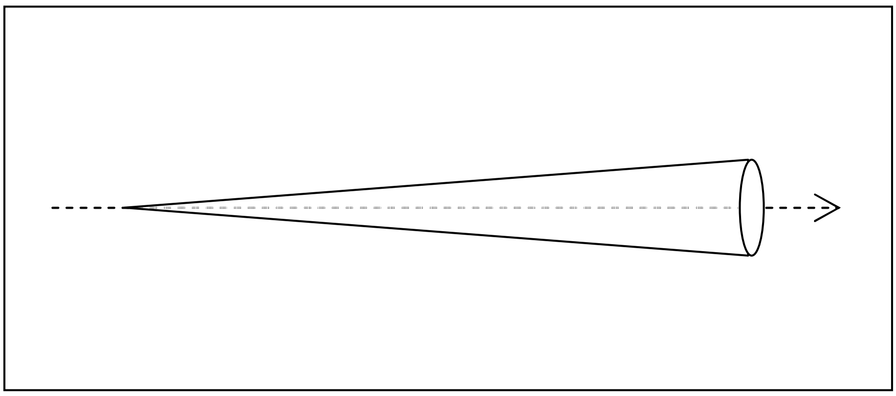
$$\cos\theta' = \frac{\Delta x'}{c\Delta t'} = \frac{\Delta x_1'}{\Delta x_0'}\,, \text{ dok je pravac te zrake u S određen s: } \cos\theta = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}\,. \tag{2.37}$$

Koristeći inverzne Lorentzove transformacije (2.7´) imamo: $\cos\theta = \dfrac{\gamma\left(\Delta x_1' + \beta \Delta x_0'\right)}{\gamma\left(\Delta x_0' + \beta \Delta x_1'\right)} = \dfrac{\dfrac{\Delta x_1'}{\Delta x_0'} + \beta}{1 + \beta \dfrac{\Delta x_1'}{\Delta x_0'}}$

i konačno:

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}\,. \tag{2.38}$$

U sustavu S´ u čijem ishodištu O´ izvor miruje, pola radijacije emitira se u gornju hemisferu $\theta' \in [\,0\,, \frac{\pi}{2}\,]$, a pola u donju. Ali u sustavu S u kome se izvor giba duž pozitivne x-osi zbog (2.38), pola radijacije emitira se u konus oko vektora $\vec{\beta}$ čiji je polukut: $\theta = \arccos\beta < \dfrac{\pi}{2}$.



Slika 2.

Pomični izvor svjetlosti zrači nesimetrično – više radijacije emitira u pravcu brzine!

Ovaj efekt naziva se efekt reflektora (relativistic beaming). Ako je $\beta = \frac{1}{2}$, pola radijacije izvora emitira se u konus poluotvora: $\theta = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Nesimetričnost postaje izrazita za ultrarelativističke brzine. Npr., kao na Slici 2., za β= 0,99 je θ = arccos0,99 = $8{,}1^0$, što znači da takva čestica zrači 50% radijacije u unaprijed upereni uski konus čiji je otvor 0,06 strad , a preostalih 50% se emitira u ostatak prostora, tj. u preostali prostorni kut (4π – 0,06) strad = 12,5 strad. U tabeli su prikazani kutevi θ i θ' za nekoliko karakterističnih zraka svjetlosti za β= 0,99 kao na Slici 2.

θ´ (°)	**θ (°)**
0	0
45	3,4
90	8,1
135	19,4
180	180

Takav relativistički objekt prividno izgleda mnogo sjajniji kad se giba prema nama, a mnogo tamniji nego što stvarno jeste, ako se udaljava.

Primjer 5. **Superluminarne brzine**

Udaljeni astronomski objekti, najčešće dijelovi mlazova plina (jets) koji se ogromnim brzinama izbaciju iz jezgara aktivnih galaksija, ponekad izgledaju kao da se gibaju brže od brzine svjetlosti – superluminarna brzina je prividni efekt koji nastaje uslijed relativističkog gibanja izvora.

Da bi razumjeli efekt zamislimo najjednostavniji slučaj meteora koji se okomito približava površini zemlje. Kad uđe u gušće slojeve atmosfere uslijed otpora zraka meteor se zapali (postane izvor svjetlosti) i u potpunosti sagori. Prvu svjetlost meteor obično emitira na ulazu u troposferu na visini od oko 10 km. Dok se ta svjetlost giba ka površini zemlje brzinom c, meteor se giba u istom pravcu brzinom v < c. Poslije vremena Δt meteor sagori. Vertikalni put meteora između točaka emisije prve i zadnje svjetosti je $v\Delta t$, pa je razmak između početne i krajnje valne fronte: $\Delta h = c\Delta t - v\Delta t = c\Delta t(1-\beta)$.

Znači, interval vremena između trenutaka dolaska početne i krajnje svjetlosne valne fronte na površinu zemlje je $\Delta t_{Zemlja} = \Delta h/c = \Delta t(1-\beta)$.

Prividna brzina meteora je onda:

$$v_{Prividno} = \frac{v\Delta t}{\Delta t_{Zemlja}} = \frac{\beta c}{1-\beta} \quad . \tag{2.39}$$

Za $\beta < 1/2$ je $v_{Prividno} < c$, ali za $\beta > 1/2$ je $v_{Prividno} > c$ i postaje proizvoljno veliko kad se brzina meteorita približava c. Npr., za $v = 0{,}9c$ bilo bi $v_{Prividno} = 9c$!

Jasno je da efekt postoji i u slučaju da se izvor ne giba direktno ka zemlji – jedino je tada v komponenta brzine duž pravca promatranja (line of sight).

2.6 SLAGANJE BRZINA

Kako se transformiraju brzine čestica pri prelasku iz jednog u drugi IRS? Neka u pokretnom sustavu S´, koji se giba brzinom $\vec{V}$ u odnosu na mirni sustav S, imamo česticu brzine $\vec{v}'$. Kolika je brzina te čestice u nepokretnom sustavu S?

Iz (2.10) za opće Lorentzove transformacije je $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{\gamma\left(d\vec{r}'_{\parallel} + \vec{V}dt'\right) + d\vec{r}_{\perp}}{\gamma\left(dt' + \dfrac{1}{c^2}\vec{V}\cdot d\vec{r}'\right)}$, i dijeleći brojnik i nazivnik s $\gamma dt'$, dobijamo zakon slaganja brzina u STR: $\vec{v} = \dfrac{\vec{v}'_{\parallel} + \vec{V} + \dfrac{1}{\gamma_V}\vec{v}'_{\perp}}{1 + \dfrac{\vec{V}\cdot\vec{v}'}{c^2}}$ ili u preglednijem obliku:

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v}'_{\parallel} + \vec{V}}{1 + \dfrac{\vec{v}'\cdot\vec{V}}{c^2}} \quad ; \qquad \vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{v}'_{\perp}}{\gamma_V\left(1 + \dfrac{\vec{v}'\cdot\vec{V}}{c^2}\right)} \quad , \tag{2.40}$$

gdje je $\gamma_V \equiv \gamma(V) = \left[1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$, a komponente brzine čestice, paralelne $\vec{v}_{\parallel}$ i okomite $\vec{v}_{\perp}$ na vektor brzine sustava $\vec{V}$, su naravno: $\vec{v}_{\parallel} = \dfrac{1}{V^2}\left(\vec{v}\cdot\vec{V}\right)\vec{V}$ i $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$.

Samo ako je $\gamma_V \approx 1$ i $V v'_{\parallel} = \vec{v}'\cdot\vec{V} << c^2$ iz (2.40) dobijamo Galilejev rezultat: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$.

U najjednostavnijem slučaju paralelnih brzina, kad je $\vec{v}'$ paralelno s $\vec{V}$, tj. $\vec{v}'_{\perp} = 0$, je i $\vec{v}$ paralelno sa $\vec{V}$ te važi:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \dfrac{v'V}{c^2}} \quad . \tag{2.41}$$

Iz (2.41) vidi se da je uvijek $v \le c$; čak i kad je $v' = c$ slijedi $v = c$.

U općem slučaju, iz formule za slaganje brzina (2.40) može se za foton koji se giba u proizvoljnom pravcu u S´ , koristeći: $v'^2_{\parallel} + v'^2_{\perp} = c^2$, pokazati da je u bilo kojem drugom IRS-u također: $v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = c^2$ u skladu s postulatom (II) STR.

Iz (2.40) ili (2.41) je očigledno da je *brzina c u relativističkoj fizici preuzela ulogu koju u klasičnoj fizici ima beskonačna brzina*, jer c :

- ne zavisi od brzine izvora i
- pretstavlja maksimalnu moguću brzinu.

Primjer 6. **Brzina relativističkih raketa**

Zamislimo da postoje fotonske rakete koje mogu postići relativističke brzine i neka su brzine tih raketa deset miliona puta, tj. 10^7 puta veće od brzina motornih čamaca u *Primjeru* 1. Znači, neka se rakete približavaju Zemlji brzinama $0{,}8c = \frac{4}{5}c$ i $-0{,}6c = -\frac{3}{5}c$ i to:

a) duž istog pravca (x-osi) b) duž okomitih pravaca (prva duž x, a druga duž y-osi).

Kolika je brzina rakete 1 za promatrača iz rakete 2 ?

Kao i u *Primjeru* 1. za S izaberimo sustav mirovanja rakete 2 . Pokretni sustav S´ je sustav vezan za Zemlju koji se u odnosu na S giba brzinom: a) $\vec{V} = 0{,}6c\,\hat{\mathbf{i}}$, b) $\vec{V} = 0{,}6c\,\hat{\mathbf{j}}$.
Brzina rakete 1 u odnosu na S´ je $\vec{v}'_1 = 0{,}8c\,\hat{\mathbf{i}}$.

a) Kako su i $\vec{V}$ i $\vec{v}'_1$ duž x-osi, važi: $\vec{v}'_1 = \vec{v}'_\parallel$ i $\vec{v}'_\perp = 0$, kao i $\vec{v}'\cdot\vec{V} = v'_1 V = \frac{4}{5}c\,\frac{3}{5}c = \frac{12}{25}c^2$.

Prema (2.40) je: $\vec{v}_\perp = 0$ i $\vec{v} = \dfrac{\vec{v}'_\parallel + \vec{V}}{1 + \frac{12}{25}} = \frac{25}{37}\left(\vec{v}'_\parallel + \vec{V}\right) = \frac{25}{37}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right)c\,\hat{\mathbf{i}} = \frac{35}{37}c\,\hat{\mathbf{i}} = 0{,}946\,c\,\hat{\mathbf{i}}$

Slaganje dviju paralelnih brzina $v'_1 = 0{,}8c$ i $V = 0{,}6c$ daje brzinu prve rakete u odnosu na drugu: $v = 0{,}946c < c$ u skladu s (2.41).

Zakon slaganja brzina (1.4) iz klasične fizike, dao bi pogrešan rezultat: $v = (0{,}8 + 0{,}6)c = 1{,}4c > c$!

b) U ovom slučaju $\vec{V} = 0{,}6c\,\hat{\mathbf{j}}$ je duž y-osi, a $\vec{v}'_1$ je duž x-osi, pa je: $\vec{v}'_\parallel = 0$ i $\vec{v}'_\perp = \vec{v}'_1 = 0{,}8c\,\hat{\mathbf{i}}$, kao i $\vec{v}'\cdot\vec{V} = 0$.

Prema (2.40) je onda: $\vec{v}_\perp = \dfrac{\vec{v}'_\perp}{\gamma_V} = \vec{v}'_\perp\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{4}{5}\,\vec{v}'_\perp = \frac{16}{25}c\,\hat{\mathbf{i}}$, te: $\vec{v}_\parallel = \vec{V} = 0{,}6c\,\hat{\mathbf{j}}$, i konačno: $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}'_\perp = \frac{16}{25}c\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{3}{5}c\,\hat{\mathbf{j}}$.

Znači, promatrač iz druge rakete bi izmjerio da mu se prva raketa približava brzinom:

$$v = \sqrt{v_\parallel^{\,2} + v_\perp^{\,2}} = \frac{\sqrt{481}}{25}c = 0{,}877c\,, \text{ pod kutem } \theta = \operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{arctg}\frac{15}{16} = 43{,}15^0 \,.$$

Za specijalni slučaj Lorentzove transformacije duž x-osi brzinom V je iz (2.5):

$$dx' = \gamma(dx - V dt) \qquad dy' = dy \qquad dz' = dz \qquad dt' = \gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right) , \tag{2.42}$$

pa su komponente brzine $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$ čestice u sustavu S´, izražene pomoću komponenti brzine $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ iste čestice u mirujućem sustavu S :

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)} \qquad v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)} \ . \tag{2.43}$$

Primjer 7. **Relativističko slaganje brzina**

Kišna kap pada okomito ka površini zemlje i pogodi krov automobila koji se giba horizontalno brzinom V . Koliki kut otklona od vertikale izmjeri promatrač u automobilu u:
a) relativističkoj i b) klasičnoj mehanici?

a) U ovom primjeru sustav S je mirujući sustav vezan za zemlju u kome kap ima brzinu:

$$v_x = 0 \qquad v_y = -\,v \qquad v_z = 0 \ .$$

Sustav mirovanja automobila S´ je pokretni sustav koji se duž x-osi sustava S giba brzinom V. Prema (2.43) komponente brzine kapi u S´su:

$$v'_x = -\,V \qquad v'_y = -\,v\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \qquad v_z = 0 \ .$$

Kako u S´ kap ima i x´-komponentu brzine ne pada okomito i kut otklona od vertikale je:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{V}{v}\left[1 - \frac{V^2}{c^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{V}{v}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} + \ldots\right] .$$

b) Koristeći zakon slaganja brzina u klasičnoj fizici (1.4) brzina kapi u S´ je:

$$v'_x = -\,V \qquad v'_y = -\,v \qquad v'_z = 0 \ ,$$

pa je kut otklona:

$$\mathrm{tg}\alpha_{\mathrm{kl.}} = \frac{V}{v} \ .$$

Razlika $\Delta(\mathrm{tg}\alpha) \equiv \mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha_{\mathrm{kl.}} \approx \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}$ je efekt drugog reda po V/c . Ako zamislimo eksperiment koji bi mjerio $\Delta(\mathrm{tg}\alpha)$ za automobil koji se giba brzinom od recimo $V = 30\,\mathrm{ms}^{-1} = 108\ \mathrm{kmh}^{-1}$, dobili bi ($c = 3 \times 10^8\ \mathrm{ms}^{-1}$): $\Delta(\mathrm{tg}\alpha) \approx 5 \times 10^{-15}$ − daleko ispod preciznosti i najboljih mjernih uređaja.

Ali, za čestice koje imaju relativističke brzine slični eksperimenti daju lako mjerljive rezultate.

Lako je naći i relacije između intenziteta i pravca brzine čestice u dva sustava. Neka se S´ giba brzinom V duž x-osi i neka sferne koordinate brzine čestice u S´ označimo s (v´,θ´,φ´) [θ´ je kut između x´-osi i radij vektora čestice, a ne kao što je uobičajeno kod sfernih koordinata, između radij vektora i treće prostorne koordinate]. To je samo promjena notacije, pa je φ´ kut između y´-osi i projekcije radij vektora na y´z´-ravninu, tako da je:

$$v'_x = v'\cos\theta' \qquad v'_y = v'\sin\theta'\cos\varphi' \qquad v'_z = v'\sin\theta'\sin\varphi' \quad \text{i} \quad \vec{v}'\cdot\vec{V} = v'V\cos\theta' .$$

Onda je iz (2.43):

$$v'_x = \frac{v\cos\theta - V}{1-\dfrac{vV\cos\theta}{c^2}} \qquad v'_y = \frac{v\sin\theta\cos\varphi}{\gamma\left(1-\dfrac{vV\cos\theta}{c^2}\right)} \qquad v'_z = \frac{v\sin\theta\sin\varphi}{\gamma\left(1-\dfrac{vV\cos\theta}{c^2}\right)} \quad . \tag{2.44}$$

Kako je, $\dfrac{v'_z}{v'_y} = \dfrac{v_z}{v_y}$ i $\mathrm{tg}\theta' = \dfrac{\sqrt{v'^{\,2}_y + v'^{\,2}_z}}{v'^{\,2}_x}$ iz (2.44) lako se dobije:

$$v' = \frac{\sqrt{v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta - \dfrac{1}{c^2}v^2V^2\sin^2\theta}}{1-\dfrac{vV}{c^2}\cos\theta} \quad ; \quad \mathrm{tg}\theta' = \frac{v\sin\theta}{\gamma_V\left(v\cos\theta - V\right)} \quad ; \quad \varphi' = \varphi \ , \tag{2.45}$$

gdje su (v,θ,φ) sferne koordinate brzine $\vec{v}$ u sustavu S.

Kad se računa s intenzitetima vektora, kao $v \equiv |\vec{v}|$ i $v' \equiv |\vec{v}'|$, mora se paziti na relativističke faktore γ odgovorne za dilataciju vremena i kontrakciju duljine.

Relativistički faktor brzine čestice u sustavu S je $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-½}$, a u sustavu S´ je $\gamma(v') = (1 - v'^2/c^2)^{-½}$, pri čemu su sustavi S i S´ povezani Lorentzovom transformacijom brzinom V duž x-osi kojoj odgovara relativistički faktor $\gamma(V) = (1 - V^2/c^2)^{-½}$.

Veza među relativističkim faktorima je:

$$\gamma(v) = \gamma(v')\,\gamma(V)\left(1+\frac{\vec{v}'\cdot\vec{V}}{c^2}\right) . \tag{2.46}$$

Iako smo ovu relaciju već dokazali [prije (2.15)] u drugom kontekstu i s malo drugačijom notacijom, ponovićemo dokaz. Uvedimo prvo nove oznake: $\beta \equiv \beta(v) = v/c$; $\beta' \equiv \beta(v') = v'/c$ i $\beta_V \equiv \beta_V(V) = V/c$.

Treba pokazati da je: $\gamma(\beta) = \gamma(\beta')\,\gamma(\beta_V)(1 + \beta'\beta_V)$.

Zaista:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\beta_V{}^2}}(1+\beta'\beta_V)=\frac{1+\beta'\beta_V}{\sqrt{1-\beta'^2-\beta_V{}^2+\beta'^2\beta_V{}^2+2\beta\beta'_V-2\beta\beta'_V}}=$$

$$=\frac{1+\beta'\beta_V}{\sqrt{(1+\beta'\beta_V)^2-(\beta'+\beta_V)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\beta'+\beta_V}{1+\beta'\beta_V}\right)^2}},$$

što je skladu s (2.41) jer je:

$$\beta=\frac{\beta'+\beta_V}{1+\beta'\beta_V}\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{v}=\frac{\mathrm{v}'+V}{1+\dfrac{\mathrm{v}'V}{c^2}}.$$

Ako uporedimo (2.40) ili (2.43) s (2.10) ili (2.11) očigledno je da brzina čestice nije prostorni dio nekog 4-vektora, niti je Lorentz invarijantna (ni $d\vec{r}$, ni dt nisu Lorentz invarijantni, a nije ni $\vec{\mathrm{v}}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$).

Slično je i sa akceleracijom – akceleracija nije Lorentz invarijantna, niti su komponente akceleracije komponente nekog 4-vektora.

Da to ilustriramo, pogledajmo kako se transformiraju komponente akceleracije. Iz (2.43) diferencijal $d\mathrm{v}'_x$ je:

$$d\mathrm{v}'_x=\frac{d\mathrm{v}_x}{1-\dfrac{\mathrm{v}_xV}{c^2}}+\frac{\mathrm{v}_x-V}{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}_xV}{c^2}\right)^2}\frac{V}{c^2}d\mathrm{v}_x=\frac{1-\dfrac{V^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}_xV}{c^2}\right)^2}d\mathrm{v}_x=\frac{d\mathrm{v}_x}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathrm{v}_xV}{c^2}\right)^2},$$

pa djelenjem s: $dt'=\gamma\left(dt-\dfrac{V}{c^2}dx\right)$ dobijamo:

$$a'_x=\frac{a_x}{\gamma^3\left(1-\dfrac{\mathrm{v}_xV}{c^2}\right)^3},\qquad \text{i analogno:}$$

$$a'_y=\frac{a_y}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathrm{v}_xV}{c^2}\right)^2}+\frac{\dfrac{\mathrm{v}_yV}{c^2}a_x}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathrm{v}_xV}{c^2}\right)^3};\qquad a'_z=\frac{a_z}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathrm{v}_xV}{c^2}\right)^2}+\frac{\dfrac{\mathrm{v}_yV}{c^2}a_x}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathrm{v}_xV}{c^2}\right)^3},\tag{2.47}$$

očigledno različito od (2.5) ili (2.7).

U formulama (2.40) – (2.47) inverzne transformacije se, kao i uvijek, dobijaju zamjenama: $x'_\mu\leftrightarrow x_\mu$ i $V\to -V$.

Neinvarijantnost akceleracije, formula (2.47) , pri Lorentzovim transformacijama znak je neinvarijantnosti drugog Newtonovog zakona (opskurna mogućnost da se $\frac{\vec{F}}{m}$ transformira na isti način kao akceleracija očito ne može biti točna za najvažnije klasične sile – gravitacijsku, elastičnu, električnu,....).

Tako dolazimo do zaključka: t*reba nešto mijenjati u klasičnoj mehanici ako želimo da se prijelaz iz jednog u drugi IRS ostvaruje Lorentzovim transformacijama*!

3. RELATIVISTIČKA MEHANIKA

U rješavanju protivrečnosti između elektrodinamike i klasične mehanike Einstein se u svojim misaonim eksperimentima usredotočio na najbitnije – simetrije, ili preciznije, vezu fizikalnih teorija i prostorno-vremenskih simetrija.

Osnovna postavka u fizici je **princip relativnosti**, odnosno **aksiom STR** koji kaže da fizikalni zakoni ne zavise od izbora IRS. Podrazumijeva se da su svi IRS-i, ekvivalentni tj. "jednakopravni", pa se za promatranja i mjerenja može odabrati bilo koji. IRS je u stvari trodimenzionalni prostorni Kartezijev koordinatni sustav i jednodimenzionalni vremenski koordinatni sustav, koji svakoj točci prostor-vremena pridružuju uređenu četvorku realnih brojeva – njene koordinate. Prostor i vrijeme su homogeni, što znači da nema preferiranih točaka u prostoru ili trenutaka u vremenu. Prostor je i izotropan, što znači da nema preferiranih pravaca u prostoru. Prema tome, sve točke u prostor-vremenu su međusobno ekvivalentne, kao i svi pravci. U takvom, homogenom i izotropnom prostor-vremenu, bilo koja dva IRS-a S i S´ mogu se razlikovati samo po 4 elementa:

1. Ishodišta prostornih sustava su u različitim točkama prostora,
2. Ishodišta vremenskih sustava su različiti vremenski trenutci,
3. Prostorne koordinatne osi nisu paralelne i
4. Jedan od sustava giba se konstantnom brzinom $\vec{V}$ u odnosu na drugi!

Ako želimo dva proizvoljna IRS-a dovesti do preklapanja, ili prijeći iz jednog u drugi IRS, kako se kaže, dovoljno je napraviti četiri prostorno-vremenske transformacije:

1. Prostornu translaciju svih točaka u prostoru za vektor OO´ (udaljenost dvaju ishodišta) da bi ishodišta prostornih koordinata bila u istoj točci,
2. Vremensku translaciju da se poklope ishodišta vremenskih koordinata,
3. Prostornu rotaciju oko neke osi kroz ishodišta da se poklope koordinatne osi i
4. Lorentzovu transformaciju određenu brzinom $\vec{V}$.

Skup svih takvih prostorno-vremenskih transformacija tvori grupu koja se naziva Poencareova grupa. To je 10-parametarska kontinuirana grupa, koja pojednostavljeno govoreći, sadrži četiri podgrupe:

1. Grupu prostornih translacija (3 parametra neophodna da jednoznačno specificiraju element grupe – tri komponente vektora translacije),
2. Grupu vremenskih translacija (1 parametar),
3. Grupu prostornih rotacija (3 parametra) i
4. Grupu Lorentzovih transformacija (3 parametra – tri komponente vektora $\vec{V}$).

Stvarna struktura je kompliciranija, Lorentzova grupa sadrži podgrupu prostornih rotacija i prostornih i vremenskih inverzija. Lorentzova grupa je grupa transformacija koje ostavljaju invarijantnim skalarni produkt 4-vektora tj. kvadrat duljine $x_\mu x^\mu = c^2t^2 - \vec{x}^2$ bilo kojeg 4-vektora. Te transformacije su rotacije i inverzije u četvoro dimenzionalnom pseudo euklidskom prostor-vremenu koji se naziva prostor Minkowskog M^4.

Kao što se u 3-dimenzionom prostoru svaka rotacija može razložiti na 3 rotacije u tri koordinatne ravnine xy, xz i yz, tako se u 4-dimenzionalnom prostoru svaka rotacija (Lorentz transformacija) može razložiti na 6 rotacija u 6 koordinatnih ravnina: tx, ty, tz, xy, xz, yz. Prve tri koje uključuju vrijeme sadrže čiste Lorentzove transformacije, a preostale tri su prostorne rotacije. No, detalji strukture Lorentzove grupe nisu bitni za dalje izlaganje. Bitno je, da Poencareova grupa osigurava matematički aparat neophodan da se usklađenost s osnovnim postulatima STR može provjeriti za svaku fizikalnu teoriju ili zakon.

Izolirani fizikalni sustav čije djelovanje (akcija) je Poincare invarijantno zadovoljava aksiome STR.

Za sustav čestica djelovanje (akcija) je po definiciji:

$$I \equiv \int_{t_1}^{t_2} L dt \qquad (3.1)$$

gdje je Lagrangeova funkcija

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) = T - U \,, \qquad (3.2)$$

t_1 i t_2 su početni i krajnji trenutak, a q_i i $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ su generalizirane koordinate i generalizirane brzine (i = 1,2,…,n je broj stupnjeva slobode gibanja) koje jednoznačno određuju položaj i brzine svih čestica. T i U su potencijalna i kinetička energija sustava.

Ako je u jednom IRS-u djelovanje ima vrijednost I, prelaskom u drugi IRS nekom prostorno-vremenskom transformacijom iz Poencareove grupe, u kojemu djelovanje ima vrijednost I´, te ako važi: I = I´, jednadžbe gibanja sustava koje se dobijaju iz djelovanja osiguravaju da se sustav giba u skladu s STR! Time su *općeniti zahtjevi aksioma STR pretočeni u precizni matematički iskaz koji se lako može provjeriti!*

U modernoj fizici gibanje fizikalnih sustava sveobuhvatno se opisuje pomoću Lagrangeove L = T − U, ili Hamiltonove funkcije H = T + U, a ne direktno preko sila koje djeluju na čestice. Naravno, te dvije formulacije su ekvivalentne, jer je konzervativna sila negativni gradijent potencijalne energije. Jednadžbe gibanja onda slijede iz **principa minimalnog djelovanja (Hamiltonov princip)**, koji kaže da se sustav giba tako da na stvarnoj putanji sustava djelovanje (akcija) ima minimalnu vrijednost:

$$\delta I = 0 \;\Rightarrow\; \text{Lagrangeove ili Hamiltonove jednadžbe gibanja,} \qquad (3.3)$$

(preciznije: djelovanje ima ekstrem), gdje je varijacija djelovanja δI razlika vrijednosti I duž stvarne i bilo koje bliske putanje.

Invarijantnost djelovanja fizikalnog sustava, a time i jednadžbi gibanja tog sustava, pri prostorno-vremenskim transformacijama koje tvore Poencareovu grupu ima za fiziku veoma važne posljedice: **Osnovne zakone očuvanja za izolirane sustave!**

<u>Noether teorem (Emmi Noether 1918.) kaže da za svaku grupu kontinuiranih transformacija koje ostavljaju djelovanje sustava invarijantnim postoji i može se izračunati, jedna očuvana fizikalna veličina (čija se vrijednost ne mijenja tijekom gibanja sustava)!</u>

Dokaz nije kompliciran, ali ga nastojanja za maksimalnom općenitošću i matematičkom preciznošću čine vrlo apstraktnim i formalnim. Umjesto općeg dokaza pokažimo kako iz invarijantnosti djelovanja za izolirani konzervativni fizikalni sustav pri vremenskim translacijama slijedi zakon očuvanja energije!

Princip relativnosti nam kaže da zakoni fizike ne smiju zavisiti od izbora početnog trenutka za računanje vremena. Ako napravimo proizvoljnu infinitezimalnu vremensku translaciju

$$t \to t' = t + \delta t\,, \tag{3.4}$$

djelovanje mora ostati nepromjenjeno, tj.

$$I = I' \quad \text{ili} \quad \delta I = \frac{\partial I}{\partial t}\delta t = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \tag{3.5}$$

jer je δt proizvoljno. Iz definicije djelovanja (3.1) onda slijedi:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0\,, \tag{3.6}$$

što znači da Lagrangian $L(q_i, \dot{q}_i)$ izoliranog fizikalnog sustava ne smije eksplicitno zavisiti od vremena, pa je:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\ . \tag{3.7}$$

Ako iskoristimo Lagrangeove jednadžbe gibanja za konzervativni sustav:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\ , \tag{3.8}$$

te u prvom članu na desnoj strani u (3.7) umjesto $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ pišemo $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$, dobijamo:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right\} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\ ,$$

i konačno:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0\ . \tag{3.9}$$

Zaključujemo da je:

$$H \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \text{const} \tag{3.10}$$

očuvana veličina za izolirani konzervativni fizikalni sustav!

Kinetička energija takvog sustava je kvadratna funkcija generaliziranih brzina (jer je kinetička energija čestice proporcionalna kvadratnu njene brzine), a potencijalna energija zavisi samo od generaliziranih koordinata (ne zavisi od generaliziranih brzina), pa je:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

i konačno iz (3.10) dobijamo:

$$H = T + U = E = \text{const.} \tag{3.11}$$

što i jeste **zakon očuvanja energije u klasičnoj mehanici.**

Potpuno analogno, iz invarijantnosti djelovanja Noetherin teorem za izolirani fizikalni sustav daje:

- $I = I'$ pri prostornim translacijama $\Rightarrow$ zakon očuvanja impulsa (količine gibanja),
- $I = I'$ pri vremenskim translacijama $\Rightarrow$ zakon očuvanja energije i
- $I = I'$ pri prostornim rotacijama $\Rightarrow$ zakon očuvanja angularnog momenta.

Dobija se vrlo elegantna i lijepa logička konstrukcija:

Poencareova grupa $\Leftarrow$ **Prostorne-vremenske transformacije** $\Leftarrow$ **Aksiomi STR**

$\Downarrow$

Invarijantnost djelovanja I = I´ $\Rightarrow$ **Zakoni očuvanja!**

$\Uparrow$

Djelovanje (akcija) $\Rightarrow$ **Hamiltonov princip δI = 0** $\Rightarrow$ **Jednadžbe gibanja**

Da ne bi bila narušena veza simetrija i zakona očuvanja u formuliranju relativističke mehanike Eistein se rukovodio s dva zahtjeva:

- osnovni zakoni očuvanja moraju i dalje vrijediti i
- u limesu $v \ll c$ moraju se dobiti zakoni klasične fizike!

Koristeći jednostavnije, lako razumljive primjere, umjesto apstraktnih formalnih izvođenja, opisat ćemo ukratko kako se dolazi do osnovnih zakona relativističke mehanike.

3.1 Relativistički impuls

Promotrićemo jednostavni proces idealno elastičnog sudara dviju čestica, recimo bilijarskih kugli.

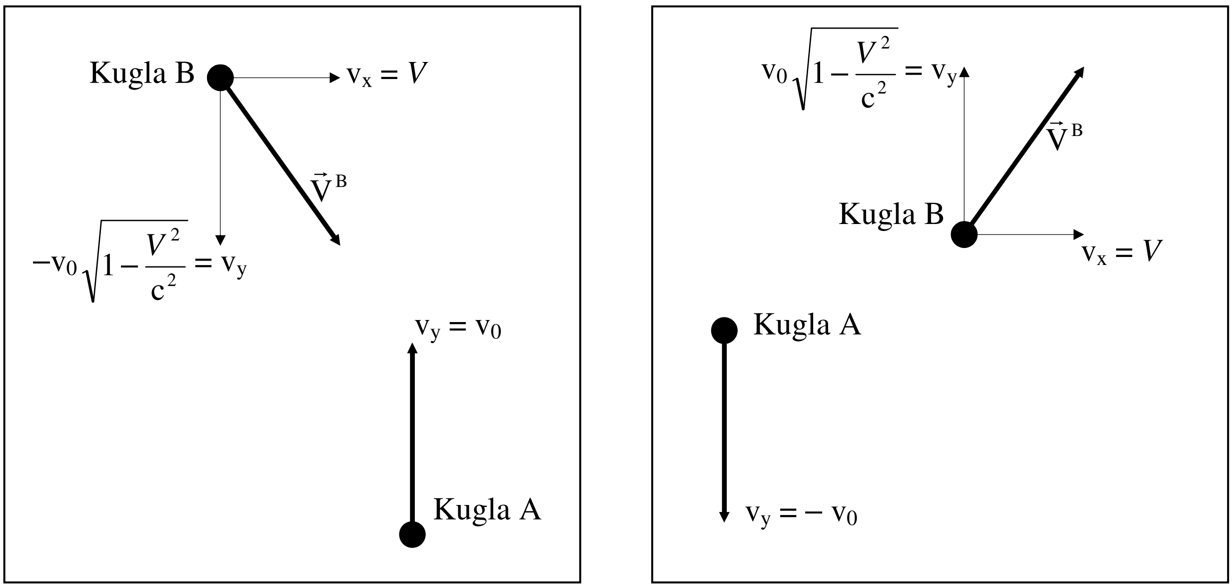
Za opis elastičnog sudara trebaju samo dvije fizikalne veličine: masa i brzina čestica. Dinamika sudara određena je unutarnjim silama koje po pretpostavci djeluju samo u trenutku kontakta kugli. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da obje kugle imaju istu masu m.

Zakon očuvanja impulsa (količine gibanja) važi za svaki izolirani fizikalni sustav.

Zamislimo da promatrači iz S i S´ sustava (S´se giba konstantnom brzinom V duž x-osi) daju kuglama A i B brzinu v_0 duž svojih y-osi tako da se kugle sudare. Kugla B se u S´ giba brzinom – v_0 duž y´-osi, a kugla A se u sustavu S giba brzinom v_0 duž y-osi. U idealno elastičanom sudaru intenzitet brzine se ne mjenja – promjeni se samo pravac brzine. Oba promatrača će registrirati da poslije sudara njihove kugle imaju isti intenzitet brzine: – v_0 za kuglu A u S i + v_0 za kuglu B u S´.

Ako važi zakon očuvanja impulsa, njegova y-komponenta mora biti nula, jer vektor impulsa svake kugle u sudaru samo promjeni predznak. No, ako koristimo formule (2.43) za Lorentzove transformacije brzine, y-komponenta impulsa iz klasične fizike mv_y bilo koje kugle imat će različite vrijednosti u dva IRS-a.

Recimo da sudar razmatramo u sustavu S. Kugla A giba se u pozitivnom smjeru duž y-osi. Kugla B (koja se u S´ giba u negativnom smjeru duž y´-osi) ima u sustavu S i x-komponentu brzine. Situacija prije i poslije sudara u sustavu S prikazana je na Slici 3.



a. prije sudara b. poslije sudara

Slika 3.

Iz (2.43) inverzne Lorentzove transformacije za komponente brzine pri prijelazu iz S´ u S su:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; \qquad v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)}; \qquad v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)}; \tag{3.12}$$

pa, u S kugla B prije sudara ima komponente brzine:

$$v_x = V\,; \quad v_y = v'_y/\gamma = -\, v_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\;; \quad i \quad v_z = 0\,,$$

jer je $v'_x = v'_z = 0$ a, $v'_y = -\, v_0$.
Faktor γ u v'_y pojavljuje se uslijed dilatacije vremena u pokretnom sustavu.

Kako je situacija potpuno simetrična, lako se vidi da bi se u S´ dobile iste formule za komponente brzine kugle A uz promjenu znaka $v_0 \to -\, v_0$.

U sustavu S za klasičnu impuls prije sudara imamo:

$$(p_{kl.})^{in}{}_y = (\Sigma m v_y)_{Prije} = m v^A{}_y + m v^B{}_y = m v_0 - m v_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\;, \tag{3.13}$$

a poslije sudara:

$$(p_{kl.})^{fi}{}_y = (\Sigma m v_y)_{Poslije} = m v^A{}_y + m v^B{}_y = -\, m v_0 + m v_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \neq (p_{kl.})^{in}{}_y\,, \tag{3.14}$$

što znači da ne važi zakon očuvanja impulsa definiranog kao u klasičnoj fizici, osim u nerelativističkom limesu $V \ll c$.

Znači, ako želimo da zakon očuvanja impulsa važi u relativističkoj mehanici moramo promjeniti definiciju impulsa.

Zato se definira:

Impuls čestice koja se giba brzinom $\vec{v}$ je:

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\,. \tag{3.15}$$

U slučaju $v \ll c$ ovaj izraz prelazi u klasični $\vec{p} = m\vec{v}$.

U primjeru elastičnog sudara, kugle A i B imaju u sustavu S brzine $v^A = v_0$ i $v^B =$ $= \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2} = \sqrt{\frac{v_0{}^2}{\gamma_V{}^2} + V^2}$, te su im y-komponente impulsa:

$$p^A{}_y = \frac{mv_0}{\sqrt{1-\frac{v_0{}^2}{c^2}}} \quad \text{i} \quad p^B{}_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v_x{}^2+v_y{}^2}{c^2}}} \,. \tag{3.16}$$

Kako su komponente brzine kugle B u S: $v_x = V$; $v_y = v'_y/\gamma = -\, v_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ i $v_z = 0$, dobijamo:

$$p^B{}_y = -\frac{m\frac{v_0}{\gamma_V}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(V^2+\frac{v_0{}^2}{\gamma_V{}^2}\right)}} = -\frac{mv_0}{\gamma_V}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}-\frac{v_0{}^2}{c^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}} =$$

$$= -\frac{mv_0}{\gamma_V}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_0{}^2}{c^2}}} = -\frac{mv_0}{\gamma_V}\frac{\gamma_V}{\sqrt{1-\frac{v_0{}^2}{c^2}}} = -\gamma_{v_0} mv_0 \equiv -p^A{}_y \,, \tag{3.17}$$

što znači da u ovom primjeru važi zakon očuvanja y-komponenti relativističkog impulsa sustava. Zaista, prije sudara je $0 = p^A{}_y + p^B{}_y$. U sudaru se samo promjene pravci y-komponenti brzina, pa je poslije sudara opet $0 = -\, p^A{}_y - p^B{}_y$.

Kako x-komponenta brzine kugle B ostaje nepromjenjena u sudaru, za x-komponentu ukupnog impulsa je:

$$p^{in}{}_x = (p^A{}_x + p^B{}_x)_{Prije} = \gamma_{v^B}\, mV = (p^A{}_x + p^B{}_x)_{Poslije} = p^{fi}{}_x \,,$$

jer promjena pravca y-komponente brzine kugle B ne mijenja γ_{v^B} . Za z-komponenente je naravno: $p^{in}{}_z = p_z{}^{Prije} = p_z{}^{Poslije} = p^{fi}{}_z = 0$. Ovime smo pokazali:

$$\vec{p}^{\,in} = \left(\vec{p}^{\,A} + \vec{p}^{\,B}\right)^{in} = \left(\vec{p}^{\,A} + \vec{p}^{\,B}\right)^{fi} = \vec{p}^{\,fi} \,, \tag{3.18}$$

važenje zakona očuvanja impulsa (količine gibanja), definiranog u (3.15), u primjeru elastičnog sudara dvije čestice.

Lako je pokazati da isti zaključak važi i u sustavu S´ (pokazati).

Ovo naravno nije dokaz zakona očuvanja impulsa, već samo ilustracija valjanosti na jednostavnom primjeru.

U svim procesima u fizici relativistički impuls izoliranog fizikalnog sustava, definiran u (3.15), je očuvana veličina.

Kasnije ćemo to ilustrirati još nekim primjerima, ali prvo razmotrimo problem energije u relativističkoj fizici.

Kao i u slučaju impulsa, u relativističkoj mehanici treba osigurati važenje zakona očuvanja energije.

3.2 Relativistička energija

Zakon očuvanja energije za izolirani fizikalni sustav u klasičnoj fizici slijedi iz II Newtonova zakona $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$ za koji već znamo da nije Lorentz invarijantan. Pitanje je kako definirati energiju u relativističkoj fizici tako da, kao i u slučaju impulsa, važi:

- Energija E izoliranog fizikalnog sustava je konstanta gibanja,
- Energija E u lumesu v/c $\rightarrow$ 0 prelazi u izraz iz klasične fizike.

Ideja koja zahtijeva najmanje promjene klasičnih izraza, je da se formalno očuva važenje II Newtonovog zakona, tj. izraza $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$, ali gdje je sada prema (3.15), $\vec{p}=\gamma m\vec{v}$ relativistički impuls čestice:

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(\gamma m\vec{v})}{dt}. \tag{3.19}$$

Teorem o radu i kinetičkoj energiji iz klasične fizike kaže da je rad ukupne sile koja djeluje na česticu jednak promjeni njene kinetičke energije T. Za najjednostavniji slučaj jednodimenzionog gibanja duž x-osi je:

$$T=\int_{v=0}^{v}F dx=\int_{0}^{v}\frac{d(\gamma mv)}{dt}dx=\int_{0}^{v}v d(\gamma mv)=\int_{0}^{v}\frac{mvdv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

jer je: $v=\frac{dx}{dt}$ i $d(\gamma mv)=\frac{mdv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{m\frac{v^2}{c^2}dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{mdv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Lako je izračunati gornji integral i rezultat je:

$$T=\gamma mc^2-mc^2=(\gamma-1)mc^2. \tag{3.20}$$

Izraz (3.20) je relativistička kinetička energija čestice koja se giba brzinom v.

Kad v/c $\rightarrow$ 0 razvojem u red je:

$$T=mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+....-1\right)\approx\frac{1}{2}mv^2, \tag{3.21}$$

kako smo i željeli.

U skladu s (3.20) definira se:

Energija E čestice koja se giba brzinom v je:

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + T = \gamma E_0, \qquad (3.22)$$

gdje je $E_0 \equiv mc^2$ **energija mirovanja čestice** – *u relativističkoj fizici slobodna čestica mase* m *ima energiju* mc^2 *čak i kad miruje*!

Iako stalno govorimo o čestici, jasno je da sve formule važe za bilo koje tijelo ili izolirani sustav mase m i brzine $\vec{v}$ – ukupna energija izoliranog sustava je točno definirana pozitivna veličina određena masom i brzinom sustava. Energija mirovanja sustava (tijela) uključuje ne samo zbroj energija mirovanja njegovih čestica, nego i kinetičke i sve potencijalne energije interakcija čestica koje sačinjavaju sustav (tijelo). To znači da *u relativističkoj fizici ne važi zakon očuvanja mase!* Najjednostavniji primjer – energija u sustavu centra mase (centar impulsa ≡ IRS u kome je ukupni impuls sustava jednak nuli) izoliranog sustava od dvije čestice, masa m_A i m_B je:

$$E = mc^2 = \gamma_A m_A c^2 + \gamma_B m_B c^2 = m_A c^2 + m_B c^2 + T_A + T_B + U_{AB} \quad \Rightarrow \quad m \neq m_A + m_B\ .$$

Još jasnije se to vidi iz sljedećeg primjera:

Primjer 8. **Masa relativističkog sustava dvije slobodne čestice**

Razmotrimo najjednostavniji sustav s više (dvije!) neinteragirajućih relativističkih čestica tako da, jednostavnosti radi, sustav nema potencijalne energije, tj. na čestice ne djeluju sile. Neka je masa svake čestice $m_A = m_B = 4$ Kg i neka se čestice gibaju jedna ka drugoj duž x-osi brzinama: $v_A = 0{,}6c = 1{,}8 \times 10^8\ \mathrm{ms^{-1}}$ i $v_B = -\ 0{,}6c = 1{,}8 \times 10^8\ \mathrm{ms^{-1}}$ (očigledno relativističke čestice). Relativistički faktor za takve čestice je: $\gamma_A = \gamma_B = \left(1 - \frac{9}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{4}$.
Impulsi čestica su jednaki po intenzitetu, ali suprotnog pravca, tj. $p_A = \gamma_A m_A v_A = \frac{5}{4} \times 4\mathrm{Kg} \times \frac{3}{5}c = 3$ cKg i $p_B = \gamma_B m_B v_B = -\ \frac{5}{4} \times 4\mathrm{Kg} \times \frac{3}{5}c = -\ 3$ cKg . Ukupni impuls sustava je nula $p_A + p_B = 0$, što znači da sustav kao cjelina ima brzinu v = 0 (znači, $\gamma_v = 1$), pa je prema (3.22) ukupna energija sustava $E = Mc^2$ – energija mirovanja sustava. S druge strane, ukupna energija sustava od dvije slobodne čestice je zbroj ukupnih energija svake pojedine čestice, što daje:

$$E = Mc^2 = E_A + E_B = \gamma_A m_A c^2 + \gamma_B m_B c^2 = (10\mathrm{Kg})c^2\ .$$

Masa sustava je: $M = \frac{E}{c^2} = 10\ \mathrm{Kg} > m_A + m_B = 8\ \mathrm{Kg}$!

U svakom relativističkom sustavu, masa sustava slobodnih čestica (više od jedne) uvijek je veća od zbroja masa pojedinih čestica, a masa sustava vezanih čestica uvijek je manja od zbroja masa pojedinih čestica jer je potencijalna energija sustava vezanih čestica negativna!

Ekvivalentnost mase i energije prema (3.22) jedna je od eksperimentalno najbolje provjerenih relacija STR.

U klasičnoj fizici (i u kemijskim reakcijama) kad je v << c efekti neočuvanja mase su zanemarivi, kao na primjer:

Primjer 9. **Promjena mase sustava u klasičnoj fizici**

1) Kolika je relativna promjena mase sustava opruge konstante k = 100 N/m za koju je vezano tijelo mase m = 1 kg ako oprugu napnemo za x = 1 m ? Radi jednostavnosti zanemarimo masu opruge.

Energija sustava se promjeni za potencijalnu energiju opruge $\Delta E = \frac{1}{2}kx^2 = 50\mathrm{J}$, pa je relativna promjena mase sustava: $\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta E}{mc^2} = \frac{50\mathrm{J}}{9\times10^{16}\mathrm{J}} = 5{,}6\times10^{-16}$.

2) Za koliko se promjeni masa 1 Kg vode kad je zagrijemo za 80^0C?

Zagrijavanje povećava kinetičku energiju molekula vode, a time i ukupnu energiju sustava, pa je prema (3.22):

$$E_1 = mc^2\ ;\ E_2 = mc^2 + \Delta T = (m + \Delta m)c^2 \quad \Rightarrow \quad E_2 - E_1 = \Delta T = \Delta mc^2$$

$$\Delta m = \Delta T/c^2 = m\mathit{c}\Delta t/c^2 = 1\mathrm{Kg} \times 4186\ \mathrm{JKg^{-1}C^{-1}}\ 80^0\mathrm{C}/9 \times 10^{16}\mathrm{m^2s^{-2}} = 3{,}72 \times 10^{-12}\ \mathrm{Kg.},$$

gdje je *c* specifični toplinski kapacitet vode.

Relativna promjena mase je $\Delta m/m = 3{,}72 \times 10^{-12} = 3{,}72 \times 10^{-10}$ % ispod mogućnosti mjerenja i najpreciznijih instrumenata!

3) Kolika je relativna promjena mase atoma vodika pri ionizaciji?

Atom vodika ima masu $m = 1{,}67323 \times 10^{-27}$ Kg = 938,8 MeV/c^2. Elektron u osnovnom (n = 1) stanju ima potencijalnu energiju U = − 13,58 eV. Ionizacijom se ukupna energija sustava poveća za 13,58 eV pa je relativna promjena energije, koja je jednaka relativnoj promjeni mase sustava ($m = E/c^2$):

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{13{,}58\mathrm{eV}}{938{,}8\times10^6\mathrm{eV}} = 1{,}45\times10^{-8} = 1{,}45 \times 10^{-6}\ \%$$

premalena za mjerenje.

Kako su tipične energije kemijskih reakcija reda veličine 0,1-10 eV po atomu/molekuli, a energija mirovanja atoma/molekula reda veličine 1 – 100 GeV, jasno je da u kemijskim procesima zakon očuvanja mase važi s velikom preciznošću!

Nasuprot kemijskim, svaka nuklearna reakcija ili proces s elementarnim česticama, zahtijeva primjenu relativističke fizike, jer se u energijskom balansu promjena energije u odnosu na energiju mirovanja ne može zanemariti, kako pokazuju slijedeći primjeri.

Primjer 10. **Energija vezanja deuterija**

Najjednostavniji nukleus poslije vodika ima atom deuterija (izotop vodika) ^{2}H čiju jezgru čine jedan proton i jedan neutron. Masa deuterija je 1876,4 MeV/c^2 , a jezgri se mora dovesti ΔE = 2,2 MeV energije (energija vezanja) da bi se razbila na sastavne nukleone, tj. na proton i neutron. Relativna promjena mase sustava u reakciji: $^2\mathrm{H} + \Delta E = p + n$ je:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{2{,}2\text{MeV}}{1876{,}4\text{MeV}} = 1{,}18 \times 10^{-3} = 0{,}12\ \%$$

što detektori koji se koriste u nuklearnoj fizici lako mjere. Zakon očuvanja mase ne važi i mora se koristiti zakon očuvanja relativističke energije.

Primjer 11. **Gubitak mase Sunca**

Sunce emitira elektromagnetsku radijaciju čiji je intenzitet na Zemlji k = 1,36 × 10^3 W/m^2 (solarna konstanta). Kojom brzinom se smanjuje masa Sunca?

Kako Sunce emitira izotropno, a udaljenost Zemlje od Sunca je R = 1,5 × 10^8 km, ukupna izračena energija u sekundi (snaga) koju astronomi nazivaju luminozitet Sunca $L_\odot$, je: $L_\odot = 4\pi R^2 k$ = 3,85 × 10^{26} W. Energija Sunca smanji se svake sekunde za $L_\odot$, pa se masa Sunca svake sekunde smanji za:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = L_\odot/c^2 = \frac{3{,}85 \times 10^{26}\,\text{Js}^{-1}}{\left(3 \times 10^{8}\,\text{ms}^{-1}\right)^2} = 4{,}3 \times 10^9\ \text{Kg/s}\ .$$

Svake sekunde Sunce izgubi 4,3 miliona tona mase! Masa Sunca je $m_\odot$ = 2 × 10^{30} Kg i ako bi Sunce nastavilo sjati istim intenzitetom imalo bi mase za oko 1,6 × 10^{13} godina. Ova procjena je naravno potpuno nerealna, jer će već za 4-5 milijardi godina Sunce uglavnom "sagorjeti" vodik u svome središnjem dijelu, promjeniti intenzitet emisije i postati crveni div!

Pojasnimo šta je izvor sunčane energije. U središtu Sunca traje proces nuklearne fizije vodika u helij u tzv. proton-proton ciklusu u kojem četiri protona (jezgre atoma vodika) ^{1}H kroz niz od tri nuklearne reakcije stvaraju α-česticu (jezgru atoma helija) ^{4}He. Shema proton-proton ciklusa je:

$$^1\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu\ ; \quad {}^2\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma\ ; \quad {}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^1\text{H} + {}^1\text{H} + \gamma\ .$$

Zanemarujući pozitron e^+ i neutrino ν koji vrlo malo utječu na balans energije, efekt proton-proton ciklusa u prvoj aproksimaciji je: 4p → ^{4}He . Masa protona je m_p = 1,6726 × 10^{-27} Kg = 938,272 MeV/c^2 , a masa α-čestice je m_α = 6,6447 × 10^{-27} Kg = 3727,38 MeV/c^2 , pa je gubitak mase u jednom elementarnom p-p ciklusu:

$$dm = 4m_p - {}^4\text{He} = 25{,}708\ \text{MeV/c}^2 = 4{,}57 \times 10^{-29}\ \text{Kg}.$$

Znači, pri fuziji četri protona u jezgru helija 0,68% početne mase pretvori se u energiju i daje $c^2 dm$ = 25,708 MeV = 4,1 × 10^{-12} J energije koja se emitira u obliku γ-fotona. Oko milion godina kasnije, poslije ogromnog broja raspršenja, ti se fotoni konačno probiju kroz Sunce i napuštaju sunčevu fotosferu uglavnom kao fotoni vidljive svjetlosti.

Primjer 12. **Nuklearna fisija i fuzija**

Eistein je odmah, čim je formulirao relativističku mehaniku bio svjestan mogućnosti postojanja makroskopskih procesa u kojima se masa pretvara u energiju. U radu objavljenom 1905., ubrzo nakon STR rada, govoreći o ukupnoj relativističkoj energiji, napomenuo je: "Nije nemoguće da se sa tijelima čija ukupna energija veoma varira (npr. solima radijuma) teoriju može uspješno eksperimentalno provjeriti".

Izravna eksperimentalna potvrda morala je čekati 30-ak godina, jer su se prvo morale razviti atomska i zatim nuklearna fizika. Već i samo nabrajanje najvažnijih otkrića pojašnjava kronologiju:

- Nukleus atoma – Rutherford 1911.
- Neutron – Chadwick 1932.
- Nuklearna reakcija u laboratoriju – Cockcroft i Walton 1932.
- Nuklearni reaktor – Fermi 1942.

Danas nuklearni reaktori koji koriste fisiju obogaćenog urana ili plutonija služe za proizvodnju električne energije, a za istu namjenu, gradi se prvi fuzijski nuklearni reaktor (Cadarache, Francuska). Razmotrimo princip rada tih reaktora.

- **Fisija**

Prirodni uran $^{238}U_{92}$ sadrži 0,72% izotopa $^{235}U_{92}$. Kao gorivo u reaktoru koristi se obogaćeni uran u kome je koncentracija izotopa $^{235}U_{92}$ nekoliko puta povećana. Nukleus $^{235}U_{92}$ je nestabilan i sporo se radioaktivno raspada emisijom α-čestice s vremenom poluživota 7×10^8 godina.

Ali, ako jezgru $^{235}U_{92}$ pogodi termalni ("spori") neutron, nastane jezgra $^{236}U_{92}$ koja je toliko nestabilna da u 85% slučajeva doživi fisiju (raspadne se na dva dijela) najčešće prema reakciji:

$$^{235}U_{92} + n \rightarrow {}^{92}Kr_{36} + {}^{142}Ba_{56} + 2n + 179{,}4 \text{ MeV} , \tag{3.23}$$

a u preostalih 15% slučajeva jezgra se deeksitira emisijom γ-fotona.

Zbog električnog odbijanja fragmenti fisije se razlete i u nizu sudara s okolnim jezgrama termaliziraju. Dva neutrona koji izlaze iz reakcije pružaju mogućnost sukcesivnih reakcija iste vrste (lančane reakcije). No, kako su im izlazne energije oko 1 MeV moraju se prvo termalizirati u sudarima s jezgrama moderatora (vodik, ugljik, …).

Za proizvodnju električne energije važna je ukupna toplina koja se oslobodi u fisiji – toplina stvara paru koja onda okreće turbine generatora. Ukupna oslobođena energija u fisiji nastaje uslijed razlike u energiji vezanja nukleusa $^{235}U_{92}$ i nukleusa $^{92}Kr_{36}$ i $^{142}Ba_{56}$. Fragmenti fisije su puno stabilnije jezgre, tj. po nukleonu imaju veće energije vezanja.

Energija vezanja (binding energy) jezgre mase M, rednog broja Z (broj protona) i N neutrona je:

$$E_{vez} = Zm_pc^2 + Nm_nc^2 - Mc^2 = (Zm_p + Nm_n - M)c^2 = \Delta mc^2. \tag{3.24}$$

Kako su mase protona i neutrona: $m_p = 1{,}672622 \times 10^{-27}$ Kg = 938,2722 MeV/c^2 i $m_n = 1{,}674927 \times 10^{-27}$ Kg = 939,5653 MeV/c^2 za reakciju (3.23) je:

^{235}U:	7,6 MeV/c^2 po nukleonu	$\rightarrow$	1797,1 MeV/c^2 po nukleusu
^{92}Kr:	8,7 MeV/c^2 po nukleonu	$\rightarrow$	800,9 MeV/c^2 po nukleusu
^{142}Ba:	8,4 MeV/c^2 po nukleonu	$\rightarrow$	1189,5 MeV/c^2 po nukleusu

Razlika mase je $\Delta m = (1189{,}5 + 800{,}9 - 1797{,}1)\ MeV/c^2 = 193{,}3\ MeV/c^2$, što znači da se u fisiji jedne jezgre ^{235}U oslobodi 193,3 MeV topline. Kako ^{235}U ima masu: $m_U = 235{,}043926\ u = 3{,}9030 \times 10^{-25}\ Kg$, energija koja se oslobodi po Kg "goriva" je:

$$\frac{193{,}3 MeV}{3{,}903 \times 10^{-25} Kg} = 4{,}95 \times 10^{26}\ MeV/Kg = 7{,}92 \times 10^{13}\ J/Kg = 2{,}2 \times 10^{7}\ KWh/Kg\ .$$

- **Fuzija**

U procesu nuklearne fuzije dvije lake jezgre spajaju se u jednu težu uz oslobađanje energije. Takvi procesi se dešavaju u središnjim djelovima zvijezda. U budućnosti će se električna energija proizvoditi u fuzijskoj nuklearnoj elektrani koja će fuzirati izotope vodika. Tipična reakcija je fuzija nukleusa deuterija ^2H i tricija ^3H:

$$^2H + {}^3H = {}^4He + n + 17{,}6\ MeV \tag{3.25}$$

Zbog dostupnosti "goriva" i nepostojanja problema radioaktivnog otpada, a i zbog oko 4,3 puta veće efikasnosti fuzijska elektrana je mnogo bolja od fisijske.

Veliki znanstveni i tehnološki problem je kako plin (plazmu) dovoljne gustoće zagrijanu na oko 10^8 K očuvati na okupu dovoljno dugo da spontano dođe do fuzije malog broja jezgara (i naravno spriječiti da plazma dospije u kontakt sa zidovima reaktora)!

Energija oslobođena po Kg "goriva" u reakciji (3.25) je:

$$\frac{17{,}6 MeV}{M_d + M_t} = \frac{17{,}6 MeV}{8{,}353 \times 10^{-27} Kg} = 2{,}11 \times 10^{27}\ MeV/Kg = 3{,}38 \times 10^{14}\ J/Kg = 9{,}4 \times 10^{7}\ KWh/Kg\ .$$

U relativističkim izrazima za impuls (3.15) i energiju (3.22) čestice mase m koja se giba brzinom $\vec{v}$ pojavljuju se tri veličine $\vec{p}, \vec{v}$ i E. Koristeći

$$\vec{v} = \frac{c^2}{E}\vec{p}\ , \tag{3.26}$$

možemo eliminirati brzinu i dobiti karakterističnu vezu energije i impulsa čestice u relativističkoj fizici:

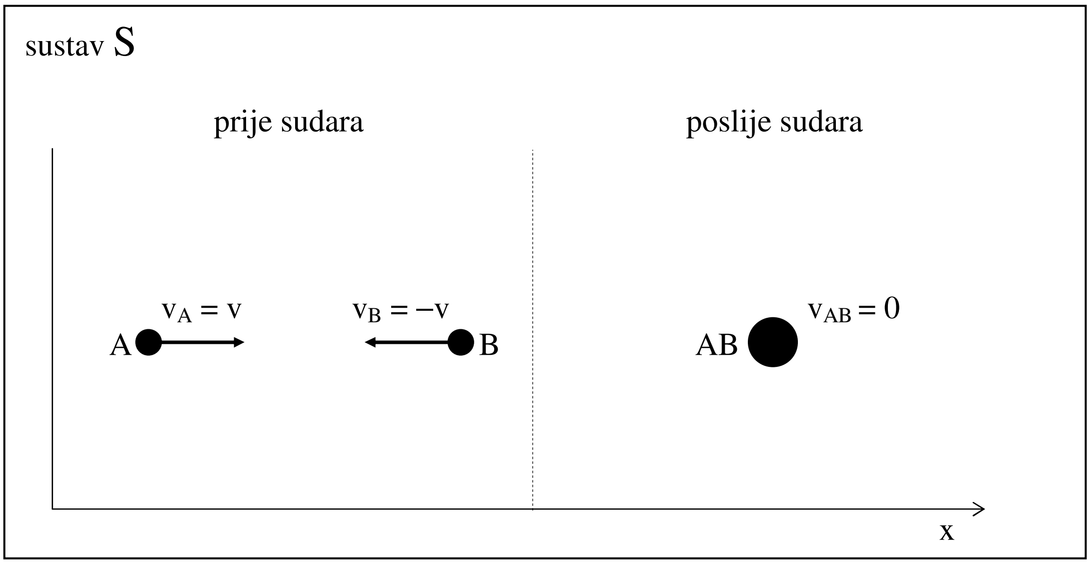
$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4\ . \tag{3.27}$$

Analogna veza energije i impulsa slobodne čestice u klasičnoj fizici je: $E = \dfrac{\vec{p}^2}{2m}$.

Zakon očuvanja energije u relativističkoj fizici zamjenjuje dva zakona očuvanja iz klasične fizike: zakon očuvanja mase i zakon očuvanja energije!

Treba još za energiju definiranu u (3.22) pokazati važenje zakona očuvanja u nekom procesu – recimo u potpuno neelastičnom sudaru dviju čestica (kugli) A + B $\rightarrow$ AB iz *Primjera* 6. i naći transformacije impulsa i energije pri prelasku iz jednog u drugi IRS.

Zamislimo dvije čestice A i B istih masa $m_A = m_B = 4$ Kg koje se u sustavu S gibaju duž x-osi brzinama $v_A = 0{,}6c = 1{,}8 \times 10^8$ ms^{-1} i $v_B = -\,0{,}6c = 1{,}8 \times 10^8$ ms^{-1} kao na Slici 4a. Relativistički faktor je isti za obje čestice: $\gamma \equiv \gamma_A = \gamma_B = 5/4$. Prije sudara impulsi čestica su jednaki po intenzitetu, ali suprotnog pravca, tj. $p_A = \gamma_A m_A v_A = 3$ cKg i $p_B = \gamma_B m_B v_B = -\,3$ cKg, a ukupni impuls sustava je nula $p_A + p_B = 0$.

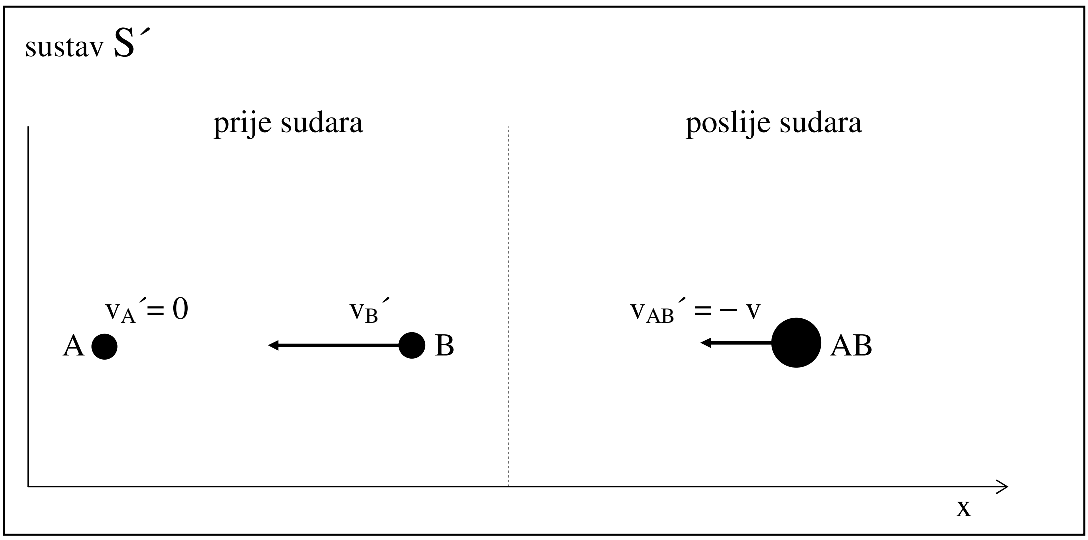


Slika 4a.

Zakon očuvanja impulsa važi u svakom sudaru, elastičnom ili neelastičnom, u svakom IRS-u.

U sustavu S koji je sustav centra impulsa, je naravno trivijalno: $p_{Prije} = 0 = p_{Poslije}$. Da bi iskoristili očuvanje impulsa moramo preći u neki drugi IRS.

Pametno izaberimo novi sustav S´ da se giba brzinom $V = v = 0{,}6c$ duž x-osi u odnosu na S, tako da situacija prije i poslije sudara bude transparentna.



Slika 4b.

U sustavu S´ čestica A prije sudara miruje $v_A{'}= 0$ (jer se u S giba brzinom v), a poslije sudara novonastala čestica AB ima brzinu $v_{AB}{'}= -v$ (jer u sustavu S miruje) kao na Slici 4b.

Treba naći brzinu kugle B prije sudara u S´. Iz (2.41) inverzna transformacija je: $v' = \dfrac{v - V}{1 - \dfrac{vV}{c^2}}$

što daje: $v_B{'} = -\dfrac{2v}{1 + \dfrac{v^2}{c^2}}$.

Impuls prije sudara (inicijalni) p^{in} u S´ je onda:

$$p'^{in} = p_B{'} = \gamma_{v'_B}\, m\, v'_B = \frac{m v_B{'}}{\sqrt{1 - \dfrac{v_B{'}^2}{c^2}}} = -\frac{2mv}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = -2\gamma^2 mv, \qquad (3.28)$$

jer je: $\sqrt{1 - \dfrac{v_B{'}^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{4v^2}{\left(1 + v^2/c^2\right)^2}} = \dfrac{1}{1 + v^2/c^2}\sqrt{\left(1 + \dfrac{v^2}{c^2}\right)^2 - \dfrac{4v^2}{c^2}} = \dfrac{1 - v^2/c^2}{1 + v^2/c^2}$.

Poslije sudara ukupni impuls (finalni) čestice AB mase M je:

$$p'^{fi} = -\frac{Mv}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = -\gamma M v. \qquad (3.29)$$

Kako je $p'^{fi} = p'^{in}$ dobijamo masu čestice AB u S´:

$$M = 2\gamma m\,. \qquad (3.30)$$

Razmotrimo pažljivo očuvanje energije sustava prije E'^{in} i poslije E'^{fi} sudara u S´.

E'^{in} – prije sudara čestica A mirije, a čestica B se giba brzinom $v'_B = -\dfrac{2v}{1 + v^2/c^2}$, pa je:

$$E'^{in} = E'^{in}_A + E'^{in}_B = mc^2 + \gamma_{v'_B}\, mc^2 = mc^2 + mc^2\frac{1 + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = 2\gamma^2 mc^2 \qquad (3.31)$$

E'^{fi} – poslije sudara čestica AB mase $M = 2\gamma m$ giba se brzinom $v_{AB}{'}= -v$, pa je:

$$E'^{fi} = \gamma M c^2 = 2\gamma^2 mc^2 = E'^{in}\,. \qquad (3.32)$$

Kao što i treba biti, u ovom primjeru neelastičnog sudara čestica (kugli) A i B važi zakon očuvanja energije, promatran u IRS-u S´.

Razmotrimo sad očuvanje energije sustava prije E^{in} i poslije E^{fi} sudara, ali u sustavu S.

Iz (3.32) energija čestice AB u S´ je: $E' = \gamma(Mc^2) = \gamma(2\gamma mc^2) = \gamma E_0$ – to je energija čestice koja se giba brzinom –v , što prema definiciji (3.22) znači da, kad ta čestica miruje (tj. u sustavu S) njena energija je:

E^{fi}:

$$E^{fi} = Mc^2 = 2\gamma mc^2 \,. \tag{3.33}$$

Eⁱⁿ – u S prije sudara kugle A i B gibaju se brzinom v i – v, pa je:

$$E^{in} = E_A{}^{in} + E_B{}^{in} = \gamma mc^2 + \gamma mc^2 = 2\gamma mc^2 = E^{fi} \,. \tag{3.34}$$

Ovaj primjer pokazuje da:

Zakon očuvanja energije važi u svakom IRS-u (i u S i u S´), ali energija nije Lorentz invarijantna veličina (nema istu vrijednost u svakom IRS-u)! Isto naravno važi i za impuls sustava.

Da nađemo Loretzove transformacije energije i impulsa pri prelasku iz jednog u drugi IRS (iz S u S´ koji se giba brzinom *V* duž x-osi u odnosu na S) pođimo od definicija (3.22) i (3.15) za česticu mase m koja se giba proizvoljnom brzinom $\vec{v}$ u S sustavu ($\vec{v}'$ u S´):

u IRS-u S	**u IRS-u S´**
$E = \gamma mc^2$	$E' = \gamma' mc^2$
$p_x = \gamma m v_x$	$p'_x = \gamma' m v'_x$
$p_y = \gamma m v_y$	$p'_y = \gamma' m v'_y$
$p_z = \gamma m v_z$	$p'_z = \gamma' m v'_z$

gdje je: $\gamma \equiv \gamma_{\vec{v}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\vec{v}^2}{c^2}}}$ i $\gamma' \equiv \gamma_{\vec{v}'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\vec{v}'^2}{c^2}}}$. Trebat će nam i $\gamma_V = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$.

Iz (2.46) inverzna relacija je: $\gamma' = \gamma_V\left(1-\dfrac{v_x V}{c^2}\right)\gamma$, pa je zbog (2.43):

$$E' = mc^2\gamma' = \gamma_V\,(E - Vp_x)$$

$$p'_x = mv'_x\gamma' = m\left(\frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}\right)\gamma_V\left(1 - v_x V/c^2\right)\gamma = \gamma_V\left(p_x - \frac{V}{c^2}E\right)$$

$$p'_y = mv'_y\gamma' = m\left[\frac{v_y}{\gamma_V\left(1 - v_x V/c^2\right)}\right]\gamma_V\left(1 - v_x V/c^2\right)\gamma = mv_y\gamma = p_y$$

$$p'_z = mv'_z\gamma' = m\left[\frac{v_z}{\gamma_V\left(1 - v_x V/c^2\right)}\right]\gamma_V\left(1 - v_x V/c^2\right)\gamma = mv_z\gamma = p_z \,.$$

Energija i impuls čestice (fizikalnog sustava) se pri Lorentzovom potisku duž x-osi brzinom V transformiraju prema:

$$E' = \gamma(E - Vp_x) \quad ; \quad p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{V}{c^2}E\right) \quad ; \quad p'_y = p_y \quad ; \quad p'_z = p_z \,. \tag{3.35}$$

Usporedba s (2.5) ili (2.7) pokazuje da se energija E transformira kao vrijeme t, a impuls $\vec{p}$ kao radijus vektor $\vec{r}$. Sličnost postaje očigledna ako definiramo 4-vektor impulsa kao:

$$p_\mu = (p_0\,, \vec{p}\,) \equiv \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \tag{3.36}$$

pa je:

$$p'_0 = \gamma(p_0 - \beta p_1) \quad ; \quad p'_1 = \gamma(p_1 - \beta p_0) \quad ; \quad p'_2 = p_2 \quad ; \quad p'_3 = p_3 \,, \tag{3.37}$$

što znači da je p_μ *kovarijantni 4-vektor energije-impulsa čiji je kvadrat Lorentz invarijantan (ima istu vrijednost u bilo kojem IRS-u)*:

$$p_\mu p^\mu = p_0^{\,2} - \vec{p}^{\,2} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = \textbf{Lorentz invarijanta} = m^2c^2 \,. \tag{3.38}$$

Zadnja jednakost se dobije računanjem kvadrata 4-vektora impulsa $p_\mu p^\mu$ u sustavu mirovanja čestice (centra impulsa fizikalnog sustava) u kome je $p_\mu = (\frac{E_0}{c}, \vec{0}) = (mc, \vec{0})$.

Znači, za svaku česticu (fizikalni sustav) važi relativistička veza energije i impulsa:

$$E = \sqrt{c^2\vec{p}^{\,2} + m^2c^4} \,. \tag{3.39}$$

Kako je $c^2p_\mu p^\mu = m^2c^4 = E_0^{\,2}$ Lorentz invarijanta, najvažna implikacija koja slijedi iz (3.38) ili (3.39) je:

Masa i energija mirovanja bilo kojeg izoliranog fizikalnog sustava (čestice) imaju istu vrijednost u bilo kojem IRS-u!

Ali, samo u sustavu centra impulsa (mirovanja) gdje je $\vec{p} = 0$ je ukupna energija $E = \gamma E_0$ jednaka energiji mirovanja $E_0 = mc^2$.

Napomenimo uzgred da relativistička veza energije i impulsa čestice (3.39), zbog kvadratnog korjena, dozvoljava kako pozitivne tako i negativne energije. Naravno, čestice imaju pozitivne energije, tj. po definiciji biramo pozitivni znak u (3.39). Ali, u relativističkoj kvantnoj fizici, negativna energetska stanja ne samo što se ne mogu odbaciti, nego su apsolutno neophodna, jer uz određenu redefiniciju, postaju stanja pozitivne energije odgovarajućih antičestica! Upravo to je osnovni razlog zbog koga je Dirac 1928. teorijski predvidio postojanje “antielektrona” prije nego što je eksperimentalno detektiran pozitron (Anderson 1932.).

Ponekad je zgodnije za transformiranje komponenti impulsa umjesto (3.37) koristiti izraze za Lorentzovu transformaciju u proizvoljnom pravcu $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$ u vektorskom obliku:

$$p'_0 = \gamma\,(p_0 - \vec{\beta}\cdot\vec{v}) \;; \qquad p'_{\parallel} = \gamma\,(p_{\parallel} - \beta p_0) \;; \qquad \vec{p}\,'_{\perp} = \vec{p}_{\perp} \,. \tag{3.40}$$

Inverzne transformacije slijede iz (3.37) i (3.40) zamjenom $p'_\mu \leftrightarrow p_\mu$ i $V \rightarrow -V$.

Kao i u slučaju kvadrata udaljenosti dva događaja u prostor-vremenu, zbog "–" znaka pseudo-euklidske metrike, kvadrat impulsa čestice u (3.38) može biti pozitivan, negativan ili nula. Za realne čestice mora biti:

$$p^\mu p_\mu > 0 \;\Leftrightarrow\; m^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; m > 0 \quad \text{– masivne čestice ili}$$

$$p^\mu p_\mu = 0 \;\Leftrightarrow\; m^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; m = 0 \quad \text{– čestice bez mase .}$$

(U nekim egzotičnim modelima se ponekad razmatraju hipotetske čestice – tahioni za koje bi bilo $p^\mu p_\mu < 0 \;\Leftrightarrow\; m^2 < 0 \;\Leftrightarrow$ imaginarna masa $\Leftrightarrow\; v > c$).

Za razliku od klasične fizike u kojoj iz m = 0, slijedi da su sve čestične fizikalne veličine nula: $T = E = 0$; $\vec{p} = 0$ i $\vec{L} = 0$, relativistička fizika dopušta postojanje čestica bez mase!

Koliko danas zna suvremena fizika u prirodi postoje tri vrste elementarnih čestica bez mase:

- Fotoni – medijatori elektromagnetskih interakcija među električno nabijenim elementarnim česticama, tj. kvanti elektromagnetskog zračenja,
- Gluoni – medijatori jakih nuklearnih interakcija među kvarkovima i
- Gravitoni – medijatori gravitacijskih interakcija.

Fotoni i gluoni su eksperimentalno otkriveni, a upravo započinje nova generacija eksperimenata čiji je cilj direktna detekcija gravitacijskih valova koji su "rojevi" gravitona, slično svjetlosti koja je "roj" fotona. Zasada su gravitoni, tj. gravitacijski valovi, detektirani samo indirektno, kao promjena brzine rotacije sustava dvojnih neutronskih zvijezda (pulsara) uslijed emisije gravitacijskih valova.

Za česticu bez mase veza energije i impulsa (3.39) mijenja se u:

$$E = pc \quad (\text{za } m = 0)\,,\ \text{gdje je } p = |\vec{p}|\,, \tag{3.41}$$

pa iz (3.26) slijedi: $v = c$.

Čestica bez mase se uvijek giba brzinom svjetlosti!, za razliku od masivnih čestica za koje je uvijek $v < c$!

Masa fotona je nula, ali mu energija nikad nije nula jer je impuls fotona uvijek različit od nule, tj. ne postoji sustav mirovanja fotona. No, sustav (bar dva) fotona ima energiju mirovanja različitu od nule – jer energija mirovanja sustava čestica koje se gibaju nije zbroj energija mirovanja svake od njih, kako pokazuje slijedeći primjer.

Primjer 13. **Energija mirovanja sustava fotona**

Neka se dva fotona energija $E_1 = 4$ MeV i $E_2 = 1$ MeV približavaju jedan drugom duž x-osi. Prema (3.41) njihovi impulsi su: $p_1 = 4$ MeV/c i $p_2 = -1$ MeV/c . Znači, sustav ova dva fotona ima energiju i impuls:

$$E = E_1 + E_2 = 5 \text{ MeV} ; \quad p_x = p_1 + p_2 = 3 \text{ MeV/c} ,$$

što prema (3.39) znači da je energija mirovanja sustava:

$$E_0 = mc^2 = \sqrt{E^2 - c^2\vec{p}^2} = \sqrt{(5\text{MeV})^2 - (3\text{MeV})^2} = 4 \text{ MeV} .$$

Primjena zakona očuvanja energije i impulsa u relativističkoj mehanici olakšana je korištenjem 4-vektorske formulacije jer se svodi na zakon očuvanja 4-vektora energije-impulsa (3.36).

Na primjer, uobičajene interakcije među elementarnim česticama su procesi emisije i apsorpcije čestica, raspršenja ("sudara") jedne čestice na drugoj, raspada čestica i kreacije i anihilacije čestica.

Tipični proces je recimo "2-2" interakcija u kome imamo dvije čestice u početnom (inicijalnom) stanju, recimo čestice A i B, i dvije čestice u konačnom (finalnom) stanju, recimo čestice C i D. Inicijalne i finalne čestice mogu, ali ne moraju biti iste vrste. Shematski ovaj proces je: $A + B \to C + D$. Svaka čestica ima svoj 4-vektor impulsa: $(p_A)_\mu = \left(\frac{E_A}{c}, \vec{p}_A\right)$, gdje indeks A označava česticu, a indeks $\mu = 0,1,2,3$ označava komponente 4-vektora. Zakon očuvanja energije-impulsa je onda:

$$p^{in}{}_\mu = p^{fi}{}_\mu \quad \Leftrightarrow \quad (p_A + p_B)_\mu = (p_C + p_D)_\mu , \tag{3.42}$$

što za $\mu = 0$ predstavlja zakon očuvanja energije, a za $\mu = 1,2,3$ zakon očuvanja komponenti impulsa.

Za opis procesa prvo se odabere pogodni IRS – najčešće je to sustav centra impulsa, laboratorijski, ili sustav mirovanja jedne od čestica u procesu, pa se u tom IRS-u odrede 4-vektori svih čestica koji ulaze u zakone očuvanja (3.42). Po potrebi se onda Lorentzovom transformacijom bilo koji rezultat može izraziti u nekom drugom IRS-u.

Ilistrirajmo proceduru primjene zakona očuvanja na primjerima raspada čestica i elastičnog raspršenja fotona na elektronu.

Primjer 14. **Raspadi elementarnih čestica**

Postoji puno nestabilnih elementarnih čestica koje se spontano raspadaju na dvije ili više drugih čestica. Npr.: raspad neutrona na proton, elektron i elektronski antineutrino (β raspad): $n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ – tročestični raspad, ili raspad piona u muon i muonski neutrino: $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ – dvočestični raspad.

Da bi bio moguć spontani raspad, zakon očuvanja energije zahtjeva da inicijalna masa bude veća od finalne:

$$m^{in} > \sum_i m_i^{fi} .$$

Npr., za dvočestični raspad A → B + C zakon očuvanja energije je: $E_A = E_B + E_C$. U sustavu mirovanja čestice A je $E_A = m_A c^2$, a, napišemo li E_B i E_C pomoću energije mirovanja i kinetičke energije važi:

$$m_A c^2 = m_B c^2 + T_B + m_A c^2 + T_C \ .$$

Kako je: $T_B + T_C > 0$, zaista slijedi: $m_A > m_B + m_C$.

Primjenom zakona očuvanja 4-vektora impulsa na dvočestični raspad A → B + C možemo naći izraze za energije i impulse produkata raspada.

U raspadu važi zakon očuvanja 4-vektora energije-impulsa: $(p_A)_\mu = (p_B + p_C)_\mu$.
U sustavu mirovanja čestice A je:

$$p_A = \left(m_A c^2, \vec{0}\right) \qquad p_B = \left(\frac{E_B}{c}, \vec{p}_B\right) \qquad p_C = \left(\frac{E_C}{c}, \vec{p}_C\right) .$$

Zakon očuvanja impulsa (μ = 1,2,3) daje: $\vec{0} = \vec{p}_B + \vec{p}_C$ ili $\vec{p}_B = -\vec{p}_C$ tj. $p \equiv |\vec{p}_B| = |\vec{p}_C|$.

Zakon očuvanja energije (μ = 0) daje: $m_A c^2 = E_B + E_C$, tj. $E_C = m_A c^2 - E_B$. Prema (3.27) koristeći: $p^2 = \vec{p}_A^{\,2} = \vec{p}_B^{\,2}$ imamo:

$$E_C^2 = \vec{p}_C^{\,2} c^2 + m_C^2 c^4 = \vec{p}_B^{\,2} c^2 + m_C^2 c^4 = E_B^2 - m_B^2 c^4 + m_C^2 c^4 = (\, m_A c^2 - E_B\,)^2 \ ,$$

te konačno: $$E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A} c^2 \ ; \qquad E_C = \frac{m_A^2 - m_B^2 + m_C^2}{2m_A} c^2 \ .$$

Iz $p \equiv |\vec{p}_B| = |\vec{p}_C| = \left[\left(\frac{E_B}{c}\right)^2 - (m_B c)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ lako se dobije:

$$p \equiv |\vec{p}_B| = |\vec{p}_C| = \frac{\left[m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2\right]^{\frac{1}{2}}}{2m_A} c \ .$$

Primjer 15: **Angularne korelacije u raspadu Higgs bozona $\mathbf{h \rightarrow \gamma + \gamma}$**

Fizičari elementarnih čestica već skoro 30-ak godina tragaju za «famoznim» Higgs bozonom – novom česticom odgovornom za generiranje mase drugih čestica. Očekuje se da će se u sudarima snopova 7 TeV protona u novom LHC akceleratoru u CERN-u kreirati otprilike jedan Higg bozon na dan. Higgs bozon je nestabilan i praktično trenutno se raspada u druge čestice. Jedan od više mogućih načina raspada, je raspad u dva fotona: $\mathbf{h \rightarrow \gamma + \gamma}$. U eksperimentima se detektiraju γ-fotoni iz raspada pomoću ionizacija i/ili scintilacija koje proizvode u materijalu detektora i mjere im se energija i impuls.

Problem za fizičare je da u ogromnom broju fotona koji svakog trenutka ulaze u detektor prepoznaju baš one koji dolaze iz raspada Higgs bozona. Jedan od načina koji se koriste za izdvajanje fotona iz Higgs raspada su angularne korelacije (relacije koje povezuju kut između impulsa fotona i njihove energije) koje su posljedica zakona očuvanja:

$$p^h{}_\mu = (p^\gamma{}_1 + p^\gamma{}_2)_\mu \ .$$

U sustavu mirovanja Higgs bozona kvadrat njegovog 4-vektora energije-impulsa je:

$$(p^h)^2 = m^2c^2 \ .$$

U laboratorijskom sustavu u kome se mjere energija i impuls fotona je:

$$(p^\gamma{}_1 + p^\gamma{}_2)^2 = \left(\frac{E_1 + E_2}{c}\right)^2 - \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)^2 \ .$$

Kako je kvadrat 4-vektora Lorentz invarijantan, mora biti:

$$m^2c^2 = \left(\frac{E_1 + E_2}{c}\right)^2 - \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)^2 \ , \text{ tj.}$$

$$m^2c^4 = (E_1 + E_2)^2 - c^2\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)^2 \ .$$

Za fotone je: $E^2 = c^2\,\vec{p}^{\,2}$ i $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\varphi = \frac{E_1E_2}{c^2}\cos\varphi$, te je:

$$m^2c^4 = 2E_1E_2(1 - \cos\varphi) \ .$$

Kako je $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, konačno dobijamo angularnu korelaciju fotona iz raspada Higgs bozona:

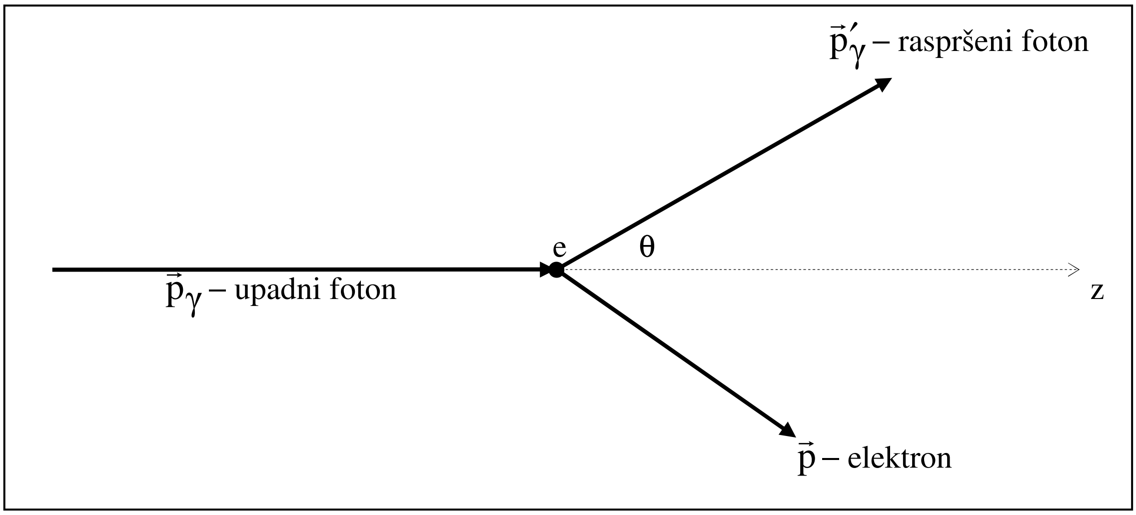
$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{mc^2}{2\sqrt{E_1E_2}} \ .$$

Samo par fotona čije energije i pravci gibanja zadovoljavaju gornju relaciju mogu dolaziti iz raspada Higgs bozona!

Primjer 16. **Comptonov efekt**

Elastično raspršenje fotona na elektronu naziva se Comptonov efekt. Uz fotoelektrični, Comptonov efekt je jedna od prvih eksperimentalnih potvrda kvantizacije elektromagnetske radijacije, tj. postojanja fotona. Compton je izveo teorijsku formulu za ovaj proces primjenom relativističkih zakona očuvanja energije i impulsa, a zatim dobijene rezultate eksperimentalno provjerio u raspšenju x-zraka na elektronima u grafitu.

Comptonov efekt je “2-2” proces – upadni foton “pogodi” (skoro) mirujući elektron i “odbije” se predavši elektronu dio svog impulsa i energije, kao na Slici 5.



Slika 5.

Proces razmatramo u IRS-u u kome elektron miruje koji je praktično laboratorijski sustav pošto je brzina slobodnih elektrona u grafitu na kojima se događa raspršenje vrlo mala. Odaberimo za z-os (x_3-os) pravac upadnog fotona. Četvoro vektori čestica u početnom stanju – upadnog fotona i mirujućeg elektrona su onda:

$$p^{in}{}_\mu = p^\gamma{}_\mu + p_\mu\,, \quad \text{gdje je:} \quad p^\gamma{}_\mu = \left(\frac{E_\gamma}{c}, \vec{p}_\gamma\right) \;;\quad p_\mu = (mc, \vec{0})\,. \tag{3.43}$$

U finalnom stanju imamo raspršeni foton γ' i odbijeni elektron, tako da je 4-vektor energije-impulsa:

$$p^{fi}{}_\mu = p^{\gamma'}{}_\mu + p'_\mu\,, \quad \text{gdje je:} \quad p^{\gamma'}{}_\mu = \left(\frac{E'_\gamma}{c}, \vec{p}'_\gamma\right) \;;\quad p'_\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)\,. \tag{3.44}$$

Zakon očuvanja je:

$$p^{in}{}_\mu = p^{fi}{}_\mu \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{E_\gamma}{c}, \vec{p}_\gamma\right) + (mc, \vec{0}) = \left(\frac{E'_\gamma}{c}, \vec{p}'_\gamma\right) + \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)\,. \tag{3.45}$$

Za $\mu = 0$ je (očuvanje energije):

$$E_\gamma + mc^2 = E'_\gamma + E\,, \tag{3.46}$$

a, za μ = 1,2,3 je (očuvanje impulsa):

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}\,'_\gamma + \vec{p} \ . \tag{3.47}$$

Kako je $\vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}\,'_\gamma = p_\gamma p'_\gamma \cos\theta$ prema Slici 5., iz (3.47) kvadriranjem je:

$$p^2 = p_\gamma^2 + p'^2_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma \cos\theta \ . \tag{3.48}$$

Prema (3.41) za fotone je: $E_\gamma = c\left|\vec{p}_\gamma\right| = cp_\gamma$ i $E'_\gamma = c\left|\vec{p}\,'_\gamma\right| = cp'_\gamma$, a prema (3.39) za elektron je $E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$, što uvrštavanjem u (3.46) daje: $(p_\gamma - p'_\gamma) + mc = \sqrt{p^2 + m^2c^2}$, pa kvadriranjem dobijamo:

$$p^2 = p_\gamma^2 + p'^2_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma + 2mc(p_\gamma - p'_\gamma) \ . \tag{3.49}$$

Iz (3.48) i (3.49) se lako djeljenjem s $p_\gamma p'_\gamma$ dobije zakon očuvanja energije i impulsa fotona u Comptonovom efektu:

$$\frac{1}{p'_\gamma} - \frac{1}{p_\gamma} = \frac{1}{mc}(1 - \cos\theta) \quad \text{ili} \quad \frac{c}{E'_\gamma} - \frac{c}{E_\gamma} = \frac{1}{mc}(1 - \cos\theta) \ . \tag{3.50}$$

Za foton je $c = \lambda\nu$ i $E = h\nu$, gdje je λ valna duljina, a ν frekvencija fotona (h je Planckova konstanta), pa je: $c/E = \lambda/h$. Ako se ovi izrazi uvrste u (3.50), konačno se dobije Comptonova formula:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \ . \tag{3.51}$$

Kako je $0 \le \Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda \le 2\frac{h}{mc}$, a $\lambda_c \equiv \frac{h}{mc} = 2{,}43 \times 10^{-12}$ m, promjena valne duljine fotona u raspršenju može se mjeriti samo ako je i valna duljina upadnog fotona dovoljno mala, tj. ako je $\lambda \le 10^{-9}$ m. Zato se Comptonov efekt eksperimentalno može detektirati samo na fotonima x i γ-zraka.

Valna duljina λ_c naziva se Comptonova valna duljina elektrona. To je važna karakteristična fizikalna duljina koja određuje domenu valjanosti klasične elektrodinamike – **na skali duljina manjoj od λ_c kvantni efekti se sigurno ne mogu zanemariti!**

Maksimalno pojednostavljeno govoreći, kad važi klasična elektrodinamika, tj. kad je $\lambda >> \lambda_c$ promjena valne duljine fotona (a, time i promjena ostalih fizikalnih veličina – energije, impulsa,…) u interakciji s elektronima $\Delta\lambda << \lambda$, je toliko mala da se raspršeni foton može smatrati "identičnim" upadnom fotonu (osim promjene pravca gibanja). To znači da možemo zadržati "valni", tj. koherentni opis gibanja sustava fotona iz klasične elektrodinamike. Ali, za "tvrde" x-zrake i pogotovo za γ-zrake, kad je $\lambda \approx \lambda_c$, bit će i $\Delta\lambda \approx \lambda$, pa raspršeni foton sigurno nije identičan upadnom – svaka interakcija takvih fotona s elektronima zahtijeva razmatranje individualnih čestica i ne dozvoljava opis pomoću koherentnog ("skupnog") gibanja cijelog ansambla fotona.

3.3 Relativistički Hamiltonijan

Transformacije brzine čestice $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, (2.40) ili (2.43), pokazuju da brzina nije 4-vektor. Uzrok je neinvarijantnost vremena pri Lorentzovim transformacijama.

Ali, za svaku česticu postoji Lorentz invarijantni vremenski diferencijal – diferencijal svojstvenog vremena čestice $d\tau$:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{dt}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}dt = \sqrt{1-\vec{\beta}^2}dt \ . \tag{3.52}$$

Zbog Lorentzove invarijantnosti skalarnog produkta dva 4-vektora (2.13), invarijantan je kvadrat udaljenosti dvije bliske točke u prostor-vremenu:

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2d\tau^2 - \textbf{Lorentz invarijanta} \ , \tag{3.53}$$

gdje je zadnja jednakost iskazana u sustavu mirovanja $|d\vec{x}| = 0$ čestice. Pomoću svojtvenog vremena definira se 4-vektor brzine čestice V_μ kao derivacija 4-vektora $x_\mu = (x_0\,,\ \vec{x}\,) = (ct\,, \vec{r}\,)$ po τ:

$$V_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dx_\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} \quad \text{ili:} \quad V_0 \equiv \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{dx_0}{dt}\frac{dt}{d\tau} = c\gamma \ ; \quad \vec{V} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\vec{v} \ . \tag{3.54}$$

Kao i kvadrat svakog 4-vektora, kvadrat 4-brzine je Lorentz invarijantan:

$$V_\mu V^\mu = \gamma^2(\,c^2 - \vec{v}^2\,) = c^2 - \textbf{Lorentz invarijanta}. \tag{3.55}$$

Usporedba s (3.36) pokazuje da su 4-vektori energije-impulsa i 4- vektor brzine čestice proporcionalni

$$p_\mu = mV_\mu \ , \tag{3.56}$$

a, konstanta proporcionalnosti je masa čestice.

S kovarijantnim 4-vektorima koje koristimo za opisivanje gibanja čestice x_μ , V_μ i p_μ u prostor-vremenu, a koji su definirani kao relativističke generalizacije odgovarajućih veličina iz klasične fizike, može se definirati kovarijantna formulacija mehanike. Za to nam još nedostaje 4-vektor sile K_μ , koji se definira tako da II Newtonov zakon formalno ostane Lorentz invarijantan, tj. da važi:

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(mV_\mu\right) \ . \tag{3.57}$$

Za prostorne komponente $\mu = 1,2,3$ je:

$$\vec{K}=\frac{d\vec{p}}{d\tau}=\gamma\frac{d\vec{p}}{dt}=\gamma\vec{F}, \quad \text{gdje je} \quad \vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) \,, \tag{3.58}$$

a, $\vec{F}$ je uobičajena trodimenziona sila. Zbog faktora γ u (3.58) relativističke generalizacija bilo koje sile iz klasične fizike zavisi od brzine!

Kako je: $\quad K_\mu V^\mu = V^\mu \frac{d}{d\tau}(mV_\mu) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}mV^\mu V_\mu\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}mc^2\right) = 0$, važi:

$0 = K_\mu V^\mu = K_0V_0 - \vec{K}\cdot\vec{V} = K_0\,(c\gamma) - \gamma\vec{F}\cdot\vec{v}\gamma$, što za nultu komponentu 4-vektora sile daje:

$$K_0 = \frac{1}{c}\gamma\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{1}{c}\gamma\frac{dE}{dt} = \frac{1}{c}\gamma\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = mc\gamma\frac{d\gamma}{dt}, \tag{3.59}$$

jer je $\vec{F}\cdot\vec{v}$ trenutna snaga, tj. rad sile u jedinici vremena.

Kao i u klasičnoj mehanici, teorijska struktura relativističke mehanike jasnija je u Lagrangeovoj ili Hamiltonovoj (kanonskoj) formulaciji.

Pogledajmo kako se Lagrange-ova formulacija mehanike generalizira na relativistički slučaj.

U klasičnoj mehanici generalizirani moment pridružen generaliziranoj koordinati q_k definira se kao: $p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$. Ako je za neki stupanj slobode gibanja k, odgovarajuća generalizirana koordinata q_k upravo Kartezijeva koordinata x_i (i = 1,2,3) neke čestice, tada je generalizirani moment pridružen toj koordinati $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ baš i-ta komponenta impulsa te čestice $p_i = mv_i$. Najlakše je to vidjeti na primjeru jedne čestice na koju djeluje konzervativna sila $\vec{F} = -\nabla U(x,y,z)$. Lagrangian za takvu česticu je (bitno je da potencijalna energija ne zavisi od brzina, koje se onda pojavljuju samo u kinetičkoj energiji):

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) - U(x,y,z)\,, \tag{3.60}$$

pa je zaista: $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$.

Zahtijevamo da isto važi i u relativističkoj mehanici, tj. zahtijevamo da derivacija relativističkog Lagrangiana po Kartezijevoj komponenti brzine daje odgovarajuću komponentu relativističkog impulsa čestice:

$$p_i = \gamma m v_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T^{rel.}}{\partial \dot{x}_i} \,, \tag{3.61}$$

jer potencijalna energija ne zavisi od brzine. Dobija se diferencijalna jednadžba:

$$\frac{dT^{rel.}}{dv_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ , \quad \text{čije je rješenje:} \quad T^{rel.} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -\frac{mc^2}{\gamma} + \text{const.}$$

Konstanta integracije nije važna (možemo uzeti const. = 0) jer ne utječe na jednadžbe gibanja, pa je relativistički Lagrangian čestice koja se giba u potencijalu koji ne zavisi od brzine:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} - U(\vec{x}) = -\frac{mc^2}{\gamma} - U(\vec{x}) \ . \tag{3.62}$$

Lagrangeove jednadžbe gibanja (3.8) dobijaju se iz relativističkog Lagrangiana (3.62) na uobičajeni način:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\gamma m \dot{x}_i\right) = \frac{dp_i}{dt} \ ; \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

i naravno daju:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\nabla U = \vec{F} \ . \tag{3.63}$$

Specijalno, za slobodnu relativističku česticu Lagrangian je:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} = -\frac{mc^2}{\gamma} \ . \tag{3.64}$$

Hamiltonijan, koji je definiran kao $H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$, za relativističku česticu je:

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i v_i - L = \sum_{i=1}^{3} \frac{m v_i^{\ 2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + U = \gamma m v^2 + \frac{mc^2}{\gamma} + U = \gamma mc^2 + U = E \text{ , tj.}$$

$$H = \gamma mc^2 + U = E_0 + T + U = E \ . \tag{3.65}$$

Kao i u nerelativističkom slučaju, **Hamiltonijan je ukupna energija čestice!**

Kompletnosti radi, pokažimo na kraju kako se relativistička mehanika može na najopćenitiji način dobiti iz Hamiltonovog principa (principa minimalnog djelovanja).

Hamiltonov ili princip minimalnog djelovanja (3.3) kaže da za svaki fizikalni sustav postoji jedan integral I, koji se naziva djelovanje (akcija) tog fizikalnog sustava, a jednadžbe gibanja sustava slijede iz zahtjeva da djelovanje ima minimalnu vrijednost duž stvarne putanje sustava, tj. da je varijacija djelovanja $\delta I = 0$.

Znači, za svaki fizikalni sustav koji nas zanima treba odrediti (definirati) njegovo djelovanje: $I = \int_i^f dI$, gdje granice integracije označavaju početni ("i") i krajnji ("f") položaj (stanje) sustava.

Djelovanje nije potpuno proizvoljno, jer za svaki izolirani fizikalni sustav mora udovoljavati dva opća zahtjeva:

- dI je diferencijal prvog reda (da bi jednadžbe gibanja bile diferencijalne jednadžbe drugog reda) i
- I je Poencare invarijantno (da bi djelovanje imalo istu vrijednost u svim IRS-ima).

Djelovanje sustava se onda određuje (definira) u skladu s gornjim zahtjevima polazeći od najjednostavnijih ka složenijim fizikalnim sustavima.

Najjednostavniji fizikalni sustav je jedna slobodna čestica mase m. Položaj takve čestice u prostor-vremenu potpuno je određen njenim 4-vektorom položaja x_μ . Da bi djelovanje (akcija) bilo Lorentz invarijantno mora biti skalar, jer jedino skalar može biti Lorentz invarijantan (imati istu vrijednost u svim IRS-ima).

Jedini Lorentz invarijantni diferencijal prvog reda koji se može konstruirati s 4-vektorom x_μ položaja čestice je element njegove duljine $ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$, ili preciznije $dI = \alpha ds$, gdje je α neka realna konstanta. Znači, djelovanje za slobodnu česticu je:

$$I = \alpha \int_i^f ds = \alpha \int_i^f \sqrt{dx_\mu dx^\mu} = \alpha \int_i^f \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{x}^2} = \alpha c \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \ . \tag{3.66}$$

Ako je djelovanje fizikalnog sustava izraženo kao integral po vremenu, tj. $I = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L$, koeficijent uz dt je Lagrangian sustava. Za slobodnu relativističku česticu Lagrangian je onda:

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ . \tag{3.67}$$

Konstantu α lako je odrediti iz zahtjeva da gornji Lagrangijan u limesu $v/c \to 0$ prelazi u odgovarajući izraz iz klasične fizike $L = \frac{1}{2} mv^2 = T$. Razvojem u red desne strane u (3.67) lako se dobija: $L = \alpha c - \alpha c \frac{v^2}{2c^2} + ...$, pa zanemarujući članove višeg reda imamo: $\alpha = - mc$. Znači Lagrangian slobodne čestice je:

$$L = - mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} = - \frac{mc^2}{\gamma} \ . \tag{3.68}$$

Dobili smo isti izraz kao i u (3.64).

Lagrangian (3.68) je funkcija “generaliziranih” koordinata x_i (i = 1,2,3) i “generaliziranih” brzina $v_i = \dot{x}_i$, pa je generalizirani moment:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \gamma m v_i \ , \tag{3.69}$$

što je i-ta komponenta impulsa relativističke čestice kao u (3.15).

Ukupna energija čestice jednaka je Hamiltonijanu što daje:

$$H \equiv \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \gamma m c^2 = E, \tag{3.70}$$

isto kao i (3.22). Kvadriranjem i eliminiranjem v^2 iz (3.69) i (3.70) lako se dobija:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \ , \tag{3.71}$$

kao i (3.27) ili (3.29), što znači da je Hamiltonijan slobodne relativističke čestice:

$$H = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2} = E \ . \tag{3.72}$$

Za česticu koja se giba u potencijalu U koji ne zavisi od brzine je onda:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} - U \ , \quad \Leftrightarrow \quad H = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2} + U = E \ . \tag{3.73}$$

Lagrangian i/ili Hamiltonijan za fizikalne sustave s više čestica dobijaju se zbrajanjem odgovarajućih članova za pojedine čestice. Na primjer, za sustav dviju čestica masa m_1 i m_2 je:

$$L = -\frac{m_1 c^2}{\gamma_1} - \frac{m_2 c^2}{\gamma_2} - U \ , \tag{3.74}$$

tj.

$$H = c\sqrt{\vec{p}_1^{\ 2} + m_1^{\ 2} c^2} + c\sqrt{\vec{p}_2^{\ 2} + m_2^{\ 2} c^2} + U = E, \tag{3.75}$$

gdje je U potencijalna energija interakcije čestica.

Na kraju treba upozoriti da je kompletno kovarijantna formulacija mehanike sustava čestica moguća samo za tri tipa fizikalnih sustava:

- sustav slobodnih čestica,
- sustav nabijenih čestica na koje djeluju spoljašnje elektromagnetske sile i
- izolirani sustav nabijenih čestica među kojima djeluju slabe elektromagnetske sile.

Problem je naravno u silama koje djeluju na čestice u klasičnoj mehanici. Samo ako su interakcije među česticama u skladu s aksiomima STR (kao elektromagnetske interakcije) postojat će kovarijantna formulacija za gibanje takvog sustava.

Na primjer, tipični sustav u klasičnoj mehanici je kruto tijelo. Po definiciji, ako sila koja djeluje na jednu točku krutog tijela promjeni brzinu te točke, <u>u istom trenutku</u> moraju se na isti način promjeniti brzine svih točaka krutog tijela. Takav sustav uopće ne može postojati u STR!

U suštini, razlog je u baz ičnoj pretpostavci klasične fizike da postoji beskonačna brzina koja dozvoljava "djelovanje sila na daljinu". Sve takve sile su u suprotnosti s osnovnim aksiomima STR koji zahtijevaju da je maksimalna brzina c. STR zahtijeva lokalnost interakcija i nužno vodi na koncepciju polja. Naravno, ovo nije nikakvo ograničenje STR, već samo odraz činjenice da su mehanika sustava čestica, i klasična i relativistička, fizikalne teorije koje imaju ograničenu domenu valjanosti, pa se ultimativno moraju poopćiti na teoriju polja i kvantnu mehaniku, tj. na kvantnu teoriju polja.

I za najvažniju silu u klasičnoj mehanici – Newtonovu gravitacijsku silu, koja je također "djelovanje na daljinu", ne postoji relativistička formulacija.

Einsteinovo nastojanje da pronađe kovarijantnu relativističku formulaciju problema gibanja sustava čestica među kojima djeluju gravitacijske sile, rezultiralo je konačno 1916. "novom teorijom gravitacije" – Općom teorijom relativnosti.

4. KOVARIJANTNA FORMULACIJA ELEKTRODINAMIKE

Već smo napomenuli da su zakoni elektrodinamike invarijantni pri Lorentzovim, tj. općenitije pri Poencareovim transformacijama. Invarijantnost su pokazali Lorentz i Poencare 1903. i taj rezultat je Einsteinu bio jedan od glavnih motivirajućih faktora u formuliranju STR. Svi osnovni zakoni elektrodinamike sadržani su u Maxwellovim jednadžbama – jednadžbama gibanja elektromagnetskih polja i Lorentzovoj sili – elektromagnetskoj sili na česticu naboja Q :

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{4.1}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Elektromagnetska polja su vektorska polja, tj. vektorske funkcije točke u prostor-vremenu, npr. $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ i $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$. Maxwellove jednadžbe, ne samo da su u skladu sa STR, već su u skladu i s kvantnom teorijom i predstavljaju osnovu kvantne elektrodinamike kako je 1927. pokazao Dirac.

Invarijantnost forme, koja se naziva kovarijantnost, jednadžbi (4.1) znači da ako one važe u IRS-u S čije su koordinate $x_\mu = (x_0 , \vec{x}) \equiv (ct , \vec{r})$, u bilo kojem drugom IRS-u S´ čije su koordinate $x'_\mu = (x'_0 , \vec{x}') \equiv (ct', \vec{r}')$, važi ista jednadžba u kojoj su sve fizikalne veličine zamijenjene "crtkanim" veličinama. Npr. pri prelasku iz $S \to S'$, treba zamjeniti: $\vec{E}(\vec{r}, t) \to \vec{E}'(\vec{r}', t')$.

Kovarijantnost fizikalnih zakona zahtijeva da sve veličine koje se pojavljuju u nekom zakonu (jednadžbi) imaju točno određene transformacije pri prelasku iz jednog u drugi IRS, tj. pri Lorentzovim transformacijama. Ili iskazano na drugi način, kovarijantnost zahtijeva da fizikalne veličine moraju biti tenzori u prostoru Minkowskog, jer samo tenzori imaju točno određeni zakon transformacije pri Lorentzovim (Poencareovim) transformacijama. Na primjer pri prelasku iz sustava S u S´ važi za:

$$\text{tenzor 0-reda} \equiv \text{skalar} \quad \Rightarrow \quad a' = a \tag{4.2}$$

$$\text{tenzor 1-reda} \equiv \text{4-vektor} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a'_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} a_\nu \quad \text{– za kovarijantni 4-vektor} \\ a'^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu \quad \text{– za kontravarijantni 4-vektor} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Koristeći ista pravila za svaki kovarijantni/kontravarijantni (donji/gornji) indeks lako se dobijaju pravila transformacije za tenzore višeg reda. Npr.

$$\text{miješani tenzor 2-reda} \quad \Rightarrow \quad A'_\mu{}^\nu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} A_\rho{}^\sigma . \tag{4.4}$$

4.1 Lorentzova invarijantnost elektrodinamike – izvori i potencijali

Jednostavnosti radi razmotrimo elektromagnetska polja u vakuumu da ne moramo voditi računa o efektima polarizacije i magnetizacije sredstva. U vakuumu je: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ i $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, te:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{4.5}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

gdje je:

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad \text{i} \quad c = 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1} \cong 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}. \tag{4.6}$$

Da bismo pokazali da su osnovni zakoni elektrodinamike (4.5) u skladu s postulatima STR mogli bi definirati kako se sve veličine iz gornjih jednadžbi mijenjaju pri Lorentzovim transformacijama i onda pokazati invarijantnost, analogno postupku kojim je u poglavlju 1.1 pokazana invarijantnost II. Newtonova zakona pri Galilejevim transformacijama. Ali, takva procedura je tehnički veoma komplicirana i što je još važnije, fizikalno potpuno nepreglegna.

Zato se u pravilu za dokaz invarijantnosti Maxwellovih jednadžbi pri Lorentzovim transformacijama koristi tenzorska analiza. Najprije se elektromagnetske veličine definiraju kao 4-tenzori, čime je odmah određen njihov zakon transformacije pri prelasku iz jednog u drugi IRS. Potom se pokaže da su osnovne jednadžbe elektrodinamike kovarijantne, tj. da su to 4-tenzorske jednadžbe, čime je automatski zajamčena njihova valjanost u svakom IRS-u!

<u>Fizikalno najvažnija posljedica ove procedure je eksplicitna potvrda inherentne kovarijantnosti elektrodinamike. Sve fizikalne veličine u elektrodinamici su 4-dimenzionalni tenzori, što podrazumjeva relacije među njima koje u 3-dimenzionalnoj formulaciji često nisu odmah očigledne – npr. veza skalarnog Φ i vektorskog potencijala</u> $\vec{A}$, <u>ili veza električnog</u> $\vec{E}$ <u>i magnetskog polja</u> $\vec{B}$.

Da se pokaže kovarijantnost osnovnih jednadžbi elektrodinamike treba početi od uzroka postojanja elektromagnetskih polja – električnog naboja.

Naboj je fundamentalna karakteristika elementarnih čestica i apsolutno je očuvan u svakom poznatom fizikalnom procesu. Najbolji eksperimentalni dokaz, na nivou preciznosti $\approx 10^{-20}$e (e je kvant električnog naboja), je električna neutralnost svih atoma bez obzira na brzinu elektrona (ili protona), jer na primjer, u teškim atomima elektroni najbliži jezgri imaju relativističke brzine $\approx 0{,}5c$. Zato zahtijevamo da i u relativističkoj elektrodinamici naboj bude invarijantna i očuvana veličina.

Znači, naboj je Lorentz skalar za koji prema prema (4.2) važi:

$$Q' = Q, \tag{4.7}$$

što predstavlja invarijantnost naboja.

Diferencijalni (lokalni) oblik zakona očuvanja naboja je, takozvana, jednadžba kontinuiteta (ime po analogiji s dinamikom fluida):

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \ , \tag{4.8}$$

gdje je gustoća struje $\vec{j} = \rho \vec{v}$, mora važiti u svakom IRS-u. Lako je vidjeti da (4.8) direktno proizilazi iz dviju Maxwellovih jednadžbi u kojima se pojavljuju izvori ρ i $\vec{j}$.

Da se pokaže kovarijantnost zakona očuvanja naboja relaciju (4.8) *treba napisati pomoću tenzorskih veličina.*

Kako je $\frac{\partial}{\partial x'^{\rho}} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}$, te je prema (4.3) očigledno da se derivacija po kontravarijantnim komponentama $\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \equiv \partial_{\rho}$ transformira kao kovarijantni 4-vektor. Zato je kovarijantni operator 4-gradijenta:

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \ ; \tag{4.9}$$

slično je kontravarijantni 4-gradijent:

$$\partial^{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \ . \tag{4.10}$$

Proizilazi da je 4-divergencija proizvoljnog 4-vektora a_{μ} (ili a^{μ}) Lorentz invarijantna:

$$\partial^{\mu} a_{\mu} = \partial_{\mu} a^{\mu} = \frac{\partial a_0}{\partial x_0} + \nabla \cdot \vec{a} \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial a_0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{a} \ . \tag{4.11}$$

Četvoro-gradijent skalarnog polja ψ je 4-vektor:

$$\partial^{\mu} \psi \equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}, \nabla \psi \right) \quad \text{ili} \quad \partial_{\mu} \psi \equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}, -\nabla \psi \right) \ , \tag{4.12}$$

a, d´Alembertijan (d´Alembertov operator ≡ četvoro dimenzionalni Laplacijan) je Lorentz invarijantni produkt:

$$\Box \equiv \partial^{\mu} \partial_{\mu} = \partial_{\mu} \partial^{\mu} = \partial^0 \partial_0 + \partial^i \partial_i = \frac{\partial^2}{\partial {x_0}^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \ , \tag{4.13}$$

što je do na predznak, upravo operator valne jednadžbe u vakuumu .

Ako definiramo **4-vektor gustoće struje** kao:

$$j_{\mu} \equiv (c\rho \, , \vec{j}\,) \ , \tag{4.14}$$

diferencijalni oblik zakona očuvanju naboja (4.8) može se napisati u kovarijantnom obliku:

$$\partial^{\mu} j_{\mu} = 0\ . \tag{4.15}$$

Kako je j_{μ} kovarijantni 4-vektor, pri prelasku iz jednog u drugi IRS, transformira se u skladu s (2.10) ili (2.11), tj. pri općoj Lorentzovoj transformaciji je:

$$\rho' = \gamma\left(\rho - \frac{1}{c}\vec{\beta}\cdot\vec{j}\right) \qquad \vec{j}' = \gamma\left(\vec{j}_{\parallel} - \vec{V}\rho\right) + \vec{j}_{\perp}\ . \tag{4.16}$$

Inverzne transformacije dobijaju se, kao i uvijek, zamjenama: $j'_{\mu} \leftrightarrow j_{\mu}$ i $\vec{V} \to -\vec{V}$.

Specijalno u sustavu S u kome naboji miruju je: $j_{\mu} = \left(c\rho, \vec{0}\right)$, jer je $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Pri prelasku u neki drugi IRS S´ koji se u odnosu na S giba brzinom $\vec{V}$ za nultu komponentu $j_0 \equiv c\rho$ je onda:

$$j'_0 = \gamma j_0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho' = \gamma\rho\ . \tag{4.17}$$

Uslijed kontrakcije elementa volumena (2.21), za diferencijal naboja slijedi:

$$dQ' = \rho' dV' = (\gamma\rho)\frac{dV}{\gamma} = \rho dV = dQ\ . \tag{4.18}$$

Znači, prema definiciji 4-vektora gustoće struje (4.14), gustoća naboja ρ *i gustoća struje* $\vec{j}$ *su nulta i prostorne komponente kovarijantnog 4-vektora (analogne vremenu* t *i radijus vektoru* $\vec{r}$ *), pa se transformiraju u skladu s (4.16)! Ista definicija 4-vektora gustoće struje (4.14), osigurava Lorentz invarijantnost naboja (4.18), a iščezavanje njegove 4-divergencije (4.15) je zakon očuvanja naboja!*

Maxwellove jedanadžbe (4.5) se najčešće rješavaju tako da se elektromagnetska polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$ izraze preko skalarnog potencijala Φ i vektorskog potencijala $\vec{A}$ prema:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla\times\vec{A}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Lako je vidjeti da ove definicije pretvaraju dvije Maxwellove jednadžbe u kojima nema izvora u identitete.

U klasičnoj elektrodinamici uvođenje elektromagnetskih potencijala nije neophodno – moguće je kompletno formulirati teoriju bez uvođenja potencijala, samo pomoću elektromagnetskih polja. Elektromagnetski potencijali su pomoćne matematičke funkcije koje olakšavaju rješavanje jednadžbi gibanja. Ali, u kvantnoj elektrodinamici, tj. na nivou elementarnih čestica, elektromagnetski potencijali su apsolutno neophodni za formulaciju teorije (jer vektorski potenijal ima observabilne posljedice) i stvarno predstavljaju kvantno polje fotona.

Jasno je da bilo koja baždarna (gauge) transformacija elektromagnetskih potencijala:

$$\Phi_1 \to \Phi_2 = \Phi_1 - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad ; \quad \vec{A}_1 \to \vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \nabla \Lambda \ , \tag{4.20}$$

gdje je $\Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$ proizvoljno skalarno polje, ostavlja nepromjenjenim elektromagnetska polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$, jer je:

$$\vec{E}_2 = -\nabla\Phi_2 - \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} = -\nabla\Phi_1 - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} = \vec{E}_1 \quad \text{i} \quad \vec{B}_2 = \nabla \times \vec{A}_2 = \nabla \times \vec{A}_1 = \vec{B}_1 \ .$$

Prema tome, definicije (4.19) nisu dovoljne da se iz poznavanja elektromagnetskih polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$ odrede elektromagnetski potencijali.

Za određivanje potencijala mora se zadati dodatni uvjet baždarenja (gauge uvjet) koji specificira $\nabla \cdot \vec{A}$. Odaberimo Lorentzov baždarni (gauge) uvjet, tako da je:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \ . \tag{4.21}$$

Ako u dvije Maxwellove jednadžbe u kojima se pojavljuju izvori, elektromagnetska polja izrazimo preko potencijala prema (4.19), te iskoristimo Lorentzov gauge uvjet, lako dobijamo da elektromagnetski potencijali moraju zadovoljavati nehomogene valne jednadžbe:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned} \tag{4.22}$$

jer je $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

Ako definiramo elektromagnetski **4-potencijal** kao:

$$A_\mu = (A_0, \vec{A}) \equiv \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{A}\right) , \tag{4.23}$$

time smo odmah odredili transformacije elektromagnetskih potencijala pri općim Lorentzovim transformacijama u skladu s (2.10) ili (2.11), tj.

$$\Phi' = \gamma\left(\Phi - \vec{V} \cdot \vec{A}\right) \qquad \vec{A}' = \gamma\left(\vec{A}_\parallel - \vec{\beta}\frac{\Phi}{c}\right) + \vec{A}_\perp \ . \tag{4.24}$$

Kako u SI sustavu skalarni i vektorski potencijal nemaju iste dimenzije, nužno se u (4.23) pojavi faktor 1/c. Zaista, jedinice su:

$$\Phi \ (=) \ \mathrm{V} = \mathrm{J/C} = \mathrm{Nm/As} \ \Rightarrow \ \Phi/c \ (=) \ \mathrm{N/A} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} \ (=) \ \mathrm{Tm} = \mathrm{N/A} \ .$$

Usporedba s (4.11) – (4.13) odmah pokazuje da su kovarijantni oblici izraza (4.20) – (4.22):

$$\partial^{\mu} A_{\mu} = 0 \quad \text{– Lorentzov gauge uvjet,} \tag{4.25}$$

$$\Box A_{\mu} = \mu_0 j_{\mu} \quad \text{– nehomogena valna jednadžba i} \tag{4.26}$$

$$A_{\mu} \to A_{\mu} - \partial_{\mu} \Lambda \quad \text{– gauge transformacija 4-potencijala,} \tag{4.27}$$

gdje je $\partial_{\mu} \Lambda$ 4-gradijent proizvoljnog skalarnog polja $\Lambda(x_{\mu})$.

Već iz ovog je jasno da je elektrodinamika Lorentz invarijantna teorija. Zaista, ako Maxwellove jednadžbe izrazimo preko elektromagnetskog potencijala A_{μ}, sve jednadžbe za 4-vektore potencijala i struja (izvora) možemo napisati u kovarijantnom obliku, što znači da važe u svakom IRS-u. Očito je također da elektromagnetske veličine, izvori j_{μ} i potencijali A_{μ}, nisu Lorentz invarijantni, već se pri prelasku iz jednog u drugi IRS transformiraju prema (4.16) i (4.24), ali tako da naboji ostaju invarijantni (4.18).

Primjer 17. **Potencijal i polje naboja u jednolikom gibanju**

Iskoristimo činjenicu da elektromagnetski potencijali A_{μ} tvore 4-vektor da bez puno truda nađemo potencijale i polja naboja koji se giba iniformno.

Zamislimo naboj Q koji se u laboratorijskom sustavu S giba brzinom V = const. duž x-osi. Neka se pokretni sustav S´, u čijem je ishodištu naboj, giba brzinom V duž x-osi i pretpostavimo kao i prije da su se za t = t´ = 0 poklapala ishodišta dva sustava.

U sustavu mirovanja naboja S´, naboj ima samo električno polje, tj. potencijal:

$$\Phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'} \ , \quad \vec{A}' = 0 \ . \tag{4.28}$$

Ekvipotencijalne površine su sfere u čijem centru je naboj:

$$\Phi' = \text{const.} \ \Rightarrow \ r' = \text{const.} \ \Leftrightarrow \ x'^2 + y'^2 + z'^2 = \text{const.} \tag{4.29}$$

Prema (4.24) inverzna transformacija za 4-potencijale je:

$$\Phi = \gamma\left(\Phi' + \vec{V} \cdot \vec{A}'\right) , \quad \vec{A} = \gamma\left(\vec{A}'_{\parallel} + \vec{\beta}\frac{\Phi'}{c}\right) + \vec{A}'_{\perp} \ , \tag{4.30}$$

pa je skalarni potencijal u sustavu S u kome se naboj giba brzinom V:

$$\Phi = \gamma\,\Phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \ ,$$

jer je naboj invarijantan Q´ = Q. U gornjem izrazu treba još izraziti r´ preko koordinata sustava S pomoću (2.7):

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\gamma^2 (x - V\,t)^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \sqrt{(x - V\,t)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)} \;, \quad (4.31)$$

što daje:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{(x - V\,t)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\left(y^2 + z^2\right)}} \;. \qquad (4.32)$$

Ekvipotencijalne površine Φ = const. određene su jednadžbama:

$$\frac{(x - V\,t)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} + y^2 + z^2 = \text{const.} \qquad (4.33)$$

U sustavu S, naboj Q koji je u ishodištu pokretnog sustava S´, u trenutku t je u točci s koordinatama: $x = V\,t$, $y = 0$, $z = 0$. Poređenje s kanonskom jednadžbom elipsoida s centrom u točci (x^c, y^c, z^c):

$$\frac{\left(x - x^c\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y - y^c\right)^2}{b^2} + \frac{\left(z - z^c\right)^2}{c^2} = 1 \;,$$

pokazuje da su ekvipotencijalne površine elipsoidi s centrom u trenutnom položaju naboja koji odstupaju od sfere uslijed kontrakcije duljine u pravcu gibanja – radijus elipsoida u pravcu x-osi smanjen je za faktor $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ u skladu s (2.18).

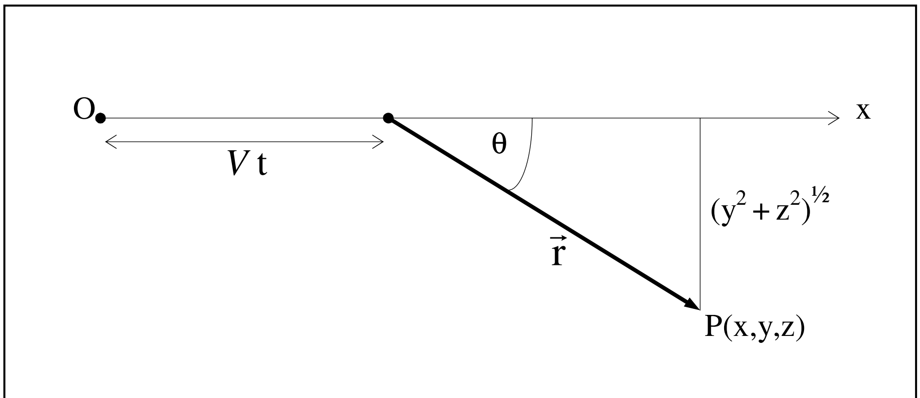
Udaljenost od naboja do točke P(x,y,z) u kojoj računamo potencijal je:

$$\vec{r} = (x - V\,t)\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \;, \qquad (4.34)$$

tj.

$$r = \sqrt{(x - V\,t)^2 + y^2 + z^2} \;, \qquad (4.35)$$

kao na Slici 6.



Slika 6.

Izraz (4.32) za skalarni potencijal možemo pojednostaviti uvodeći sferne koordinate r i θ pomoću: $x - Vt = r\cos\theta$; $y^2 + z^2 = r^2\sin^2\theta$, što daje

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta}} \ . \tag{4.36}$$

Nađimo sad vektorski potencijal. Kako je $\vec{A}' = 0$, iz (4.30) je $\vec{A} = \gamma\vec{\beta}\frac{\Phi'}{c} = \frac{1}{c^2}\gamma\Phi'\vec{V}$, pa je vektorski potencijal naboja Q koji se giba konstantnom brzinom $\vec{V} = V\,\hat{\mathbf{i}}$:

$$\vec{A} = \frac{1}{c^2}\Phi\vec{V} \ , \tag{4.37}$$

tj.

$$A_x = \frac{\Phi V}{c^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QV}{c^2\sqrt{(x-Vt)^2+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{QV}{r\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta}} \ ;$$

$$A_y = 0 \ ; \quad A_z = 0 \ . \tag{4.38}$$

Iz potencijala (4.32) i (4.38) lako je izračunati elektromagnetska polja prema (4.19):

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \ , \quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \ .$$

Potencijali zavise od vremena samo preko člana $(x - Vt)$, pa je:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial(x-Vt)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial(x-Vt)} = (-V)\frac{\partial x}{\partial(x-Vt)}\frac{\partial}{\partial x} = -V\frac{\partial}{\partial x} \ ,$$

te:

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = -V\frac{\partial A_x}{\partial x} = -\frac{V^2}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x} \ .$$

Komponente električnog polja naboja Q koji se giba konstantnom brzinom V duž x-osi su:

$$E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{Q(x-Vt)}{\left[(x-Vt)^2+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{\frac{3}{2}}} \ ; \tag{4.39}$$

$$E_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{Q\,y}{\left[(x-Vt)^2+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{\frac{3}{2}}} \ ; \tag{4.39´}$$

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{Qz}{\left[(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right]^{\frac{3}{2}}} \; , \tag{4.39´´}$$

ili u vektorskom obliku:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{Q\vec{r}}{r^3\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \; . \tag{4.40}$$

Kako je $\nabla \times (\psi \vec{a}) = (\nabla \psi) \times \vec{a} + \psi \nabla \times \vec{a}$, a prema (4.37): $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\vec{V}$, magnetsko polje naboja Q koji se giba konstantnom brzinom V duž x-osi je:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left(\frac{1}{c^2}\Phi\vec{V}\right) = \frac{1}{c^2}\vec{V} \times (-\nabla\Phi) = \frac{1}{c^2}\vec{V} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\vec{V} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\vec{V}\right) \; ,$$

tj.

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{V} \times \vec{E} \; , \tag{4.41}$$

ili u svernim koordinatama:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{Q\vec{V} \times \vec{r}}{r^3\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \; . \tag{4.42}$$

Magnetsko polje je okomito i na električno polje i na brzinu naboja.

Intenzitet električnog polja

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{r^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \; , \tag{4.43}$$

pokazuje da polje naboja u uniformnom gibanju odstupa od sferno simetričnog električnog polja naboja koji miruje. Odstupanje od sferne simetrije znači da je u pravcu gibanja naboja (x-os), tj. za $\theta = 0$ ili $\theta = \pi$, polje umanjeno za faktor $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{V^2}{c^2} < 1$, a u ravnini okomitoj na pravac gibanja (yz-ravnina), tj. za $\theta = \frac{\pi}{2}$, uvećano za faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > 1$.

Za relativističke brzine $V \approx c$ polje je "stisnuto" u uski angularni interval $|\cos\theta| < \frac{1}{\beta\gamma}$ oko $\theta = \frac{\pi}{2}$. Npr. za $\beta = 0{,}98$ je $\gamma = 5{,}025$, a intenzitet električnog polja opadne 5,2 puta od maksimuma za kut $\theta = 90^0 \pm 16{,}7^0$. Za $\beta = 0{,}99$ je $\gamma = 7{,}089$, a intenzitet polja opadne za faktor 5,2 za kut $\theta = 90^0 \pm 11{,}6^0$.

Ali, za ultrarelativističke elektrone energije 5 GeV kakvi se uobičajeno pojavljuju u akceleratorima čestica je $\gamma \approx 10000$ i intenzitet električnog polja opadne približno 5 puta za kut $\theta = 90^0 \pm 0{,}008^0$! Elektromagnetska polja takvih elektrona su transverzalna – različita su od nule praktično samo u ravnini okomitoj na brzinu elektrona.

4.2 Lorentzova invarijantnost elektrodinamike – polja i sile

Elektromagnetska polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$ izražena su u (4.19) preko elektromagnetskih potencijala za koje smo vidjeli da tvore kovarijantni 4-vektor (4.23). Iskoristimo vezu potencijala i polja te nađimo kovarijantnu formulaciju za elektromagnetska polja.

Za x-komponente polja je:

$$E_1 \equiv E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -c\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_x\right) + c\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\Phi}{c}\right) = -c\left(\frac{\partial}{\partial x^0}A_1 - \frac{\partial}{\partial x^1}A_0\right) = -c\,(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)$$

$$B_1 \equiv B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x^2}A_3 + \frac{\partial}{\partial x^3}A_2 = -\left(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2\right) ,$$

tj.,

$$\frac{E_1}{c} = -\,(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) \qquad B_1 = -\,(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)\,. \tag{4.44}$$

Analogni izrazi naravno važe za y i z-komponente polja:

$$\frac{E_2}{c} = -\,(\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0)\,;\ \frac{E_3}{c} = -\,(\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0)\,;\ B_2 = -\,(\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)\,;\ B_3 = -\,(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)\,. \tag{4.44´}$$

Prema (4.44) i (4.44´), šest komponenti elektromagnetskih polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$ su elementi antisimetričnog tenzora 2-og reda $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, koji se naziva **tenzor elektromagnetskog polja**:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\ . \tag{4.45}$$

Gauge transformacije potencijala (4.27) ne utječu na $F_{\mu\nu}$, jer je $F'_{\mu\nu} - F_{\mu\nu} = (\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\Lambda \equiv 0$.

Izražen pomoću komponenti tenzor elektromagnetskog polja u matričnom obliku je:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.46}$$

Faktor 1/c uz komponente električnog polja osigurava u SI sustavu iste dimenzije za sve komponente tenzora elektromagnetskog polja: $F_{\mu\nu}$ (=) T ≡ N/Am .

Podizanjem indeksa kontravarijantni tenzor elektromagnetskog polja $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ je:

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} . \tag{4.47}$$

$F_{\mu\nu}$ i $F^{\mu\nu}$ razlikuju se samo po predznaku komponenti električnog polja F_{0i} tj. F_{i0} . Jasno je da postoje i mješani tenzori $F^{\mu}{}_{\nu}$ ili $F_{\mu}{}^{\nu}$ koji se lako dobijaju podizanjem/spuštanjem jednog indeksa pomoću metričkog tenzora.

Znači, komponente električnog polja su vremensko-prostorne F_{0i} ili prostorno-vremenske F_{i0} , a komponenente magnetskog polja su prostorno-prostorne F_{ij} komponente antisimetričnog tenzora 2-og reda $F_{\mu\nu}$. U klasičnoj elektrodinamici, tj. u 3-dimenzionalnoj formulaciji teorije, elektromagnetsko polje je opisano s dva vektorska polja – električnim $\vec{E}$ i magnetskim $\vec{B}$. Ali, ta dva vektorska polja nisu nezavisna, jer su rotori svakog od njih povezani s vremenskom derivacijom drugog polja u Faradayevom zakonu i Maxwellovoj struji pomaka. Inherentna veza električnih i magnetskih fenomena postaje jasna tek u 4-dimenzionalnoj formulaciji.

U relativističkoj elektrodinamici očigledno je da je elektromagnetsko polje jedna fizikalna veličina koja se opisuje <u>*jednim*</u> *antisimetričnim tenzorom drugog reda – tenzorom elektromagnetskog polja* $F_{\mu\nu}$!

Komponente tenzora $F_{\mu\nu}$, a to znači komponente električnog i magnetskog polja, imaju prema (4.4) točno određene transformacije pri prelasku iz jednog u drugi IRS. Te transformacije uključuju mješanje komponenti električnog i magnetskog polja. Precizno, u svakom IRS-u postoji električno $\vec{E}$ i magnetsko polje $\vec{B}$, ali u bilo kojem drugom IRS-u $\vec{E}'$ je linearna kombinacija $\vec{E}$ i $\vec{B}$, a $\vec{B}'$ je takođe linearna kombinacija $\vec{E}$ i $\vec{B}$.

Najjednostavniji primjer je naboj koji miruje. Takav naboj stvara elektromagnetsko polje za koje je $\vec{E} \neq 0$ i $\vec{B} = 0$ – naboj koji miruje ima samo električno polje. U drugom IRS-u u kome se taj naboj giba, on predstavlja izvor elektromagnetskog polja za koje je i $\vec{E}' \neq 0$ i $\vec{B}' \neq 0$ – naboj u gibanju ima i električno i magnetsko polje! Konfuzija nastaje jer su električno $\vec{E}$ i magnetsko polje $\vec{B}$ dijelom inherentne karakteristike elektromagnetskog polja opisanog tenzorom $F_{\mu\nu}$, ali dijelom i posljedica izbora određenog IRS-a.

Zato je bolje za karakteriziranje elektromagnetskih polja koristiti Lorentz invarijantne veličine koje ne zavise od izbora IRS-a, tj. imaju istu vrijednost u svakom IRS-u.

U tenzorskoj analizi se dokazuje da se s antisimetričnim tenzorom 2-og reda $F_{\mu\nu}$ mogu konstruirati svega *dvije Lorentz invarijantne veličine* (treća invarijanta, trag tenzora jednaka je nuli za antisimetrični tenzor):

$$\text{a)} \quad I_1 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2} \quad - \textbf{Lorentz invarijanta} \text{ i} \tag{4.48}$$

$$\text{b)} \quad I_2 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{2}{c} \vec{E} \cdot \vec{B} \text{ ,} - \textbf{Lorentz invarijanta} \text{ ,} \tag{4.49}$$

gdje je **dualni tenzor elektromagnetskog polja** $\tilde{F}^{\mu\nu}$ definiran kao:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \ . \tag{4.50}$$

Potpuno antisimetrični tenzor 4-og reda $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\rho\nu\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$ ima $4^4 = 256$ komponenti koje imaju vrijednost:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, \text{ za svaku parnu permutaciju indeksa } 0123 \\ -1, \text{ za svaku neparnu permutaciju indeksa } 0123 \\ 0, \text{ ako su bar dva indeksa jednaka} \end{cases} \tag{4.51}$$

Kompletnosti radi dajemo eksplicitno u matričnom obliku i kovarijantni i kontravarijantni dualni tenzor elektromagnetskog polja:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{bmatrix} ; \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{bmatrix} . \tag{4.52}$$

Usporedba s (4.46) ili (4.47) pokazuje da se dualni tenzor $\tilde{F}_{\mu\nu}$ dobija iz $F_{\mu\nu}$ zamjenom:

$$\frac{\vec{E}}{c} \to -\vec{B} , \qquad \vec{B} \to \frac{\vec{E}}{c} \ . \tag{4.53}$$

Minus predznak u gornjem izrazu posljedica je različitog karaktera električnog i magnetskog polja pri prostornim inverzijama $\vec{r} \to -\vec{r}$. Električno polje je polarno, a magnetsko aksijalno vektorsko polje. Najlakše je to vidjeti iz Coulombova zakona $\vec{E} \sim \vec{r}$, pa pri prostornoj inverziji električno polje mijenja predznak kao i radijus vektor. Prema Biot-Savartovom zakonu magnetsko polje je proporcionalno vektorskom produktu dva polarna vektora, te pri prostornoj inverziji ne mijenja predznak.

Sada je lako provjeriti šta su invarijante I_1 i I_2. Prema (4.46), (4.47) i (4.52) zaista je:

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij}) = F_{01} F^{01} + F_{02} F^{02} + F_{03} F^{03} + F_{12} F^{12} + F_{13} F^{13} + F_{23} F^{23} = \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}$$

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(F_{0i} \tilde{F}^{0i} + F_{i0} \tilde{F}^{i0} + F_{ij} \tilde{F}^{ij} \right) = F_{01} \tilde{F}^{01} + F_{02} \tilde{F}^{02} + F_{03} \tilde{F}^{03} + F_{12} \tilde{F}^{12} + F_{13} \tilde{F}^{13} + F_{23} \tilde{F}^{23} = \frac{2}{c} \vec{E} \cdot \vec{B} \ .$$

Navedimo nekoliko primjera Lorentz invarijantnih karakteristika elektromagnetskih polja:

- ako je za elektromagnetsko polje $I_2 = 0$, tj. ako su električno i magnetsko polje okomiti u jednom IRS-u, bit će okomiti u bilo kojem IRS-u,

- za elektromagnetsko polje za koje je $I_1 = I_2 = 0$ u svakom IRS-u važi: $\vec{E} \perp \vec{B}$ i $\frac{1}{c}|\vec{E}| = |\vec{B}|$ – na primjer ravni transverzalni elektromagnetski val,

- za elektromagnetsko polje za koje je $I_1 > 0$ u svakom IRS-u je amplituda magnetskog polja veća od amplitude električnog polja/c . Tada postoji jedan IRS u kome je $\vec{E}' = 0$ i $\vec{B}' \neq 0$, tj. elektromagnetsko polje je čisto magnetsko!,

- za elektromagnetsko polje za koje je $I_1 < 0$ u svakom IRS-u amplituda magnetskog polja manja je od amplitude električnog polja/c , pa uvijek postoji jedan IRS u kome je $\vec{E}' \neq 0$ i $\vec{B}' = 0$, tj. u tom sustavu polje je čisto električno!

Transformacije električnog i magnetskog polja pri prelasku iz sustava S u sustav S´ koji se giba brzinom *V* duž x-osi slijede iz zakona transformacije tenzora elektromagnetskog polja $F_{\mu\nu}$:

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}F_{\rho\sigma} \quad \text{ili u matričnoj notaciji:} \quad F' = AFA^T , \tag{4.54}$$

gdje je $A = [a_\mu{}^\nu]$ matrica Lorentzove transformacije (2.8), ili jednostavno pomoću komponenti, npr.

$$F'_{20} = \frac{E'_y}{c} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^2}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^0}F_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}F_{20} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^0}F_{21}\right) = \gamma F_{20} - \gamma\beta F_{21} = \gamma\left(\frac{E_y}{c} - \beta B_z\right) .$$

Tako dobijamo pravila transformacije komponenti električnog i magnetskog polja pri Lorentzovoj transformaciji duž x-osi:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - V B_z) & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{V}{c^2}E_z\right) \\ E'_z &= \gamma(E_z + V B_y) & B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{V}{c^2}E_y\right) \end{aligned} \tag{4.55}$$

Za opću Lorentzovu transformaciju brzinom $\vec{V}$ je:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}'_\parallel + \vec{E}'_\perp = \vec{E}_\parallel + \gamma\left(\vec{E}_\perp + \vec{V}\times\vec{B}\right) = \gamma\left(\vec{E} + \vec{V}\times\vec{B}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{E}\right) \\ \vec{B}' &= \vec{B}'_\parallel + \vec{B}'_\perp = \vec{B}_\parallel + \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\vec{V}\times\vec{E}\right) = \gamma\left(\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{V}\times\vec{E}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{B}\right) \end{aligned} \tag{4.56}$$

Provjerimo da su I_1 i I_2 zaista Lorentz invarijante. Iz (4.56) pri općoj Lorentzovoj transformaciji je:

$$\vec{E}'^2 = \vec{E}_\parallel{}^2 + \gamma^2\left(\vec{E}_\perp{}^2 + \vec{V}^2\,\vec{B}_\perp{}^2\right) + 2\gamma\left(\vec{V}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{E}_\perp = \vec{E}_\parallel{}^2 + \gamma^2\left(\vec{E}_\perp{}^2 + \vec{V}^2\,\vec{B}_\perp{}^2\right) + 2\gamma\vec{V}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right),$$

$$\vec{B}'^2 = \vec{B}_\parallel{}^2 + \gamma^2\left(\vec{B}_\perp{}^2 + \frac{\vec{V}^2}{c^4}\vec{E}_\perp{}^2\right) - \frac{2\gamma}{c^2}\left(\vec{V}\times\vec{E}\right)\cdot\vec{B}_\perp = \vec{B}_\parallel{}^2 + \gamma^2\left(\vec{B}_\perp{}^2 + \frac{\vec{V}^2}{c^4}\vec{E}_\perp{}^2\right) - \frac{2\gamma}{c^2}\vec{V}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$$

pa je zaista:

$$I_1' = \vec{B}'^2 - \frac{\vec{E}'^2}{c^2} = \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2} = I_1 .$$

Na isti način iz (4.56) slijedi:

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = \vec{E}_\parallel\cdot\vec{B}_\parallel + \gamma^2\,\vec{E}_\perp\cdot\vec{B}_\perp - \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\vec{V}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{V}\times\vec{E}\right),$$

jer su svi ostali članovi skalarni produkti okomitih vektora. Kako je:

$$\left(\vec{V}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{V}\times\vec{E}\right) = \left(\vec{V}\times\vec{B}_\perp\right)\cdot\left(\vec{V}\times\vec{E}_\perp\right) = \vec{V}^2\left(\vec{E}_\perp\cdot\vec{B}_\perp\right),$$

lako se dobija.

$$I_2' = \vec{E}'\cdot\vec{B}' = \vec{E}\cdot\vec{B} = I_2 ,$$

jer je: $\vec{E}\cdot\vec{B} = \vec{E}_\parallel\cdot\vec{B}_\parallel + \vec{E}_\perp\cdot\vec{B}_\perp$.

Ilustrirajmo izraze za transformacije polja na primjeru najjednostavnijeg električnog polja.

Primjer 18. **Pločasti kondenzator u jednolikom gibanju**

Neka se pločasti kondenzator giba konstantnom brzinom koja je paralelna pločama. Odaberimo koordinatni sustav tako da je brzina V duž x-osi, a da su ploče paralelne xz-ravnini. U sustavu mirovanja kondenzatora S´ postoji samo uniformno električno polje u y´ pravcu:

$$E'_x = 0\,,\quad E'_y = E'\,,\quad E'_z = 0\,;\quad B'_x = 0\,,\quad B'_y = 0\,,\quad B'_z = 0\,;$$

Prema (4.55) inverzne transformacije odmah daju za polja u mirnom sustavu:

$$E_x = 0\,,\quad E_y = \gamma E'\,,\quad E_z = 0\,;\quad B_x = 0\,,\quad B_y = 0\,,\quad B_z = \gamma\frac{V}{c^2}E'\,;$$

Fizikalno nije teško razumjeti šta se događa.

U sustavu S´ u kome kondenzator miruje među pločama je polje: $E'_y = E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \dfrac{V'}{d'}$,
gdje je σ´ površinska gustoća naboja na pločama, $V' = \Phi'_2 - \Phi'_1$ je razlika potencijala, a d´ udaljenost među pločama. Četvoro-vektor gustoće izvora prema (4.14) je onda: $j'_\mu = (c\,\sigma', \vec{0})$.

U sustavu S kondenzator ima brzinu *V* duž x-osi pa je x-dimenzija ploča kontrahirana $\dfrac{1}{\gamma}$ puta, dok je okomita z-dimenzija nepromjenjena, što znači da se površina ploča smanjila $\dfrac{1}{\gamma}$ puta. Kako je naboj na pločama invarijantan, površinska gustoća naboja se povećala γ puta, tj. $\sigma = \gamma\sigma'$, pa je električno polje $E_y = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma E'$.

Promjena površinske gustoće naboja je u skladu s inverznom trasformacijom (4.16) koja za 4-vektor gustoće struja daje: $j_\mu = (c\,\gamma\sigma', \gamma\vec{V}\sigma')$. U sustavu S postoji i struja, jer se nabijene ploče gibaju. Površinska gustoća naboja $\sigma = \gamma\sigma'$ koja se giba brzinom $\vec{V}$ pretstavlja gustoću struje $\vec{j} = \sigma\vec{V} = \gamma\sigma'\vec{V} = \varepsilon_0\gamma E'\vec{V} = j_x\,\hat{\mathbf{i}}$.

Pogledajmo sad kakva je situacija s potencijalima. U sustavu mirovanja kondenzatora S´ postoji samo skalarni potencijal $\Phi' = -E'y' + \text{const.}$, pa je $A'_\mu = (-\dfrac{E'y'}{c} + \text{const.}, \vec{0})$ tako da je $E'_y = -\dfrac{\partial\Phi'}{\partial y'} = E'$. Lorentzove transformacije potencijala (4.24) za potencijale u sustavu S daju: $A_\mu = \left(\gamma\dfrac{\Phi'}{c}, \gamma\dfrac{\Phi'}{c^2}\vec{V}\right) = \left(-\gamma\dfrac{E'y}{c} + \text{const.}, -\gamma\dfrac{E'y}{c^2}\vec{V} + \text{const.}\right)$, jer je $y' = y$.

Ovi potencijali prema (4.19) naravno daju polja:

$$E_y = \frac{V}{d} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\gamma V'}{d'} = \gamma E' \quad \text{i} \quad B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} = \gamma\frac{V}{c^2}E' = \mu_0\varepsilon_0\gamma E'V = \mu_0 j_x \ ,$$

jer pri Lorentzovim transformacijama duž x-osi okomite dimenzije ostaju nepromjenjene, pa je $d' = d$. Sve ostale komponente su jednake nuli, u skladu sa formulama transformacije elektromagnetskih polja.

I na ovom primjeru je lako provjeriti da su $I_1 = \vec{B}^2 - \dfrac{\vec{E}^2}{c^2}$ i $I_2 = \vec{E}\cdot\vec{B}$ zaista Lorentz invarijante:

$$I'_2 = \vec{E}'\cdot\vec{B}' = 0 = \vec{E}\cdot\vec{B} = I_2 \ ,$$

$$I'_1 = \vec{B}'^2 - \frac{\vec{E}'^2}{c^2} = -\frac{E'^2}{c^2} \ ; \quad I_1 = \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2} = \gamma^2\frac{V^2}{c^4}E'^2 - \gamma^2\frac{E'^2}{c^2} = -\gamma^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{E'^2}{c^2} = -\frac{E'^2}{c^2} = I'_1 \ .$$

Ako je $I_2 \neq 0$, tj. ako električno i magnetsko polje nisu okomiti, tada uvijek postoji IRS u kome su $\vec{E}$ i $\vec{B}$ paralelni. Pokažimo to na primjeru:

Primjer 19. **IRS u kome su električno i magnetsko polje paralelni**

Ako je $I_2 = 0$ tada su $\vec{E}$ i $\vec{B}$ okomiti u svakom IRS-u. Ali, ako je $I_2 \neq 0$, tada postoji beskonačno mnogo IRS-a u kojima su $\vec{E}$ i $\vec{B}$ paralelni.

Zamislimo jedan takav pokretni sustav S´ u kome su $\vec{E}'$ i $\vec{B}'$ paralelni i ujedno okomiti na brzinu tog sustava $\vec{V}$ u odnosu na mirni sustav S, tako da je:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} = 0 \text{ , tj. } \vec{E}' = \vec{E}'_{\perp} \text{ ; } \vec{B}' = \vec{B}'_{\perp} \text{ .}$$

Uvjet paralelnosti $\vec{E}'$ i $\vec{B}'$ je:

$$\vec{E}' \times \vec{B}' = \vec{E}'_{\perp} \times \vec{B}'_{\perp} = 0 \text{ .} \tag{4.57}$$

Inverzne Lorentzove transformacije, prema (4.56), za polja u laboratorijskom sustavu S daju:

$$\vec{E} = \gamma\left(\vec{E}'_{\perp} - \vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}\right) \quad \text{i} \quad \vec{B} = \gamma\left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}\vec{V} \times \vec{E}'_{\perp}\right) \text{ ,}$$

pa se koristeći uvjet paralelnosti lako dobije:

$$\vec{E} \times \vec{B} = \gamma^2 \vec{V}\left(\vec{B}'^{\,2}_{\perp} + \frac{\vec{E}'^{\,2}_{\perp}}{c^2}\right) \text{ ,} \tag{4.58}$$

kao i

$$\frac{\vec{E}^2}{c^2} = \gamma^2\left(\frac{\vec{E}'^{\,2}_{\perp}}{c^2} + \frac{\vec{V}^2}{c^2}\vec{B}'^{\,2}_{\perp}\right) \text{ ; } \quad \vec{B}^2 = \gamma^2\left(\vec{B}'^{\,2}_{\perp} + \frac{\vec{V}^2}{c^2}\frac{\vec{E}'^{\,2}_{\perp}}{c^2}\right) \text{ , tj.}$$

$$\vec{B}^2 + \frac{\vec{E}^2}{c^2} = \gamma^2\left(1 + \frac{\vec{V}^2}{c^2}\right)\left(\vec{B}'^{\,2}_{\perp} + \frac{\vec{E}'^{\,2}_{\perp}}{c^2}\right) \text{ .} \tag{4.59}$$

Eliminirajući $\vec{E}'$ i $\vec{B}'$ iz (4.58) i (4.59), za brzinu $\vec{V}$ pokretnog sustava S´ dobije se kvadratna jednadžba:

$$\frac{\vec{V}}{1 + \frac{\vec{V}^2}{c^2}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\vec{B}^2 + \frac{\vec{E}^2}{c^2}} \text{ ,} \tag{4.60}$$

tj. tri kvadratne jednadžbe za komponente brzine $\vec{V}$ koje uvijek imaju po jedno rješenje $V_i < c$. Znači, za bilo kakva polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$ u sustavu S za koja je $I_2 \neq 0$, postoji jedan sustav S´ u koji se prelazi Lorentzovom transformacijom brzinom $\vec{V}$ u komu su polja $\vec{E}'$ i $\vec{B}'$ paralelna!

Prema (4.56) u bilo kojem drugom sustavu S´´, u koji se iz S´ prelazi Lorentzovim potiskom duž pravca polja $\vec{E}'$ i $\vec{B}'$, će onda polja $\vec{E}''$ i $\vec{B}''$ također biti paralelna.

U relativističkoj elektrodinamici elektromagnetska polja su opisana tenzorom elektromagnetskog polja $F_{\mu\nu}$. Kovarijantna oblik Maxwellovih jednadžbi – jednadžbi gibanja elektromagnetskih polja, moraju biti tenzorske jednadžbe koje uključuju $F_{\mu\nu}$. Zaista dvije nehomogene Maxwellove jednadžbe, tj. one koje uključuju izvore:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \; ; \; \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \; , \tag{4.61}$$

prema definicijama $F_{\mu\nu}$ (4.45) i j_μ (4.23) imaju kovarijantni oblik:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\nu \; . \tag{4.62}$$

Četvoro- divergencija tenzora elektromagnetskog polja jednaka je 4-vektoru gustoće struja puta μ_0 !

Kao i u 3 dimenzije, 4-divergencija nekog polja pretstavlja lokalnu gustoću izvora tog polja, pa (4.62) znači da su naboji izvori elektromagnetskog polja.

Da bi se eksplicitno pokazala ekvivalentnost (4.62) i (4.61) prvo iz (4.45) treba izraziti komponente tenzora $F_{\mu\nu}$ preko elektromagnetskih polja:

$$F_{i0} = -\, F_{0i} = \frac{E_i}{c} \quad \text{i} \quad F_{ij} = \varepsilon_{ijk}\, B^k \; , \tag{4.63}$$

gdje je ε_{ijk} trodimenzionalni potpuno antisimetrični tenzor 3-eg reda: $\varepsilon_{ijk} = -\, \varepsilon_{jik} = -\, \varepsilon_{ikj}$ koji ima $3^3 = 27$ komponenti definiranih tako da $\varepsilon_{123} = +1$. Koristeći definicije 4-gradijenta (4.10) i 4-vektora gustoće struja za 0-tu komponentu je:

$$\mu_0 j_0 = \mu_0 c\rho = \partial^\mu F_{\mu 0} = \partial^0 F_{00} + \partial^i F_{i0} = \partial^i F_{i0} = \frac{1}{c}\partial^i E_i = \frac{1}{c}\nabla \cdot \vec{E} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \; ,$$

a za i-tu komponentu je:

$$\mu_0 j_i = \partial^\mu F_{\mu i} = \partial^0 F_{0i} + \partial^j F_{ji} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{E_i}{c}\right) + \partial^j (\varepsilon_{jik} B^k)$$
$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_i}{\partial t} - \varepsilon_{ijk}\partial^j B^k = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk}\partial^j B_k = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_i}{\partial t} + \left(\nabla \times \vec{B}\right)_i \; ,$$

kao što i treba biti.

Par riječi o izboru jedinica. U SI sustavu, zbog raznih povijesnih razloga, koristi se više jedinica nego što je stvarno potrebno. Relacija $\varepsilon_0 \, \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, gdje je c univerzalna prirodna konstanta, pokazuje da nam nije neophodna jedna veličina ε_0 za vezu električnih i mehaničkih jedinica kao u Coulombovom zakonu, a druga μ_0 , za vezu magnetskih i mehaničkih jedinica kao u Biot-Savartovom zakonu, *kad te dvije veličine nisu nezavisne*.

Da se pojednostave jednadžbe u teorijskoj fizici se najčešće koristi Gaussov ili Heaviside-Lorentzov sustav jedinica u kojima je $\varepsilon_0 = 1$ i $\mu_0 = 1$, tako da (4.62) postaje jednostavno: $\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$.

U fizici čestica koristi se još jednostavniji **prirodni sustav jedinica** u kome osnovne fizikalne konstante, brzina svjetlosti i Planckova konstanta imaju vrijednost: $c = \hbar = 1$, pa sve komponente 4-vektora i 4-tenzora imaju iste dimenzije!

Konzistentnosti radi mi ćemo nastaviti koristiti SI sustav.

Dvije preostale homogene Maxwellove jednadžbe:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \ , \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \ , \tag{4.64}$$

imaju kovarijantni oblik:

$$\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{4.65}$$

Četvoro-divergencija dualnog tenzora elektromagnetskog polja je nula!

Dualni tenzor elektromagnetskog polja nema izvora. Fizikalno to znači da za razliku od električnog, ne postoji magnetski naboj, što je stvarni uzrok različitog karaktera električnog i magnetskog polja. U 3-dimenzionalnoj notaciji to je razlika u divergenciji dva polja:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \neq 0 \quad \text{i} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \ .$$

Kad bi postojale hipotetske čestice s magnetskim nabojem – magnetski monopoli, tada bi na desnoj strani u (4.65) bio 4-vektor gustoće magnetske struje, analogno s 4-vektorom gustoće električne struje u (4.62), te bi simetrija između električnih i magnetskih veličina bila potpuna. Zašto ne postoje magnetski monopoli je veliki «misterij». Jedna mogućnost je da magnetski monopoli postoje, ali ih mi još nismo otkrili jer su u današnjem svemiru izuzetno rijetki. Zato eksperimentalni fizičari elementarnih čestica nastavljaju potragu za magnetskim monopolima.

Prema (4.52) je: $\tilde{F}_{i0} = -B_i$ i $\tilde{F}_{ij} = \varepsilon_{ijk} \dfrac{E^k}{c}$, pa je za 0-tu komponentu izraza (4.65):

$$0 = \partial^\mu \tilde{F}_{\mu 0} = \partial^0 \tilde{F}_{00} + \partial^i \tilde{F}_{i0} = \partial^i \tilde{F}_{i0} = \partial^i (-B_i) = -\nabla \cdot \vec{B} \ ,$$

a za i-tu komponentu:

$$0 = \partial^\mu \tilde{F}_{\mu i} = \partial^0 \tilde{F}_{0i} + \partial^j \tilde{F}_{ji} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} B_i - \varepsilon_{jik} \partial^j \frac{E_k}{c} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} B_i + \varepsilon_{ijk} \partial^j E_k \right) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} \right)_i \ ,$$

u skladu s (4.64).

Znači, u kovarijantnoj formulaciji Maxwellove jednadžbe su jednostavno:

$$\partial^{\mu} F_{\mu\nu} = \mu_0 j_{\nu} \, ; \quad \partial^{\mu} \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \, . \tag{4.66}$$

U slučaju da umjesto vakuuma imamo neko sredstvo, elektromagnetsko polje je opisano s dva tenzora $F_{\mu\nu} = \left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ i $G_{\mu\nu} = \left(\vec{D}, \vec{H}\right) = \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\right)$, gdje su efekti polarizacije i magnetizacije sredstva također opisani antisimetričnim tenzorima 2-og reda $\vec{P}$ i $\vec{M}$. Maxwellove jednadžbe su u tom slučaju:

$$\partial^{\mu} G_{\mu\nu} = j_{\nu} \, ; \quad \partial^{\mu} \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \, . \tag{4.67}$$

Treba još pokazati da se izraz za 3-dimenzionalnu Lorentzovu silu na česticu naboja Q i brzine $\vec{v}$:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) , \tag{4.68}$$

može napisati u kovarijantnoj formi.

Impuls čestice $\vec{p}$ je prostorni dio 4-vektora energije-impulsa čestice $p_{\mu} = (p_0 \, , \, \vec{p}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = mV_{\mu} = m(V_0 \, , \vec{V}) = m(c\gamma \, , \gamma\vec{v})$, gdje je 4-brzina čestice V_{μ} definirana u (3.54). Kovarijantna formulacija će nužno uključivati i nultu komponentu, koja prema (3.59) predstavlja trenutnu snagu, tj. rad sile u jedinici vremena. Za Lorentzovu silu trenutna snaga je:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = Q \vec{v} \cdot \vec{E} \, , \tag{4.69}$$

jer magnetska sila ne vrši rad. Umjesto da veličine u (4.68) i (4.69) izražavamo preko odgovarajućih 4-dimenzionalnih veličina i tako dođemo do kovarijantnog izraza, jednostavnija je obrnuta procedura.

Pokažimo da je kovarijantna Lorentzova sila:

$$K_{\mu} = \frac{dp_{\mu}}{d\tau} = m\frac{dV_{\mu}}{d\tau} = QF_{\mu\nu}V^{\nu} \, . \tag{4.70}$$

Četvoro-vektor Lorentzove sile kojom elektromagnetsko polje djeluje na česticu naboja Q *je produkt tenzora elektromagnetskog polja i 4-vektora brzine čestice!*

Zaista, za $\mu = 0$ komponentu je:

$$K_0 = \frac{d p_0}{d\tau} = \frac{d\left(\frac{E}{c}\right)}{\frac{d t}{\gamma}} = \frac{\gamma}{c}\frac{d E}{d t} = Q F_{0i} V^i = Q\left(-\frac{E_i}{c}\right)\left(-\gamma v_i\right) = \frac{\gamma}{c} Q \vec{v}\cdot\vec{E} \ ,$$

tj. $\frac{d E}{d t} = Q \vec{v}\cdot\vec{E}$ je relativistička generalizacija izraza (4.69) u skladu s (3.59).

Za i-tu komponentu (4.70) je:

$$K_i = \frac{d p_i}{d\tau} = \gamma \frac{d p_i}{d t} = Q F_{i0} V^0 + Q F_{ij} V^j = Q \frac{E_i}{c}\gamma c + Q\left(\varepsilon_{ijk} B^k\right)\left(-\gamma v_j\right) = \gamma Q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)_i \ ,$$

što znači da je u skladu s (3.58), relativistička generalizacija 3-dimenzionalne Lorentzove sile (4.68) zaista:

$$\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma \vec{F} = \gamma Q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \ . \qquad (4.71)$$

Primjer 20. **Sila između dva točkasta naboja koji se gibaju jednoliko**

Kao što je već nekoliko puta napomenuto, sile iz klasične fizike nisu Lorentz invarijantne ili čak i nemaju relativističku generalizaciju. Izuzetak je elektromagnetska sila za koju postoji kompletno kovarijantna relativistička formulacija. No, i u slučaju Lorentzove sile relativistički efekti imaju posljedice koje nisu odmah očigledne.

Ilustrirajmo to na jednostavnom primjeru dva točkasta naboja Q_1 i Q_2 koja se gibaju konstantnom brzinom *V* duž x-osi u sustavu S. U sustavu mirovanja naboja S´ sila među njima data je Coulombovim zakonom. Ako je relativna udaljenost naboja $\vec{r}\,'$ sila na naboj Q_2 :

$$\vec{F}' = Q_2 \vec{E}_1' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r'^3}\vec{r}\,' ,$$

je radijalna, tj. duž pravca na kome se nalaze naboji.

Ako želimo silu između naboja izračunati u sustavu S, mogli bi prvo naći transformacije za komponente sile pri prelasku iz jednog u drugi IRS. Te transformacije su komplicirane [kao (2.47) za komponente akceleracije], jer komponente 3-dimenzionalne sile nisu komponente nekog 4-tenzora – to su komponente relativističke sile $\vec{K} = \gamma \vec{F}$ koje se transformiraju kao prostorne komponente kovarijantnog 4-vektora. Zatim bi trebalo koristeći te transformacije, transformirati $\vec{F}'$ u sustav S.

Ali, Lorentzova sila može se izraziti preko elektromagnetskih polja koja pretstavljaju komponente 4-tenzora elektromagnetskog polja, što upravo i jeste razlog zašto za elektomagnetske interakcije postoji kovarijantna formulacija. Zato je puno jednostavnije za transformiranje sile iskoristiti Lorentzove transformacije elektromagnetskih polja koje su već nađene u *Primjeru* 17.

U sustavu S u kome se naboji gibaju duž x-osi brzinom V, sila na naboj Q_2 je:

$$\vec{F} = Q_2\left(\vec{E}_1 + \vec{v}_2 \times \vec{B}_1\right) ,$$

gdje su $\vec{E}_1$ i $\vec{B}_1$ polja naboja Q_1 u točci gdje se nalazi naboj Q_2 . Kako je $\vec{v}_2 = \vec{V}$, prema (4.41) je:

$$\vec{F} = Q_2\left[\vec{E}_1 + \vec{V} \times \frac{1}{c^2}\left(\vec{V} \times \vec{E}_1\right)\right] = Q_2\left[\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\vec{E}_1 + \frac{1}{c^2}\left(\vec{V} \cdot \vec{E}_1\right)\vec{V}\right] .$$

Iskoristimo li (4.40), izraz za silu između dva naboja koji se gibaju brzinom $\vec{V}$ je:

$$F_{\parallel} = F_x = Q_2 E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\cos\theta}{r^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}} ,$$

$$F_{\perp} = Q_2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^2 \sin\theta}{r^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}} ,$$

gdje je r udaljenost među česticama. Ova sila nije radijalna, očito postoji i komponenta okomita na radijus vektor koji spaja čestice, osim u specijalnim slučajevima kad je radijus vektor udaljenosti čestica paralelan ili okomit na pravac gibanja naboja, kada je:

$$\vec{r} \text{ paralelno s } \vec{V}, \text{ tj. } \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\parallel} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} ; \quad F_{\perp} = 0 ,$$

$$\vec{r} \text{ okomito na } \vec{V}, \text{ tj. } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad F_{\perp} = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} ; \quad F_{\parallel} = 0 .$$

<u>Pokazali smo da su zaista sve osnovne jednadžbe klasične elektrodinamike Lorentz invarijantne, tj. mogu se napisati kovarijantno kao relacije između 4-tenzora u prostoru M^4.</u> To osigurava da jednadžbe elektrodinamike imaju identičan oblik u bilo kojem IRS-u.

Razmotrimo sada kako se u općem slučaju rješavaju Maxwellove jednadžbe.

Neka u nekom konačnom regionu prostora Ω imamo izvore elektromagnetskih polja, tj. naboje čija je distribucija zadana proizvoljnim gustoćama naboja $\rho(\vec{r}, t)$ i struja $\vec{j}(\vec{r}, t)$.

Gustoće izvora smatramo poznatim funkcijama za svako $\vec{r} \in \Omega$ i svako $t \in (-\infty, \infty)$. Radi jednostavnosti zamislimo da su naboji u vakuumu.

Elektromagnetska polja određena su Maxwellovim jednadžbama:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ , \tag{4.5}$$

koje se rješavaju uvođenjem elektromagnetskih potencijala:

$$\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \ . \tag{4.19}$$

Uzimanjem rotora rotorskih jednadžbi za $\vec{E}$ i $\vec{B}$ uz odabir Lorentzovog baždarnog (gauge) uvjeta:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \ . \tag{4.21}$$

dobijaju se jednadžbe koje moraju zadovoljavati elektromagnetski potencijali − nehomogene valne jednadžbe:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \tag{4.22}$$

gdje je $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

Da bi postojala jednoznačna rješenja jednadžbi (4.22) moraju se zadati dodatni početni i rubni uvjeti.

Po definiciji problem nalaženja polja i potencijala prouzvoljne distribucije naboja podrazumijeva slijedeću idealiziranu situaciju: svi naboji nastaju u jednom trenutku vremena, recimo t = 0. To znači da za t < 0 nema ni izvora ni polja i za početne uvjete uzimamo:

$$\vec{E} = \vec{B} = 0, \ \text{ za } t = 0 \text{ u svakoj točci prostora } \vec{r}, \tag{4.72}$$

ili za potencijale:

$$\Phi = \vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0, \ \text{ za } t = 0 \ \text{ i za svako } \vec{r}. \tag{4.73}$$

Rubne uvjete zadajemo u beskonačnosti zahtijevajući da potencijali u beskonačnosti opadaju najmanje kao r^{-1} (potencijali lokalizirane distribucije naboja) tj.

$$\Phi \to O\left(\frac{1}{r}\right) \text{ i } \left|\vec{A}\right| \to O\left(\frac{1}{r}\right), \text{ kad } r \to \infty \text{ za svako } 0 \le t < \infty . \tag{4.74}$$

Fizikalno je moguće realizirati ovakvu sitiaciju ako zamislimo da naboji miruju (ili se gibaju konstantnom brzinom) za $t < 0$, te se onda u trenutku $t = 0$, počnu proizvoljno gibati što uzrokuje promjene potencijala i polja koje stvaraju ti naboji. Rješavajući gornje jednadžbe uz početne (4.73) i rubne (4.74) uvjete naći ćemo promjene (perturbacije) potencijala i polja uslijed promjene gibanja izvora, koje se superponiraju na prije postojeće potencijale i polja sustava naboja u mirovanju.

Opće rješenje nehomogene valne jednadžbe:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\vec{r},t) = -f(\vec{r},t) \tag{4.75}$$

je:

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_H(\vec{r},t) + \int d^3r' \int dt' G(\vec{r},t;\vec{r}',t') f(\vec{r}',t') \ , \tag{4.76}$$

gdje je $\psi_H(\vec{r},t)$ rješenje homogene valne jednadžbe, a Greenova funkcija zadovoljava:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{r},t;\vec{r}',t') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t') \ . \tag{4.77}$$

Koristeći Fourierov transform uz uvjet kauzalnosti: $G = 0$ za $t < t'$, iz jednadžbe (4.77) dobija se retardirana ("zakašnjela") Greenova funkcija:

$$G(\vec{r},t;\vec{r}',t') = \frac{1}{4\pi}\frac{\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \ , \tag{4.78}$$

koja u točci promatranja $(\vec{r},t)$ pretstavlja sferni val koji se giba brzinom c i čiji je izvor u točci $(\vec{r}',t')$, tako da u vremenskom intervalu $\Delta t = t - t' > 0$ val prijeđe udaljenost $|\vec{r}-\vec{r}'| = c(t-t')$.

Birajući za rješenje homogene valne jednadžbe $\Phi_H = \vec{A}_H = 0$ u skladu s početnim uvjetom (4.73), nakon integracije po t' rješenje jednadžbi (4.22) za potencijale je:

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \ , \tag{4.79}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\frac{\vec{j}\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \ . \qquad (4.80)$$

Ova rješenja nazivaju se retardirani (zakašnjeli) potencijali jer njihova vrijednost u točci $\vec{r}$ i trenutku t "kasni" i zavisi od vrijednosti izvora u točci $\vec{r}'$, ali u ranijem trenutku: $t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$, jer je signalu koji se giba brzinom c potrebno vrijeme $\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ da pređe udaljenost $|\vec{r}-\vec{r}'|$.

Da bi se izvršila volumna integracija u (4.79) i (4.80) mora se eksplicitno poznavati gustoća izvora ρ i $\vec{j}$. Svaka distribucija naboja je superpozicija točkastih naboja pa je dovoljno naći rješenje za jedan točkasti naboj.

Razmotrimo zato opći slučaj naboja koji se giba proizvoljno.

Primjer 21. **Potencijali i polja naboja koji se gibaju proizvoljno**

Neka imamo jedan točkasti naboj q koji se giba proizvoljnom brzinom $\vec{v}_0(t)$. Radijus vektor naboja je onda $\vec{r}_0=\int \vec{v}_0 dt$. Naboj predstavlja izvor elektromagnetskih polja gustoća:

$$\rho = q\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0)\ ; \quad \vec{j}=\rho\,\vec{v}_0 = q\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0)\,\vec{v}_0(t) \ . \qquad (4.81)$$

Retardirani potencijali naboja određeni su izrazima:

$$\Phi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\frac{\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(\tau))}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \ , \qquad (4.82)$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0 q}{4\pi}\int d^3r'\frac{\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(\tau))}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{v}_0(\tau) \ , \qquad (4.83)$$

gdje je retardacija sadržana u vremenskoj varijabli $\tau = t-\frac{|\vec{r}'-\vec{r}_0|}{c}$.

Kako koordinate čestice $\vec{r}_0(\tau)$ zavise od $\vec{r}'$ preko vremena retardacije τ integrali u (4.82) i (4.83) moraju se računati smjenom varijabli:

$$\vec{s}=\vec{r}'-\vec{r}_0(\tau)\ , \text{tj.}\quad s_x = x'-x_0(\tau)\ ,\ s_y = y'-y_0(\tau)\ ,\ s_z = z'-z_0(\tau)\ . \qquad (4.84)$$

Pri smjeni varijabli element volumena d^3r' prelazi u Jd^3s gdje je Jacobian transformacije:

$$J=\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(s_x,s_y,s_z)}=\left|\frac{\partial r_i'}{\partial s_j}\right| \ .$$

Lakše je naći determinantu inverzne matrice $J^{-1} = \left|\frac{\partial s_i}{\partial r'_j}\right|$ jer je:

$$\frac{\partial s_i}{\partial r'_j} = \frac{\partial}{\partial r'_j}\left(r'_i - r_{0_i}(\tau)\right) = \delta_{ij} - \frac{\partial \tau}{\partial r'_j}\frac{\partial}{\partial \tau} r_{0_i}(\tau) = \delta_{ij} + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial}{\partial r'_j}\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|\right] v_{0_i} = \delta_{ij} + \frac{v_{0_i}}{c}\left[-\frac{\left(\vec{r} - \vec{r}'\right)_j}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}\right]$$

što daje:

$$J^{-1} = \left|\delta_{ij} - \frac{1}{c}\frac{v_{0_i}\left(\vec{r} - \vec{r}'\right)_j}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}\right| .$$

Lako je izračunati gornju 3×3 determinantu i rezultat je:

$$J^{-1} = 1 - \frac{\vec{v}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{c\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} , \tag{4.85}$$

što znači da se element volumena transformira prema:

$$d^3 r' = \left[1 - \frac{\vec{v}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{c\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}\right]^{-1} d^3 s . \tag{4.86}$$

Problem: Dokazati (4.85).

Prema (4.82), retardirani skalarni potencijal naboja u gibanju je onda:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3 s\left[1 - \frac{\vec{v}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{s} - \vec{r}_0)}{c\left|\vec{r} - \vec{s} - \vec{r}_0\right|}\right]^{-1}\frac{\delta(\vec{s})}{\left|\vec{r} - \vec{s} - \vec{r}_0\right|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right| - \frac{\vec{v}_0(\tau)}{c}\cdot\left(\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)\right)} .$$

Izraz za vektorski potencijal razlikuje se samo za faktor $\vec{v}_0(\tau)$ u brojniku. Da pojednostavimo notaciju, udaljenost točke promatranja i trenutnog položaja naboja označimo sa $\vec{R}(\tau) = \vec{r} - \vec{r}_0(\tau)$, pa su retardirani potencijalni točkastog naboja q koji se giba prozvoljnom brzinom $\vec{v}_0(\tau)$:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R(\tau) - \frac{1}{c}\vec{v}_0(\tau)\cdot\vec{R}(\tau)} \quad ; \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\vec{v}_0(\tau)}{R(\tau) - \frac{1}{c}\vec{v}_0(\tau)\cdot\vec{R}(\tau)} , \tag{4.87}$$

i nazivaju se Leonard-Wiechertovi potencijali. Da se odrede vrijednosti potencijala u trenutku t u točci prostora $\vec{r}$, položaj nabijene čestice $\vec{r}_0$ i njenu trenutnu brzinu $\vec{v}_0$ moramo uzeti u retardiranom trenutku τ:

$$\tau = t - \frac{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|}{c} . \tag{4.88}$$

Ako veličinu u nazivniku označimo sa: $\lambda = R(\tau) - \frac{1}{c}\vec{v}_0(\tau)\cdot\vec{R}(\tau) = (1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})R(\tau)$, gdje je $\hat{n}$ jedinični vektor u pravcu $\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)$, tj. $\hat{n} = \frac{\vec{R}}{R}$, a $\vec{\beta} = \frac{1}{c}\vec{v}_0(\tau)$, Leonard-Wiechertovi potencijali su jednostavno:

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\lambda} \; ; \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2\lambda}\vec{v}_0 \; , \tag{4.89}$$

i između vektorskog i skalarnog potencijala postoji veza:

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{c^2}\vec{v}_0 = \frac{\Phi}{c}\vec{\beta} \; . \tag{4.90}$$

Lienard-Wiechertovi potencijali su značajni jer važe za proizvoljno gibanje naboja i lako je vidjeti da imaju relativistički invarijantni oblik.

Definirajmo 4-vektor R_μ s komponentama $R_\mu = \left(c(t-\tau), \vec{r}-\vec{r}_0\right)$, gdje je kao i prije $\vec{r}$ radijus vektor točke promatranja, $\vec{r}_0$ trenutni položaj nabijene čestice, a τ vrijeme retardacije (4.88). Za R_μ vrijedi:

$$R_\mu R^\mu = c^2(t-\tau)^2 - (\vec{r}-\vec{r}_0)^2 = 0 \; ,$$

što znači da R_μ pretstavlja udaljenost dva događaja [izvora poremećaja $(c\tau, \vec{r}_0)$ i točke promatranja $(ct, \vec{r})$] koji su svjetlosno razdvojeni, tj. mogu biti povezani samo signalom brzine c. Skalarni produkt R_μ i 4-vektora (3.54) brzine nabijene čestice $V_\mu = (\gamma c, \gamma\vec{v}_0)$ je:

$$R_\mu V^\mu = \gamma c^2(t-\tau) - \gamma(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{v}_0 = \gamma c\left[\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right| - \frac{\vec{v}_0}{c}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)\right] = \gamma c\left[R(\tau) - \frac{1}{c}\vec{v}_0(\tau)\cdot\vec{R}(\tau)\right] = \gamma c\lambda$$

pa su Lienard-Wiechertovi potencijali:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{V_0}{R_\mu V^\mu} \; ; \quad \vec{A} = \frac{\mu_0 c q}{4\pi}\frac{\vec{V}}{R_\mu V^\mu} \; . \tag{4.91}$$

Konstante ε_0, μ_0 i c mogu se grupirati u izraze: $\frac{1}{c\varepsilon_0} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$, te se, u skladu s (4.23), komponente 4-vektora $A_\mu = \left(A_0, \vec{A}\right) = \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{A}\right)$ Lienard-Wiechertovih potencijala zaista mogu zapisati u kovarijantnom obliku:

$$A_\mu = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, q\frac{V_\mu}{R_\nu V^\nu} \; . \tag{4.92}$$

Elektromagnetska polja točkastog naboja u proizvoljnom gibanju određena su u skladu s (4.45) pomoću potencijala: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Kako su potencijali (4.92) napisani u kovarijantnoj formi, očito će i polja biti izražena kovarijantno. Kalkulacija je tehnički komplicirana i ne previše instruktivna, pa ćemo zato rezultat potražiti koristeći 3-dimenzionalnu notaciju.

Polazeći od Lienard-Wiechertovih potencijala (4.89) treba naći elektromagnetska polja na uobičajeni način:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \ , \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \ .$$

Pri deriviranju mora se voditi računa da su komponente operatora ∇ parcijalne derivacije po koordinatama pri konstantnom t, pa zato ne pri konstantnom retardiranom vremenu τ. Zato je najbolje prvo derivacije po vremenu pri konstantnom $\vec{r}$, $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{\vec{r}}$ i operator gradijenta koji pretstavlja derivacije po koordinatama za fiksno t, $\nabla\big|_t$, izraziti pomoću derivacija po retardiranom vremenskom trenutku τ za fiksno $\vec{r}$, tj. $\frac{\partial}{\partial \tau}\big|_{\vec{r}}$. Ova procedura je neophodna jer za točkasti naboj u ubrzanom gibanju nije u općem slučaju moguće potencijale izraziti kao funkciju samo trenutnog položaja naboja – što je u slučaju jednolikog gibanja naboja moguće, kao u (4.36) i (4.37).

Relacije među operatorima deriviranja slijede iz funkcionalne veze varijabli: $\vec{r}, t, \tau$:

$$\lambda(\tau) = R - \frac{1}{c}\vec{v}_0 \cdot \vec{R} \ ; \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(\tau) \ ; \quad \tau = t - \frac{1}{c}\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right| \ , \tag{4.93}$$

tj.

$$R = c(t-\tau) \quad \Leftrightarrow \quad f(\vec{r}, t, \tau) = 0 \ . \tag{4.94}$$

Prema (4.93) i (4.94) veza $\frac{\partial}{\partial t}$ i $\frac{\partial}{\partial \tau}$ lako se dobija deriviranjem:

$$\frac{\partial R}{\partial \tau}\Big|_{\vec{r}} = \frac{\partial R}{\partial r_{0_i}}\frac{\partial r_{0_i}}{\partial \tau} = -\frac{\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right)_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|}\frac{\partial r_{0_i}}{\partial \tau} = -\frac{\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right)_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|} v_{0_i} = -\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{R}}{R} \ \text{, te}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right) = \frac{\partial R}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{R}}{R}\frac{\partial \tau}{\partial t} \quad \text{i} \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = 1 - \frac{\partial R}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{R}}{cR}} = \frac{R}{R - \frac{1}{c}\vec{v}_0 \cdot \vec{R}} = \frac{R}{\lambda}$$

što daje:

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{R}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\tau} \ . \tag{4.95}$$

Slično za operator gradijenta je:

$$\nabla R\big|_t=-c\nabla\tau=\nabla_{\vec r|_\tau}R+\frac{\partial R}{\partial\tau}\nabla\tau=\frac{\vec R}{R}-\frac{\vec v_0\cdot\vec R}{R}\nabla\tau \quad\Rightarrow\quad \nabla\tau=-\frac{\vec R}{c\lambda} \ , \tag{4.96}$$

gdje simbol $\nabla_{\vec r|_\tau}\equiv\nabla_{\vec r_\tau}$ označava gradijent po komponentama radijus vektora $\vec r$ pri konstantnom τ. Znači,

$$\nabla R=\left(\nabla_{\vec r_\tau}+(\nabla\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\right)R=\left(\nabla_{\vec r_\tau}-\frac{\vec R}{c\lambda}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)R \ ,$$

i konačno:

$$\nabla=\nabla_{\vec r_\tau}-\frac{\vec R}{c\lambda}\frac{\partial}{\partial\tau} \ . \tag{4.97}$$

Izrazi (4.95) i (4.97) daju traženu vezu operatora derivacije, te se iz Lienard-Wieckertovih potencijala nalaze elektromagnetska polja nabijene čestice u proizvoljnom gibanju:

$$\vec E(\vec r,t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\hat n-\vec\beta}{\gamma^2(1-\vec\beta\cdot\hat n)^3R^2}\right]_{ret}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{\hat n\times\left((\hat n-\vec\beta)\times\dot{\vec\beta}\right)}{(1-\vec\beta\cdot\hat n)^3R}\right]_{ret} \ ; \ \vec B=\frac{1}{c}\left[\hat n\times\vec E\right]_{ret} \ , \tag{4.98}$$

gdje oznaka $[...]_{ret}$ znači da veličinu u zagradi treba izračunati u retardiranom trenutku τ prema (4.88) a, $\dot{\vec\beta}=\frac{d\vec\beta}{dt}=\frac{1}{c}\frac{d\vec v_0}{dt}=\frac{\vec a_0}{c}$ je akceleracija nabijenene čestice. Magnetsko polje je uvijek okomito na električno.

Problem: Pokazati (4.98).

Elektromagnetska polja (4.98) su zbroj dva člana. Prvi član čine polja koja zavise od brzine (velocity fields) $\vec\beta$ i opadaju s udaljenošću od naboja kao R^{-2} , analogno slučaju statičkih polja. To su kvazi-statična polja kakva postoje i za naboje u jednolikom gibanju. Poyntingov vektor za ta polja srazmeran je sa R^{-4}, te ne doprinosi fluksu energije polja kroz površinu u beskonačnosti.

Drugi članovi na desnoj strani u (4.98) su polja zračenja (radiation fields) naboja u ubrzanom gibanju. Ako se naboj giba konstantnom brzinom kao u *Primjeru* 17. nema radijacijskih polja i lako se uvjeriti da su prvi članovi u (4.98) u specijalnom slučaju gibanja duž x-osi upravo izrazi (4.40) i (4.41).

Za emisiju energije zračenja naboja u ubrzanom gibanju odgovorna su radijacijska elektromagnetska polja.

Prema (4.98), radijacijska polja su transverzalna, tj. okomita na radijus vektor $\frac{\vec{R}}{R} = \hat{n}$, proporcionalna su akceleraciji naboja $\dot{\vec{\beta}}$ i opadaju sa udaljenošću od naboja kao R^{-1}. Poyntingov vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ za radijacijska polja u beskonačnosti opada kao R^{-2}, te njegov integral po beskonačnoj sferi daje snagu zračenja nabijene čestice koja je proporcionalna kvadratu akceleracije $\vec{a}_0^{\,2}$ čestice.

Znači: **<u>Naboj u ubrzanom gibanju zrači elektromagnetske valove</u>**.

U slučaju nerelativističkog ubrzanog gibanja, tj. kad je $v_0 << c$, je $\vec{\beta} \approx 0$ i $\lambda(\tau) \approx R(\tau)$, pa radijacijska polja postaju:

$$\vec{E}_{RAD}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{\vec{R} \times (\vec{R} \times \vec{a}_0)}{R^3}\right]_{ret} \quad ; \quad \vec{B}_{RAD}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\frac{\vec{a}_0 \times \vec{R}}{R^2}\right]_{ret} . \qquad (4.99)$$

Problem: Pokazati da iz (4.98) u slučaju $v_0 << c$ slijedi (4.99).

Da se nađe energija koju naboj u ubrzanom gibanju emitira u vakuumu treba integrirati Poyntingov vektor za polja zračenja (4.99) po nekoj (beskonačnoj) sferi sa centrom u naboju. Uzimajući za radijacijska polja naboja u nerelativističkom gibanju

$$\vec{E}(\vec{r},t)_{RAD} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{\hat{n} \times \left((\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}\right)}{R}\right]_{ret} \quad ; \quad \vec{B}_{RAD} = \frac{1}{c}\left[\hat{n} \times \vec{E}\right]_{ret},$$

Poyntingov vektor je

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_{RAD} \times \vec{B}_{RAD} = \frac{1}{c\mu_0}\left|\vec{E}_{RAD}\right|^2_{ret} \hat{n}$$

zbog ortogonalnosti $\hat{n} \cdot \vec{E}_{RAD} = 0$. Poyntingov vektor je intenzitet energije zračenja (energija po jedinici površine u jedinici vremena). Odaberemo li za integraciju baš sferu raijusa R sa centrom u naboju, element površine sfere je $d\vec{s} = \hat{n}\, ds = \hat{n} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \hat{n} R^2 d\Omega$, pa je snaga zračena u diferencijal prostornog kuta $d\Omega$

$$dP = \vec{S} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c\mu_0}\left| R\,\vec{E}_{RAD}\right|^2_{ret} d\Omega = \frac{1}{c^3\mu_0}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\right)^2 a_0^2 \sin^2\theta\, d\Omega ,$$

gdje je θ kut između vektora $\hat{n}$ i $\vec{a}_0$. Da se nađe energija elektromagnetskih valova koju nabijena nerelativistička čestica emitira u jedinici vremena treba gornji izraz integrirati po ukupnom prostornom kutu, tj. po θ od 0 do π, i po ϕ od 0 do 2π. Kako je $\int_0^{\pi} d\theta \sin^3\theta = \frac{4}{3}$ lako se dobije

$$P = \frac{dE}{d\tau} = \frac{q^2 a_0{}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \ . \tag{4.100}$$

Relacija (4.100) je izraz za energiju elektromagnetskog polja koju u jedinici vremena emitira točkasti naboj koji se giba nerelativistički sa akceleracijom a_0 i naziva Larmorova formula.

Problem: Pokazati (4.100).

Emisija energije naboja u ubrzanom gibanju, dana Larmorovom formulom, znači da se u klasičnoj (kao, ni u relativističkoj) fizici ne može razumjeti stabilnost atoma. Problem stabilnosti atoma je jedan od glavnih razloga koji su doveli do otkrića kvantne fizike. Ilustrirajmo ovo na primjeru najjednostavnijeg atoma – atoma vodika.

Primjer 22. **Klasično zračenje elektrona u atomu vodika**

Klasični model atoma je sićušni „sunčev sustav". Elektroni rotiraju oko jezgara, analogno rotaciji planeta oko Sunce. Jedina razlika je u silama interakcije – u slučaju atoma to su privlačne elektromagnetske sile, koje su kao i gravitacijske, konzervativne, centralne sile proporcionalne sa r^{-2}, ali puno, puno puta (10^{40}) jače. Atom vodika su dvije čestice – elektron i proton, koje tvore sićušno vezano stanje velike poluosi $\alpha = 0.5 \times 10^{-10}$m. Uzmemo li, u prvoj aproksimaciji, da elektron rotira po kružnici radijusa α, njegova brzina (analogno I kosmičkoj brzini) se odredi iz uvjeta jednakosti električne i centripetalne sile na elektron:

$$F_{\text{Coulomb}} = F_{\text{cp.}} \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\alpha^2} = m\frac{v_0^2}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m\alpha},$$

pa se za brzinu elektrona u atomu vodika dobije

$$v_0 = 2.25 \times 10^6 \text{ m/s} = 2250 \text{ km/s} = 0.0075\,c,$$

što je nerelatistička brzina. Takav elektron naravno ima akceleraciju (radijalnu) koja je

$$a_0 = \frac{v_0^2}{\alpha} = 10^{23}\,\frac{m}{s^2} \ .$$

enormna. Energija elektrona je

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\alpha} = -14.4\,\text{eV} \ .$$

Kvantna mehanika i eksperimentalno mjerenje za energiju osnovnog stanja elektrona u atomu vodika daju E = – 13.6 eV, pa gornja vrijednost nije loša prva aproksimacija.

Ali, prema Larmorovoj formuli (4.100) klasična elektrodinamika za takav elektron u ubrzanom gibanju predviđa svake sekunde gubitak energije uslijed zračenja od

$$P = \frac{dE}{dt} = 5.7 \times 10^{-8}\, W = 0.057\, \mu W = 0.36 \times 10^{12}\, \frac{eV}{s},$$

pa bi elektron trenutno pao na proton! Klasična negativno nabijena čestica za koju vrijede Newtonovi zakoni i Maxwellove jednadžbe ne može imati stabilnu putanju oko pozitivno nabijene jezgre.

Napomena: U kvantnoj fizici elektron u atomu zamišljamo kao kvantnu česticu koja ne zrači elektromagnetsku energiju (fotone) dok je u određenom kvantnom stanju, već samo prilikom prijelaza iz jednog u drugo kvantno stanje.

Na kraju može se zaključiti:

Sve veličine i jednadžbe elektrodinamike imaju kovarijantnu 4-dimenzionalnu formulaciju što znači da su Lorentz invarijantne, tj. u skladu su s postulatima STR!

Da bi se kompletirala relativistička formulacija elektrodinamike trebalo bi još pokazati važenje osnovnih zakona očuvanja za elektromagnetsko polje i na kraju pokazati da postoji konzistentna relativistička formulacija gibanja sustava nabijenih čestica i elektromagnetskih polja. Kako to prelazi okvire ovog izlaganja, pokažimo ukratko samo prvi korak generalne procedure – Lagrangeovu formulaciju elektrodinamike.

4.3 Lagrangeova formulacija relativističke elektrodinamike

U ovom poglavlju izložit ćemo osnove Lagrangeove ili Hamiltonove (kanonske) formulacije relativističke elektrodinamike. Osnovna motivacija za uvođenje Lagrangeove formulacije u fiziku je želja da se nađe ekvivalentna, ali općenitija i jednostavnija metoda za opis gibanja fizikalnog sustava od Newtonove klasične mehanike. Rezultat je kanonski formalizam zasnovan na opisu fizikalnog sustava pomoću djelovanja (akcije) i Hamiltovog, tj. principa minimalnog djelovanja, ukratko opisan na početku poglavlja 3.

Pojednostavljenje je u opisu interakcija fizikanih sustava pomoću energije, tj. Lagrangiana ili Hamiltonijana, umjesto sila kao u Newtonovoj formulaciji. Ultimativno, svaka fizikalna teorija se mora provjeriti u eksperimentima. Mjerenja energije, precizno promjena energije, zahtijevaju samo mjerenja položaja i brzina čestica, dok mjerenja sila zahtijevaju i mjerenja drugih vremenskih derivacija (akceleracija). U klasičnoj fizici ta razlika i nije tako bitna, ali ako se fizikalna teorija želi proširiti ili formulirati van domene valjanosti klasične fizike, eksperimentalna provjera mjerenjem drugih vremenskih derivacija postaje ili izuzetno teška ili čak i nemoguća kao u kvantnoj fizici.

U poglavlju 3.3 pokazano je da je u relativističkoj mehanici za najjednostavniji fizikalni sustav, jednu slobodnu česticu, djelovanje (akcija):

$$I = -\,mc\int_i^f ds = -mc^2\int_{t_i}^{t_f}\frac{dt}{\gamma} = -mc^2\int_{t_i}^{t_f}dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}\ , \tag{4.101}$$

pa je Lagrangian:

$$L = -\,mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} = -\frac{mc^2}{\gamma}\ , \tag{4.102}$$

i Hamiltonijan:

$$H = \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4} = E\ , \tag{4.103}$$

gdje je $E = \gamma mc^2$ ukupna energija, a $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ impuls čestice.

Lagrangeove jednadžbe: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0$, gdje je $\dot{r}_i \equiv \frac{dr_i}{dt} = v_i$ i-ta komponenta brzine, za slobodnu česticu naravno daju: $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$.

Za sustav slobodnih čestica Lagrangian, ili Hamiltonijan je zbroj članova (4.102) ili (4.103) za svaku pojedinu česticu.

Zamislimo sad jednu česticu mase m i naboja Q koja se giba u zadanom elektromagnetskom polju. Djelovanje za takav sustav mora sadržavati član koji opisuje gibanje slobodne čestice (4.101) i zavisi samo od čestičnih varijabli $x_\mu = (ct\,, \vec{r}\,)$, ali i član koji opisuje interakciju čestice i polja. Jasno je da drugi član mora zavisiti i od čestičnih i od veličina koje opisuju polje. Kao što smo vidjeli, elektromagnetsko polje je u relativističkoj fizici opisano 4-tenzorom elektromagnetskog polja $F_{\mu\nu}$ ili 4-vektorom potencijala A_μ $=\left(\frac{\Phi}{c},\vec{A}\right)$ tako da je: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Eksperimenti pokazuju da je djelovanje koje opisuje interakciju nabijene čestice i elektromagnetskog polja:

$$I_{int.} = -Q\int_i^f A_\mu dx^\mu = -Q\int_i^f \left(\Phi dt - \vec{A}\cdot d\vec{r}\right) = \int_{t_i}^{t_f} dt\left(-Q\Phi + Q\vec{v}\cdot\vec{A}\right) . \tag{4.104}$$

Kako je djelovanje $I_{int.}$ integral skalarnog produkta dva 4-vektora, očigledno je kovarijantno i Lorentz invarijantno. Napisano u formi integrala po vremenu, I_{int} pokazuje da je Lagrangian interakcije nabijene čestice i elektromagnetskog polja:

$$L_{int.} = -Q\Phi + Q\vec{v}\cdot\vec{A} \ . \tag{4.105}$$

Lagrangian nabijene čestice u spoljašnjem elektromagnetskom polju je onda zbroj Lagrangijana slobodne čestice (4.102) i Lagrangijana interakcije čestica-polje:

$$L = L_{č.} + L_{int.} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} + Q\vec{A}\cdot\vec{v} - Q\Phi \ . \tag{4.106}$$

Izraz "spoljašnje elektromagnetsko polje" podrazumjeva da se može zanemariti promjena elektromagnetskih polja koje izaziva sama nabijena čestica, tj. da je sopstveno elektromagnetsko polje nabijene čestice zanemarivo u odnosu na "spoljašnje polje" koje smatramo zadanim. Naravno da u nekom udaljenom regionu prostora moraju postojati izvori tog spoljašnjeg polja opisani 4-vektorom $j_\mu^{sp.}$, ali oni nas u ovoj aproksimaciji ne zanimaju. Generalno govoreći, ovakva aproksimacija je dobra "ako se točka promatranja previše ne približi nabijenoj čestici" i može se pokazati da je granica primjenjivosti ista kao i domena valjanosti klasične elektrodinamike. Aproksimacija je dobra na udaljenostima $|\vec{r}| >> \lambda_c$, gdje je $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ Comptonova valna duljina čestice. U *Primjeru* 16. vidjeli smo da je za elektron λ_c $\approx 2{,}4\times 10^{-12}\mathrm{m}$.

Pokažimo da Lagrangian (4.106) daje korektne jednadžbe gibanja čestice. Zaista,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\gamma m v_i + QA_i\right) = \frac{dp_i}{dt} + Q\frac{dA_i}{dt} \quad \text{i} \quad \frac{\partial L}{\partial r_i} = Q\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} - \Phi\right) ,$$

jer je naboj čestice konstantan, te Lagrangeove jednadžbe daju:

$$\frac{dp_i}{dt} = -Q\frac{\partial\Phi}{\partial r_i} - Q\frac{dA_i}{dt} + Q\frac{\partial}{\partial r_i}\left(A_j\dot{r}_j\right) . \tag{4.107}$$

U gornjem izrazi podrazumjeva se sumacija po j = 1,2,3. Treba transformirati drugi i treći član na desnoj strani u (4.107).

Potencijali zavise od točke u prostor-vremenu $A_\mu = A_\mu(\vec{r}, t)$, pa je njihova potpuna vremenska derivacija:

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial r_j}\frac{\partial r_j}{\partial t} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{r}_j \frac{\partial}{\partial r_j} A_i = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{r}_j \partial_j A_i \ . \tag{4.108}$$

Kako je:

$$\left[\dot{\vec{r}} \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\, \dot{r}_j \left(\nabla \times \vec{A}\right)_k = \varepsilon_{ijk}\, \dot{r}_j\, \varepsilon_{klm}\, \partial_l A_m = \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) \dot{r}_j \partial_l A_m = \dot{r}_j \partial_i A_j - \dot{r}_j \partial_j A_i \ ,$$

treći član u (4.107) može se napisati kao:

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\left(A_j \dot{r}_j\right) = \dot{r}_j \partial_i A_j = \left[\dot{\vec{r}} \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)\right]_i + \dot{r}_j \partial_j A_i \ , \tag{4.109}$$

pa Lagrangeove jednadžbe postaju:

$$\frac{dp_i}{dt} = Q\left[-\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right] + Q\left[\vec{v} \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)\right]_i \ ,$$

ili u vektorskoj formi:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = Q\left(-\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + Q\left[\vec{v} \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)\right] \ , \tag{4.110}$$

što prema definiciji potencijala (4.19) daje

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) . \tag{4.111}$$

Na česticu djeluje Lorentzova sila – sila na nabijenu česticu u elektromagnetskom polju, kao što i treba biti.

Jednadžba gibanja nabijene čestice (4.111) ostaje nepromjenjena pri baždarnim (gauge) transformacijama (4.20) potencijala jer se u Lorentzovoj sili pojavljuje samo elektromagnetska polja, iako je Lagrangian interakcije (4.105) eksplicitna funkcija potencijala i očigledno nije invarijantan pri gauge transformacijama potencijala. Ali promjena Lagrangiana pri gauge transformacijama potencijala jednaka je totalnoj vremenskoj derivaciji:

$$L_{int.}' = -Q\Phi' + Q\,\vec{v} \cdot \vec{A}' = -Q\left(\Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) + Q\vec{v} \cdot \left(\vec{A} + \nabla\Lambda\right) = L_{int.} + Q\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\Lambda\right) = L_{int.} + \frac{d}{dt}\left(Q\Lambda\right)$$

koja ne mijenja varijaciju djelovanja (4.104), što znači da ostavlja nepromjenjenim Lagrangeove jednadžbe.

U nerelativističkoj aproksimaciji razvojem u red člana $\frac{1}{\gamma}$ u (4.106) i zanemarujući konstantni član koji ne utječe na jednadžbe gibanja, dobija se korektni klasični Lagrangian nabijene čestice u elektromagnetskom polju:

$$L_{kl.} = T - V(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + Q\vec{v}\cdot\vec{A} - Q\Phi \ , \tag{4.112}$$

gdje je $V = V(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ generalizirani potencijal čestice koja zavisi i od koordinata i od brzina.

Koordinati r_i pridružen je generalizirani moment $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \gamma m v_i + QA_i = p_i + QA_i$, pa je Hamiltonijan:

$$H = P_i\dot{r}_i - L = \gamma mc^2 + Q\Phi = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} + Q\Phi \ , \tag{4.113}$$

ukupna energija nabijene čestice u elektromagnetskom polju u aproksimaciji u kojoj zanemarujemo energiju sopstvenog polja čestice.

Ali, Hamiltonijan je funkcija generaliziranih koordinata i momenata, pa eliminacija brzine iz (4.113), daje Hamiltonijan nabijene čestice u spoljašnjem elektromagnetskom polju:

$$H = \sqrt{c^2\left(\vec{P} - Q\vec{A}\right)^2 + m^2c^4} + Q\Phi \ . \tag{4.114}$$

Poređenje s Hamiltonijanom slobodne čestice (4.103) pokazuje da se Hamiltonijan nabijene čestice dobija dodavanjem elektrostatske potencijalne energije $Q\Phi$ i jednostavnom zamjenom: $\vec{p} \to \vec{p} - Q\vec{A}$. Ista veza važi i za nerelativistički Hamiltonijan:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - Q\vec{A}\right)^2 + Q\Phi \ . \tag{4.115}$$

Ako sustav ima više čestica ukupni Lagrangijan ili Hamiltonijan je zbroj članova (4.106) ili (4.114) za svaku pojedinu česticu.

U slučaju kontinuirane raspodjelu naboja u nekom regionu prostora Ω_3 , četvoro-vektor gustoće struje je $j_\mu = (c\rho \ , \vec{j} = \rho\vec{v})$, pa je: $j_\mu A^\mu = \rho\Phi - \vec{j}\cdot\vec{A} = \rho\left(\Phi - \vec{A}\cdot\vec{v}\right)$, te se Lagrangian interakcije (4.105) može napisati u obliku:

$$L_{int.} = -Q\Phi + Q\vec{A}\cdot\vec{v} = -\int_{\Omega_3} d^3r \ j_\mu A^\mu = -\int_{\Omega_3} d^3r \ \rho\left(\Phi - \vec{A}\cdot\vec{v}\right) \ . \tag{4.116}$$

Lako je vidjeti iz (4.104) da je djelovanje onda:

$$I_{int.} = \int d^4x\, \mathcal{L}_{int.} = -\int_{t_i}^{t_f} dt \int_{\Omega_3} d^3r\, j_\mu A^\mu \,, \tag{4.117}$$

gdje je Lagrangeova gustoća interakcije proizvoljne distribucije naboja i spoljašnjeg elektromagnetskog polja:

$$\mathcal{L}_{int.} = -\, j_\mu A^\mu = -\rho\left(\Phi - \vec{A}\cdot\vec{v}\right) , \tag{4.118}$$

očito kovarijantni i Lorentz invarijantni skalarni produkt 4-vektora gustoće struje i 4-potencijala.

Pri gauge transformaciji (4.27) potencijali se promjene $A_\mu{}' = A_\mu - \partial_\mu\Lambda$, ali se $\mathcal{L}_{int.}$ promjeni samo za 4-divergenciju

$$\mathcal{L}_{int.}{}' - \mathcal{L}_{int.} = j^\mu \partial_\mu\Lambda = \partial_\mu (j^\mu\Lambda) - \Lambda(\partial_\mu j^\mu) = \partial^\mu (\Lambda j_\mu) , \tag{4.119}$$

zbog zakona očuvanja naboja (4.15). Takva promjena ne utječe na varijaciju djelovanja (4.117), što znači da ostavlja jednadžbe gibanja invarijantnim. Ovo je naznaka još jednog primjera Noether teorema – veza invarijantnosti djelovanja (akcije) pri baždarnim (gauge) transformacijama i zakona očuvanja naboja.

Ako se želi kompletna formulacija problema gibanja sustava nabijenih čestica mora se uzeti u obzir i sopstveno polje tih čestica. To nužno zahtijeva korištenje teorije polja. Elektromagnetska polja egzistiraju u neprebrojivo mnogo točaka prostora i trenutaka vremena. Da se izračuna energija polja moraju se “zbrojiti” doprinosi svake točke u nekom regionu prostor-vremena, tj. mora se integrirati po 4-dimenzionom regionu, kao na desnoj strani izraza (4.117). Djelovanje (akcija) za elektromagnetsko polje je takav integral, a podintegralna funkcija je Lagrangeova gustoća. Iako teorija polja prelazi opseg ovog izlaganja, kompletnosti radi pokažimo kako se jednadžbe gibanja dobijaju iz djelovanja za sustav nabijenih čestica i elektromagnetskih polja.

Djelovanje (akcija) sustava nabijenih čestica i elektromagnetskih polja je zbroj tri člana:

$$I = I_{č.} + I_{int.} + I_{p.} , \tag{4.120}$$

od kojih $I_{č.}$ opisuje sustav čestica, $I_{int.}$ inerakciju čestica i polja, a $I_{p.}$ elektromagnetska polja. Prva član je djelovanje za sustav slobodnih čestica i jednak je zbroju po česticama djelovanja (4.101):

$$I_{č.} = -\sum_{č.} mc\int_i^f ds = -\sum_{č.} mc^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \;. \tag{4.121}$$

Drugi član je djelovanje za interakciju 4-gustoće struje nabijenih čestica i 4-potencijala elektromagnetskih polja (4.117):

$$I_{int.} = -\int_{\Omega_4} d^4x\, j^\mu A_\mu = -\int_{t_i}^{t_f} dt \int_{\Omega_3} d^3r\, j_\mu A^\mu \quad . \tag{4.122}$$

Treći član je djelovanje za elektromagnetsko polje:

$$I_{p.} = \int_{\Omega_4} d^4x\, \mathcal{L}_{p.} = -\frac{1}{4\mu_0}\int_{t_i}^{t_f} dt \int_{\Omega_3} d^3r\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad . \tag{4.123}$$

Lagrangian sustava je znači zbroj tri člana – Lagrangiana sustava slobodnih čestica:

$$L_{č.} = -\sum_{č.} mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} \quad , \tag{4.124}$$

prema (4.102), te volumnog integrala Lagrangeove gustoće interakcije nabijenih čestica i polja:

$$\mathcal{L}_{int.} = -j_\mu A^\mu = -\rho\left(\Phi - \vec{A}\cdot\vec{v}\right) . \tag{4.125}$$

Treći član je Maxwellov Lagrangian (gustoća) za elektromagnetsko polje:

$$\mathcal{L}_{p.} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad . \tag{4.126}$$

Novi član, *Lagrangian elektromagnetskog polja (4.126) je očito kovarijantan, zbog (4.48) je Lorentz invarijantan, a baždarno (gauge) je invarijantan jer sadrži samo gauge invarijantne* $F_{\mu\nu}$ *faktore!*

Čestične varijable $\vec{r}_{č.}$ i $\dot{\vec{r}}_{č.} = \vec{v}_{č.}$, koje imaju funkciju generaliziranih koordinata i generaliziranih brzina, pojavljuju se u $L_{č.}$ i u j_μ članu u $\mathcal{L}_{int.}$, jer su komponente 4-gustoće struje:

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_{č.} Q\delta(\vec{r}-\vec{r}_{č.})\delta(t-t_{č.}) \; ; \; \vec{j}(\vec{r},t) = \sum_{č.} Q\,\vec{v}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_{č.})\delta(t-t_{č.}) \; . \tag{4.127}$$

Elektromagnetsko polje je funkcija 4-vektora potencijala $A_\mu(x) = A_\mu(\vec{r},t)$, koji se pojavljuju u $\mathcal{L}_{int.}$ i u $\mathcal{L}_{p.}$ članovima u Lagrangianu. Da se dobiju jednadžbe gibanja treba varirati djelovanje, pri čemu se četri komponente potencijala A_μ smatraju nezavisnim generaliziranim koordinatama u svakoj točci prostor-vremena, kojima su pridružene generalizirane brzine $\dot{A}_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial t} = c\frac{\partial A_\mu}{\partial x_0} = c\partial^0 A_\mu$.

Ako je sustav izoliran, elektromagnetski potencijali $A_\mu(x)$ predstavljaju polja čiji su izvori 4-gustoća struje j_μ nabijenih čestica (4.127), ali mogu dodatno predstavljati i neka spoljašnja polja čiji su izvori van regiona Ω_4 , što slijedi iz linearnosti Maxwellovih jednadzbi – ako su $A^{(1)}{}_\mu$ i $A^{(2)}{}_\mu$ rješenja, tada je i $A^{(1)}{}_\mu + A^{(2)}{}_\mu$ rješenje Maxwellovih jednadžbi.

Iako je ovo uobičajeni način izražavanja u teorijskoj fizici, precizno bi u zadnjem iskazu trebalo zamjeniti “uzrok” i “posljedicu” – linearnost Maxwellovih jednadžbi je jedan od razloga zašto one dobro opisuju svojstva realnih elektromagnetskih polja za koje važi princip superpozicije.

Variranjem djelovanja po čestičnim varijablama dobijaju se Lagrangeove jednadžbe za svaku pojedinu česticu: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{č_i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r_{č_i}} = 0$, koje u skladu s (4.111) daju:

$$\frac{d\vec{p}_{č.}}{dt} = Q_{č.}\left(\vec{E} + \vec{v}_{č.} \times \vec{B}\right) , \qquad (4.128)$$

jednadžbe gibanja nabijenih čestica u elektromagnetskom polju.

Variranje djelovanja po varijablama elektromagnetskog polja A_μ rezultira Lagrangeovim jednadžbama:

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0 , \qquad (4.129)$$

za svaku komponentu $\nu = 0,1,2,3$, gdje je: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{p.} + \mathcal{L}_{int.}$. Kako $\mathcal{L}_{int.}$ uopće ne sadrži derivacije potencijala važi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{int.}}{\partial A^\nu} = -j_\nu , \qquad (4.130)$$

a kako $\mathcal{L}_p$ ne zavisi od potencijala, već prema (4.45) samo od njihovih derivacija, dobijamo:

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{p.}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = -\frac{1}{\mu_0}\partial^\mu F_{\mu\nu} , \qquad (4.131)$$

što daje kovarijantni oblik dvije nehomogene Maxwellove jednadžbe (4.62):

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\nu . \qquad (4.132)$$

Antisimetričnost tenzora elektromagnetskog polja $F_{\mu\nu}$ i gornja jednadžba osiguravaju važenje zakona očuvanja naboja (4.15), jer je:

$$0 = \partial^\nu\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0\, \partial^\nu j_\nu \quad \Leftrightarrow \quad \partial^\mu j_\mu = 0 . \qquad (4.133)$$

Lagrangian elektromagnetskog polja (4.126) daje samo dvije nehomogene Maxwellove jednadžbe, one koje sadrže izvore. Preostale dvije homogene jednadžbe (4.65) su automatska posljedica antisimetričnosti tenzora $F_{\mu\nu}$. Zaista,

$$0 = \partial^{\mu}\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial^{\mu}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^{\mu}(\partial^{\rho}A^{\sigma}), \quad \Leftrightarrow \quad \partial^{\mu}\tilde{F}_{\mu\nu} = 0, \qquad (4.134)$$

jer je $(\partial^{\mu}\partial^{\nu} - \partial^{\nu}\partial^{\mu})A_{\mu} = 0$ za svako regularno A_{μ}.

Znači, Lagrangian (4.124) – (4.126), zaista daje jednadžbe gibanja sustava nabijenih čestica i elektromagnetskih polja (4.128) i (4.132). Te jednadžbe čine sustav običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda po čestičnim $\vec{r}_{č}$ i varijablama polja A_{μ}, čije rješavanje zahtijeva specifikaciju rubnih i početnih uvjeta.

Literatura

1. Goldstein H., Poole C. & Safko J., **Classical Mechanics**, 3rd edition, Benjamin Cummings, 2002.
2. Grant I. S. & Phillips W. R., **Electromagnetism**, 2nd edition, John Wiley & Sons, 1990.
3. Good R. H. Jr. & Nelson T. J., **Clasical Theory of Electric and Magnetic Fields**, Academic Press, Inc., 1971.
4. Halliday D. & Resnick R., **Physics**, 6th edition, John Wiley & Sons, 2001.
5. Ilakovac A., **Riješeni zadaci iz fizike elementarnih čestica,** Školska knjiga 2001.
6. Konopinski E. J., **Electromagnetic Fields and Relativistic Particles**, McGraw-Hill, Inc., 1981.
7. Jackson J. D., **Classical Electrodynamics**, 3rd edition, John Wiley & Sons, 1998.
8. Landau L. D. & Lifshitz E. M., **The Classical Theory of Fields**, 4th edition, Pergamon Press Ltd., 1975.
9. Picek I., **Fizika elementarnih čestica**, Hinus, 1997.
10. Rindler W., **Introduction to Special Relativity**, Oxword University Press, 1982.
11. Supek I., **Teorijska fizika i struktura materije**, 6. izdanje, Školska knjiga, 1992.